（装订线内不要答题）

复旦大学计算机科学技术学院

2021~2022 学年第 2 学期期末考试试卷

■ A 卷 □ B 卷 □ C 卷

课程名称：算法设计与分析 课程代码：COMP130011.01

开课院系：计算机科学技术学院 考试形式：闭卷

姓名：________ 学号：__________ 专业：__________

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题号	1	2	3	4	5	6	总分
得分							

（以下为试卷正文）

1. 分治法和 FFT (20 分)

1) 在 Ailon 等的 FJLT 算法中应用了 Hadamard 矩阵的一个性质，其中 Hadamard 矩阵 H_k 为 $2^k \times 2^k$ 的矩阵，定义如下：

$$H_0 = [1],\ H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ldots,\ H_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} H_{k-1} & H_{k-1} \\ H_{k-1} & -H_{k-1} \end{bmatrix}$$

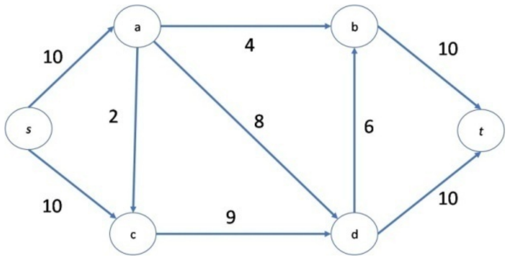
记 $n = 2^k$，给定一个 n 维列向量 $x \in R^n$, 设计一个时间复杂度为 $O(n \log n)$的算法来完成矩阵 H_k 和向量 x 的乘积 $H_k x$. (10 分)

2) 快速傅立叶变换(FFT) (10 分)

4ADD 问题：给定由 n 个整数组成的数组 A，其中的元素 $A[i]$都在 0 到 $2n - 1$ 范围内，给定一个整数 t，判断是否存在下标 $i_1, \ldots, i_4$ 使得 $A[i_1] + A[i_2] + A[i_3] + A[i_4] = t$。应用 FFT 在 $O(n \log n)$时间求解 4ADD 问题(无需返回下标 $i_1,\ldots,i_4$)。

2. 均摊分析 (8分)
使用数组 $A[0..k\text{-}1]$来实现一个 k 位二进制计数器，在该数据结构上仅进行加一(Increment)操作，第 i 位翻转时的开销为 2^i(最低位为第 0 位，以此类推)，试分析进行 n 次加一操作的均摊(amortized)开销。

3. 网络流和最小割 (10 分)
给定以下流网络，其中每条边上的数字为这条边的容量(capacity)。



1) 找到一个s到t的最大流，并写出最大流量值。(每条边上写上流量)

2) 将该流分解为多条s-t路径和环。

4. 动态规划 (16 分)

假如你收集了 n 首歌曲(歌曲编号为 1,2,…,n)，对于任意两首歌曲 a 和 b 你有个正的偏好分数 $pref[a,b]$，即播放了歌曲 a 后立刻播放歌曲 b 的偏好程度(这里 $pref[a,b]$不一定等于 $pref[b,a]$)。要求使用动态规划来安排歌曲的播放顺序(每首歌恰好播放一遍)，使得相邻的偏好分数**之和**最大。

给定这 n 首歌曲的任意一个子集 S 和 $i \in S$，记 $P[S,i]$为安排 S 中的歌曲以 i 为结尾，达到的最大相邻偏好分数之和。

1) 写出 $P[S,i]$的递归公式，以及边界条件(即$|S| = 1$ 时)。

2) 以伪代码形式写出你的算法(要求返回最终的解)。

3) 分析你的算法的执行时间，并做简单解释。

5. 线性规划和 NP 完全问题 (28 分)

击中集问题：给定集合 $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$和 m 个子集 $S_1,\ldots,S_m \subseteq E$，若 $H \subseteq E$ 与每个 S_i 的交集非空，即 $H \cap S_i \neq \varnothing$ $(i = 1,\ldots,m)$，则称 H 为击中集，求**最小**击中集。

1) 用**整数**线性规划对此问题进行建模。(要求先定义决策变量，再写出目标函数和约束) (7 分)

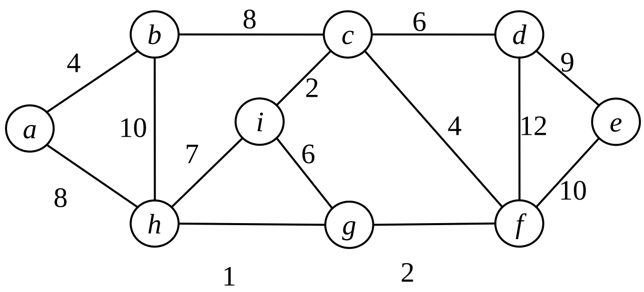
2) 给出将上述整数规划问题松弛为线性规划问题后的对偶形式。(7 分)

3) 写出击中集问题的判定版本，简单解释该判定问题是 NP 问题。(4 分)

4) 给出从**顶点覆盖**(vertex cover)问题到**击中集问题**的多项式时间归约(reduction)，做简单解释。(10 分)

6. 最小生成树和近似算法 (18 分)

1) 使用 Kruskal 算法计算下图的最小生成树(要求依次给出添加进生成树的边序列，标记在所返回的树上)。(8 分)



2) Steiner 树问题：给定一个**边上带非负权重的无向完全图** $G = (V, E, W)$，其中一个顶点子集 $R \subseteq V$ 称为终点集(terminal)，要求找一棵权重**最小**的树将 R 中的顶点连接起来——**可使用 $V \backslash R$ 中的顶点**。

近似算法：返回 R 的导出子图 $G[R]$上的一棵最小生成树。

证明：当边上的权重满足三角不等式时，该算法的近似度为 2. (10 分)