

1 Opis problemu

Celem obliczeń jest znalezienie rozwiązania dla:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{dx^2} &= 4\pi G\rho(x) \\ \Omega &= (0; 3) \\ \Phi(0) &= 5 \\ \Phi(3) &= 4 \\ \rho(x) &= \begin{cases} 0 & x \in [0; 1] \\ 1 & x \in (1; 2] \\ 0 & x \in (2; 3] \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

korzystając z metody elementów skończonych.

2 Obliczenia

2.1 Wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego

Niech V oznacza przestrzeń funkcji zerujących się na brzegach Ω . Szukamy funkcji Φ spełniającej:

$$\forall v \in V \quad \int_{\Omega} \frac{d^2\Phi}{dx^2} v dx = \int_{\Omega} 4\pi G \rho v dx \quad (v(0) = 0, v(3) = 0) \quad (2)$$

Przekształcając równanie:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \Phi'' v dx &= 4\pi G \int_0^3 \rho v dx \implies \\ [\Phi' v]_0^3 - \int_0^3 \Phi' v' dx &= 4\pi G \int_0^3 \rho v dx \implies \\ (\Phi(3)' \underbrace{v(3)}_{=0} - \Phi(0)' \underbrace{v(0)}_{=0}) - \int_0^3 \Phi' v' dx &= 4\pi G \int_0^3 \rho v dx \implies \\ - \int_0^3 \Phi' v' dx &= 4\pi G \int_0^3 \rho v dx \end{aligned} \quad (3)$$

Wprowadźmy podstawienie: $\Phi = w + \tilde{\Phi}$, gdzie: $w(0) = 0, w(3) = 0$ oraz $\tilde{\Phi}(0) = 5, \tilde{\Phi}(3) = 4$. Wybierzmy $\tilde{\Phi} = -\frac{1}{3}x + 5$. Podstawiając do równania:

$$\begin{aligned} - \int_0^3 (w + \tilde{\Phi})' v' dx &= 4\pi G \int_0^3 \rho v dx \implies \\ - \int_0^3 w' v' dx - \int_0^3 \tilde{\Phi}' v' dx &= 4\pi G \int_0^3 \rho v dx \implies \\ - \int_0^3 w' v' dx - \int_0^3 (-\frac{1}{3}x + 5)' v' dx &= 4\pi G \int_0^3 \rho v dx \implies \\ - \int_0^3 w' v' dx + \frac{1}{3} \int_0^3 v' dx &= 4\pi G \int_0^3 \rho v dx \implies \\ - \int_0^3 w' v' dx + \frac{1}{3} \underbrace{[v]_0^3}_{=0} &= 4\pi G \int_0^3 \rho v dx \implies \\ - \int_0^3 w' v' dx &= 4\pi G \int_0^3 \rho v dx \end{aligned} \quad (4)$$

Wprowadźmy oznaczenia $B(w, v) = - \int_0^3 w'v'dx$ oraz $L(v) = 4\pi G \int_0^3 \rho v dx$, gdzie $B(w, v)$ jest *funkcjonałem biliniowym* i $L(v)$ jest *funkcjonałem liniowym*.

Równanie możemy więc zapisać w postaci:

$$B(w, v) = L(v) \quad (5)$$

2.2 Aproksymacja metodą elementów skończonych

Podzielimy przedział $[0; 3]$ na n części równej długości:

$$\begin{aligned} h &= \frac{3}{n} \\ x_0 &= 0, x_n = 3, x_i = ih, \\ &\implies \\ x_{i-1} &= x_i - h, x_{i+1} = x_i + h \end{aligned} \quad (6)$$

Na ich podstawie wybierzmy funkcje bazowe:

$$\begin{aligned} \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad e_i(x) &= \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{inaczej} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{x}{h} - i + 1 & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ -\frac{x}{h} + i + 1 & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{inaczej} \end{cases} \\ &\implies \\ e'_i(x) &= \begin{cases} \frac{1}{h} & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ -\frac{1}{h} & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{inaczej} \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Rozważamy teraz problem przybliżony:

$$\begin{aligned} w(x) &\approx w_h(x) = \sum_{i=1}^{n-1} w_i e_i(x) \\ B\left(\sum_{i=1}^{n-1} w_i e_i, v\right) &= L(v). \end{aligned} \quad (8)$$

Równanie musi być prawdziwe dla dowolnej funkcji testowej v , zatem możemy przyjąć:

$$\forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad B\left(\sum_{j=1}^{n-1} w_j e_j, e_i\right) = L(e_i). \quad (9)$$

Korzystając z faktu, że B jest *funkcjonałem biliniowym* otrzymujemy układ równań:

$$\forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad \sum_{j=1}^{n-1} w_j B(e_j, e_i) = L(e_i). \quad (10)$$

Zapiszmy otrzymany układ równań liniowych w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & B(e_2, e_1) & \dots & B(e_{n-1}, e_1) \\ B(e_1, e_2) & B(e_2, e_2) & \dots & B(e_{n-1}, e_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_1, e_{n-1}) & B(e_2, e_{n-1}) & \dots & B(e_{n-1}, e_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_1) \\ L(e_2) \\ \vdots \\ L(e_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (11)$$

Rozpiszmy teraz funkcjonały B i L :

$$B(e_j, e_i) = \int_0^3 e'_j e'_i dx = \int_{X_{i,j}} e'_j e'_i dx$$

$$\text{gdzie } X_{i,j} = \begin{cases} (x_{i-1}, x_{i+1}) & i = j \\ (x_i, x_j) & i = j - 1 \\ (x_j, x_i) & j = i - 1 \\ \emptyset & \text{inaczej} \end{cases} \quad (12)$$

$$L(e_i) = 4\pi G \int_0^3 \rho e_i dx = 0 + 4\pi G \int_1^2 e_i dx + 0 = 4\pi G \int_{\max\{1, x_{i-1}\}}^{\min\{2, x_{i+1}\}} e_i dx \quad (13)$$

Dzięki otrzymanym wzorom dla B i L możemy zapisać nasze równanie macierzowe jako:

$$\begin{bmatrix} \int_{x_0}^{x_2} (e'_1)^2 dx & \int_{x_1}^{x_2} e'_2 e'_1 dx & 0 & \dots & 0 \\ \int_{x_1}^{x_2} e'_1 e'_2 dx & \int_{x_1}^{x_3} (e'_2)^2 dx & \int_{x_2}^{x_3} e'_3 e'_2 & \dots & 0 \\ 0 & \int_{x_2}^{x_3} e'_2 e'_3 dx & \int_{x_2}^{x_4} (e'_3)^2 dx & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \int_{x_{n-2}}^{x_n} (e'_{n-1})^2 dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = 4\pi G \begin{bmatrix} \int_{\max\{1, x_0\}}^{\min\{2, x_2\}} e_1 dx \\ \int_{\max\{1, x_1\}}^{\min\{2, x_3\}} e_2 dx \\ \int_{\max\{1, x_2\}}^{\min\{2, x_4\}} e_3 dx \\ \vdots \\ \int_{\max\{1, x_{n-2}\}}^{\min\{2, x_n\}} e_{n-1} dx \end{bmatrix} \quad (14)$$

Po rozwiązaniu równania jesteśmy w stanie otrzymać aproksymację szukanej przez nas funkcji Φ :

$$\Phi(x) \approx w_h + \tilde{\Phi} = -\frac{1}{3}x + 5 + \sum_{i=1}^{n-1} w_i e_i(x) \quad (15)$$

2.3 Kwadratura Gaussa

W celu aproksymacji wartości całki oznaczonej skorzystamy z kwadratury Gaussa o dwóch punktach. Wzór jest następujący:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \left[f\left(\frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{b-a}{2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{a+b}{2}\right) \right] \quad (16)$$