1 Opis problemu

Celem obliczeń jest znalezienie rozwiązania dla:

$$\begin{gathered}\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 4\pi G\rho(x) \\ \Omega = (0;3) \\ \Phi(0) = 5 \\ \Phi(3) = 4 \\ \rho(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0;1] \\ 1 & x \in (1;2] \\ 0 & x \in (2;3] \end{cases}\end{gathered} \tag{1}$$

korzystając z metody elementów skończonych.

2 Obliczenia

2.1 Wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego

Niech V oznacza przestrzeń funkcji zerujących się na brzegach Ω. Szukamy funkcji Φ spełniającej:

$$\forall v \in V \quad \int_\Omega \frac{d^2\Phi}{dx^2} v dx = \int_\Omega 4\pi G\rho v dx \quad (v(0) = 0, v(3) = 0) \tag{2}$$

Przekształcając równanie:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \Phi'' v dx = 4\pi G \int_0^3 \rho v dx \implies \\ [\Phi' v]_0^3 - \int_0^3 \Phi' v' dx = 4\pi G \int_0^3 \rho v dx \implies \\ (\Phi(3)' \underbrace{v(3)}_{=0} - \Phi(0)' \underbrace{v(0)}_{=0}) - \int_0^3 \Phi' v' dx = 4\pi G \int_0^3 \rho v dx \implies \\ - \int_0^3 \Phi' v' dx = 4\pi G \int_0^3 \rho v dx \end{aligned} \tag{3}$$

Wprowadźmy podstawienie: $\Phi = w + \widetilde{\Phi}$, gdzie: $w(0) = 0, w(3) = 0$ oraz $\widetilde{\Phi}(0) = 5, \widetilde{\Phi}(3) = 4$. Wybierzmy $\widetilde{\Phi} = -\frac{1}{3}x + 5$. Podstawiając do równania:

$$\begin{aligned} - \int_0^3 (w + \widetilde{\Phi})' v' dx = 4\pi G \int_0^3 \rho v dx \implies \\ - \int_0^3 w' v' dx - \int_0^3 \widetilde{\Phi}' v' dx = 4\pi G \int_0^3 \rho v dx \implies \\ - \int_0^3 w' v' dx - \int_0^3 (-\frac{1}{3}x + 5)' v' dx = 4\pi G \int_0^3 \rho v dx \implies \\ - \int_0^3 w' v' dx + \frac{1}{3} \int_0^3 v' dx = 4\pi G \int_0^3 \rho v dx \implies \\ - \int_0^3 w' v' dx + \frac{1}{3} \underbrace{[v]_0^3}_{=0} = 4\pi G \int_0^3 \rho v dx \implies \\ - \int_0^3 w' v' dx = 4\pi G \int_0^3 \rho v dx \end{aligned} \tag{4}$$

Wprowadźmy oznaczenia $B(w,v) = -\int_0^3 w'v'dx$ oraz $L(v) = 4\pi G \int_0^3 \rho v dx$, gdzie $B(w,v)$ jest *funkcjonałem biliniowym* i $L(v)$ jest *funkcjonałem liniowym.*

Równanie możemy więc zapisać w postaci:

$$B(w,v) = L(v) \tag{5}$$

2.2 Aproksymacja metodą elementów skończonych

Podzielmy przedział $[0;3]$ na n części równej długości:

$$\begin{aligned} h &= \frac{3}{n} \\ x_0 = 0, x_n &= 3, x_i = ih, \\ &\Longrightarrow \\ x_{i-1} = x_i - h, x_{i+1} &= x_i + h \end{aligned} \tag{6}$$

Na ich podstawie wybierzmy funkcje bazowe:

$$\begin{aligned} \forall i = 1,2,...n-1 \quad e_i(x) &= \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{inaczej} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{x}{h} - i + 1 & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ -\frac{x}{h} + i + 1 & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{inaczej} \end{cases} \\ \Longrightarrow & \\ e_i'(x) &= \begin{cases} \frac{1}{h} & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ -\frac{1}{h} & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{inaczej} \end{cases} \end{aligned} \tag{7}$$

Rozważamy teraz problem przybliżony:

$$\begin{aligned} w(x) \approx w_h(x) &= \sum_{i=1}^{n-1} w_i e_i(x) \\ B(\sum_{i=1}^{n-1} w_i e_i, v) &= L(v). \end{aligned} \tag{8}$$

Równanie musi być prawdziwe dla dowolnej funkcji testowej v, zatem możemy przyjąć:

$$\forall i = 1,2,...,n-1 \quad B(\sum_{j=1}^{n-1} w_j e_j, e_i) = L(e_i). \tag{9}$$

Korzystając z faktu, że B jest *funkcjonałem biliniowym* otrzymujemy układ równań:

$$\forall i = 1,2,...,n-1 \quad \sum_{j=1}^{n-1} w_j B(e_j, e_i) = L(e_i). \tag{10}$$

Zapiszmy otrzymany układ równań liniowych w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} B(e_1,e_1) & B(e_2,e_1) & \dots & B(e_{n-1},e_1) \\ B(e_1,e_2) & B(e_2,e_2) & \dots & B(e_{n-1},e_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_1,e_{n-1}) & B(e_2,e_{n-1}) & \dots & B(e_{n-1},e_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_1) \\ L(e_2) \\ \vdots \\ L(e_{n-1}) \end{bmatrix} \tag{11}$$

Rozpiszmy teraz funkcjonał B:

$$\begin{aligned} &B(e_j,e_i) = -\int_0^3 e_j' e_i' dx = -\int_{X_{i,j}} e_j' e_i' dx \\ &\text{gdzie} \quad X_{i,j} = \begin{cases} (x_{i-1},x_{i+1}) & i=j \\ (x_{j-1},x_j) & i=j-1 \\ (x_{i-1},x_i) & j=i-1 \\ \emptyset & inaczej \end{cases} \\ &\text{zatem dla } i=j: \\ &B(e_j,e_i) = -\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} e_j' e_i' dx = -\int_{x_{i-1}}^{x_i} e_j' e_i' dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} e_j' e_i' dx \end{aligned} \tag{12}$$

oraz L:

$$\begin{aligned} L(e_i) &= 4\pi G \int_0^3 \rho e_i dx = 0 + 4\pi G \int_1^2 e_i dx + 0 = 4\pi G \int_{max\{1,x_{i-1}\}}^{min\{2,x_{i+1}\}} e_i dx \\ &= 4\pi G \left(\int_{max\{1,x_{i-1}\}}^{x_i} e_i dx + \int_{x_i}^{min\{2,x_{i+1}\}} e_i dx \right) \end{aligned} \tag{13}$$

Dzięki otrzymanym wzorom dla B i L możemy zapisać nasze równanie macierzowe jako:

$$\begin{bmatrix} \int_{x_0}^{x_2} (e_1')^2 dx & \int_{x_1}^{x_2} e_2' e_1' dx & 0 & \dots & 0 \\ \int_{x_1}^{x_2} e_1' e_2' dx & \int_{x_1}^{x_3} (e_2')^2 dx & \int_{x_2}^{x_3} e_3' e_2' & \dots & 0 \\ 0 & \int_{x_2}^{x_3} e_2' e_3' dx & \int_{x_2}^{x_4} (e_3')^2 dx & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \int_{x_{n-2}}^{x_n} (e_{n-1}')^2 dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = 4\pi G \begin{bmatrix} \int_{max\{1,x_0\}}^{min\{2,x_2\}} e_1 dx \\ \int_{max\{1,x_1\}}^{min\{2,x_3\}} e_2 dx \\ \int_{max\{1,x_2\}}^{min\{2,x_4\}} e_3 dx \\ \vdots \\ \int_{max\{1,x_{n-2}\}}^{min\{2,x_n\}} e_{n-1} dx \end{bmatrix} \tag{14}$$

Po rozwiązaniu równania jesteśmy w stanie otrzymać aproksymację szukanej przez nas funkcji Φ:

$$\Phi(x) \approx w_h + \widetilde{\Phi} = -\frac{1}{3}x + 5 + \sum_{i=1}^{n-1} w_i e_i(x) \tag{15}$$

2.3 Kwadratura Gaussa

W celu aproksymacji wartości całki oznaczonej skorzystamy z kwadratury Gaussa o dwóch punktach. Wzór jest następujący:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f\left(\frac{b-a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{b-a}{2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{a+b}{2}\right)\right] \tag{16}$$