

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

**«Дальневосточный федеральный университет»**

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

**Департамент математического и компьютерного моделирования**

**ОТЧЕТ**

К лабораторной работе №1 по дисциплине

«Математическое и компьютерное моделирование»

Направление подготовки   
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Выполнил студент гр.  Б9122-01.03.02сп  Носков Я. В. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  (Ф.И.О.) (подпись)  Проверил профессор д.ф.-м.н.  Пермяков М. С. \_\_\_\_\_\_\_\_ |
|  |  | (Ф.И.О.) (подпись)  « » 2025г. |
|  |  |  |

**г. Владивосток**

**2025**

# **Оглавление**

[**Оглавление** 2](#_Toc200490792)

[**1.** **Введение** 3](#_Toc200490793)

[**2.** **Построение математической модели** 4](#_Toc200490794)

[**2.1** **Модель паяльника без терморегулятора** 4](#_Toc200490795)

[**2.2** **Паяльник с терморегулятором** 6](#_Toc200490796)

[**3.** **Анализ модели** 7](#_Toc200490797)

[**3.1** **Определение стационарных состояний** 7](#_Toc200490798)

[**3.2** **Стационарное состояние:** 7](#_Toc200490799)

[**3.3** **Решение уравнение теплового баланса** 8](#_Toc200490800)

[**4.** **Вычислительные эксперименты** 9](#_Toc200490801)

[**4.1** **Метод Рунге-Кутта** 9](#_Toc200490802)

[**4.2** **Модель без терморегулятора** 10](#_Toc200490803)

[**4.3** **Модель с терморегулятором** 11](#_Toc200490804)

[**Вывод** 13](#_Toc200490805)

[**Приложения** 14](#_Toc200490806)

1. **Введение**

Математическое моделирование — это метод формального описания физических процессов с помощью уравнений и количественных зависимостей. Оно широко используется в инженерии и естественных науках для прогнозирования поведения систем, оптимизации их работы и снижения затрат на экспериментальные исследования. Благодаря моделированию можно анализировать влияние различных параметров на характеристики устройств, проводить вычислительные эксперименты и находить оптимальные решения для реальных технических задач.

Одной из областей применения математического моделирования является исследование процессов теплообмена. Тепловые процессы играют важную роль в работе множества устройств — от бытовых нагревателей до сложных промышленных систем. Разработка математических моделей теплообмена позволяет предсказать динамику изменения температуры, анализировать эффективность работы оборудования и оптимизировать его параметры. Современные методы компьютерного моделирования дают возможность точно рассчитывать процессы нагрева и охлаждения, предотвращать перегрев и повышать энергоэффективность систем.

Развитие теории теплообмена берет начало в XIX веке. В 1822 году Ж. Б. Фурье сформулировал основы теории теплопроводности, описав механизм передачи тепла в твердых телах. Позднее, в 1841–1842 годах, Дж. П. Джоуль и Э. Х. Ленц независимо друг от друга установили количественную связь между электрической энергией и выделяемым теплом, что стало основой для изучения электрического нагрева. Эти открытия легли в основу современных методов численного анализа, которые сегодня используются для прогнозирования тепловых процессов.

В данной лабораторной работе исследуются процессы теплообмена в электрических нагревателях на примере паяльников. Рассматриваются два типа устройств: с терморегулятором и без него. Основное внимание уделяется анализу скорости нагрева, стабильности поддержания температуры и равномерности распределения тепла. Для моделирования используется уравнение теплового баланса, учитывающее характеристики нагревательного элемента, теплопроводность материалов и динамику теплообмена. Разработка модели позволит оценить влияние различных параметров на эффективность работы паяльника и провести вычислительные эксперименты для прогнозирования его поведения в различных эксплуатационных условиях.

1. **Построение математической модели**

Для анализа тепловых характеристик электрических нагревателей необходимо разработать математическую модель, описывающую изменения температуры нагревательного элемента во времени. В данной работе рассматриваются два типа устройств: с терморегулятором и без него.

* 1. **Модель паяльника без терморегулятора**

Для упрощения анализа вводится ряд допущений:

* Паяльник рассматривается как однородное тело
* Окружающая среда постоянна и её температура равна
* Основные механизмы теплообмена — конвекция и излучение.

Уравнение теплового баланса:

Процесс изменения температуры нагревательного элемента подчиняется закону сохранения энергии. Для малого временного промежутка его можно записать следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
| *,* | *(1)* |

где:

* - изменение количества теплоты в системе, Дж;
* – энергия, поступающая от нагревателя, Дж;
* - потери тепла через конвекцию и излучение соответственно, Дж.

Рассмотрим компоненты модели:

1 Тепловая энергия от нагревателя паяльника.

|  |  |
| --- | --- |
|  | *(2)* |

где P – мощность нагревательного элемента, Вт.

2 Накопление тепловой энергии в нагревателе паяльника:

Когда паяльник нагревается, его рабочий элемент аккумулирует часть подведенной энергии, что приводит к увеличению его температуры. Количество накопленной теплоты можно выразить через теплоёмкость:

|  |  |
| --- | --- |
|  | *(3)* |

где:

* — удельная теплоёмкость материала нагревателя, Дж/(кг·К);
* — масса нагревателя, кг;
* — изменение температуры за рассматриваемый промежуток времени, К.

Чем больше масса жала паяльника и выше его теплоёмкость, тем медленнее оно нагревается, поскольку требуется больше энергии для изменения его температуры.

**Потери тепла через конвекцию:**

Нагретый паяльник передает часть энергии окружающему воздуху за счет конвекции. Это теплообменное явление описывается законом Ньютона-Рихмана:

|  |  |
| --- | --- |
|  | *(4)* |

где:

* — коэффициент теплоотдачи (Вт/(м²·К)), зависящий от свойств окружающей среды и условий теплообмена;
* — площадь поверхности нагревателя, м²;
* — температура нагревателя, К;
* — температура окружающей среды, К.

**Потери тепла через излучение:**

Любое тело, нагретое выше температуры окружающей среды, излучает тепловую энергию в виде электромагнитных волн. Этот процесс описывается законом Стефана-Больцмана:

|  |  |
| --- | --- |
|  | *(5)* |

где:

* Вт/(м²·К⁴) — постоянная Стефана-Больцмана;
* — площадь поверхности нагревателя, м²;
* — температура нагревателя, К;
* ​ — температура окружающей среды, К.

**Дифференциальное уравнение теплового баланса**

Подставим уравнения (2) – (5) в уравнение теплового баланса (1):

|  |  |
| --- | --- |
|  | *(6)* |

Делим оби части на и переходим к пределу . Получаем дифференциальное уравнение, описывающее изменение температуры во времени:

|  |  |
| --- | --- |
| *,* | *(7)* |

начальное условие

Это уравнение показывает, как температура нагревателя изменяется во времени под воздействием поступающей энергии, конвективных потерь и излучения. Решение этого уравнения позволяет спрогнозировать, как быстро паяльник нагреется, и какая максимальная температура будет достигнута.

* 1. **Паяльник с терморегулятором**

Для того, чтобы нагреватель паяльника не достигал опасных температур, его максимальную температуру ограничивают.

Введем логическую функцию, которая будет выполнять роль переключателя. При достижении она отключит нагреватель, а при остывании до включит его.

Для упрощения анализа, в рамках модели будем считать, что .

**Модифицированное дифференциальное уравнение теплового баланса**

Добавим функцию в дифференциальное уравнение теплового баланса (6).

|  |  |
| --- | --- |
| *,* | *(8)* |

начальное условие

1. **Анализ модели**
   1. **Определение стационарных состояний**

Стационарное состояние системы определяется из условия равновесия, при котором температура перестаёт изменяться, то есть:

|  |  |
| --- | --- |
|  | *(9)* |

Подставляя уравнение (8) в уравнение теплового баланса, получаем:

|  |  |
| --- | --- |
|  | *(10)* |

Данное уравнение описывает равновесное состояние системы, при котором поступающее тепло полностью компенсируется потерями энергии за счёт конвекции и излучения.

* Если нагреватель работает без терморегулятора, то постоянно и равно ​, что приводит к постепенному росту температуры, пока система не достигнет устойчивого теплового режима.
* В модели с терморегулятором, мощность зависит от текущей температуры, что создаёт циклический режим включения и выключения нагрева.

В начальный момент времени температура нагревателя будет равна температуре окружающей среды:

Скорость изменения температуры в этот момент будет:

|  |  |
| --- | --- |
|  | *(11)* |

Если терморегулятор отсутствует, мощность остаётся постоянной, что приводит к монотонному увеличению температуры. С терморегулятором будет монотонно возрастать пока не достигнет.

* 1. **Стационарное состояние:**

По мере роста температуры, увеличиваются конвективные и излучательные потери тепла. Когда температура стабилизируется, условие теплового баланса принимает следующий вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | *(12)* |

где – температура, при которой система переходит в установившийся балансное состояние.

В случае простого нагревателя без терморегулятора температура будет возрастать до тех пор, пока не установится баланс между подводимой мощностью и теплопотерями.

В модели с терморегулятором температура колеблется около некоторого значения ​, так как система периодически включает и отключает нагрев в зависимости от отклонений от заданного порога.

* 1. **Решение уравнение теплового баланса**

Уравнение теплового баланса является нелинейным и аналитически не решается в общем виде. Однако его можно рассмотреть с точки зрения возможных корней:

**Число решений:**

* Уравнение имеет четвёртую степень относительно температуры, что формально означает наличие четырёх корней.

**Физическая интерпретация:**

* Температура не может быть отрицательной, поэтому отрицательные корни исключаются.
* Комплексные корни не имеют физического смысла в данной задаче.
* Единственный реальный и положительный корень представляет собой стационарную температуру >

Таким образом, система стремится к устойчивому температурному режиму, который определяется равновесием между нагревом и потерями тепла.

1. **Вычислительные эксперименты**

Для экспериментов будем использовать язык программирование *Python* с пакетом для визуализации *matplotlib*.

Для решения уравнения теплового баланса будем использовать метод Рунге-Кутта четвертого порядка.

4.1

* 1. **Метод Рунге-Кутта**

Метод Рунге-Кутта относится к классу явных одношаговых методов и позволяет решать обыкновенное дифференциальное уравнение вида с точностью :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | *(13)* |

где:

* – искомая функция,
* – независимая переменная,
* – уравнение.

Метод Рунге-Кутта четвертого порядка аппроксимирует решение на каждом шаге h с использованием четырех промежуточных вычислений:

|  |  |
| --- | --- |
|  | *(14)* |

где:

* – наклон в начальной точке шага,
* – наклон в средней точке с использованием
* - наклон в средней точке с использованием
* – наклон в конечной точке с использованием

Итоговое значение на следующем шаге вычисляется следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  | *(15)* |

* 1. **Модель без терморегулятора**

Для вычислительных экспериментов возьмем следующие параметры нагревателя:

Посмотрим, как будет меняться температура нагревателя паяльника при изменении *P, k, S* (рисунок 1).

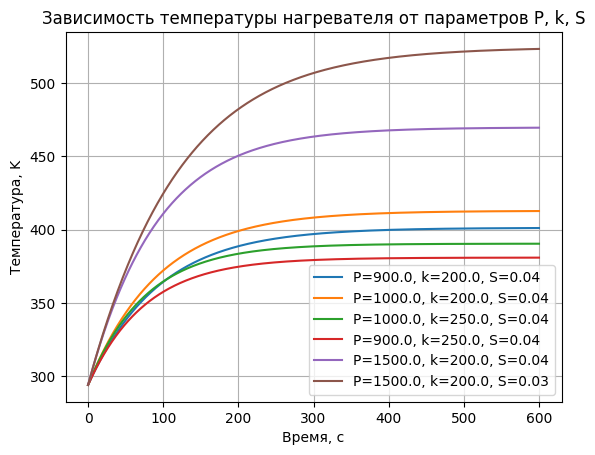


Рис.1 – зависимость температуры нагревателя от параметров *P, k, S*

Посмотрим, как будет меняться скорость нагрева паяльника при изменении *m, c* (рисунок 2).

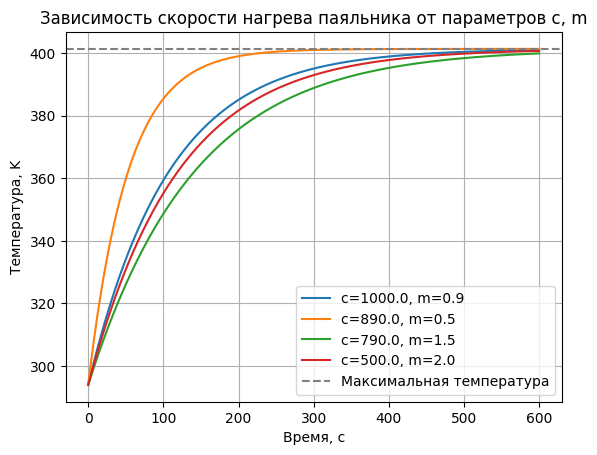


Рис.2 – Зависимость скорости нагрева паяльника от параметров c, m

* 1. **Модель с терморегулятором**

Возьмем те же параметры, что и в модели с терморегулятором. Построим решение дифференциального уравнения без терморегулятора и несколько решений с различными терморегуляторами (рисунок 3).

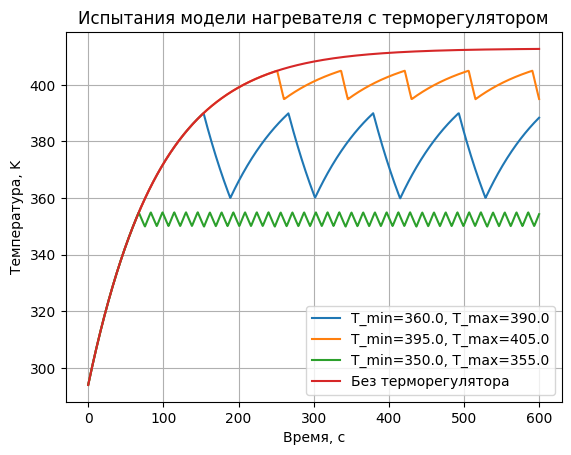


Рис. 3 – Испытания модели нагревателя с терморегулятором

На графике видно, что температурная линия нагревателей с терморегулятором имеет пилообразный график. Так же можно заметить, что чем меньше разница между максимальной и минимальной температурой, тем более частые получаются колебания температуры.

# **Вывод**

В результате выполнения работы, была построена математическая модель изменения температуры нагревателя паяльника, как без терморегулятора, так и с ним. Модель представляет из себя обыкновенное дифференциальное уравнение, учитывающее процессы термодинамики. В ходе работы был проведен анализ модели, найдены точки равновесия дифференциального уравнения, удовлетворяющие физическому смыслу модели.

В ходе экспериментальной части работы была разработана программа, реализующая метод Рунге-Кутта четвертого порядка. С его помощью было проведено численное тестирование модели. Результаты тестирование продемонстрировали работоспособность модели в исследовании изменения температуры нагревателя пыльника.

# **Приложения**

