27/02 **Exercises**

① $T(e_1+e_2)=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ $T(e_1-e_2)=\begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix}4&-3\\5&-3\\6&-3\end{bmatrix}$

$a+b=1$ $a-b=7$ $a=4$ $b=-3$
$c+d=2$ $c-d=8$ $c=5$ $d=-3$
$e+f=3$ $e-f=9$ $e=6$ $f=-3$

② AB - rotates $-\frac{\pi}{2}$ $\det(B)=1$
$\Rightarrow AB=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}$ $B^{-1}=\begin{bmatrix}3&-2\\-1&1\end{bmatrix}$ $A=AB.B^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1\\-3&2\end{bmatrix}$

③ a) T
b) $A=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}B_1&B_2&B_3\end{bmatrix}$ $AB=\begin{bmatrix}A_1B_1&A_1B_2&A_1B_3\\A_2B_1&A_2B_2&A_2B_3\\A_3B_1&A_3B_2&A_3B_3\end{bmatrix}$ $A_1B_2\neq A_2B_1$ F

④ T

⑤ a) $S_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ $S_2=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$ $S_2S_1=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ $S_1S_2=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$

b) $S_\alpha = R_{2\alpha}.R_{\bar{x}}=\begin{bmatrix}\cos(2\alpha)&-\sin(2\alpha)\\\sin(2\alpha)&\cos(2\alpha)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(2\alpha)&\sin(2\alpha)\\\sin(2\alpha)&-\cos(2\alpha)\end{bmatrix}$

⑥ $ABC=I$
$B=A^{-1}C^{-1}$ $B^{-1}=AC \Rightarrow \exists B^{-1}$

⑦ $A^2-3A=2I$
A - square matrix
$\begin{bmatrix}Aa_1&Aa_2&\dots&Aa_n\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}a_1&a_2&\dots&a_n\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}e_1&e_2&\dots&e_n\end{bmatrix}$
$Aa_1-3a_1=2e_1$ $\Rightarrow \{a_1,a_2,\dots a_n\}$ - linearly independent $\Rightarrow$ invertible

⑧ $A=\begin{bmatrix}-2&-7&-9\\2&5&6\\1&3&4\end{bmatrix}$ $Ax=e_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}-2&-7&-9&0\\2&5&6&0\\1&3&4&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&3\\0&1&0&-6\\0&0&1&4\end{array}\right]\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}a_1^{-1}&a_2^{-1}&\begin{matrix}3\\-6\\4\end{matrix}\end{bmatrix}$

Quiz

① $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$ $AB=\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}$ $BA=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 6\\-1 & -2 & -3\end{bmatrix}$

$s_1=2$

$s_2=(b_1+b_2+b_3)\cdot(a_1+a_2+a_3)$

$s_2=12$

$s_1=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

② $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}4 & -1\\2 & 3\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}-1 & -3\\6 & 2\end{bmatrix}$ $AB=\begin{bmatrix}2 & -4\\12 & 4\end{bmatrix}$ $BA=\begin{bmatrix}2 & -6\\8 & 4\end{bmatrix}$ $AC=\begin{bmatrix}-7 & -5\\10 & -2\end{bmatrix}=CA$

③ $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\0 & 2 & 4\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1 & 4 & 5 & 0\\0 & 2 & 4 & 0\\0 & 0 & 3 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3}\\0 & 0 & 1 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$ $C=A^{-1}$

$c_{13}=1$

④ A - m×n matrix

B - n×p matrix

5) A,B - independent columns → AB - independent columns ✓

6) A - columns span $\mathbb{R}^m$, B - $\mathbb{R}^n$ → AB - $\mathbb{R}^m$ ✓

⑤ $ABA=I \Rightarrow B=A^{-2}$

3) B - invertible ✓

4) $B^{-1}=A^2$ ✓

⑥ $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ $T(x)=Ax$

T - projection