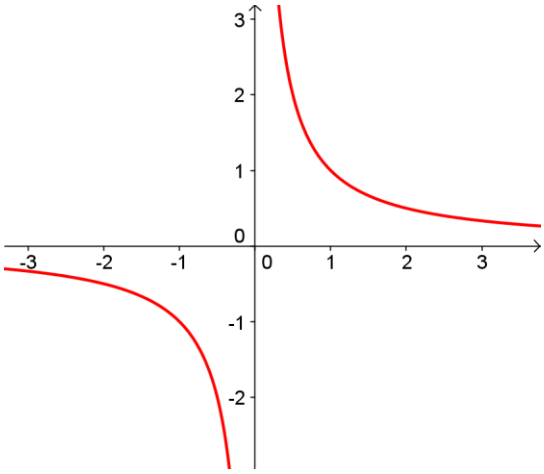
Lineárne lomená funkcia

Lineárne lomená funkcia je každá funkcia daná predpisom

$$f: y = \frac{ax+b}{cx+d}\ ;\ \ a,b,c,d \in R;\ \ c \neq 0;\ \ ad \neq bc$$

- graf lineárne lomenej funkcii je rovnoosá hyperbola so stredom $S = \left[-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right]$
- asymptoty sú: $x = -\frac{d}{c}; y = \frac{a}{c}$
- nepriama úmernosť

$$f: y = \frac{b}{cx} = \frac{k}{x}$$

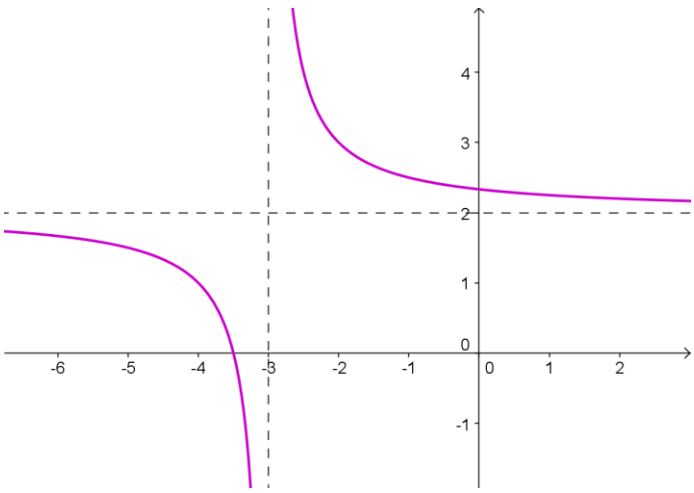


(grafy lineárne lomených funkcií vznikajú posúvaním a násobením nepriamej úmernosti)

- predpis lineárne lomenej funkcie môžeme zapísať aj v tvare

$$\boldsymbol{y = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c}}{cx+d}}$$

- ktorý dostaneme delením $(ax+b):(cx+d)$
- z tohto tvaru určujeme vlastnosti grafu:
  - pomocou $\boldsymbol{cx + d}$ určujeme posunutie po x-ovej osi – $cx + d = 0 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{d}{c}$
  - výraz $\boldsymbol{\frac{a}{c}}$ určuje posunutie po y-ovej osi
  - výraz $\boldsymbol{\frac{bc-ad}{c}}$ určuje polohu, teda v ktorých kvadrantoch sa nachádzajú ramená hyperboly, ak platí $\boldsymbol{\frac{bc-ad}{c}} > 0$, graf sa nachádza v *I. a III. kvadrante*, ak platí $\boldsymbol{\frac{bc-ad}{c}} < 0$, graf je v *II. a IV. kvadrante*



- priesečníky grafu s osami:
  - $P_x[x; 0]$ (hodnotu x-ovej súradnice vypočítame, keď dosadíme do predpisu za y nulu)

$$0 = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \rightarrow \quad zlomok\ sa\ rovná\ nule\ vtedy\ ,ak\ jeho\ čitateľ\ je\ rovný\ nule,$$

$$teda\ stačí\ počítať\ len\ s\ ním \quad \rightarrow \quad 0 = ax + b \quad \rightarrow \quad x = -\frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad P_x\left[-\frac{b}{a};0\right]$$

- $P_y[0; y]$ (hodnotu y-ovej súradnice vypočítame, keď dosadíme do predpisu za x nulu)

$$y = \frac{a.0 + b}{c.0 + d} \quad \rightarrow \quad y = \frac{b}{d} \quad \rightarrow \quad P_y\left[0; \frac{b}{d}\right]$$

Ďalšie vlastnosti

$$D(f) = R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

$$H(f) = R - \left\{\frac{a}{c}\right\}$$

funkcia je rastúca na oboch hyperbolických ramenách resp. klesajúca na oboch ramenách

funkcia je neohraničená

funkcia nedosahuje maximum ani minimum

nie je ani párna ani nepárna (okrem prípadu $a = 0; d = 0;\ b \neq 0; c \neq 0$ $\rightarrow$ nepriama úmernosť, takáto funkcia je nepárna)

má vždy jedno rameno konvexné a jedno konkávne

je prostá, teda má inverznú funkciu – jej graf je súmerný s pôvodným grafom podľa osi $y = x$; predpis f^{-1} dostaneme, ak v pôvodnom predpise vymeníme premennú y za x a naopak, teda

$$f^{-1}: x = \frac{ay + b}{cy + d}$$

a z tohto vyjadríme *y*

platí:

$$D(f) = H(f^{-1})$$

$$H(f) = D(f^{-1})$$

$$P_x\left[-\frac{b}{a};0\right] \quad \rightarrow \quad P_y'\left[0;-\frac{b}{a}\right]$$

$$P_y\left[0;\frac{b}{d}\right] \quad \rightarrow \quad P_x'\left[\frac{b}{d};0\right]$$

Pr. Načrtni graf funkcie, graf inverznej funkcie a napíš predpis inverznej funkcie:

$$f: y = \frac{x+4}{x+2}$$

$$as \parallel o_y: \ x+2=0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x=-2}$$

$$as \parallel o_x: \ (x+4):(x+2) = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{2}}{x+2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y=1}$$

$$2 > 0 \quad \rightarrow \quad graf\ v\ \ I. a\ III. kvadrante$$

$$P_x[x;0] \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{x+4}{x+2} \quad \rightarrow \quad 0 = x+4 \quad \rightarrow \quad x=-4 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_x[-4;0]}$$

$$P_y[0;y] \quad \rightarrow \quad y = \frac{0+4}{0+2} \quad \rightarrow \quad y=2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_y[0;2]}$$

$$f^{-1}: x = \frac{y+4}{y+2}$$

$$x(y+2) = y+4$$

$$xy + 2x = y + 4$$

$$xy - y = -2x + 4$$

$$y(x-1) = -2x + 4$$

$$f^{-1}: y = \frac{-2x+4}{x-1}$$