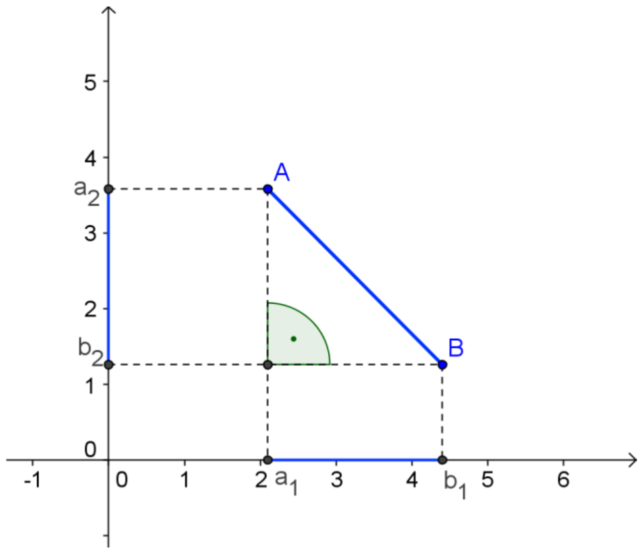
Metrické vzťahy v rovine a v priestore

- vzdialenosť bodov A a B je vlastne dĺžka úsečky AB
- ak body majú súradnice $A = [a_1;\ a_2]; B = [b_1;\ b_2]$, tak vzdialenosť bodov A a B v rovine odvodíme ako dĺžku prepony pravouhlého trojuholníka s odvesnami dĺžky $a_1 - b_1$ a $a_2 - b_2$
- teda:

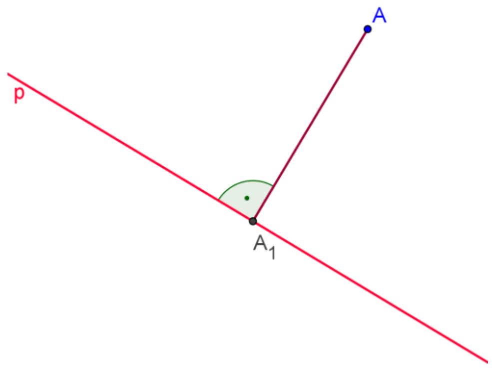
$$|AB|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$$

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$



- v priestore odvodzujeme vzdialenosť bodov obdobne a výsledkom je

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$



- vzdialenosť bodu $A[x_0;\ y_0]$ od priamky $p: ax + by + c$ je definovaná ako vzdialenosť bodu A od bodu A_1, ktorý je kolmým priemetom bodu do priamky p
- vypočítame ju:

$$|A; p| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- v priestore je vzdialenosť bodu od priamky definovaná obdobne – ako vzdialenosť bodu od kolmého priemetu bodu do priamky, teda v konečnom dôsledku počítame vzdialenosť dvoch bodov
- nie je tu všeobecná rovnica priamky, tak nemáme k dispozícii „priamy vzorec“

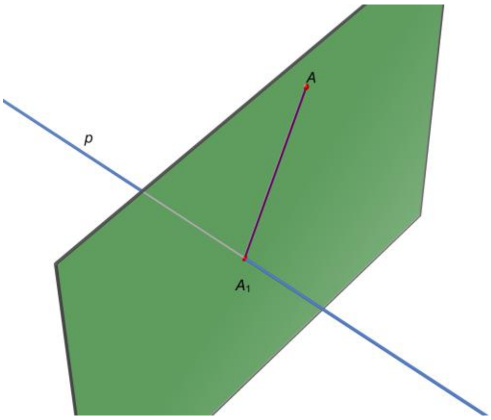
Pr. Vypočítaj vzdialenosť bodu $A[2; -1; 1]$ od priamky p s parametrickým vyjadrením:

$$x = 1 + t$$
$$y = -1 + t$$
$$z = 3 - t \qquad t \in R$$

- smerový vektor priamky p je normálovým vektorom roviny ρ, ktorá je na ňu kolmá a obsahuje bod A

$$\overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{n_p} = [1; 1; -1]$$

$$\rho: x + y - z + d = 0$$
$$A \in \rho \implies 2 + (-1) - 1 + d = 0$$
$$d = 0$$
$$\rho: x + y - z = 0$$



– kolmý priemet bodu A na priamku p je vlastne prienik priamky p a roviny ρ

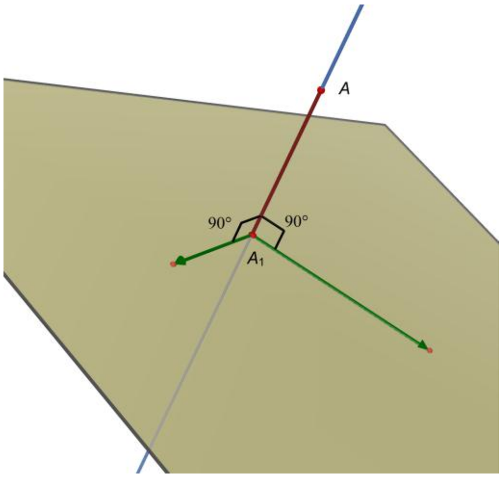
$$(1 + t) + (-1 + t) - (3 - t) = 0$$
$$1 + t - 1 + t - 3 + t = 0$$
$$3t - 3 = 0$$
$$t = 0$$

– súradnice bodu sú

$$x = 1 + 1 = 2$$
$$y = -1 + 1 = 0$$
$$z = 3 - 1 = 2 \qquad A_1 = [2; 0; 2]$$

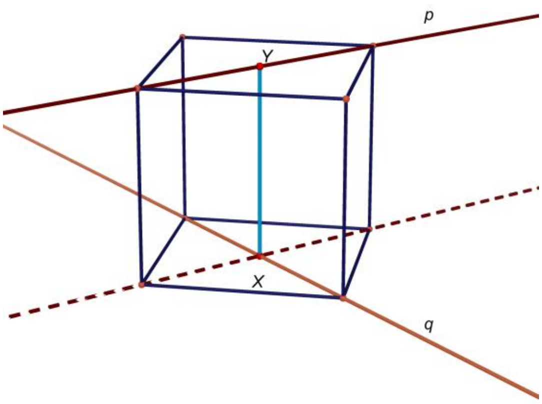
– vzdialenosť bodu A od priamky p je teda vzdialenosť bodu A od jeho kolmého priemetu A_1 na priamku p

$$|AA_1| = \sqrt{(2-2)^2 + \left(0 - (-1)\right)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$$



– vzdialenosť bodu $A[x_0; y_0; z_0]$ od roviny $\rho: ax + by + cz + d = 0$ je definovaná ako vzdialenosť bodu A od jeho kolmého priemetu A_1 do roviny ρ
– vypočítame ju pomocou vzorca:

$$|X; \rho| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



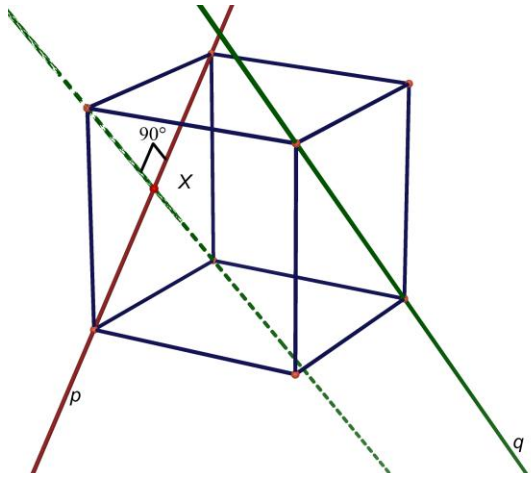
– vzdialenosť dvoch priamok:

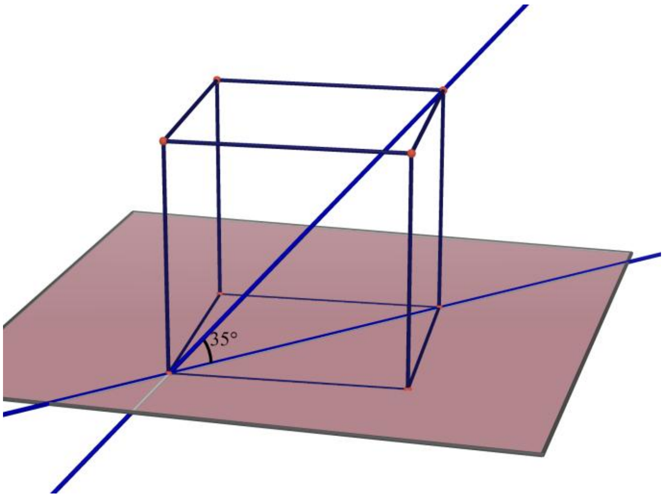
a) rovnobežky – vzdialenosť ktoréhokoľvek bodu priamky od druhej priamky

b) mimobežky - ich vzdialenosť = dĺžka osi mimobežiek = najkratšia vzdialenosť

– vzdialenosť priamky od roviny (má zmysel o nej hovoriť len v prípade, že priamka je rovnobežná s rovinou) – počítame ju ako vzdialenosť ktoréhokoľvek bodu priamky od roviny

– uhol dvoch priamok:
  a) rovnobežky majú nulový uhol
  b) rôznobežky – uhol určujeme ako menší z dvojice uhlov, ktoré tieto priamky spolu zvierajú
  c) mimobežky – ich uhol určujeme ako uhol jednej priamky a rovnobežky s druhou priamkou (tak, aby mali priesečník, čiže aby to bola rôznobežka tej druhej priamky)





– uhol priamky s rovinou je definovaný ako uhol priamky a kolmého priemetu tejto priamky do roviny (počítame ju ako doplnkový uhol k uhlu, ktorý zviera smerový vektor priamky s normálovým vektorom roviny)

– uhol dvoch rovín definujeme ako uhol priamok, ktoré sa nachádzajú v rovinách a sú kolmé na priesečnicu rovín