Trojuholník

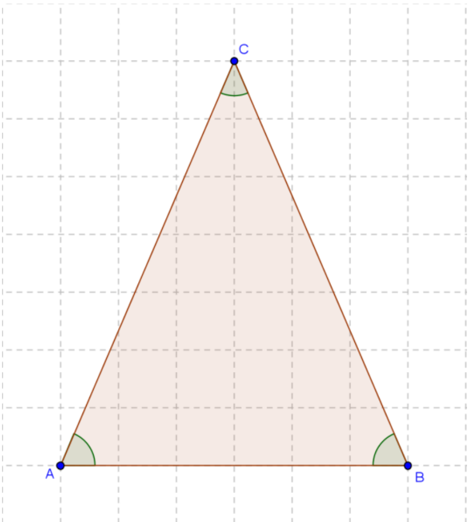
- môžeme zadefinovať na základe rôznych hľadísk:
  - prienik troch polrovín, teda

$$\Delta ABC = \overrightarrow{ABC} \cap \overrightarrow{BCA} \cap \overrightarrow{ACB}$$

  - uzavretá lomená čiara s 3 stranami a 3 vrcholmi

Klasifikácia

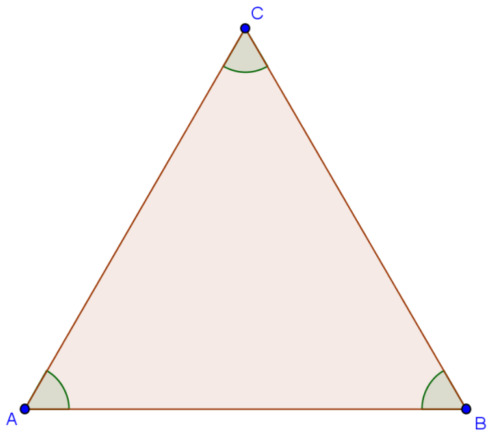
- *podľa dĺžky strán:*



rovnoramenný = taký, ktorý ma dve strany rovnako dlhé (= ramená) a tretiu inej dĺžky (= základňa)

$$a = b \neq c$$

$$\alpha = \beta$$

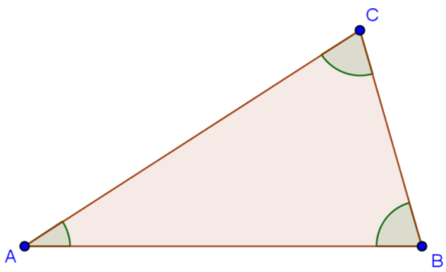


rovnostranný = má všetky strany rovnako dlhé a všetky vnútorné uhly rovnako veľké (60°)

výšky sú totožné s ťažnicami s osami uhlov a strán → priesečník je tiež len jeden (teda ťažisko je totožné s ortocentrom so stredom vpísanej a opísanej kružnice)

rôznostranný = každá strana inej dĺžky, každý uhol inej veľkosti (platí pravidlo, že oproti najväčšiemu uhlu je najdlhšia strana)

- *podľa veľkosti vnútorných uhlov:*

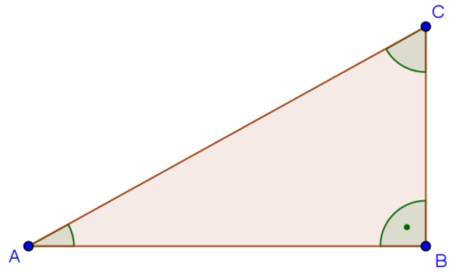


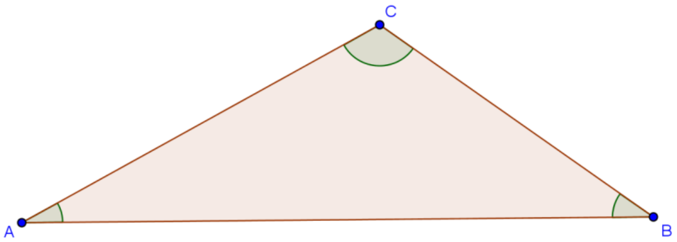
ostrouhlý = má všetky vnútorné uhly ostré

pravouhlý = má jeden vnútorný uhol pravý a zvyšné dva ostré

strany priľahlé priamemu uhlu = *odvesny*

strana protiľahlá pravému uhlu = *prepona*

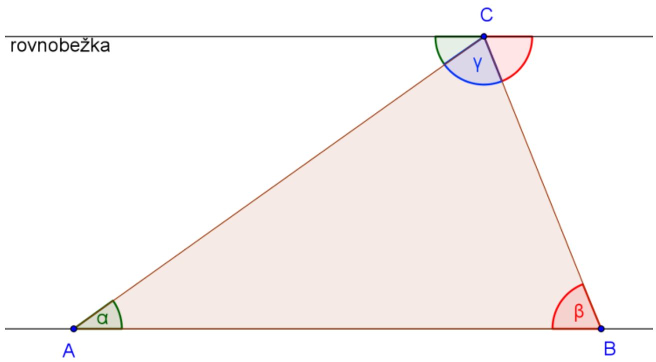




tupouhlý = má jeden vnútorný uhol tupý a zvyšné dva ostré

Vlastnosti

- ***vo všetkých trojuholníkoch platí:***
  - súčet dĺžok ľubovoľných dvoch strán trojuholníka je väčší ako tretia strana (*trojuholníková nerovnosť*)
  - súčet vnútorných uhlov trojuholníka je 180° (obr. →)



  - sínusová veta

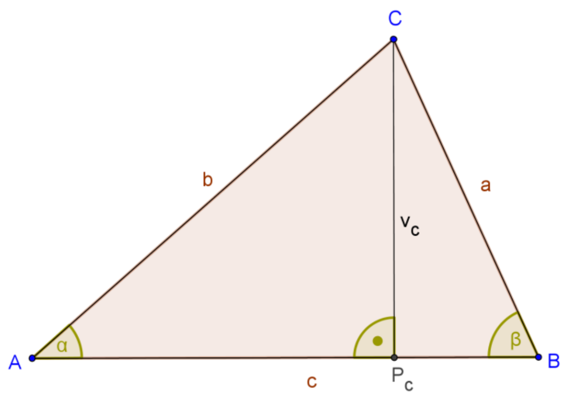
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

<u>*Odvodenie*</u>

$$\sin\alpha = \frac{v_c}{b} \;\rightarrow\; \color{red}{v_c = b\sin\alpha}$$

$$\sin\beta = \frac{v_c}{a} \;\rightarrow\; \color{red}{v_c = a\sin\beta}$$

$$\color{red}{a\sin\beta = b\sin\alpha}$$



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

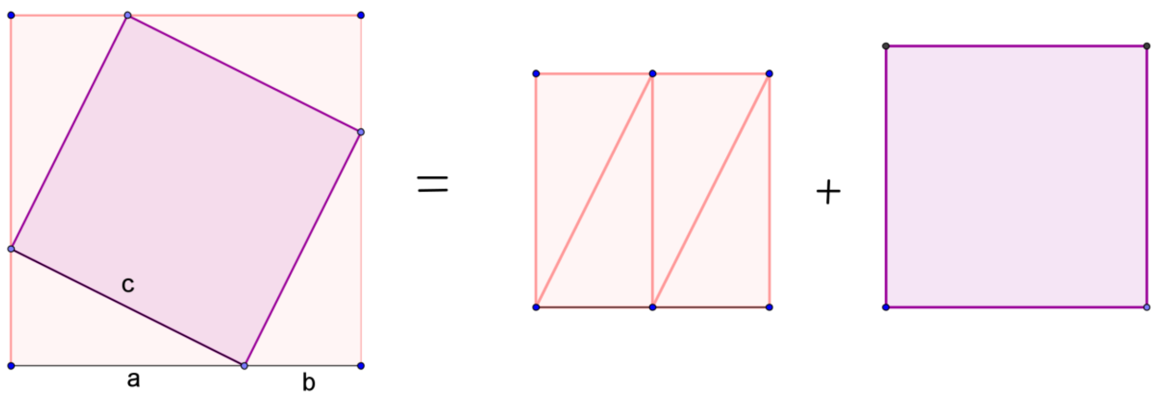
- kosínusová veta:

$$a^2 = b^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

- ***v pravouhlých trojuholníkoch (naviac) platí:***
  - Pytagorova veta = obsah štvorca zostrojeného nad preponou pravouhlého trojuholníka sa rovná súčtu obsahov štvorcov zostrojených nad odvesnami tohto trojuholníka

$$a^2 + b^2 = c^2$$

<u>*Odvodenie:*</u>

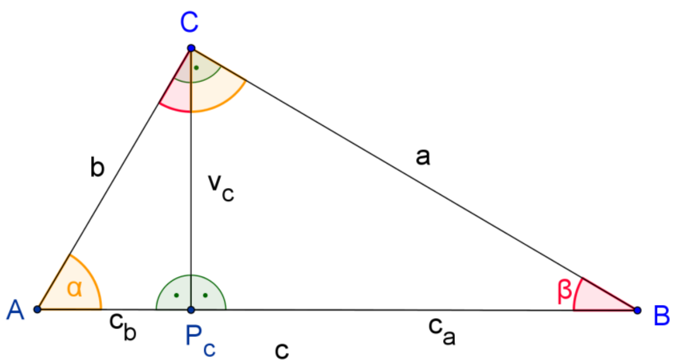


$$(a+b)^2 \quad = \quad 2a\,.\,b \quad + \quad c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \qquad /-2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

  - Euklidova veta
    - o výške $v_c^2 = c_a . c_b$
    - o odvesne $a^2 = c.c_a \quad b^2 = c.c_b$



<u>*Odvodenie:*</u>

Z podobnosti trojuholníkov.

$$\Delta AP_cC \sim \Delta CP_cB$$

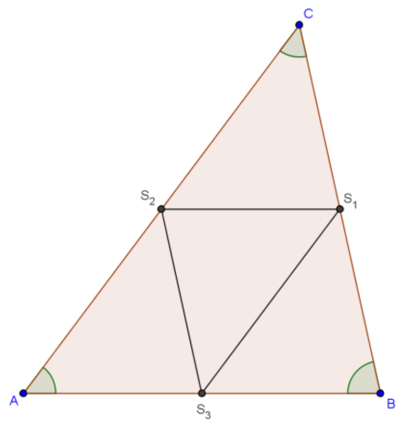
$$\frac{\boldsymbol{|CP_c|}}{\boldsymbol{|AP_c|}} = \frac{\boldsymbol{|P_cB|}}{\boldsymbol{|P_cC|}} = \frac{|CB|}{|AC|} = k$$

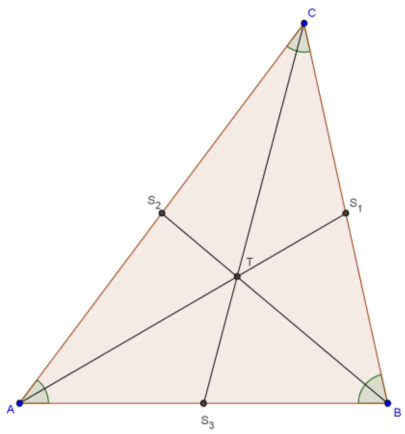
$$\frac{v_c}{c_b} = \frac{c_a}{v_c} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{v_c^2 = c_a . c_b}$$

$$\Delta CP_cB \sim \Delta ACB \quad \rightarrow \quad \frac{|AC|}{|CP_c|} = \frac{\boldsymbol{|AB|}}{\boldsymbol{|CB|}} = \frac{\boldsymbol{|CB|}}{\boldsymbol{|P_cB|}} = k \quad \rightarrow \quad \frac{c}{a} = \frac{a}{c_a} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a^2 = c.c_a}$$

Čiary v trojuholníku

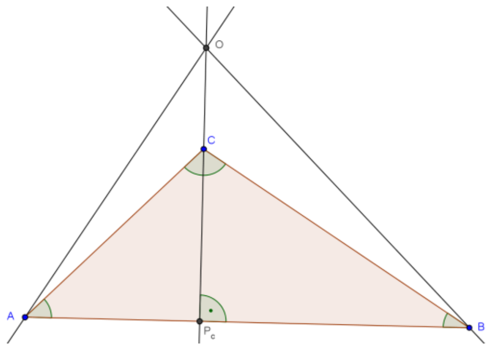
- ***stredné priečky*** = úsečky spájajúce stredy strán trojuholníka
- je rovnobežná s tou stranou trojuholníka, ktorej stredom neprechádza
- stredná priečka má polovičnú dĺžku voči rovnobežnej strane trojuholníka
- delia trojuholník na 4 zhodné trojuholníky podobné s pôvodným trojuholníkom

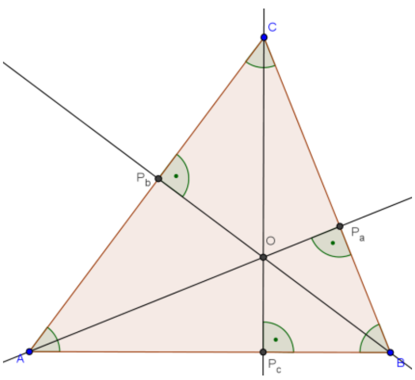


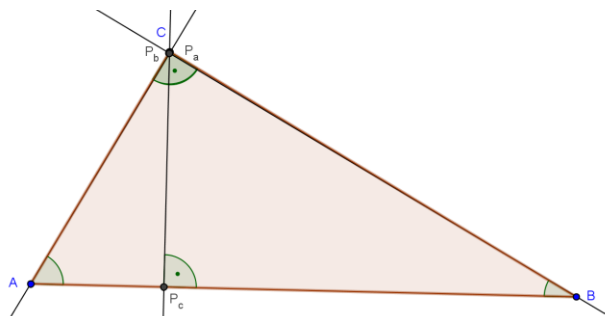


- ***ťažnice*** = spojnice vrcholov so stredmi protiľahlých strán
- všetky tri sa pretínajú v jednom bode – ***ťažisku T***
- delia trojuholník na 6 rôznych trojuholníkov s rovnakým obsahom
- ťažisko delí ťažnice v pomere 2 : 1 (na dve tretiny a tretinu) – dlhšia časť je od vrcholu k ťažisku, kratšia od ťažiska ku stredu strany

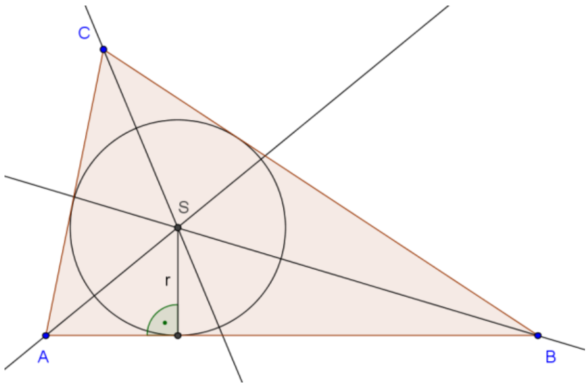
- ***výšky*** = kolmice z vrcholov na protiľahlé strany
- všetky tri sa pretínajú v jednom bode, ktorý nazývame ***ortocentrum O***
- ortocentrum sa v ostrouhlom trojuholníku nachádza vo vnútornej oblasti, v tupouhlom mimo trojuholníka (vonku) a v pravouhlom vo vrchole pravého uhla (výšky sú totožné s odvesnami)

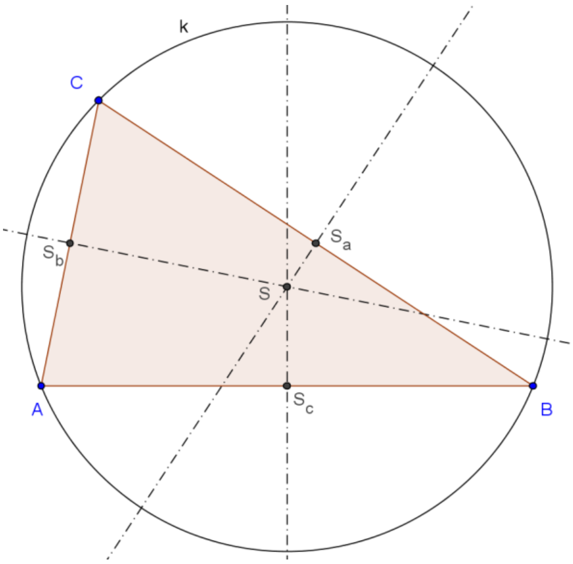






– ***osi uhlov*** – pretínajú sa v jednom bode, ktorý je stredom vpísanej kružnice





– ***osi strán*** – pretínajú sa v jednom bode, ktorý je stredom opísanej kružnice