

## *Dôkazy v matematike*

### 1. *Priamy dôkaz*

#### a) *tvrdenia T*

Vychádzam z axiómy A a konečnou sériou implikácií  $A \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_3 \dots \Rightarrow T_n \Rightarrow T$  sa dostanem k tvrdeniu T.

**Pr.** Dokáž, že súčin dvoch za sebou nasledujúcich prirodzených čísel je deliteľný dvomi.

#### b) *implikácie $A \Rightarrow B$*

Postupujem ako pri priamom dôkaze tvrdenia, ale vychádzam z tvrdenia A (predpoklad implikácie) a konečnou sériou implikácií  $A \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_3 \dots \Rightarrow T_n \Rightarrow B$  sa dopracujem k tvrdeniu B.

**Pr.** Rozhodni o pravdivosti:  $\forall n \in \mathbb{N}: 2|n \Rightarrow 2|(n^2 + 1)$

### 2. *Nepriamy dôkaz implikácie (dôkaz obmenou)*

K implikácii  $A \Rightarrow B$ , ktorú chcem dokázať, urobím obmenu  $\neg B \Rightarrow \neg A$ , ktorá má dokázateľne rovnakú pravdivostnú hodnotu ako pôvodný výrok a dokazujem ju priamo. Ak sa mi podarí dokázať obmenu, je tým dokázaná aj pôvodná implikácia.

*Pozn.* Týmto spôsobom dokazujeme implikácie, ktoré idú od „zložitejšieho k jednoduchšiemu“.

**Pr.** Rozhodni o pravdivosti:  $\forall n \in \mathbb{N}: 3|(n-1)^2 \Rightarrow 3|n$

### 3. *Dôkaz sporom*

Pri tomto type dokazujem priamo negáciu tvrdenia (implikácie), ktorá má opačnú pravdivostnú hodnotu ako pôvodné tvrdenie (implikácia), teda, ak dokážem, že neplatí negácia – tak, že sa dostanem do sporu s predpokladom, axiómou alebo už dokázaným tvrdením – je dokázané, že platí pôvodný výrok.

**Pr.** Dokáž, že  $\sqrt{3}$  je iracionálne číslo.

### 4. *Dôkaz matematickou indukciou*

Takto dokazujem tvrdenia v tvare :  $\forall n \in \mathbb{N}: T(n)$

Dôkaz je zložený z dvoch krokov:

a) Dôkaz  $T(1)$ , teda dokážem tvrdenie pre prvý člen.

b) Indukčný krok – dôkaz implikácie  $\forall n \in \mathbb{N}: T(n) \Rightarrow T(n+1)$ ; teda dokážem, že ak tvrdenie platí pre n, tak platí aj pre n+1.

**Pr.** Dokáž:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$