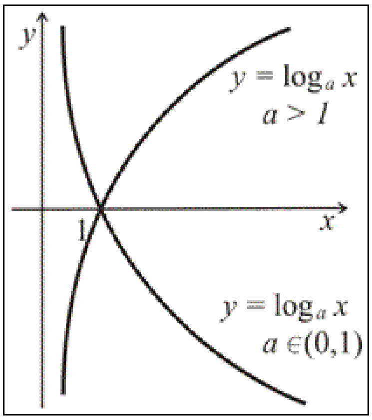
Logaritmická funkcia

Logaritmickou funkciou so základom a sa nazýva funkcia inverzná k exponenciálnej funkcii $f: y = a^x$, kde $a \in (0;\ \infty) - \{1\}$.

- ak teda exponenciálna funkcia $f: y = a^x$ obsahuje usporiadané dvojice $[x; y]$, funkcia, ktorá je k nej inverzná, teda $f^{-1}: x = a^y$, má predpis $y = \log_a x$ a obsahuje usporiadané dvojice $[x; y]$
- grafom logaritmickej funkcie je logaritmická krivka (je súmerná s exponenciálnou krivkou súmerná podľa osi $y = x$)
- logaritmické krivky podľa základu rozdeľujeme na:

$a \in (0; 1)$
$D(f) = (0;\ \infty)$
$H(f) = R$
klesajúca, prostá, neohraničená, bez extrémov, ani párna ani nepárna



$a \in (1; \infty)$
$D(f) = (0;\ \infty)$
$H(f) = R$
rastúca, prostá, neohraničená, bez extrémov, ani párna ani nepárna

- **logaritmus čísla *x* pri základe *a*** je také číslo *y*, pre ktoré platí $a^y = x$, teda hodnota logaritmu je vlastne exponent, ktorým musíme umocniť základ, aby sme dostali argument logaritmu

Pr. Urči hodnotu $\log_3 81$

$$\log_3 81 = y$$
$$3^y = 81$$
$$3^y = 3^4$$
$$y = 4$$
$$\log_3 81 = 4$$

- logaritmus môže mať teda za základ ľubovoľné kladné číslo okrem jednotky; špeciálne označenie majú *dekadický logaritmus* (= so základom 10), označujeme ho $\log x$ (teda desiatku tam nepíšeme), a *prirodzený logaritmus* (= so základom *e* = *Eulerovo číslo****), označujeme ho $\ln x$

Vlastnosti logaritmov

Pre všetky kladné reálne čísla a rôzne od jednotky a pre všetky kladné reálne čísla r, s platí:

A. $\log_a a = 1$
B. $\log_a 1 = 0$
C. $r = a^{\log_a r}$
D. $\log_a (r.s) = \log_a r + \log_a s$
E. $\log_a \left(\frac{r}{s}\right) = \log_a r - \log_a s$
F. $\log_a r^s = s.\log_a r$

Odôvodnenie:

- tvrdenia A.; B.; C. priamo vyplývajú z definície logaritmu
- tvrdenie D.
  - z definície logaritmu vyplýva:
    - $r = a^{\log_a r}$
    - $s = a^{\log_a s}$
    - $r.s = a^{\log_a (r.s)}$
  - aplikovaním a) a b) dostaneme:

$$r.s = a^{\log_a r}.a^{\log_a s}$$

  - a z vlastností mocnín môžeme povedať:

$$a^{\log_a r}.a^{\log_a s} = a^{\log_a r + \log_a s}$$

  - teda $r.s = a^{\log_a r + \log_a s}$
  - spojením predchádzajúceho výsledku a c) dostaneme:

$$a^{\log_a (r.s)} = a^{\log_a r + \log_a s} \quad \text{teda} \quad \log_a (r.s) = \log_a r + \log_a s$$

- tvrdenie E. dokazujeme obdobne
- tvrdenie F. vyplýva priamo z tvrdenia D.

$$\log_a r^s = \log_a \left(\underbrace{r.r.r.\dots.r}_{s}\right) = \underbrace{\log_a r + \log_a r + \dots + \log_a r}_{s} = s.\log_a r$$

Logaritmické rovnice a ich riešenie

Logaritmické rovnice sú také, ktoré obsahujú neznámu v argumente logaritmickej funkcie.

Riešenie logaritmických rovníc:

1) základné rovnice – v tvare $\log_a x = y$ riešime priamo na základe definície logaritmu, teda $a^y = x$

Pr. Rieš rovnicu:

$$\log_9 x = 0{,}5 \quad \rightarrow \quad x = 9^{0,5} \quad \rightarrow \quad x = 3$$

2) logaritmické rovnice, ktoré na základe vlastností logaritmov (A. – F.) upravíme na tvar $\log_a v_1(x) = \log_a v_2(x)$ (= rovnica, ktorej obe strany tvoria logaritmy s rovnakým základom, ktoré v argumentoch obsahujú výrazy s premennou x)

Pr. Rieš rovnicu:

$$\log(x-1) + \log(x+1) = 3\log 2 + \log(x-2)$$
$$\log[(x-1)(x+1)] = \log 2^3 + \log(x-2)$$
$$\log(x^2-1) = \log[8(x-2)]$$
$$x^2 - 1 = 8x - 16$$
$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

- kvadratickú rovnicu riešime pomocou diskriminantu, v tomto prípade dostaneme korene $x = \{3; 5\}$, ktoré sú obidva riešením rovnice.

**Keďže odlogaritmovanie nie je ekvivalentná úprava je treba vykonať skúšku správnosti a na základe toho, že logaritmus je definovaný len na množine kladných čísel, je užitočné si hneď na začiatku definovať podmienky pre argumenty jednotlivých logaritmov, ktoré sa v rovnici nachádzajú.*

3) logaritmické rovnice riešené substitúciou (najčastejšie prejdú na kvadratickú rovnicu)

Pr. Rieš rovnicu:

$$\log x + \frac{1}{\log x} = 2 \quad /.\log x$$
$$(\log x)^2 + 1 = 2\log x$$
$$(\log x)^2 - 2\log x + 1 = 0 \quad subst. \quad \log x = y$$
$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

- pomocou diskriminantu (alebo aj len od oka, lebo toto je mocnina dvojčlena) vychádza jeden koreň $y = 1$
- treba vrátiť substitúciu a dopočítať

$$\log x = 1 \quad \rightarrow \quad x = 10$$

**V tomto príklade treba dať pozor nielen na argument logaritmu, ale aj na neznámu v menovateli.*

4) logaritmicko-exponenciálne rovnice riešené logaritmovaním a substitúciou (podľa potreby:-))

Pr. Rieš rovnicu:

$$x^{\log_2 x + 2} = 8 \quad (logaritmujeme)$$
$$\log_2 x^{\log_2 x + 2} = \log_2 8 \qquad (\log_2 8 = 3)$$
$$(\log_2 x + 2)\log_2 x = 3$$
$$(\log_2 x)^2 + 2\log_2 x - 3 = 0$$

- substituujeme a pokračujeme v počítaní ako v prípade 3)

**Keď logaritmujeme, volíme „vhodný“ logaritmus podľa zadania rovnice s ktorou pracujeme.*

****Eulerovo číslo** $e \doteq 2{,}718$ je iracionálne číslo, môže byť zadefinované viacerými spôsobmi, najčastejšie*

- *ako súčet nekonečného radu:*

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

- *ako limita postupnosti:*

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$$

Okrem toho, že je používané ako základ prirodzeného logaritmu, má mnoho „dobrých vlastností“ využívaných v iných častiach matematiky (napr. diferenciálny a integrálny počet). V niektorej literatúre sa môžeme stretnúť aj s jeho pomenovaním „Napierova konštanta“ – John Napier sa považuje za objaviteľa logaritmu)