Lineárne útvary v rovine a v priestore

- ***priamka*** - jednoznačne daná dvomi bodmi (resp. jedným bodom a smerovým vektorom)
- priamka *AB* môže byť daná:

a) **v rovine**:

1) pomocou bodu *A* a smerového vektora $u = B - A$ - ***parametrické vyjadrenie***

$$A = [a_1;\ a_2];\ \vec{u} = [b_1 - a_1;\ b_2 - a_2] = [u_1;\ u_2]$$

$$\overleftrightarrow{AB} = \{X \in \rho; X = A + t\vec{u}, t \in R\}$$

teda súradnice bodov priamky roviny sú:

$$x = a_1 + t.u_1$$
$$y = a_2 + t.u_2$$

podľa hodnoty parametra rozdeľujeme:

$t \in R$ → priamka AB

$t \in \langle 0; \infty)$ → polpriamka AB

$t \in (-\infty; 0)$ → polpriamka opačná k AB

$t \in \langle 0; 1 \rangle$ → úsečka AB

2) ***všeobecná rovnica***

$$ax + by + c = 0;\ \ a \neq 0 \vee b \neq 0$$

súradnice $a; b$ sú súradnice normálového vektora $\vec{n} = [a; b]$, ak $\vec{u} = [u_1;\ u_2]$ je smerový vektor priamky AB, tak normálový vektor priamky má súradnice $\vec{n} = [a; b] = [u_2;\ -u_1]\ \ resp.\ [-u_2;\ u_1]$

3) ***smernicový tvar***

$$y = kx + q$$

tento tvar dostaneme zo všeobecnej rovnice tak, že vyjadríme y

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

b) **v priestore:**

1) priamka AB prechádza bodmi $A = [a_1;\ a_2;\ a_3];\ B = [b_1;\ b_2;\ b_3]$ má smerový vektor $\vec{u} = B - A = [b_1 - a_1;\ b_2 - a_2;\ b_3 - a_3] = [u_1;\ u_2; u_3]$ - ***parametrické vyjadrenie***

$$x = a_1 + t.u_1$$
$$y = a_2 + t.u_2$$
$$z = a_3 + t.u_3$$

rovnako ako v rovine podľa hodnoty parametra rozdeľujeme:

$t \in R \;\rightarrow$ priamka AB

$t \in \langle 0; \infty)\;\rightarrow$ polpriamka AB

$t \in (-\infty; 0)\;\rightarrow$ polpriamka opačná k AB

$t \in \langle 0; 1\rangle\;\rightarrow$ úsečka AB

2) ***v priestore neexistuje všeobecná rovnica priamky***, lebo normálový vektor priamky v priestore nie je jednoznačne daný

- ***rovina*** (len v priestore ☺) – jednoznačne daná tromi nekolineárnymi bodmi (= neležia na jednej priamke); bodom a dvomi smerovými vektormi (lineárne nezávislými) resp. bodom a normálovým vektorom
- rovina ABC môže byť daná:
  1) pomocou bodu $A = [a_1;\ a_2;\ a_3]$ a dvojice (lineárne nezávislých) smerových vektorov $\vec{u} = [u_1;\ u_2;\ u_3]$; $\vec{v} = [v_1;\ v_2;\ v_3]$ - ***parametrické vyjadrenie***

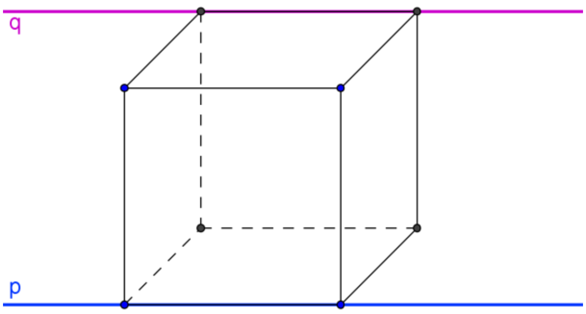
$$\begin{aligned} x &= a_1 + t.u_1 + s.v_1 \\ y &= a_2 + t.u_2 + s.v_2 \\ z &= a_3 + t.u_3 + s.v_3 \qquad t, s \in R \end{aligned}$$

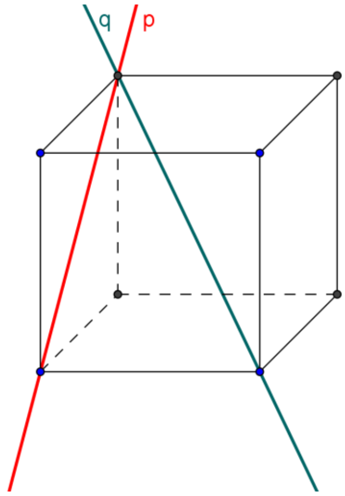
  2) pomocou bodu $A = [a_1;\ a_2;\ a_3]$ a normálového vektora $\vec{n} = [a; b; c]$ - ***všeobecná rovnica***

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad [a; b; c] \neq [0; 0; 0]$$

Vzájomné polohy dvoch priamok

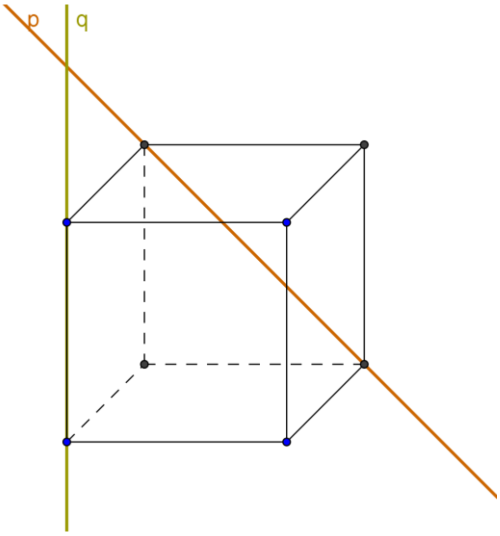
- ***v rovine:***
- priamky $p(A;\ \vec{u}\,)$; $q(B;\ \vec{v}\,)$
  a) smerové vektory priamok sú lineárne závislé - $\vec{u} = k.\vec{v}$
    1) priamky sú ***rovnobežné rôzne*** ($p \parallel q$), ak zároveň platí $p \cap q = \emptyset$ - nemajú spoločný bod
    2) priamky sú ***rovnobežné totožné*** ($p \equiv q$), ak zároveň platí $p \cap q = p$ - majú spoločné všetky body
  b) smerové vektory priamok sú lineárne nezávislé - $\vec{u} \neq k.\vec{v}$ - priamky sú ***rôznobežné*** ($p \nparallel q$), teda platí $p \cap q = X$
- ***v priestore:***
  - platí všetko, čo v rovine, ale existuje ešte možnosť, že priamky sú ***mimobežné,*** ak smerové vektory priamok sú lineárne nezávislé ($\vec{u} \neq k.\vec{v}$) a zároveň priamky nemajú spoločný bod (mimobežné priamky neležia v jednej rovine)





↳ rovnobežné rôzne priamky

rôznobežné priamky ↲

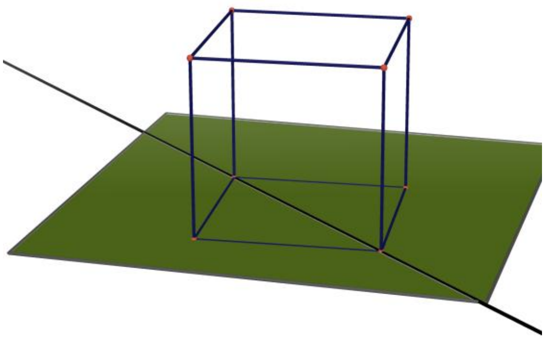


→ mimobežné priamky

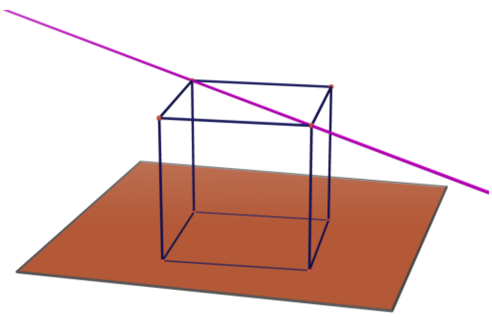
Vzájomná poloha priamky a roviny

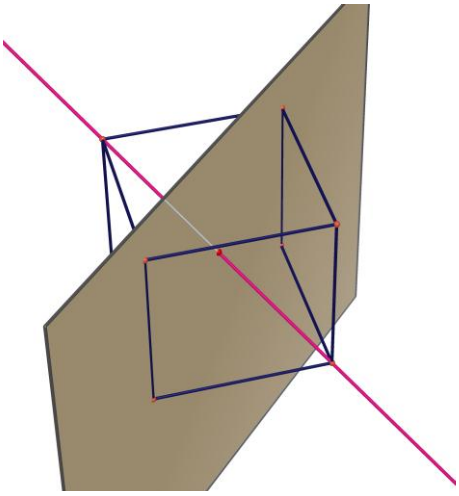
- smerový vektor priamky je kolmý na normálový vektor roviny (= skalárny súčin týchto vektorov sa rovná 0 $\rightarrow$ $\vec{u}.\vec{n} = u_1.n_1 + u_2.n_2 + u_3.n_3 = 0$)
  1) priamka leží v rovine - $p \in \rho$
  2) priamka je rovnobežná s rovinou - $p \cap \rho = \emptyset$
- smerový vektor priamky nie je kolmý na normálový vektor roviny
  1) priamka pretína rovinu - $p \cap \rho = X$

⟶ priamka leží v rovine



priamka je rovnobežná s rovinou ↰

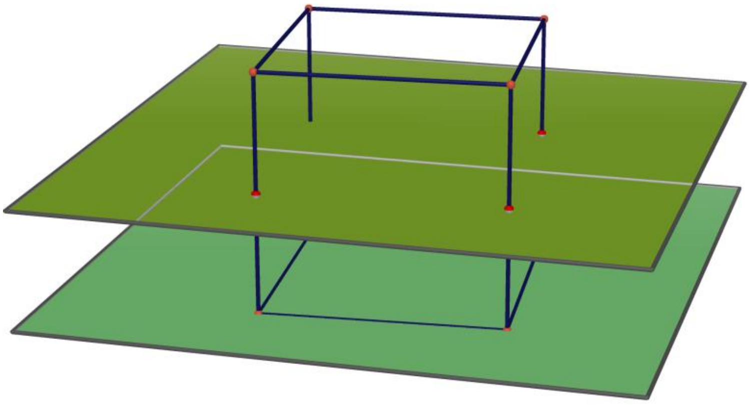




→ priamka pretína rovinu

Vzájomná poloha dvoch rovín

– normálové vektory rovín sú lineárne závislé
  a) rovnobežné totožné roviny
  b) rovnobežné rôzne
– normálové vektory sú lineárne nezávislé
  a) roviny sú rôznobežné – ich prienikom je priamka - priesečnica



→ rovnobežné roviny

rôznobežné roviny – pretínajú sa ⟵