Výrazy a mnohočleny

Algebrický výraz je každý zápis, ktorý je správne vytvorený podľa pravidiel pre zápisy čísel, premenných, výsledkov operácií a hodnôt funkcií. Je teda symbolom konštanty alebo môže vyjadrovať výsledok operácií s číslami.

Definičný obor výrazu je množina všetkých hodnôt premenných, ktoré po dosadení do výrazu ho zmenia na zápis čísla.

Rovnosť dvoch výrazov v danej množine $\boldsymbol{M}$, ktorá je podmnožinou definičných oborov obidvoch výrazov znamená, že pre rovnaké hodnoty premenných dávajú obidva výrazy rovnaké výsledky.
Ak dokazujeme rovnosť dvoch výrazov, upravujeme jeden z nich tak, aby sme získali druhý výraz.

Úprava výrazu – nahradenie výrazu iným výrazom požadovaného tvaru, ktorý sa danému výrazu na danej množine rovná. Najčastejšie úpravy sú: rozložiť výraz na súčin, odstrániť absolútnu hodnotu vo výraze, odstrániť odmocninu z menovateľa.

Zjednodušenie výrazu – úprava výrazu v množine $\boldsymbol{M}$, po ktorej dostaneme výraz s menším počtom znakov operácií, funkcií, zátvoriek alebo aj premenných s nenulovými koeficientmi.

Výraz $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, kde $a_0, a_1, \dots, a_n, x \in \boldsymbol{R}, a \neq 0, n \in \boldsymbol{N}$ sa nazýva **mnohočlen (polynóm) *n*-tého stupňa** s premennou x.
Stupeň mnohočlenov určuje najvyšší exponent premennej. Mnohočleny usporadúvame buď vzostupne alebo zostupne. Pre mnohočIeny zavedieme operácie súčtu, súčinu, rozdielu, podielu a mocniny. Pre tieto operácie platia pravidlá ako pre počítanie s reálnymi číslami.

Opačný mnohočlen – vznikne z daného mnohočlenu vynásobením každého člena číslom –l.

Sčítanie a odčítanie mnohočlenov – sčitujeme a odčitujeme členy s rovnakým exponentom tej istej premennej.

Násobenie mnohočlenov – násobíme každý člen l. mnohočlena s každým členom 2. mnohočlena.

Umocňovanie mnohočlenov – používame vzorec pre mocniny reálnych čísel alebo mocninu nahradíme súčinom. Rozklad mnohočlena – vynímaním pred zátvorku, alebo použitím vzorcov.

Podielom dvoch mnohočlenov dostaneme racionálny lomený výraz.

Najčastejšie používané vzorce:

$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$

$(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$

$A^3 + B^3 = (A + B)\cdot(A^2 - AB + B^2)$

$A^3 - B^3 = (A - B)\cdot(A^2 + AB + B^2)$

$A^2 - B^2 = (A + B)\cdot(A - B)$

$A^2 + B^2$ v množine reálnych čísel sa nedá rozložiť. V množine komplexných čísel sa dá rozložiť a platí: $A^2 + B^2 = (A + iB).(A - iB)$, kde i je imaginárna jednotka $i = \sqrt{-1}$.

Pri rozklade kvadratického trojčlena využívame vzťah pre korene a koeficienty kvadratickej rovnice: Ak r, s sú korene mnohočlena $ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$, potom platí: $ax^2 + bx + c = a(x - r)(x - s)$; $r + s = -\dfrac{b}{a}$ a $r \cdot s = \dfrac{c}{a}$.

Príklad 1

Vypočítajte: a) $(2a - b)[a(4a + b) + b(a + b)]$

b) $(5u + v)^2$

Riešenie:

a) $(2a - b)(4a^2 + ab + ab + b^2) = (2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2) = 8a^3 - 4a^2b +$
$+ 4a^2b - 2ab^2 + 2ab^2 - b^3 = 8a^3 - b^3$

b) $(5u + v)^2 = 25u^2 + 10uv + v^2$

Príklad 2

Rozložte na súčin: a) $8b^2 - 18c^2$

b) $(x + y)^4 - x^4$

c) $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2$

Riešenie:

a) $8b^2 - 18c^2 = 2(4b^2 - 9c^2) = 2(2b - 3c)(2b + 3c)$

b) $(x + y)^4 - x^4 = [(x + y)^2 - x^2][(x + y)^2 + x^2] = (x^2 + 2xy + y^2 - x^2)(x^2 + 2xy +$
$+ y^2 + x^2) = (2xy + y^2)(2x^2 + 2xy + y^2) = y(2x + y)(2x^2 + 2xy + y^2)$

c) $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2 = a^4(a^2 - 1) + 2a^2(a + 1) = a^4(a - 1)(a + 1) + 2a^2(a + 1) =$
$= (a + 1)(a^5 - a^4 + 2a^2) = a^2(a + 1)(a^3 - a^2 + 2)$

Príklad 3

Rozložte na súčin lineárnych dvojčlenov kvadratické trojčleny:

a) $x^2 + 3x - 10$

b) $3x^2 + 5x - 2$

Riešenie:

a) použijeme metódu rozkladu na koreňové činitele:
$x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$, lebo čísla -5 a 2 sú korene príslušnej kvadratickej rovnice, $-5 + 2 = -3$, $(-5) . 2 = -10$

b) $3x^2 + 5x - 2 = 3x^2 + 6x - x - 2 = 3x(x + 2) - (x + 2) = (x + 2)(3x - 1)$

Príklad 4

Vydeľte: $(3a^3 - 5a^2 + 9a - 15) : (3a - 5)$

Riešenie:

Musíme si overiť, či oba mnohočleny sú usporiadané zostupne.

$$\begin{array}{l} (3a^3 - 5a^2 + 9a - 15) : (3a - 5) = a^2 + 3 \\ \underline{-(3a^3 - 5a^2)} \\ 9a - 15 \\ \underline{-(9a - 15)} \\ 0 \end{array}$$

$3a^3 : 3a = a^2$, podiel zapíšeme, týmto podielom vynásobíme deliteľa a vzniknutý mnohočlen $3a^3 - 5a^2$ odčítame od delenca. Zostane nám mnohočlen $9a - 15$, postup opakujeme dovtedy, kým vzniknutý mnohočlen nie je nižšieho stupňa ako deliteľ.

Skúškou si overíme správnosť riešenia: $(a^2 + 3)(3a - 5) = 3a^3 - 5a^2 + 9a - 15$.

Príklad 5

Zjednodušte výraz: $\left(c^3 - d^3\right) : \left(c + \dfrac{d^2}{c + d}\right)$

Riešenie:

$$\left(c^3 - d^3\right) : \left(c + \frac{d^2}{c + d}\right) = (c - d)(c^2 + cd + d^2) : \left(\frac{c^2 + cd + d^2}{c + d}\right) =$$

$$= (c - d)(c^2 + cd + d^2) \cdot \frac{c + d}{c^2 + cd + d^2} = (c - d)(c + d) = c^2 - d^2$$

Nutnou časťou riešenia je určiť podmienky, za ktorých má daný výraz zmysel:
$c + d \neq 0$; $c^2 + cd + d^2 \neq 0 \Rightarrow c \neq -d$