KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A INFORMATIKY

STROJNÍCKA FAKULTA TU KOŠICE

PREHĽAD ZÁKLADNÝCH VZORCOV A VZŤAHOV ZO STREDOŠKOLSKEJ MATEMATIKY

Pomôcka pre prípravný kurz

2012

ZÁKLADNÉ ALGEBRAICKÉ VZORCE

1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

2) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

3) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

4) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

5) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

OPERÁCIE S MOCNINAMI

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$

3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

4) $a^0 = 1$

5) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

6) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

7) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

8) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

9) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

10) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

11) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

12) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[n \cdot m]{a^m}}{\sqrt[n \cdot m]{b^n}} = \sqrt[n \cdot m]{\frac{a^m}{b^n}}$

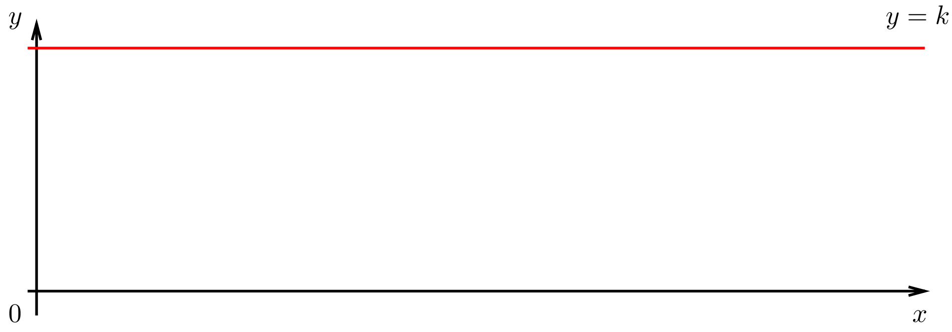
13) $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^x = \sqrt[n]{a^{mx}}$

14) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

ELEMENTÁRNE FUNKCIE

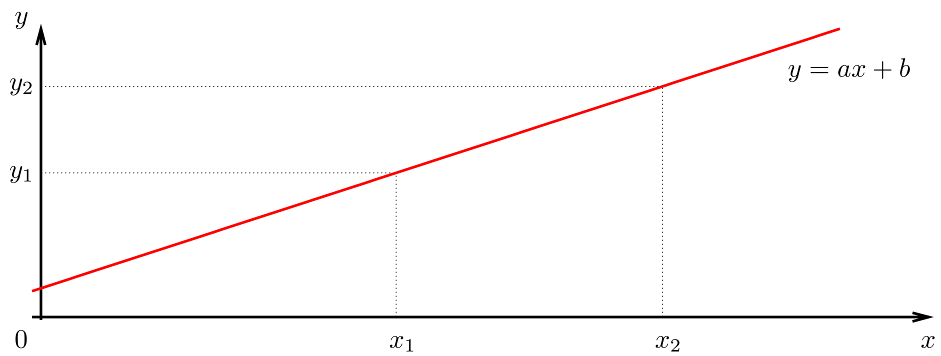
Konštantná funkcia – $\boxed{f:\ y = k,\ k \in \mathbb{R}}$ $\quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R},\ \mathcal{H}(f) = \{k\}.$

Grafom je priamka rovnobežná s osou x.



Lineárna funkcia – $\boxed{f:\ y = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0}$ $\quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R},\ \mathcal{H}(f) = \mathbb{R}.$

Grafom je priamka so smernicou a, ktorá na osi y vytína úsek b.



Kvadratická funkcia – $\boxed{f:\ y = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0}$

Grafom je parabola, ktorej os je rovnobežná s osou y.

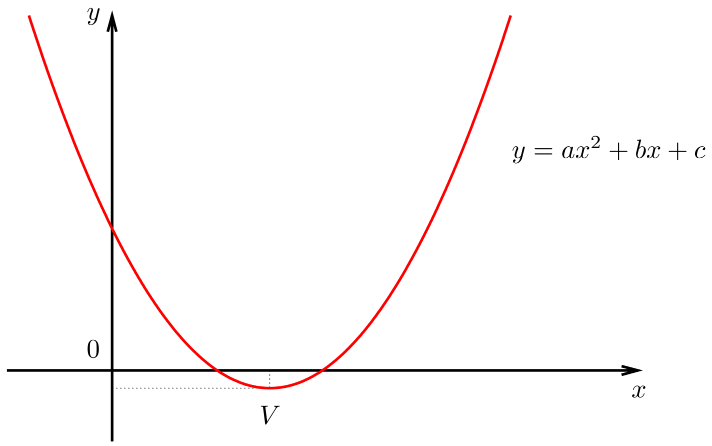
1) $a > 0$: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = \langle c - \frac{b^2}{4a}; \infty)$,

párna pre $b = 0$,

ohraničena zdola,

rastúca, prostá pre $x \in \langle -\frac{b}{2a}; \infty)$,

klesajúca, prostá pre $x \in (-\infty; -\frac{b}{2a}\rangle$.



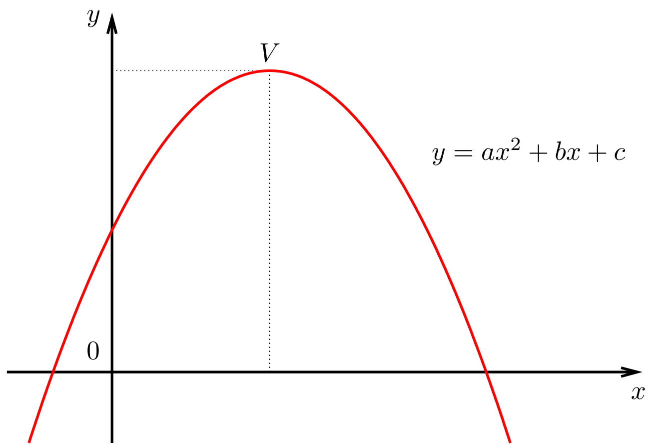
2) $a < 0$: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (-\infty; -\frac{b^2}{4a}\rangle$,

párna pre $b = 0$,

ohraničená zhora,

rastúca, prostá pre $x \in (-\infty; -\frac{b}{2a}\rangle$,

klesajúca, prostá pre $x \in \langle -\frac{b}{2a}; \infty)$.

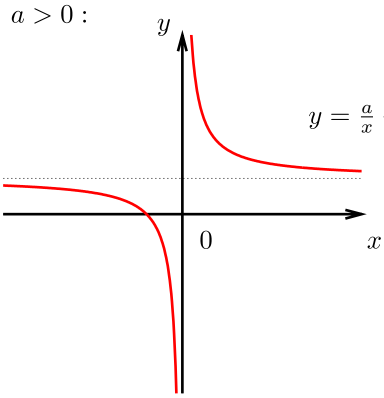


Nech x_1 a x_2 sú korene kvadratickej rovnice $ax^2+bx+c = 0$. Potom kvadratickú funkciu $y = ax^2+bx+c$ môžeme vyjadriť v tvare $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

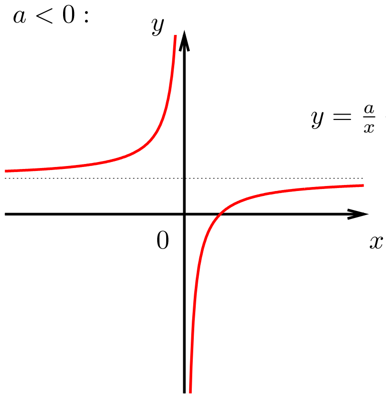
Hyperbolická funkcia – $\boxed{f:\ y = \dfrac{a}{x} + b,\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0}$

$\mathcal{D}(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$, $\mathcal{H}(f) = (-\infty; b) \cup (b; \infty)$.
Grafom je rovnoosová hyperbola.

$a > 0:$



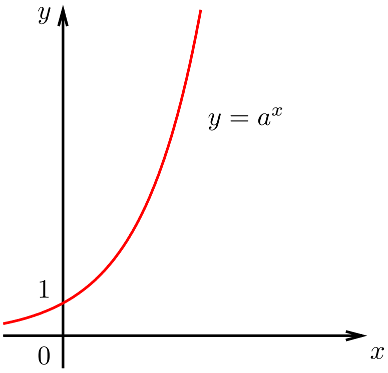
$a < 0:$



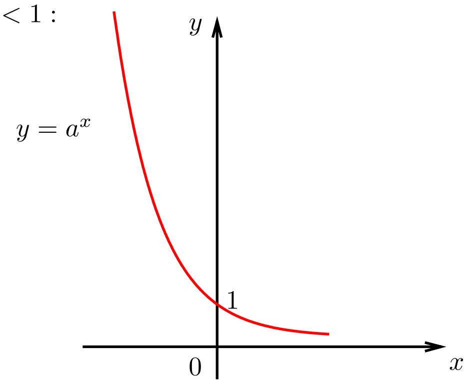
Exponenciálna funkcia – $\boxed{f:\ y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1}$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (0; \infty)$.

$a > 1:$



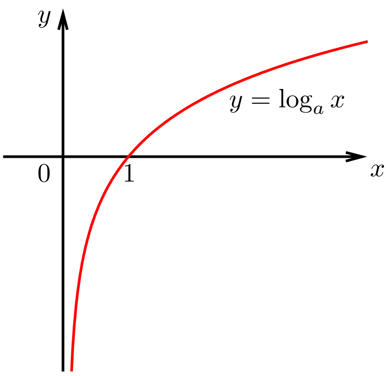
$0 < a < 1:$



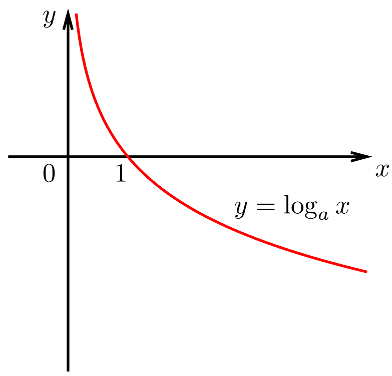
Logaritmická funkcia – $\boxed{f:\ y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1}$

$\mathcal{D}(f) = (0; \infty)$, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$.

$a > 1:$



$0 < a < 1:$



$\log x = \log_{10} x$ sa nazýva dekadickým logaritmom,
$\ln x = \log_e x$ sa nazýva prirodzeným logaritmom, (kde $e = 2.718\ldots$ je Eulerovo číslo).

Vlastnosti logaritmov:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a 1 = 0$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad \log_a a = 1$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x \qquad \log_a x = \frac{\log_y x}{\log_y a}$$

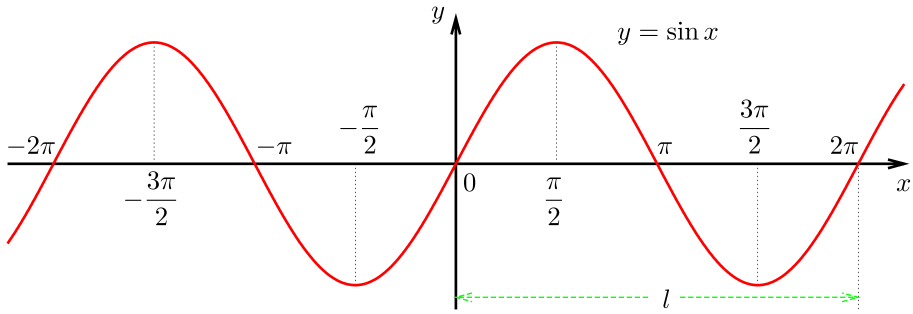
Goniometrické funkcie

$\boxed{f:\ y=\sin x}$ $\quad \mathcal{D}(f)=\mathbb{R},\ \mathcal{H}(f)=\langle -1;1\rangle.$

nepárna, preto $\quad \sin(-x)=-\sin x,$

ohraničená,

periodická s periódou $l=2\pi$.

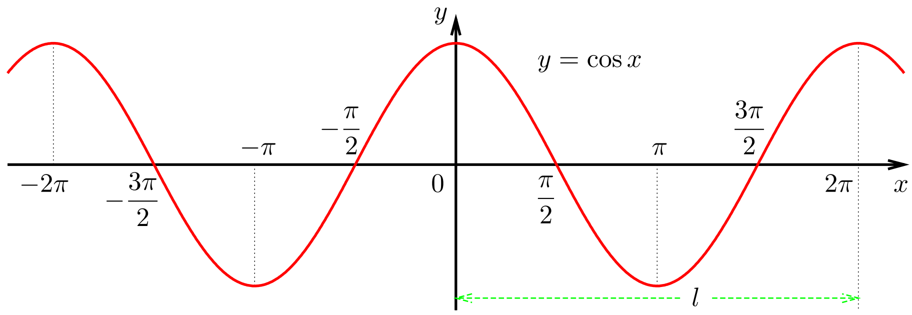


$\boxed{f:\ y=\cos x}$ $\quad \mathcal{D}(f)=\mathbb{R},\ \mathcal{H}(f)=\langle -1;1\rangle,$

párna, preto $\quad \cos(-x)=\cos x,$

ohraničená,

periodická s periódou $l=2\pi$.



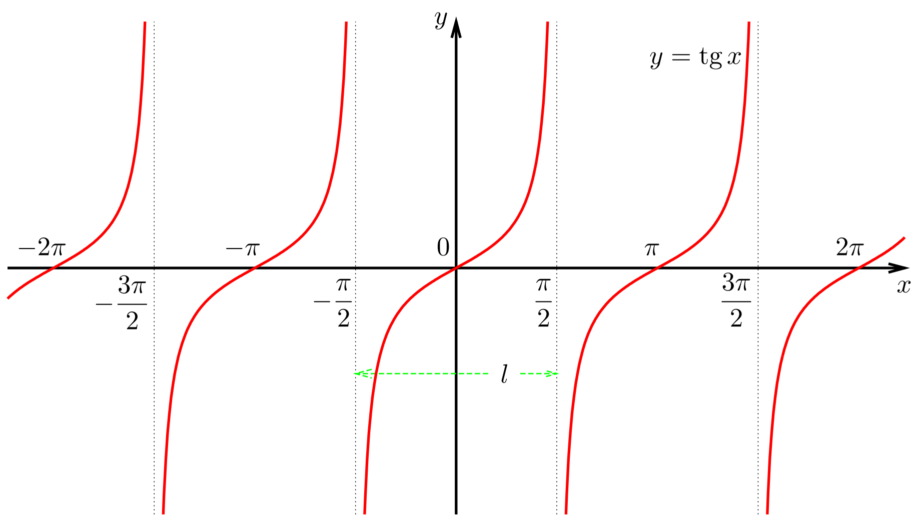
$\boxed{f:\ y=\operatorname{tg} x}$ $\quad \mathcal{D}(f)=\mathbb{R}-\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z}\}=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi),\ \mathcal{H}(f)=\mathbb{R},$

nepárna, preto $\quad \operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x,$

rastúca na každom intervale $I\subset\mathcal{D}(f)$,

neohraničená,

periodická s periódou $l=\pi$.



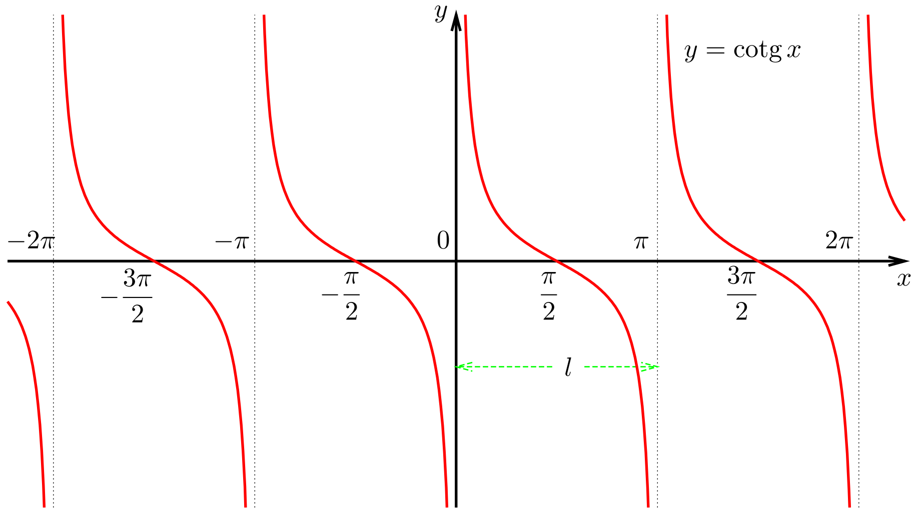
$\boxed{f:\ y = \operatorname{cotg} x}$ $\quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi; (k+1)\pi),\ \mathcal{H}(f) = \mathbb{R},$

nepárna, preto $\quad \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x,$

klesajúca na každom intervale $I \subset \mathcal{D}(f)$,

neohraničená,

periodická s periódou $l = \pi$.



Znamienka goniometrických funkcií

kvadrant	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$
I.	+	+	+	+
II.	+	-	-	-
III.	-	-	+	+
IV.	-	+	-	-

$$\sin(90^\circ - x) = \cos x \qquad \sin(90^\circ + x) = \cos x$$
$$\cos(90^\circ - x) = \sin x \qquad \cos(90^\circ + x) = -\sin x$$

Tabuľka základných hodnôt goniometrických funkcií

x	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0		0
$\operatorname{cotg} x$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$		0	

$$1\,\text{radián} = \frac{180^\circ}{\pi} \doteq 57^\circ\, 17'\, 45'' \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \doteq 0{,}0175$$

Základné vzťahy medzi goniometrickými funkciami

$\mathbf{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{1}{\operatorname{cotg} x}$

$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$

$\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$

Súčtové vzorce

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \dfrac{x+y}{2} \cdot \cos \dfrac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos \dfrac{x+y}{2} \cdot \sin \dfrac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \dfrac{x+y}{2} \cdot \cos \dfrac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \dfrac{x+y}{2} \cdot \sin \dfrac{x-y}{2}$

$\sin x \cdot \sin y = \dfrac{1}{2} \cdot [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

$\cos x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2} \cdot [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

$\sin x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2} \cdot [\sin(x-y) + \sin(x+y)]$

$\operatorname{tg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$

$\operatorname{cotg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} y \pm \operatorname{cotg} x}$

$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y}$

$\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y = \dfrac{\sin(y \pm x)}{\sin x \cdot \sin y}$

Vzorce pre výpočet funkcií dvojnásobných a polovičných uhlov

$\mathbf{\sin 2x = 2 \sin x \cos x}$

$\sin x = 2 \sin \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2}$

$\mathbf{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$

$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

$\sin \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$

$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

$\cos \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}$

$\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$

$\operatorname{cotg} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$

$\sin x = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$

$\cos x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$

KVADRATICKÉ ROVNICE

Rovnica $\boxed{ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}}$ sa nazýva kvadratickou rovnicou vo všeobecnom tvare. Korene x_1, x_2 kvadratickej rovnice vypočítame zo vzťahu

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

kde $D = b^2 - 4ac$ sa nazýva diskriminant kvadratickej rovnice.

Ak $D > 0$, tak kvadratická rovnica má dva rôzne reálne korene.
Ak $D = 0$, tak kvadratická rovnica má jeden reálny dvojnásobný koreň

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Ak $D < 0$, tak kvadratická rovnica má dva komplexne združené korene

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i \cdot \sqrt{|D|}}{2a},$$

kde i je imaginárna jednotka.
Ak x_1, x_2 sú korene kvadratickej rovnice, tak tzv. rozklad na súčin koreňových činiteľovmá tvar

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Ak $a = 1, b = p, c = q$, dostaneme normovanú kvadratickú rovnicu

$$x^2 + px + q = 0,$$

pričom pre jej korene x_1, x_2 platí

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

ABSOLÚTNA HODNOTA

Absolútna hodnota reálneho čísla je definovaná takto

1. ak $a \geq 0$, tak $|a| = a$,
2. ak $a < 0$, tak $|a| = -a$.

Vlastnosti absolútnej hodnoty

a) $|a| \geq 0$,

b) $|-a| = |a|$,

c) $-|a| \leq a \leq |a|$,

d) $|a + b| \leq |a| + |b|$,

e) $|ab| = |a| \cdot |b|$,

f) $\sqrt{a^2} = |a|$,

g) $|a| < k \;\Leftrightarrow\; -k < a < k \;\Leftrightarrow\; a \in (-k; k)$.

KOMPLEXNÉ ČÍSLA

Každé komplexné číslo sa dá zapísať v tvare $z = a + bi$, kde a je reálna časť, b je imaginárna časť komplexného čísla, i je imaginárna jednotka, pre ktorú platí $i^2 = -1$.

Nech $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ sú komplexné čísla. Potom

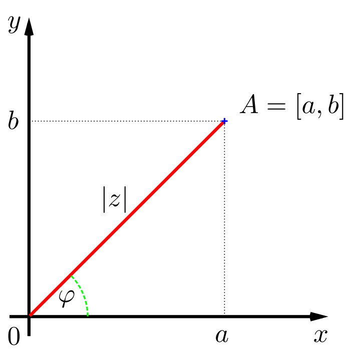
a) súčet $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$,

b) rozdiel $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$,

c) súčin $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$,

d) podiel $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}$, $\quad c + di \neq 0$. Číslo $c - di$ je komplexne združené číslo k číslu z_2.

Znázornenie komplexného čísla $z = a + bi$ vektorom $\overline{OA}$



Absolútna hodnota komplexného čísla je $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} \;\Rightarrow\; a = |z| \cdot \cos\varphi \qquad\qquad \sin\varphi = \frac{b}{|z|} \;\Rightarrow\; b = |z| \cdot \sin\varphi$$

Po dosadení do algebraického tvaru komplexného čísla $z = a + bi$ dostaneme goniometrický tvar $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$. Platí Eulerov vzťah

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi.$$

ANALYTICKÁ GEOMETRIA V ROVINE

Nech sú dané dva body $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$. Potom ich **vzdialenosť** je

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

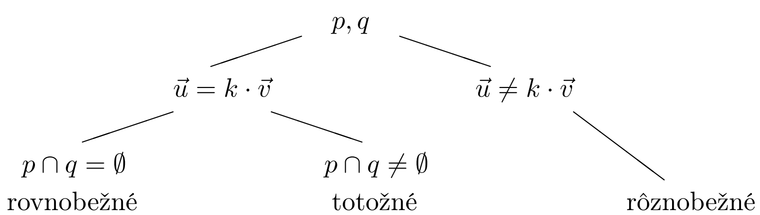
a **stred úsečky** AB je

$$S = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right].$$

Rovnice priamky:

1. **parametrické** rovnice –
   priamka je určená bodom $A = [a_1, a_2]$ a smerovým vektorom $\vec{u} = (u_1, u_2)$
   $x = a_1 + t \cdot u_1,$
   $y = a_2 + t \cdot u_2,\ t \in \mathbb{R},$
2. **všeobecný tvar** rovnice –
   $ax + by + c = 0,$ kde $\vec{n} = (a, b)$ je normálový vektor priamky, platí $\vec{n} \perp \vec{u}$,
3. **smernicový tvar** rovnice –
   $y = kx + q,$ kde $k = \operatorname{tg}\alpha$ je smernicou priamky, q je úsek, ktorý vytína priamka na osi y.

Vzájomná poloha dvoch priamok:
Priamka p je určená bodom A a smerovým vektorom $\vec{u}$, priamka q je určená bodom B a smerovým vektorom $\vec{v}$. Ich vzájomnú polohu určíme podľa schémy:



Uhol dvoch priamok:

$$\cos\alpha = \frac{|u_1 v_1 + u_2 v_2|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|},$$

kde $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, $\quad |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Vzdialenosť bodu $M = [x_0, y_0]$ od priamky $ax + by + c = 0$:

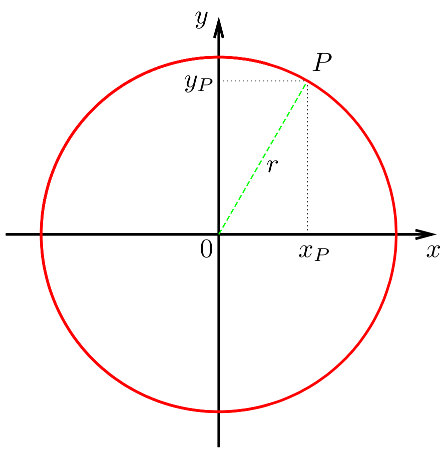
$$v = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

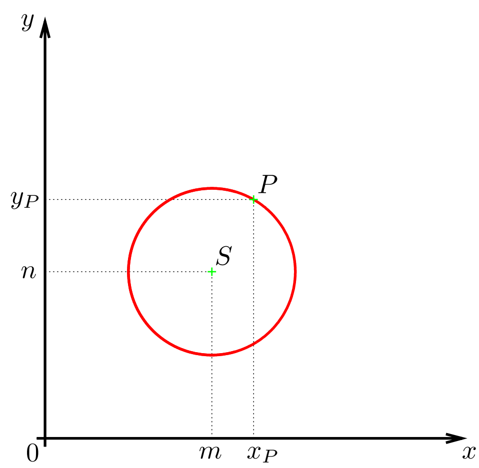
Kružnica
Stredový tvar rovnice kružnice $k(S;r)$, kde $P=[x,y]$ je jej ľubovoľný bod, $S=[0,0]$ je stred, $r=|SP|$ je polomer kružnice, je

$$x^2+y^2=r^2.$$

Ak $S=[m,n]$ je stred, tak rovnica kružnice je

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2.$$



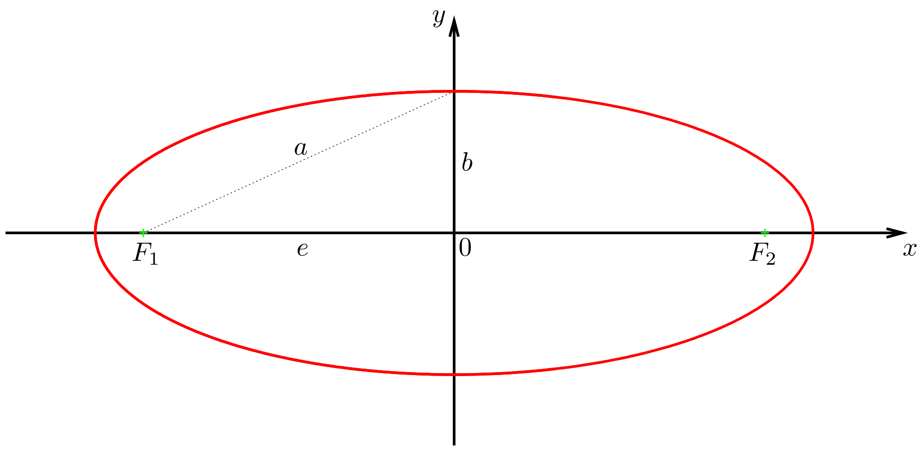


Elipsa
Stredový tvar rovnice elipsy, kde $P=[x,y]$ je jej ľubovoľný bod, je

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad S=[0,0], \quad a^2>b^2,$$

alebo

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1, \quad S=[m,n], \quad a^2>b^2.$$



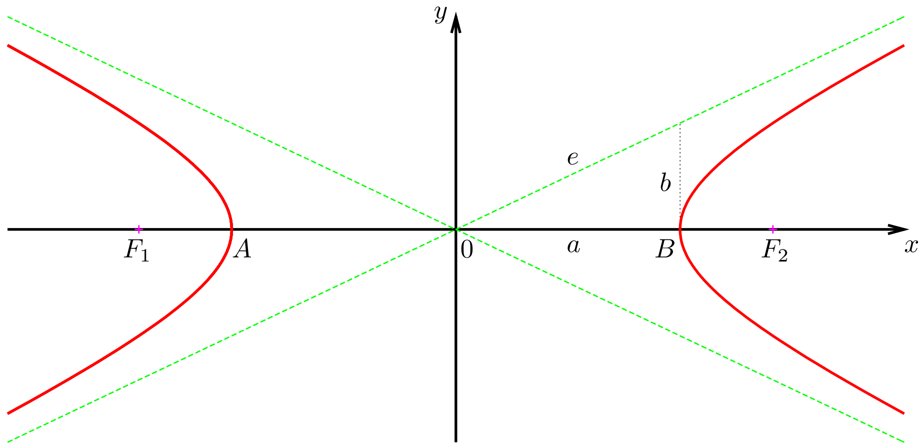
$e=\sqrt{a^2-b^2}$ – lineárna excentricita elipsy.
$F_1=[-e,0]$, $F_2=[e,0]$ – ohniská elipsy.

Hyperbola
Stredový tvar rovnice hyperboly, kde $P=[x,y]$ je jej ľubovoľný bod, je

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad S=[0,0],$$

alebo

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1, \quad S=[m,n].$$

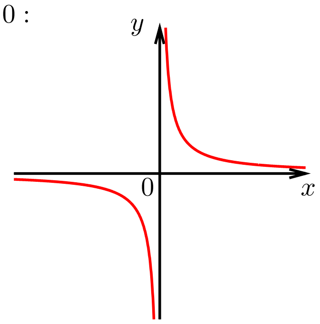


$e = \sqrt{a^2 + b^2}$ – lineárna excentricita hyperboly.
$F_1 = [-e, 0]$, $F_2 = [e, 0]$ – ohniská hyperboly.
A, B – vrcholy hyperboly.

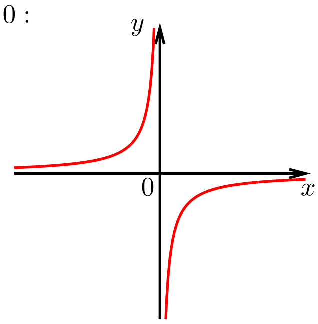
Asymptoty hyperboly majú rovnice: $y = \frac{b}{a} \cdot x, \quad y = -\frac{b}{a} \cdot x.$

Rovnoosová hyperbola $y = \frac{k}{x}$

$k > 0:$



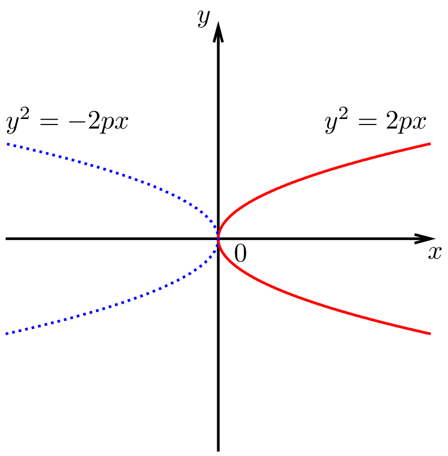
$k < 0:$

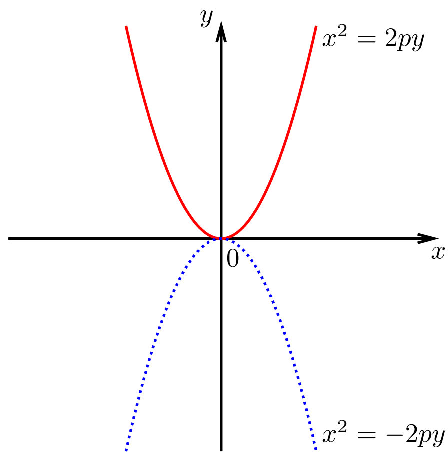


Parabola

Vrcholový tvar rovnice paraboly, kde $P = [x, y]$ je jej ľubovoľný bod, je

$$y^2 = \pm 2px, \quad \text{kde} \quad p > 0,\ V = [0,0],\ o = x,$$
$$x^2 = \pm 2py, \quad \text{kde} \quad p > 0,\ V = [0,0],\ o = y,$$
$$(y-n)^2 = \pm 2p(x-m), \quad \text{kde} \quad p > 0,\ V = [m,n],\ o \parallel x,$$
$$(x-m)^2 = \pm 2p(y-n), \quad \text{kde} \quad p > 0,\ V = [m,n],\ o \parallel y.$$





Derivačné vzorce:

$[c]' = 0,$ kde c je konštanta

$[x^\alpha]' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

$[e^x]' = e^x$

$[a^x]' = a^x \ln a$

$[\ln x]' = \dfrac{1}{x}$

$[\log_a x]' = \dfrac{1}{x \ln a}$

$[\sin x]' = \cos x$

$[\cos x]' = -\sin x$

$[\mathrm{tg}\, x]' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$[\mathrm{cotg}\, x]' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$[\arcsin x]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$[\arccos x]' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$[\mathrm{arctg}\, x]' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$[\mathrm{arccotg}\, x]' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$

$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Integračné vzorce:

$\int \mathrm{d}x = x + c$

$\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ pre $\alpha \neq -1$

$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + c$

$\int a^x \,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$ pre $a \neq 1$

$\int \dfrac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$

$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + c$

$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c$

$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x + c$

$\int \dfrac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\mathrm{cotg}\, x + c$

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin \dfrac{x}{a} + c, \\ -\arccos \dfrac{x}{a} + c \end{cases}$

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + c$

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + c, \\ -\dfrac{1}{a} \mathrm{arccotg} \dfrac{x}{a} + c \end{cases}$

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + c$

$\int c \cdot f(x) \,\mathrm{d}x = c \cdot \int f(x) \,\mathrm{d}x,$ kde $c \neq 0$

$\int [f(x) \pm g(x)] \,\mathrm{d}x = \int f(x) \,\mathrm{d}x \pm \int g(x) \,\mathrm{d}x$

$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$

$\int f'(x) \cdot g(x) \,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x$