



高等数学补充题(第5题) 别 _____ 班级 _____ 姓名 _____ 第 _____ 页

1. 求以下函数的渐近线方程

$$(1) y = 2x + \arctan x + 1$$

$$(2) y = \frac{(1+x)^2}{4(1-x)}$$

解: (1) 由于 $y = 2x + \arctan x + 1$ 在 x 上递增
故没有垂直渐近线

且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -\infty$
也没有水平渐近线

又注意到 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y(x)}{x} = 2$

$$\text{而 } y(x) - 2x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 1 \quad (x \rightarrow +\infty)$$

$$y(x) - 2x \rightarrow -\frac{\pi}{2} + 1 \quad (x \rightarrow -\infty)$$

$\Rightarrow y(x)$ 有两条斜渐近线

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty \text{ 有渐近线} \\ y = 2x + \frac{\pi}{2} + 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \rightarrow -\infty \text{ 有渐近线} \\ y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1. \end{cases}$$

(2) $x \rightarrow 1$ 为垂直渐近线
无水平渐近线

$$\text{注意到 } \frac{y(x)}{x} \rightarrow -\frac{1}{4} \quad x \rightarrow \infty \quad (\pm\infty)$$

$$\text{而 } \frac{y(x)}{x} + \frac{x}{4} = \frac{1+3x}{4(1-x)} \rightarrow -\frac{3}{4} \quad x \rightarrow \infty \quad (\pm\infty)$$

因此当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时

$$\text{有斜渐近线 } y = -\frac{x}{4} - \frac{3}{4}$$

2. 求不定积分

$$(1) \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 2 \cos x} dx$$

$$(2) \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$$

$$(1) \text{解: 原式} = 2 \int \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos^2 x + 2 \cos x} dx$$

$$\begin{aligned} &\text{令 } t = \cos x \text{ 得上式} = 2 \int \frac{-t dt}{1 + 2t - t^2} = \int \frac{2 - 2t - 2}{1 + 2t - t^2} dt \\ &= \int \frac{dt(1 + 2t - t^2)}{1 + 2t - t^2} - \int \frac{2dt}{1 + 2t - t^2} = |t| |1 + 2t - t^2| + \frac{1}{12} \ln \left| \frac{1 + 2t - t^2}{1 - t} \right| + C \end{aligned}$$

$$\text{再代入 } t = \cos x \text{ 得原式} = \ln |\sin^2 x + 2 \cos x| + \frac{1}{12} \ln \left| \frac{1 + 2 \cos x - \cos^2 x}{1 - \cos x} \right| + C \quad \square$$

$$c=1 \quad t = \tan x$$

从而原式 = $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{b^2} \int \frac{\sec^2 x dx}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \tan^2 x + 1}$

$$= \frac{1}{b^2} \int \frac{dt}{\left(\frac{a}{b}t\right)^2 + 1} = \frac{1}{ab} \int \frac{d\left(\frac{at}{b}\right)}{\left(\frac{at}{b}\right)^2 + 1} = \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a}{b} \tan x\right) + C$$

□

3. 求极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} x^x$$

$$(3) \text{求合适的常数 } a, b \in \mathbb{R}, \text{ 使得 } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + 4x - 1} - ax - b) = 0$$

解：(1) 原式 = $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1$ (注：此题不用洛必达法则，为什么？)

(2) 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x} = 1$
 (指数函数
 连续性)

(3) 对 $\sqrt{2x^2 + 4x - 1}$ 用麦克劳林(MacLaurin)公式

$$\sqrt{2x^2 + 4x - 1} = \sqrt{2x} \sqrt{1 + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2}\right)} = \sqrt{2x} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\left(\text{用}(1+t)^{p^2} \text{ 的}\right) \quad = \sqrt{2x} + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4x}$$

$$\text{于是 } \sqrt{2x^2 + 4x - 1} - ax - b = (\sqrt{2} - a)x + (\sqrt{2} - b) - \frac{\sqrt{2}}{4x} + o(1)$$

为使上式在 $x \rightarrow \infty$ 时极限为 0

只有 $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$

□



南開大學 作業紙

Nankai University

系別_____ 班級_____ 姓名_____ 第_____頁

4. 求以下定积分

$$(1) \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx \quad (3) I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

解：(1) 令 $u = \sqrt{e^x - 1}$, $x = \ln(u^2 + 1)$

$$\Rightarrow \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = \int_0^1 \frac{2u^2}{1+u^2} du = 2 \left(\int_0^1 1 du - \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du \right) \\ = (2u - 2 \arctan u) \Big|_0^1 \\ = 2 - \frac{\pi}{2}$$

(2) 令 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx \quad \text{令 } y = \frac{\pi}{2} - x$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sqrt{\cos y}}{\sqrt{\cos y} + \sqrt{\sin y}} d(\frac{\pi}{2} - y)$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

(3) $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx \quad \text{令 } x = \cos t$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx$$

由上一次参考题 T10 可得 $I_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$
(第 14 周)

5. 求极限

$$(1) \text{ 设 } f \text{ 连续}, \text{ 则} \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{x^2} \frac{f(t) dt}{x^2}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2+x^2} + \frac{1}{n^2+2^2x^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2x^2} \right)$$

解: (1) 由于 f 连续 故 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 可导

$$\text{且满足 } F'(x) = f(x)$$

$$\text{从而 } \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{x^2} \frac{f(t) dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x^2} f(t) dt}{x^2}$$

$$\frac{0}{0} \text{型未定式} \quad \text{用 L'Hospital 法则} \quad \text{有} \quad \lim_{x \rightarrow 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(F(x^2) - F(x))}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x f(x^2) - 3x^2 f(x)}{2x}$$

$$= f(0)$$

□

$$(2) \text{ 若 } x=0, \text{ 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right)}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{若 } x \neq 0, \text{ 原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{n^2 + (kx)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{kx}{n}\right)^2} \\ (\text{由定积分定义}) &= \int_0^x \frac{1}{1+y^2} dy = \arctan x \end{aligned}$$

$$\text{综上 原式} = \begin{cases} 1 & x=0 \\ \arctan x & x \neq 0 \end{cases}$$

□



南開大學 作業紙

Nankai University

系別_____ 班級_____ 姓名_____ 第_____頁

6. (本題可以考慮分段估計的方法)

(1) 設 f 在 $[a, b]$ 非連續，求證： $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b f^n(x) dx \right]^{\frac{1}{n}} = \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}$

(2) 設 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上連續，求證： $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1)$

ii) 証明：我們設 $M = \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}$

-右面有 $f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$

故 $\left(\int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\int_a^b M^n dx \right)^{\frac{1}{n}} = M(b-a)^{\frac{1}{n}}$
 $\xrightarrow{n \rightarrow \infty}$ 得 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} \leq M$

(注：這里由於我們不知道 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f^n(x) dx$ 是否存在
 故用上极限，如果对上极限不熟悉可以

先把 $\left(\int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} \leq M(b-a)^{\frac{1}{n}}$ 放在这

另一方面，求出其大於等於一個極限為 M 的表达式

另一面，設在 $x_0 \in [a, b]$ 处 f 取得最大值 M

由 f 之連續性 $\exists \delta > 0$ s.t. $\forall y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b] \Rightarrow f(y) > M - \varepsilon$

故有 $\left(\int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\int_a^b f^n(x_0) dx \right)^{\frac{1}{n}} \geq (M - \varepsilon) \cdot l^{\frac{1}{n}}$

再令 $n \rightarrow \infty$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} \geq M - \varepsilon$ (這里 l 为区间
 $[\alpha, \beta] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 長度)
 因此，原式 $= M = \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}$ \square

(2) 为了证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1)$

首先我们观察到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(1) dx = f(1)$$

故只需证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \int_0^1 x^n f(x) dx - n \int_0^1 x^n f(1) dx \right) = 0$

$$\begin{aligned} & \left| n \int_0^1 x^n f(x) dx - n \int_0^1 x^n f(1) dx \right| = \left| n \int_0^1 x^n (f(x) - f(1)) dx \right| \\ & \leq n \int_0^1 x^n |f(x) - f(1)| dx \end{aligned}$$

由于 f 在 $[0, 1]$ 上连续，因此对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$

$$\text{such that } |f(x) - f(1)| < \varepsilon \quad \forall x \in (1-\delta, 1]$$

$$\begin{aligned} \text{从而} \quad & n \int_0^1 x^n |f(x) - f(1)| dx = n \int_{1-\delta}^1 x^n |f(x) - f(1)| dx \\ & + n \int_0^{1-\delta} x^n |f(x) - f(1)| dx \\ & \leq n \int_{1-\delta}^1 x^n \cdot \varepsilon dx + n \int_0^{1-\delta} (1-\delta)^n \cdot 2M dx \\ & = (1 - (1-\delta)^{n+1}) \cdot \varepsilon + 2M(1-\delta) \cdot n \cdot (1-\delta)^n \end{aligned}$$

这里 M 是 $\max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \int_0^1 x^n |f(x) - f(1)| dx \right) \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

\Rightarrow 上述极限为 0

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(1) dx \\ &= f(1) \quad \square \end{aligned}$$



南开大学 作业纸

Nankai University

系别_____ 班级_____ 姓名_____ 第_____页

7. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积

(1) 若 $\int_a^b f(x)dx \neq 0$, 证明: $\exists \xi \in (a, b)$ s.t. $\int_a^\xi f(x)dx = \int_\xi^b f(x)dx$

(2) 若无 (1) 的条件, 结论是否成立?

(1) 证明: $\forall F(x) = \int_a^x f(t)dt - \frac{1}{2} \int_a^b f(x)dx$

(由于 f 可积, 可知 $F(x)$ 连续于 $[a, b]$)

由于 $\int_a^b f(x)dx \neq 0 \Rightarrow F(a) \cdot F(b) = -\frac{1}{4} (\int_a^b f(x)dx)^2 < 0$

由零点定理, $\exists \xi \in [a, b]$ s.t. $F(\xi) = 0$

$$\text{即 } \int_a^\xi f(t)dt = \frac{1}{2} \int_a^b f(x)dx$$

$$\text{又 } \int_a^\xi f(t)dt + \int_\xi^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_\xi^b f(t)dt = \int_a^\xi f(t)dt = \frac{1}{2} \int_a^b f(x)dx$$

(2) 否, 参照 $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$, $f(x) = \sin x$

□

8. $0 < a < b$, f 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $\int_a^b f(x)dx = 0$, 求证: $\exists \xi \in (a, b)$

$$\text{使 } \int_a^\xi f(x)dx = \xi f(\xi)$$

证明: $\forall F(x) = \frac{1}{2} \int_a^x f(t)dt$

(由 $a, b > 0$) $\Rightarrow F(a) = F(b) = 0$

由 $f \in C[a, b]$ 可得 F 在 (a, b) 上可导, 在 $[a, b]$ 连续

(Rolle 定理) $\Rightarrow \exists \xi \in (a, b)$ s.t. $F'(\xi) = 0 \Rightarrow \int_a^\xi f(x)dx = \xi f(\xi)$ □

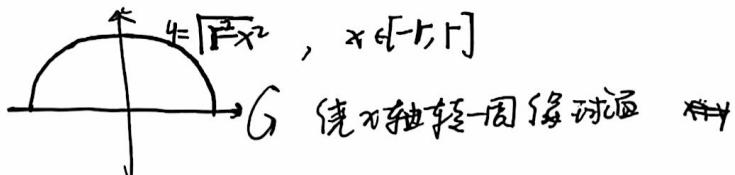
9. (定积分应用题)

(1) 求半径为 r 的球面面积

(2) 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 1$) 绕 x 轴旋转一周的椭球面面积

(3) 求心形线 $r = a(1 + \cos\theta)$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $a > 0$ 的周长

(1)



S 绕 x 轴转一周得球面 \Rightarrow

我们利用 旋转曲面 面积公式: $S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

$$\text{设 } f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{得} \quad S_{\text{球面}} = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{(-x)^2}{r^2 - x^2}} dx \\ = 4\pi \int_0^r r dx = 4\pi r^2 \quad \square$$

(2) 用参数方程 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$

(上半椭圆参数方程)

设 $c^2 = a^2 - b^2$, $\theta = \frac{c}{a}$ 为离心率
($c > 0$)

我们利用 旋转曲面 面积公式: $S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ ($y(t) \geq 0$)

$$\begin{aligned} \text{解} \quad S &= 2\pi \int_0^{\pi} b \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = 4\pi b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} dt \\ &= -4\pi b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 t} d(\cos t) \stackrel{(\cos t = u)}{=} 4\pi b a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^{2u^2}} du \\ &= 4\pi ab \left(\frac{1}{2} u \sqrt{1 - e^{2u^2}} + \frac{1}{2e} \arcsin eu \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi ab \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{c} \arcsin \frac{c}{a} \right) \\ &= 2\pi b \left(b + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right) \quad \square \end{aligned}$$



南开大学 作业纸

Nankai University

系别_____ 班级_____ 姓名_____ 第_____页

$$(3) r(\theta) = a(1 + \cos \theta) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad a > 0$$

$$r'(\theta) = -a \sin \theta$$

由曲线长度公式 (参数形式) = $S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2} d\theta$
(极坐标)

$$\Rightarrow S = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2} d\theta = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8a$$

□

10. 设 f 在 $[0, 1]$ 上连续可微, 定义: $\varepsilon_n = \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$
求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \varepsilon_n$ (Hint: Taylor公式, Riemann积分定义)

解: $\varepsilon_n = \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$
 $= \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$

若 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

注意到: $\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx = F\left(\frac{i}{n}\right) - F\left(\frac{i-1}{n}\right)$

(在 $\frac{i}{n}$ 处用 Taylor 展开) $= F'\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} - \frac{1}{2} F''\left(\frac{i}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
 $= \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \frac{1}{2} f'\left(\frac{i}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\Rightarrow n \varepsilon_n = n \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f'\left(\frac{i}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right)^2 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$

f 在 $[0, 1]$ 的 Riemann 和 $= \underline{\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)}$ $+ o\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow -\frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) dx = \frac{f(1) - f(0)}{2}$
(由 Riemann 和的定义, $n \rightarrow \infty$) □