线性代数–行列式作业解答

黄申为

2022 年 4 月 6 日

1. **设 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2),P_3(x_3,y_3)$ 是平面上的三个不共线的点. 证明三角形 $\Delta_{P_1P_2P_3}$ 的面积为 $\frac{1}{2}|D|$, 其中**

$$D=\det\begin{pmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{pmatrix}.$$

Solution. 首先我们假设 P_1 是原点. 则由二阶行列式的几何意义,

$$\begin{aligned}\Delta_{P_1P_2P_3}\text{ 的面积} &= \frac{1}{2}|\det\begin{pmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{pmatrix}|\\ &= \frac{1}{2}|\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{pmatrix}|.\end{aligned}$$

因此命题对 P_1 是原点的情况成立. 现在假设 P_1 是任意点, 则 P_2 和 P_3 在以 P_1 为原点的坐标系下的坐标分别为 (x_2-x_1,y_2-y_1) 和 (x_3-x_1,y_3-y_1). 因此,

$$\Delta_{P_1P_2P_3}\text{ 的面积}=\frac{1}{2}|\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & x_2-x_1 & y_2-y_1\\ 1 & x_3-x_1 & y_3-y_1\end{pmatrix}|$$

利用行列式的性质得,

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ 1 & x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ 1 & x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 1 & x_1 & y_2-y_1 \\ 1 & x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2-y_1 \\ 1 & x_3 & y_3-y_1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2-y_1 \\ 1 & x_3 & y_3-y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_1 \\ 1 & x_3 & y_1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

所以命题得证.

2. **用定义计算三阶行列式**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

Solution. 用沙路法计算得 $(b-a)(c-a)(c-b)$.

3. **写出四阶行列式含 $a_{12}a_{23}$ 的项.**

Solution. 根据行列式的定义, 含 $a_{12}a_{23}$ 的项为 $(-1)^{\tau(2341)}a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} = -a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ 与 $(-1)^{\tau(2314)}a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} = a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$.

4. **判断排列 $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$ 的奇偶性.**

Solution. 首先计算该排列的逆序数为 $1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. 因此, 当 n 被 4 除余 0 或 1 时, 为偶排列; 当 n 被 4 除余 2 或 3 时, 为奇排列.

5. **若 $j_1j_2\ldots j_n$ 的逆序数为 k, 求 $j_n\ldots j_2j_1$ 的逆序数.**

Solution. $\frac{n(n-1)}{2} - k$.

6. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

Solution. 由行列式的定义可知, 行列式求和展开中只有两项是非零的, 即排列 $12\cdots n$ 与 $23\cdots n1$ 所对应的项. 所以, 该行列式就等于 $x^n + (-1)^{n-1}y^n$.

7. 设

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix},$$

其中 D 的 (i,j) 元的代数余子式记作 A_{ij}, 求 $A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$.

Solution.

$$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\1&3&-2&2\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix}1&3&-2&2\\-5&1&3&-4\\3&1&-1&2\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+5r_1,r_3-3r_1,r_4-r_1} -\begin{vmatrix}1&3&-2&2\\0&16&-7&-6\\0&-8&5&-4\\0&-8&5&-5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+\frac{1}{2}r_2,r_4+\frac{1}{2}r_2} -\begin{vmatrix}1&3&-2&2\\0&16&-7&-6\\0&0&\frac{3}{2}&-1\\0&0&\frac{3}{2}&-2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3} -\begin{vmatrix}1&3&-2&2\\0&16&-7&-6\\0&0&\frac{3}{2}&-1\\0&0&0&-1\end{vmatrix}$$

$$=24.$$

8. **计算下列行列式** (D_k **为** k **阶行列式**):

(a) $D_n=\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$.

Solution. $(x-a)^{n-1}[x+(n-1)a]$, 解法与例题相同.

(b) $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & \cdots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n & n & n \\ n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}$, 这里 $n \geq 3$.

Solution. 从最后一列开始, 后一列减去前一列, 将副对角线以下的元素都变为 0, 而副对角线上的元素为 $1, \ldots, 1, n$. 从而行列式等于 $(-1)^{n(n-1)/2} n$.

(c) $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$.

Solution.

$$D_n \xlongequal{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1 - \frac{r_i}{a_i}} \begin{vmatrix} 1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\cdots\frac{a_1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \frac{1}{a_1} + \cdots \frac{1}{a_n}\right).$$

9. 设

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

满足对所有 $i, j = 1, 2, \ldots, n$ 有 $a_{ij} = -a_{ji}$. 证明当 n 为奇数时 $D_n = 0$.

Solution. 首先注意对任意的 $i = 1, 2, \ldots, n$, 有 $a_{ii} = 0$. 因此,

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
&\xlongequal{\text{每行提取-1}} (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
&\xlongequal{a_{ij}=-a_{ji}} (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & 0 & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
&\xlongequal{\text{行列式性质 1}} (-1)^n D_n.
\end{aligned}
$$

因此当 n 为奇数时有 $D_n = -D_n$, 从而 $D_n = 0$.

10. • 一个图 G 是一个二元组 (V, E), 其中 V 称为 G 的顶点集, 而 E 是 V 中若干二元子集的集合, 称为 G 的边集. 比如

$$G = (\{v_1, v_2, v_3\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}\})$$

是一个图. 直观的我们可以用一个圆圈代表 V 中的每个顶点, 并且如果 $\{v, u\}$ 是 E 中的元素, 那么我们在代表 u 和 v 的圆圈之间连一条线, 如下图所示.

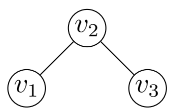

图 1: 一个图的例子.

- 给定一个图 $G=(V,E)$, 其中 $V=\{1,2,\ldots,n\}$, 我们可以按照如下方式定义一个与 G 关联的多元多项式:

  $$A(G)=\prod_{i<j:\{i,j\}\in E}(x_j-x_i),$$

  其中 x_j 是对应顶点 j 的变量. 比如与 $G=(\{1,2,3\},\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\})$ 关联的多项式为

  $$A(G)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2).$$

  注意到上述式子乘开后, 若不合并同类项应该有 $2^3=8$ 项: 每项对应从每个 x_j-x_i 中选择一个变量的选择方式, 也就是

  $$A(G)=x_2x_3^2-x_1x_2x_3-x_1x_3^2+x_1^2x_3-x_2^2x_3+x_2^2x_1+x_1x_2x_3+x_1^2x_2.$$

  但是合并同类项后, 其中 $+x_1x_2x_3$ 与 $-x_1x_2x_3$ 抵消, 最后只剩下 6 项:

  $$A(G)=x_2x_3^2-x_1x_3^2+x_1^2x_3-x_2^2x_3+x_2^2x_1+x_1^2x_2.$$

  对于一个一般的有 m 条边的图 G, 合并同类项前 $A(G)$ 展开中应该有 2^m 项, 但是合并同类项后剩下的项数可能会小于 2^m.

- 给定一个图 G, 如果 G 中任何两条顶点之间都有边, 那么 G 就称为是完全图, 有 n 个顶点的完全图记做 K_n. 问题: 求 K_n 的关联多项式 $A(K_n)$ 合并同类项后的项数.

Solution. 根据关联多项式的定义以及范德蒙德行列式的性质,

$$\begin{aligned}A(K_n)&=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\\&=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

注意到在范德蒙德行列式展开中任何两项都不同, 故 $A(K_n)$ 展开中有 $n!$ 项.