参考答案.

1、C.

提示：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$.

2、C.

原式 $=2^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}}$，由等比数列求和可求解.

3、C.

4、$\frac{1}{6}$.

由已知，$y(0)=f(2e^0-1)=f(1)=4$，且 y 单调且连续可导.

∴ y的反函数在 $y=4$ 时，$x=0$.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{df}{d(2e^x-1)}\cdot\frac{d(2e^x-1)}{dx}\right|_{x=0}=f'(1)\cdot 2e^0=6.$$

$$\therefore \left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=4}=1\Big/\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{1}{6}.$$

5. $-\frac{1}{4}$.

令 $x=\frac{1}{t}$，则有：

分子分母同乘 $(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})$.

$$\text{原式}=\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}=\frac{(\sqrt{1+2t}+1)^2-4(1+t)}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})}.$$

分子分母同乘 $(\sqrt{1+2t}+1)^2$

$$=\frac{2(\sqrt{1+2t}-1-t)}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})}=\frac{2(\sqrt{1+2t}-1-t)(\sqrt{1+2t}+1)^2}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})(\sqrt{1+2t}+1)^2}$$

$$=\frac{4(\sqrt{1+2t}-(1+t))(\sqrt{1+2t}+(1+t))}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})(\sqrt{1+2t}+1)^2}=\frac{-4t^2}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})(\sqrt{1+2t}+1)^2}$$

$\Rightarrow x\to+\infty$ 时，$t\to 0$，∴ 上式 $\to -\frac{1}{4}$.

6、由柯西中值定理，

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}-e^{ax}}{\sin bx-\sin ax}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\xi x}}{\cos\xi x}=1.$$

7、使用数学归纳法，

$n=1$ 时显然成立，假设 $n=k$ 时也成立，对于 $n=k+1$ 时，有：

$$\left(\frac{k+2}{e}\right)^{k+1}=\left(\frac{k+1}{e}\right)^k\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^k\left(\frac{k+2}{e}\right)<k!\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}\cdot\left(\frac{k+1}{k+2}\right)\cdot\left(\frac{k+2}{e}\right)$$

$$=k!\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\cdot(k+1)\cdot\frac{1}{e},\qquad \text{由 }\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}<e.$$

$$<k!\cdot(k+1)\cdot e\cdot\frac{1}{e}$$

$$=(k+1)!\qquad \text{归纳成立.}$$

8、设 $g(x)=\frac{1}{x}$，$F(x)=\frac{f(x)}{x}$，由于 $x_1x_2>0$，∴ $x=0$ 不在 $[x_1,x_2]$ 中.

∴ $g(x)$ 和 $F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上可微.

且在区间 (x_1,x_2) 上，$g'(x)\neq 0$，$g(x_1)\neq g(x_2)$.

∴ $g(x)$，$F(x)$ 满足柯西中值定理条件.

$\Rightarrow$ 在 (x_1,x_2) 内至少存在一点 ξ，使 $\frac{F(x_1)-F(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)}=\frac{F'(\xi)}{g'(\xi)}$，

即
$$\frac{\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_2)}{x_2}}{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}}=\frac{\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}\Rightarrow\frac{x_1f(x_2)-x_2f(x_1)}{x_1-x_2}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

即
$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

9、 设 $|f(x)|$ 在区间 $[0,\frac{3}{4}]$ 上的最大值为 $A=|f(x_0)|$.

不妨设 $x_0>0$，则 $A=|f(x_0)-f(0)|=|f'(\xi)x_0|$ （由拉格朗日中值定理）

$\leqslant |f(\xi)x_0| \leqslant Ax_0 \leqslant \frac{3}{4}A$. $\therefore A=0$.

$\therefore$ 在区间 $[0,\frac{3}{4}]$ 上，$f(x)\equiv 0$. $\therefore f(\frac{3}{4})=0$.

类似地，设 $|f(x)|$ 在区间 $(\frac{3}{4},\frac{3}{2}]$ 上最大值为 $B=|f(x_1)|$.

则 $B=|f(x_1)-f(\frac{3}{4})|=|f'(\xi_1)(x_1-\frac{3}{4})|\leqslant|f(\xi_1)|(x_1-\frac{3}{4})\leqslant\frac{3}{4}B$.

$\therefore B=0$.

综上，$f(x)\equiv 0$.

10. 附加题：

① $\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}=2\cos^2\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}-1$

② $\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}=\cos\frac{2\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}=2\cos^2\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}-1$.

二倍角公式.
$\cos x=-\cos(\pi-x)$

由①=②，$2\cos^2\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}-1=2\cos^2\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}-1$

$\Leftrightarrow 2(\cos^2\frac{2\pi}{5}-\cos^2\frac{\pi}{5})=-(\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5})$

$\Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}=-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}$.

证毕