线性代数–欧氏空间作业解答

黄申为

2022 年 3 月 30 日

1. 设 V 是由全体 n 阶对称矩阵关于通常矩阵的线性运算构成的实线性空间. 对于任意的矩阵 $A, B \in V$, 定义

   $$< A, B >:= \mathrm{Tr}(AB),$$

   其中 $\mathrm{Tr}(AB)$ 表示 AB 的迹. 证明函数 $< \cdot, \cdot >$ 是 V 中的一个内积.

   Solution. 显然 $< \cdot, \cdot >$ 满足内积的线性性. 下面证对称性和非负性.

   - 因为 A 和 B 是对称阵, 故

     $$\begin{aligned} < A, B > &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{ks} b_{sk} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{sk} b_{ks} \\ &=< B, A > . \end{aligned}$$

   - 设 $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. 则

     $$\begin{aligned} < A, A > &= \sum_{k=1}^{n} ||a_k||^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

     且 $< A, A >= 0$ 当且仅当 $A = 0$.

2. 设 V 是有限维欧氏空间. 证明三角不等式: $||\alpha + \beta|| \leq ||\alpha|| + ||\beta||$.

Solution.

$$\begin{aligned}||\alpha+\beta||^2 &=<\alpha+\beta,\alpha+\beta> \\ &=<\alpha,\alpha>+<\beta,\beta>+2<\alpha,\beta> \\ &\overset{\text{CS 不等式}}{\leq} ||\alpha||^2+||\beta||^2+2||\alpha||||\beta|| \\ &=(||\alpha||+||\beta||)^2,\end{aligned}$$

故 $||\alpha+\beta|| \leq ||\alpha||+||\beta||$.

3. 试求满足如下条件的五维向量 α 和 β:

- α 与 β 正交;
- 它们均与矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&2&1\\1&0&0&1&-2\\2&1&-1&0&2\end{pmatrix}$ 的各行向量正交.

Solution. 因为 $R(A)=3$, 故满足要求的向量为 $Ax=0$ 解空间的一个正交基. 因此只需先求出 $Ax=0$ 的基础解系, 然后再对其进行施密特正交化即可. 由于基础解系不唯一, 答案不唯一. 具体计算过程如下.

$$\begin{aligned}A=\begin{pmatrix}1&1&1&2&1\\1&0&0&1&-2\\2&1&-1&0&2\end{pmatrix} &\overset{r_2-r_1,r_3-2r_1}{\sim} \begin{pmatrix}1&1&1&2&1\\0&-1&-1&-1&-3\\0&-1&-3&-4&0\end{pmatrix} \\ \overset{r_3-r_2}{\sim} \begin{pmatrix}1&1&1&2&1\\0&-1&-1&-1&-3\\0&0&-2&-3&3\end{pmatrix} &\overset{r_2\times -1,r_3\times -\frac{1}{2}}{\sim} \begin{pmatrix}1&1&1&2&1\\0&1&1&1&3\\0&0&1&3/2&-3/2\end{pmatrix} \\ \overset{r_1-r_3,r_2-r_3}{\sim} \begin{pmatrix}1&1&0&1/2&5/2\\0&1&0&-1/2&9/2\\0&0&1&3/2&-3/2\end{pmatrix} &\overset{r_1-r_2}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0&1&-2\\0&1&0&-1/2&9/2\\0&0&1&3/2&-3/2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

取 x_4 和 x_5 为自由未知量并令 $\begin{pmatrix}x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, 得基础解系为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\\2\\0\end{pmatrix}, \quad \alpha_2=\begin{pmatrix}4\\-9\\3\\0\\2\end{pmatrix}.$$

再对 α_1 和 α_2 进行施密特正交化:

$$\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{<\alpha_2, \beta_1>}{<\beta_1, \beta_1>}\beta_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 10 \\ -68 \\ -12 \\ 26 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

所以 β_1 与 β_2 即为所求.

4. **设 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一个标准正交基且由 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ 到基 $\eta_1, \ldots, \eta_n$ 的过渡矩阵为 Q. 证明: $\eta_1, \ldots, \eta_n$ 为标准正交基的充要条件是 Q 为正交矩阵.**

Solution. 令 q_i 为 Q 的第 i 列. 因为 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ 是标准正交基, $<\eta_i, \eta_j> = q_i^T q_j$, 从而 $\eta_1, \ldots, \eta_n$ 为标准正交基当且仅当

$$q_i^T q_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

即 Q 为正交阵.

5. **设 V 是 n 维欧氏空间, α 是 V 中的一个固定向量.**

   (a) **证明 $M = \{\beta \in V : <\beta, \alpha> = 0\}$ 是 V 的一个子空间.**

   (b) **证明当 $\alpha \neq 0$ 时, $\dim(M) = n - 1$.**

Solution.

(a) 给定 $\beta, \gamma \in M$,

$$\begin{aligned} <k\beta + \ell\gamma, \alpha> &= k <\beta, \alpha> + \ell <\gamma, \alpha> \\ &= 0. \end{aligned}$$

即 M 对加法和数乘封闭. 由子空间判定定理, M 是 V 的子空间.

(b) 首先根据扩充基定理, 可将 $\alpha_1 := \alpha$ 扩充成 V 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. 再对 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 采用施密特正交化过程得到 V 的一组正交基 $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. 下证 $M = L(\beta_2, \ldots, \beta_n)$, 从而 $\dim(M) = n - 1$.

- 因为 β_i $(2 \leq i \leq n)$ 与 α 正交, 由内积的线性性可得 $L(\beta_2, \ldots, \beta_n) \subseteq M$.

- 现证 $M \subseteq L(\beta_2, \dots, \beta_n)$. 任取 $\gamma \in M$. 由于 $\beta_1 = \alpha, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是一个基, γ 可由 $\alpha, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性表示:

$$\gamma = x\alpha + x_2\beta_2 + \cdots + x_n\beta_n. \tag{1}$$

  在 (1) 两边用 α 作内积:

$$\begin{aligned} 0 &=< \gamma, \alpha > \\ &= x < \alpha, \alpha > + \sum_{i=2}^{n} x_i < \beta_i, \alpha > \\ &= x < \alpha, \alpha > . \end{aligned}$$

  由于 $\alpha \neq 0$, 从而 $x = 0$, 所以 $\gamma = x_2\beta_2 + \cdots + x_n\beta_n \in L(\beta_2, \dots, \beta_n)$.

6. **找一个次数不超过 3 的实系数多项式 $u(x)$ 使得该多项式是闭区间 $[-\pi, \pi]$ 上 $\sin x$ 的最佳逼近, 即 $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x) - u(x)|^2 dx$ 最小.**

Solution. 考虑闭区间 $[-\pi, \pi]$ 上所有连续函数关于函数的加法以及实数与函数的乘法所构成的线性空间 V, 则 $P[x]_3$ 是 V 的一个子空间. 对任意 $f(x), g(x) \in V$, 定义

$$< f, g >:= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx. \tag{2}$$

则 $< \cdot, \cdot >$ 是一个内积. 注意到问题等价于给定 $v(x) = \sin x$, 在子空间中 $P[x]_3$ 中找一个向量 $u(x)$ 使得 $||u - v||$ 最小. 我们知道这样的 u 就是 v 在子空间中的投影 p_v. 为了求出 p_v, 我们需要

- 先对基 $1, x, x^2, x^3$ 进行施密特正交化得到 $P[x]_3$ 中的一个标准正交基 e_1, e_2, e_3, e_4;
- 再通过公式

$$p_v =< v, e_1 > e_1+ < v, e_2 > e_2+ < v, e_3 > e_3+ < v, e_4 > e_4$$

  得到所求.

具体计算从略.