线性代数–特征值作业

黄申为

2022 年 11 月 22 日

1. 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. 不通过计算$A$的特征多项式证明$\lambda = 0$是$A$的特征值.

2. 求$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的特征值和特征向量并判断$A$是否可以相似对角化. 如果可以相似对角化, 请给出相似矩阵P; 如果不能相似对角化, 请说明理由.

3. 设A为n阶方阵.
   (a) A^T与A有否一定有相同的特征值? 如果是请给出证明; 如果不是, 请举出反例.
   (b) A^T与A有否一定有相同的特征向量? 如果是请给出证明; 如果不是, 请举出反例.

4. 证明: 若A相似于B则A与B有相同的特征值.

5. 给出一个二阶方阵A使得A没有实特征值并解释原因.

6. 你是如何理解矩阵的特征值和特征向量的? 请给出解释.

7. 设λ是方阵A的特征值. 证明:
   (a) λ^k是A^k的特征值.
   (b) 若A可逆, 则$\frac{1}{\lambda}$是A^{-1}的特征值.

8. 设$u = (u_1, u_2)^T$, $v = (v_1, v_2)^T$. 若u是2阶方阵$A = uv^T$的特征向量, 求A的所有特征值.

9. 设$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$. 我们在课堂中证明了对于任何的向量$u_0 = (p, 1-p)^T$, 由$u_{k+1} = Au_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ 所定义的序列$\{u_k\}$会趋于一个平稳分布$u_\infty = (0.6, 0.4)^T$. 问当k趋于无穷时, A^k会趋于哪个矩阵? 给出推理.

10. 回忆K_n表示n个顶点的完全图. 令A是K_n的邻接矩阵.

    (a) 证明$A = J - I$, 其中J表示所有元素为1的矩阵.

    (b) 求A的所有特征值.