

1. 求以下函数的渐近线方程

(1) $y = 2x + \arctan x + 1$

(2) $y = \frac{(1+x)^2}{4(1-x)}$

解: (1) 由于 $y = 2x + \arctan x + 1$ 在 \mathbb{R} 上连续
故没有垂直渐近线

且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$
也没有水平渐近线

又注意到 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y(x)}{x} = 2$

而 $y(x) - 2x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 1$ ($x \rightarrow +\infty$)
 $y(x) - 2x \rightarrow -\frac{\pi}{2} + 1$ ($x \rightarrow -\infty$)

$\Rightarrow y(x)$ 有两条斜渐近线

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty \text{ 有渐近线} \\ y = 2x + \frac{\pi}{2} + 1 \\ x \rightarrow -\infty \text{ 有渐近线} \\ y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1 \end{cases}$$

(2) $x=1$ 为垂直渐近线
无水平渐近线

注意到 $\frac{y(x)}{x} \rightarrow -\frac{1}{4}$ ($x \rightarrow \pm\infty$)

而 $y(x) + \frac{x}{4} = \frac{1+x}{4(1-x)} \rightarrow -\frac{3}{4}$ ($x \rightarrow \pm\infty$)

因此当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时
有斜渐近线 $y = -\frac{x}{4} - \frac{3}{4}$

2. 求不定积分

(1) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 2\cos x} dx$

(2) $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$

(1) 解: 原式 = $2 \int \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos^2 x + 2\cos x} dx$

令 $t = \cos x$ 得上式 = $2 \int \frac{-t dt}{1+2t-t^2} = \int \frac{2-2t-2}{1+2t-t^2} dt$
= $\int \frac{d(1+2t-t^2)}{1+2t-t^2} - \int \frac{2dt}{2-(t-1)^2} = \ln|1+2t-t^2| + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+1-t}{\sqrt{2}-1+t} \right| + C$

再代入 $t = \cos x$ 得原式 = $\ln|\sin^2 x + 2\cos x| + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+1-\cos x}{\sqrt{2}-1+\cos x} \right| + C$ \square

(2) $\sqrt{2} t = \tan x$

$$\begin{aligned} \text{从而原式} &= \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{b^2} \int \frac{\sec^2 x dx}{(\frac{a}{b})^2 \tan^2 x + 1} \\ &= \frac{1}{b^2} \int \frac{dt}{(\frac{a}{b}t)^2 + 1} = \frac{1}{ab} \int \frac{d(\frac{at}{b})}{(\frac{at}{b})^2 + 1} = \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a}{b} \tan x\right) + C. \end{aligned}$$

3. 求极限

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$

(3) 求合适的常数 $a, b \in \mathbb{R}$, 使得 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + 4x - 1} - ax - b) = 0$

解: (1) 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1$ (注: 此题不可用洛必达法则, 为什么?)

(2) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} \stackrel{\substack{\text{指数函数} \\ \text{连续性}}}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x} = 1$

(3) 对 $\sqrt{2x^2 + 4x - 1}$ 用麦克劳林 (Maclaurin) 公式

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 + 4x - 1} &= \sqrt{2}x \sqrt{1 + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2}\right)} = \sqrt{2}x \cdot \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &\quad \left(\text{用 } (1+t)^x \text{ 的 Maclaurin 公式}\right) = \sqrt{2}x + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

于是 $\sqrt{2x^2 + 4x - 1} - ax - b = (\sqrt{2} - a)x + (\sqrt{2} - b) - \frac{\sqrt{2}}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

为使上式在 $x \rightarrow \infty$ 时极限为 0

必有 $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$

□



南开大学

作业纸

Nankai University

系别 _____ 班级 _____ 姓名 _____ 第 _____ 页

4. 求以下定积分

(1) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$ (3) $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$
 $(n \in \mathbb{N}^*)$

解: (1) 令 $u = \sqrt{e^x - 1}$, $x = \ln(u^2 + 1)$

$$\Rightarrow \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = \int_0^1 \frac{2u^2}{1+u^2} du = 2 \left(\int_0^1 1 du - \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du \right)$$

$$= (2u - 2 \arctan u) \Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$$

(2) 记 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$ 令 $y = \frac{\pi}{2} - x$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sqrt{\cos y}}{\sqrt{\cos y} + \sqrt{\sin y}} d(\frac{\pi}{2} - y)$$

$$\Rightarrow \cdot 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

(3) $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$ 令 $x = \cos t$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt$$

由上次参考题 T10 可知 $I_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$
 (第14周)

5. 求极限

(1) 设 f 连续, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{x^3}^{x^2} \frac{f(t) dt}{x^2}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2+x^2} + \frac{1}{n^2+2^2x^2} + \dots + \frac{1}{n^2+n^2x^2} \right)$

解: (1) 由于 f 连续故 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 可导

且满足 $F'(x) = f(x)$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \int_{x^3}^{x^2} \frac{f(t) dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{x^3}^{x^2} f(t) dt}{x^2}$$

$\frac{0}{0}$ 型未定式 用 L'Hospital 法则 有 上式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}(F(x^2) - F(x^3))}{2x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x f(x^2) - 3x^2 f(x^3)}{2x}$$

$$= f(0)$$

□

(2) 若 $x=0$, 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$

若 $x \neq 0$, 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{n^2 + (kx)^2}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{kx}{n}\right)^2}$$

(由定积分定义)

$$= \int_0^x \frac{1}{1+y^2} dy = \arctan x$$

综上 原式 $= \begin{cases} 1 & x=0 \\ \arctan x & x \neq 0 \end{cases}$

□



南开大学

作业纸

Nankai University

系别 _____ 班级 _____ 姓名 _____ 第 _____ 页

6. (本题可以考虑分段估计的方法)

(1) 设 f 在 $[a, b]$ 非负连续, 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b f^n(x) dx \right]^{\frac{1}{n}} = \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}$

(2) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1)$

1) 证明: 我们记 $M = \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}$

一方面有 $f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$

故 $\left(\int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\int_a^b M^n dx \right)^{\frac{1}{n}} = M(b-a)^{\frac{1}{n}}$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} \leq M$

(注: 这里由于我们不知道 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f^n(x) dx$ 是否存在
故用上极限, 如果对上极限不熟悉可以

先把 $\left(\int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} \leq M(b-a)^{\frac{1}{n}}$ 放在这
另一方面, 求出其大于等于一个极限为 M 的表达式

以后, 用两边夹定理)

另一方面, 设在 $x_0 \in [a, b]$ 处 f 取得最大值 M

由 f 之连续性 $\forall \varepsilon > 0$ s.t. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$ 有 $f(x) > M - \varepsilon$

故有 $\left(\int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\int_{[a, b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} \geq (M - \varepsilon) \cdot l^{\frac{1}{n}}$

再令 $n \rightarrow \infty$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} \geq M - \varepsilon$ (这里 l 为区间 $[a, b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 长度)

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} = M = \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}$ \square

(2) 为了证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1)$

首先我们观察到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(1) dx = f(1)$$

故只需证 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \int_0^1 x^n f(x) dx - n \int_0^1 x^n f(1) dx) = 0$ 即可

$$\left| n \int_0^1 x^n f(x) dx - n \int_0^1 x^n f(1) dx \right| = \left| n \int_0^1 x^n (f(x) - f(1)) dx \right|$$

$$\leq n \int_0^1 x^n |f(x) - f(1)| dx$$

由于 f 在 $[0, 1]$ 上连续, 因此对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$

$$\text{s.t. } |f(x) - f(1)| < \varepsilon \quad \forall x \in (1-\delta, 1]$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } n \int_0^1 x^n |f(x) - f(1)| dx &= n \int_{1-\delta}^1 x^n |f(x) - f(1)| dx \\ &\quad + n \int_0^{1-\delta} x^n |f(x) - f(1)| dx \\ &< n \int_{1-\delta}^1 x^n \cdot \varepsilon dx + n \int_0^{1-\delta} (1-\delta)^n \cdot 2M dx \\ &= \left(1 - (1-\delta)^{n+1}\right) \cdot \varepsilon + 2M(1-\delta) \cdot n \cdot (1-\delta)^n \\ &\quad \text{这里 } M = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)| \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \int_0^1 x^n |f(x) - f(1)| dx \right) \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

\Rightarrow 上述极限为 0

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n f(1) dx \\ &= f(1) \quad \square \end{aligned}$$



南开大学

Nankai University

作业纸

系别 _____ 班级 _____ 姓名 _____ 第 _____ 页

7. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积

(1) 若 $\int_a^b f(x) dx \neq 0$, 证明: $\exists \xi \in (a, b)$ s.t. $\int_a^{\xi} f(x) dx = \int_{\xi}^b f(x) dx$

(2) 若无 (1) 的条件, 结论是否仍成立?

1) 证明: 令 $F(x) = \int_a^x f(t) dt - \frac{1}{2} \int_a^b f(x) dx$

(由于 f 可积, 可知 $F(x)$ 连续于 $[a, b]$)

由于 $\int_a^b f(x) dx \neq 0 \Rightarrow F(a) \cdot F(b) = -\frac{1}{4} \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 < 0$

由零点定理, $\exists \xi \in [a, b]$ s.t. $F(\xi) = 0$

$$\text{即 } \int_a^{\xi} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{再 } \int_a^{\xi} f(t) dt + \int_{\xi}^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_{\xi}^b f(t) dt = \int_a^{\xi} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_a^b f(x) dx$$

(2) 否, 考虑 $a = -\frac{\pi}{2}, b = \frac{\pi}{2}, f(x) = \sin x$ □

8. $0 < a < b$, f 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $\int_a^b f(x) dx = 0$, 求证: $\exists \xi \in (a, b)$
使 $\int_a^{\xi} f(x) dx = \xi f(\xi)$

证明: 令 $F(x) = \frac{1}{x} \int_a^x f(t) dt$

(由 $a, b > 0$) $\Rightarrow F(a) = F(b) = 0$
 $\int_a^b f(x) dx = 0$

由 $f \in C[a, b]$ 可知 F 在 (a, b) 上可导, 在 $[a, b]$ 连续

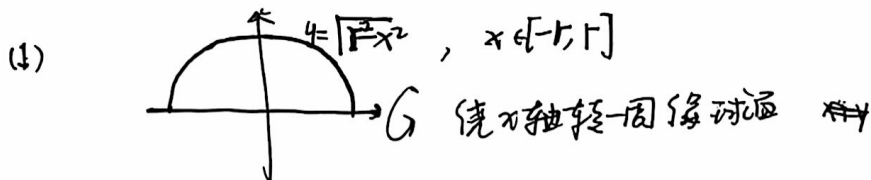
(Rolle 定理) $\Rightarrow \exists \xi \in (a, b)$ s.t. $F'(\xi) = 0 \Rightarrow \int_a^{\xi} f(x) dx = \xi f(\xi)$ □

9. (定积分应用题)

(1) 求半径为 r 的球面面积

(2) 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 1$) 绕 x 轴旋转一周的椭球面面积

(3) 求心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $a > 0$ 的周长



我们利用旋转曲面面积公式: $S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

代入 $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ 得

$$S_{\text{球面}} = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}^2} dx$$

$$= 4\pi \int_0^r r dx = 4\pi r^2 \quad \square$$

(2) 用参数方程 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$ (上半椭圆参数方程)

记 $c^2 = a^2 - b^2$, $e = \frac{c}{a}$ 为离心率
(C70)

我们利用旋转曲面面积公式 (参数形式): $S = 2\pi \int_a^b y(t) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad (y(t) \geq 0)$

解

$$S = 2\pi \int_0^\pi b \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = 4\pi b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} dt$$

$$= -4\pi b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - c^2 \cos^2 t} d(\cos t) \stackrel{(\frac{1}{2} \cos t = u)}{=} 4\pi b a \int_0^1 \sqrt{1 - e^2 u^2} du$$

$$= 4\pi ab \left(\frac{1}{2} u \sqrt{1 - e^2 u^2} + \frac{1}{2e} \arcsin eu \right) \Big|_0^1 = 2\pi ab \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{c} \arcsin \frac{c}{a} \right)$$

$$= 2\pi b \left(b + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right) \quad \square$$



南开大学

作业纸

Nankai University

系别 _____ 班级 _____ 姓名 _____ 第 _____ 页

(2) $r(\theta) = a(1 + \cos\theta)$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $a > 0$

$r'(\theta) = -a \sin\theta$

由曲线长度公式 (参数形式) : $S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2} d\theta$
(极坐标)

$\Rightarrow S = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2} d\theta = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8a$

□

10. 设 f 在 $[0, 1]$ 上连续可微, 定义: $\varepsilon_n = \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} n\varepsilon_n$

(Hint: Taylor公式, Riemann和定义)

解: $\varepsilon_n = \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$

$= \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$

记 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

注意到: $\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx = F\left(\frac{i}{n}\right) - F\left(\frac{i-1}{n}\right)$

(在 $\frac{i}{n}$ 处 Taylor 展开) $= F'\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} - \frac{1}{2} F''\left(\frac{i}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)^2$
 $= \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \frac{1}{2} f'\left(\frac{i}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)^2$

$\Rightarrow n\varepsilon_n = n \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \frac{1}{2} f'\left(\frac{i}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right)^2 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)^2 \right)$
 $= \underbrace{-\frac{1}{2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f'\left(\frac{i}{n}\right)}_{f' \text{ 在 } [0,1] \text{ 的 Riemann 和}} + o\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow -\frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) dx = \frac{f(0) - f(1)}{2}$
(由 Riemann 和定义) $n \rightarrow \infty$ □