# 第十二次作业 参考答案

12.18 - 12.24

## 习题 6.2 A 类

### 1

(2) 解:

令 $y' = p$ , 则 $y'' = p'$. 代入原方程即 $xp' + p = 0$.

分离变量即 $\frac{dp}{p} = -\frac{1}{x}dx$ . 两边积分得 $\ln|p| = -\ln|x| + \tilde{C}_1$.

即 $y' = p = \frac{C_1}{x}$ .

故原方程解为 $y = \int \frac{C_1}{x}dx = C_1 \ln|x| + C_2$.

(4) 解:

令 $y' = p$ , 则 $y'' = p'$ . 代入原方程即 $x^2p' = p^2 + 2xp$.

令 $p = ux$. 则 $p' = u + x\frac{du}{dx}$.

代入可得 $x^2\left(u + x\frac{du}{dx}\right) = u^2x^2 + 2ux^2$. 即 $x\frac{du}{dx} = u^2 + u$.

分离变量即 $\frac{du}{u^2+u} = \frac{1}{x}dx$. 两边积分得 $ln|\frac{u}{u+1}| = ln|x| + \tilde{C}_1$.

即 $u = -\frac{C_1x}{1+C_1x}$. 则 $p = -\frac{C_1x^2}{1+C_1x}$.

故原方程解为 $y = \int -\frac{C_1x^2}{1+C_1x}dx = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{C_1}x - \frac{1}{C_1^2}ln|1 + C_1x| + C_2$

(注：书上答案与此答案等价)

### 2

(1) 解:

令 $y' = p$ , 则 $y'' = p'$ . 代入原方程即 $(1 + x^2)\,p' = 2xp$ .

分离变量即 $\frac{dp}{p} = \frac{2x}{1+x^2}dx$ . 两边积分得 $\ln|p| = \ln(1 + x^2) + \widetilde{C_1}$.

即 $p = C_1(1 + x^2)$ . 故原方程解为

$y = \int C_1(1 + x^2) = \frac{1}{3}C_1x^3 + C_1x + C_2$

由初值条件 $\begin{cases} y(0) = c_2 = 1 \\ y'(0) = c_1 = 3 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = 1. \end{cases}$

故初值问题的解为 $y = x^3 + 3x + 1$.

(3) 解:

令 $y' = p$. 则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$.

代入原方程即 $p\frac{dp}{dy} = 3\sqrt{y}$. 分离变量即 $pdp = 3\sqrt{y}dy$.

两边积分得 $\frac{1}{2}p^2 = 2y^{\frac{3}{2}} + \tilde{C}_1$. 即 $p = \pm 2\sqrt{y^{\frac{3}{2}} + C_1}$.

代入初值条件得 $p = 2y^{\frac{3}{4}}$. 分离变量即 $\frac{dy}{y^{\frac{3}{4}}} = 2dx$

两边积分得 $4y^{\frac{1}{4}} = 2x + \tilde{C}_2$. 代入初值条件得 $\widetilde{C}_2 = 4$.

故初值问题的解为 $y = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^4$ 。

## 5

(1) 解:

特征方程为 $\lambda^2-2\lambda-3=0$ 解得 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$.

故齐次方程通解为 $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}$.

设非齐次方程的一个特解是 $\bar{y}=Ax+B$. 代入比对系数得 $A=-1,B=\frac{1}{3}$

故原方程通解为 $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}-x+\frac{1}{3}$.

(3) 解:

特征方程为 $\lambda^2+1=0$. 解得 $\lambda_{1,2}=\pm i$.

故齐次方程通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x$

设非齐次方程的一个特解是 $\bar{y}=(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x$

代入比对系数得 $A=-\frac{1}{3},B=0,C=0,D=\frac{4}{9}$ .

故原方程通解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$

(6) 解:

特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+5=0$. 解得 $\lambda_{1,2}=2\pm i$ 。

故齐次方程通解为 $y=e^{2x}\left(c_1\cos x+c_2\sin x\right)$ .

设非齐次方程的一个特解是 $\bar{y}=Ae^{2x}+B\cos 2x+C\sin 2x$.

代入比对系数得 $A=1,B=\frac{8}{65},C=\frac{1}{65}$.

故原方程通解为 $y=e^{2x}\left(c_1\cos x+c_2\sin x\right)+e^{2x}+\frac{8}{65}\cos 2x+\frac{1}{65}\sin 2x$

## 6

解:

特征方程为 $\lambda^2+4=0$. 解得 $\lambda_{1,2}=\pm 2i$.

故齐次方程通解为 $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$.

设非齐次方程的一个特解是 $\bar{y}=Ax^2+Bx+C$

代入比对系数得 $A=\frac{1}{2},B=0,C=-\frac{1}{4}$ 。

故原方程通解为 $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}$ .

由题意 $\begin{cases} y(0)=c_1-\frac{1}{4}=0 \\ y'(0)=2c_2=1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} c_1=\frac{1}{4} \\ c_2=\frac{1}{2}. \end{cases}$

故所求积分曲线为 $y=\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}$

## 7

解:

特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$ . 解得 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$.

故齐次方程通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{2x}$.

设非齐次方程的一个特解是 $\bar{y}=Axe^x$. 代入对比系数得 $A=-2$ .

故原方程通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{2x}-2xe^x$ .

由 $\lim_{x\to 0}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{c_1e^x+c_2e^{2x}}{x}-2e^x\right)=1$ 得 $\lim_{x\to 0}\frac{c_2e^x+c_1}{x}=3$.

故 $\begin{cases} lim_{x\to 0}(c_2e^x+c_1)=c_2+c_1=0 \\ 3=lim_{x\to 0}(\frac{c_2e^x+c_1}{x})=lim_{x\to 0}c_2e^x=c_2 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} c_1=-3 \\ c_2=3. \end{cases}$

故所求特解为 $y=-3e^x+3e^{2x}-2xe^x$.

## 8

解:

两边求导得 $\int_0^x f'(t)dt + f'(x) = e^x + 2x - f'(x).$

再求导得 $f'(x) + f''(x) = e^x + 2 - f''(x).$

令 $y = f(x)$ ，整理即 $2y'' + y' = e^x + 2$ .

特征方程为 $2\lambda^2 + \lambda = 0$ 。解得 $\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = 0$ .

故原方程通解为 $y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2.$

设非齐次方程的一个特解为 $\bar{y} = Ae^x + Bx$. 代入对比系数得 $A = \frac{1}{3}, B = 2$ .

故原方程通解为 $y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 + \frac{1}{3}e^x + 2x.$

由初值条件 $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$ 得 $\begin{cases} c_1 = \frac{11}{3} \\ c_2 = -3. \end{cases}$

故 $f(x) = \frac{11}{3}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{3}e^x + 2x - 3$