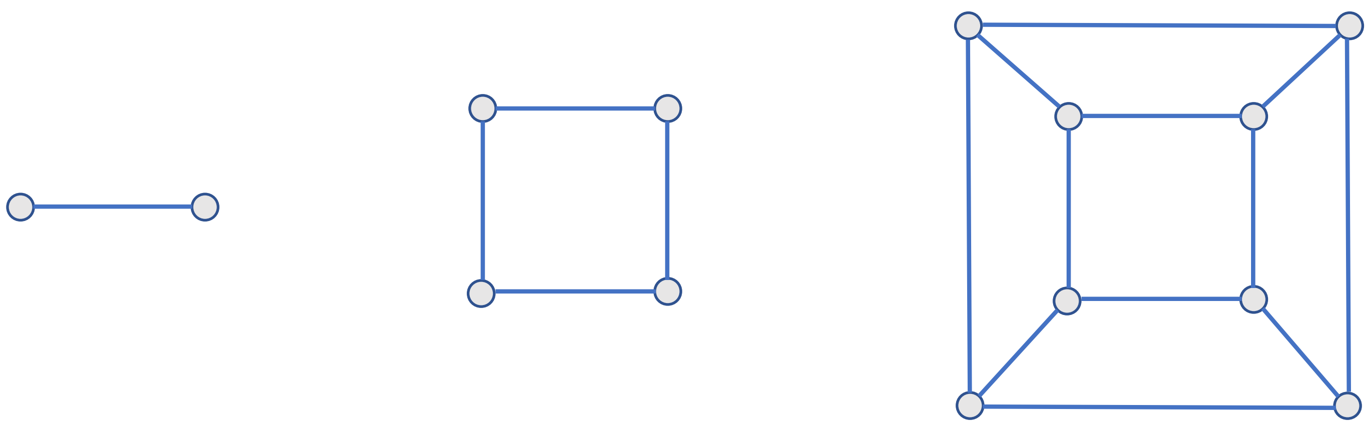
矩阵特征值和特征向量的应用-敏感度猜想

敏感度猜想. 令H是n阶超立方体Q^n的一个$2^{n-1}+1$个顶点的导出子图. 则$\Delta(H) \geq \sqrt{n}$.



Q^1 Q^2 Q^3

矩阵特征值和特征向量的应用-敏感度猜想

定义(矩阵序列A_n). 对整数$n \geq 1$，令

$$A_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & n = 1 \\ \begin{pmatrix} A_{n-1} & E_{2^{n-1}} \\ E_{2^{n-1}} & -A_{n-1} \end{pmatrix} & n \geq 2 \end{cases}.$$

引理(A_n的特征值). A_n特征值为$\sqrt{n}$(2^{n-1}重)和$-\sqrt{n}$(2^{n-1}重).

证明. 首先证明

$$A_n^2 = nE_{2^n}. \tag{$*$}$$

显然($*$)对$n = 1$成立. 现假设$n \geq 2$且($*$)对$n - 1$成立. 则

$$\begin{aligned} A_n^2 &= \begin{pmatrix} A_{n-1} & E_{2^{n-1}} \\ E_{2^{n-1}} & -A_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & E_{2^{n-1}} \\ E_{2^{n-1}} & -A_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{n-1}^2 + E_{2^{n-1}} & O \\ O & A_{n-1}^2 + E_{2^{n-1}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} nE_{2^{n-1}} & O \\ O & nE_{2^{n-1}} \end{pmatrix} = nE_{2^n}. \end{aligned}$$

归纳假设

矩阵特征值和特征向量的应用-敏感度猜想

定义(矩阵序列). 对整数$n \geq 1$，令

$$A_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & n = 1 \\ \begin{pmatrix} A_{n-1} & E_{2^{n-1}} \\ E_{2^{n-1}} & -A_{n-1} \end{pmatrix} & n \geq 2 \end{cases}.$$

引理(A_n的特征值). A_n特征值为$\sqrt{n}$(2^{n-1}重)和$-\sqrt{n}$(2^{n-1}重).

证明(续).

$$A_n^2 = nE_{2^n}.$$

由特征值的性质，若λ为A_n的特征值，则λ^2为$A_n^2 = nE_{2^n}$特征值.

$$\lambda^2 = n,$$

即$\lambda = \pm\sqrt{n}$.

因$\mathrm{Tr}(A_n) = 0$，$\sqrt{n}$与$-\sqrt{n}$各占一半. ■

矩阵特征值和特征向量的应用–敏感度猜想

引理(最大度与特征值). 令$H=(\{1,2,\dots,m\},E(H))$是一个有m个顶点的无向图, $A=(a_{ij})$是一个m阶对称矩阵满足$a_{ij}\in\{-1,0,1\}$且$ij\notin E(H)$有$a_{ij}=0$. 则$\Delta(H)\geq\lambda_1(A)$.

A的最大特征值

证明. 设$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}$是属于$\lambda_1(A)$的特征向量. 不妨假设$x_1$是所有分量中绝对值最大的那个. 则$|x_1|=\max\limits_{1\leq i\leq m}|x_i|>0$. 从而

$$|\lambda_1(A)x_1|=\left|\sum_{j=1}^{m}a_{1j}x_j\right|=\left|\sum_{j:j\sim 1}a_{1j}x_j\right|$$

$$\leq\textstyle\sum_{j:j\sim 1}|a_{1j}x_j| \qquad \text{三角不等式}$$

$$\leq\textstyle\sum_{j:j\sim 1}|x_1| \qquad \text{假设条件}$$

$$=\deg(1)|x_1|\leq\Delta(H)|x_1|. \qquad \text{度的定义}$$

故$\Delta(H)\geq|\lambda_1(A)|\geq\lambda_1(A)$. ■

说明. 矩阵A是由H的邻接矩阵将某些$+1$变为-1而得到的.

矩阵特征值和特征向量的应用-敏感度猜想

柯西交错定理(Cauthy Interlacing Theorem). 设A是n阶对称矩阵，B是A的m阶主子矩阵. 若A的特征值为$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$，$B$的特征值为$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_m$，则

$$\lambda_{i+n-m} \leq \mu_i \leq \lambda_i，1 \leq i \leq m.$$

矩阵特征值和特征向量的应用–敏感度猜想

敏感度猜想. 令H是n阶超立方体Q^n的一个$2^{n-1}+1$个顶点的导出子图. 则$\Delta(H)\geq\sqrt{n}$.

证明. 设M_n为Q^n的邻接矩阵.

- 将A_n中所有-1变为$+1$所得到的矩阵恰好为M_n，即A_n是由M_n将某些$+1$变为-1而得到的.
- H对应A_n的一个$2^{n-1}+1$阶主子矩阵A_H. 由上面的讨论知，A_H是H的邻接矩阵将某些$+1$变为-1而得到的.
- 从而H和A_H满足**最大度与特征值引理**的假设. 故$\Delta(H)\geq\lambda_1(A_H)$.
- 由**柯西交错定理**，$\lambda_1(A_H)\geq\lambda_{1+2^n-(2^{n-1}+1)}(A_n)=\lambda_{2^{n-1}}(A_n)$

$$=\sqrt{n}.$$

A_n的特征值引理

从而$\Delta(H)\geq\lambda_1(A_H)\geq\sqrt{n}$. ∎