# 高等数学
# 第六章：微分方程初步


张道平

南开大学数学科学学院 414

*daopingzhang@nankai.edu.cn*

## 微分方程，阶，解

微分方程，阶，解

常微分方程，偏微分方程

微分方程，阶，解

常微分方程，偏微分方程

一阶常微分方程的一般形式，常见形式

微分方程，阶，解

常微分方程，偏微分方程

一阶常微分方程的一般形式，常见形式

二阶常微分方程的一般形式，常见形式

微分方程，阶，解

常微分方程，偏微分方程

一阶常微分方程的一般形式，常见形式

二阶常微分方程的一般形式，常见形式

称 $n$ 阶微分方程的具有 $n$ 个独立任意常数 $C_1, \cdots, C_n$ 的解为通解. 特解.

微分方程，阶，解

常微分方程，偏微分方程

一阶常微分方程的一般形式，常见形式

二阶常微分方程的一般形式，常见形式

称 $n$ 阶微分方程的具有 $n$ 个独立任意常数 $C_1, \cdots, C_n$ 的解为通解. 特解.

定解条件，初值条件，初值问题.

## 1.1 解的存在性与唯一性定理

## 1.1 解的存在性与唯一性定理

已知一阶微分方程 $y' = f(x, y)$ 和初值条件 $(x_0, y_0)$，问是否存在唯一的特解 $y = y(x)$，使 $y(x_0) = y_0$？下面介绍的定理可以给出答案。

1.1 解的存在性与唯一性定理

已知一阶微分方程 $y' = f(x, y)$ 和初值条件 $(x_0, y_0)$, 问是否存在唯一的特解 $y = y(x)$, 使 $y(x_0) = y_0$? 下面介绍的定理可以给出答案。

定理：对于初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

如果 $f(x, y)$ 在矩形区域 $D : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$ 上连续，而且对于 $y$ 满足利普希茨 (Lipschitz) 条件，

即对于 $D$ 上任意两点 $(x, y_1)$ 和 $(x, y_2)$ 恒成立如下不等式

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, L\text{是某一正常数}$$

则初值问题在区间 $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ 上存在唯一解，其中常数

$$h = \min(a, \frac{b}{M}), \text{而} M = \max_{(x,y)\in D} |f(x, y)|.$$

## 1.2 可分离变量的微分方程

## 1.2 可分离变量的微分方程

这种方程的形式是

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

当 $g(y) \neq 0$ 时，把含有 $x$ 的表达式跟含有 $y$ 的表达式分开 (这个过程叫“分离变量”)，把方程化为

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx,$$

则方程的通解

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C.$$

由这个等式确定的隐函数是微分方程的解. 这种通解是通过隐函数定义的, 因而叫" 隐式通解". 另外, 如果有数值 $y_0$ 满足 $g(y_0) = 0$, 那么方程还有解 $y = y_0$.

由这个等式确定的隐函数是微分方程的解. 这种通解是通过隐函数定义的，因而叫" 隐式通解". 另外，如果有数值 $y_0$ 满足 $g(y_0)=0$, 那么方程还有解 $y=y_0$.

例：求解初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx}=(1-y^2)tanx, \\ y(0)=2. \end{cases}$$

由这个等式确定的隐函数是微分方程的解. 这种通解是通过隐函数定义的，因而叫" 隐式通解". 另外，如果有数值 $y_0$ 满足 $g(y_0) = 0$, 那么方程还有解 $y = y_0$.

例：求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = (1 - y^2)tanx, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

例：一个半球状的雪堆，其体积融化的速率与半球面面积 $S$ 成正比，比例常数 $k > 0$, 假设在融化过程中雪堆始终保持半球状，已知半径 $r_0$ 的雪堆在开始融化的 3h 内，融化了其体积的 $\frac{7}{8}$, 问雪堆全部融化需要多少小时?

## 1.3 齐次方程

1.3 齐次方程

形式为

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$$

的方程称为齐次方程，为了求解齐次方程，做变量替换 $u = \frac{y}{x}$, 即 $y = xu$, 代入方程得

$$u + x\frac{du}{dx} = f(u),$$

或写成

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}.$$

这是一个可分离变量的方程．求出其解，再根据函数 $u, y$ 的关系，便可求出原微分方程的通解．

例：求解方程

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{tx - t^2}.$$

例：求解方程

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{tx - t^2}.$$

## 1.4 一阶线性微分方程

例：求解方程

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{tx - t^2}.$$

1.4 一阶线性微分方程

形如

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

的方程称为一阶线性微分方程，其中 $P(x), Q(x)$ 为已知函数. 当 $Q(x) \equiv 0$, 则称之为齐次线性方程，否则称为非齐次线性方程. 为求解非齐次线性方程，我们先求出相应的齐次线性方程

$$y' + P(x)y = 0 \tag{2}$$

的通解. 两端积分便可求得其通解

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int P(x) dx + C_1,$$

即 $\ln|y| = -\int P(x) dx + C_1$, 或写为

$$y = Ce^{-\int P(x) dx}. \tag{3}$$

这便是齐次线性方程(2)的通解公式，其中 $C$ 为任意常数.

的通解. 两端积分便可求得其通解

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int P(x)dx + C_1,$$

即 $\ln|y| = -\int P(x)dx + C_1$, 或写为

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}. \tag{3}$$

这便是齐次线性方程(2)的通解公式，其中 $C$ 为任意常数.

例：设质量为 $m$ 的子弹垂直射穿钢板，子弹在钢板内所受阻力与其速度成正比. 已知钢板厚度为 $\delta$, 子弹射入钢板时的速度为 $a$, 穿出钢板时的速度为 $b(0 < b < a)$. 求子弹穿过钢板所用的时间.

以下我们转向求非齐次线性方程(1)的解，思路是把相应齐次线性方程(2)的通解公式中的任意常数 $C$ 换成一个函数 $u = u(x)$, 且把方程(1)的解设为

$$y = u(x) e^{-\int P(x) dx} \tag{4}$$

(这种方法叫常数变易法). 将上式两端求导，得

$$y' = u' e^{-\int P(x) dx} - P(x) y.$$

将导数 $y'$ 代入方程(1), 可以得到以 $u$ 为未知函数的方程:

$$u' e^{-\int P(x) dx} = Q(x).$$

把指数部分转移到右端，就得到方程

$$u' = e^{\int P(x)dx}Q(x).$$

两端求积分，得到未知函数 $u$ 的一般表达式:

$$u = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C.$$

现在根据变量 $y, u$ 之间的关系(4)，我们就得到非齐次线性方程(1)的通解

$$y = e^{-\int P(x)dx}[\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C].$$

上式称为一阶非齐次线性方程(1)的通解公式.

若在此通解公式中令 $C=0$, 就得到非齐次线性方程的一个特解

$$y=e^{-\int P(x)dx}[\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx].$$

由此可见，非齐次线性方程的通解结构是：相应齐次线性方程的通解与非齐次线性方程的一个特解之和.

若在此通解公式中令 $C=0$, 就得到非齐次线性方程的一个特解

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx\right].$$

由此可见，非齐次线性方程的通解结构是：相应齐次线性方程的通解与非齐次线性方程的一个特解之和.

例：求微分方程 $x^2y'+(1-2x)y=x^2$ 的通解.

若在此通解公式中令 $C=0$, 就得到非齐次线性方程的一个特解

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx\right].$$

由此可见，非齐次线性方程的通解结构是：相应齐次线性方程的通解与非齐次线性方程的一个特解之和.

例：求微分方程 $x^2y'+(1-2x)y=x^2$ 的通解.

例：求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{xy+y^2},\\ y(0)=1.\end{cases}$$

例：设曲线 $L$ 位于 $xy$ 平面的第一象限内，$L$ 上任一点 $M$ 处的切线与 $y$ 轴总相交，交点记为 $A$. 已知 $|MA| = |OA|$, 且 $L$ 过点 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, 求 $L$ 的方程.

例：设曲线 $L$ 位于 $xy$ 平面的第一象限内，$L$ 上任一点 $M$ 处的切线与 $y$ 轴总相交，交点记为 $A$. 已知 $|MA| = |OA|$, 且 $L$ 过点 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, 求 $L$ 的方程.

## 1.5 伯努利方程

例：设曲线 $L$ 位于 $xy$ 平面的第一象限内，$L$ 上任一点 $M$ 处的切线与 $y$ 轴总相交，交点记为 $A$. 已知 $|MA| = |OA|$, 且 $L$ 过点 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, 求 $L$ 的方程.

1.5 伯努利方程

形如

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

的方程称为伯努利 (Bernoulli) 方程，其中 $n$ 是常数 (但 $n \neq 0, 1$). 这是一阶方程，但不是线性微分方程. 为了求解伯努利方程，在其两端同乘以 $y^{-n}$, 则方程化为

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x).$$

再作变量替换

$$u = y^{1-n}.$$

在两端求导得

$$u' = (1-n)y^{-n}y'.$$

把以上两式代入方程(13), 得到以变量 $u$ 为未知函数的方程:

$$u' + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x).$$

这是一个一阶线性方程，有现成的求解公式. 最后根据函数 $y, u$ 之间的关系，就可以得到伯努利方程的通解. 注意当 $n > 0$ 时，伯努利方程还有解 $y = 0$.

再作变量替换
$$u = y^{1-n}.$$
在两端求导得
$$u' = (1-n)y^{-n}y'.$$
把以上两式代入方程(13), 得到以变量 $u$ 为未知函数的方程:
$$u' + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x).$$
这是一个一阶线性方程，有现成的求解公式. 最后根据函数 $y, u$ 之间的关系，就可以得到伯努利方程的通解. 注意当 $n > 0$ 时，伯努利方程还有解 $y = 0$.

例：求解方程 $y' + \frac{1}{2x}y = \frac{1}{2y}x^2$.

例：某飞机在机场降落时，为减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞以增大阻力，使飞机减速并停下. 设飞机重量为 9000kg, 着陆时的水平速度为 700km/h. 经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比 (比例系数为 $k = 6.0 * 10^6$). 问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少?

例：某飞机在机场降落时，为减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞以增大阻力，使飞机减速并停下. 设飞机重量为 9000kg, 着陆时的水平速度为 700km/h. 经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比 (比例系数为 $k = 6.0 * 10^6$). 问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少?

例：解函数方程

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)},$$

其中 $f(x)$ 为未知函数，且假定 $f'(0)$ 存在.