高等数学
第四章：不定积分

张道平

南开大学数学科学学院 414

daopingzhang@nankai.edu.cn

2.1 第一换元法

例： $\int tanxdx$.

2.1 第一换元法

例： $\int tanxdx.$

例： $\int \frac{x}{1+x^4}dx.$

2.1 第一换元法

例： $\int tanxdx.$

例： $\int \frac{x}{1+x^4}dx.$

例： 求 $\int \frac{1-lnx}{(x-lnx)^2}dx.$

2.1 第一换元法

例： $\int tanxdx.$

例： $\int \frac{x}{1+x^4}dx.$

例：求 $\int \frac{1-lnx}{(x-lnx)^2}dx.$

例：设 $\int f(x)dx = x^2 + C$，试求 $\int xf(1-x^2)dx.$

2.1 第一换元法

例： $\int tanxdx.$

例： $\int \frac{x}{1+x^4}dx.$

例： 求 $\int \frac{1-lnx}{(x-lnx)^2}dx.$

例： 设 $\int f(x)dx = x^2 + C$，试求 $\int xf(1-x^2)dx.$

2.2 第二换元法

定理：设函数 $f(x)$ 连续. 若已知
$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \Psi(t) + C$, $x = \varphi(t)$ 及其反函数
$t = \varphi^{-1}(x)$ 可导且 $\varphi'(t) \neq 0$, 则
$\int f(x)dx = \Psi(\varphi^{-1}(x)) + C.$

通常把 $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ 称为换元公式.

通常把 $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ 称为换元公式.

例：求积分 $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx(a > 0)$.

2. 积分法

通常把 $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ 称为换元公式.

例： 求积分 $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx(a > 0)$.

例： 计算 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}(a > 0)$.

2. 积分法

通常把 $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ 称为换元公式.

例：求积分 $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx(a > 0)$.

例：计算 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}(a > 0)$.

例：求 $\int \frac{x}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$.

通常把 $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ 称为换元公式.

例：求积分 $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx(a > 0)$.

例：计算 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}(a > 0)$.

例：求 $\int \frac{x}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$.

例：求 $\int \frac{dx}{sinx}$.

通常把 $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ 称为换元公式.

例：求积分 $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx(a > 0)$.

例：计算 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}(a > 0)$.

例：求 $\int \frac{x}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$.

例：求 $\int \frac{dx}{sinx}$.

例：求 $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}$dx.

2.3 分部积分法

定理：设 $u=u(x), v=v(x)$ 的导数连续，则
$\int udv = uv - \int vdu$.

2.3 分部积分法

定理：设 $u=u(x), v=v(x)$ 的导数连续，则
$\int udv = uv - \int vdu.$

上述公式称为分部积分公式. 它把积分 $\int udv$ 转化为积分 $\int vdu$. 当后一个积分比前一个积分容易计算时，分部积分公式的优越性就显示出来.

2.3 分部积分法

定理：设 $u=u(x), v=v(x)$ 的导数连续，则
$\int udv = uv - \int vdu.$

上述公式称为分部积分公式. 它把积分 $\int udv$ 转化为积分 $\int vdu$. 当后一个积分比前一个积分容易计算时，分部积分公式的优越性就显示出来.

例：求积分 $\int xcosxdx.$

2.3 分部积分法

定理：设 $u=u(x), v=v(x)$ 的导数连续，则
$\int udv = uv - \int vdu.$

上述公式称为分部积分公式. 它把积分 $\int udv$ 转化为积分 $\int vdu$. 当后一个积分比前一个积分容易计算时，分部积分公式的优越性就显示出来.

例：求积分 $\int xcosxdx.$

例：求 $\int \frac{lncosx}{cos^2 x}dx.$

2.3 分部积分法

定理：设 $u = u(x), v = v(x)$ 的导数连续，则
$\int udv = uv - \int vdu.$

上述公式称为分部积分公式. 它把积分 $\int udv$ 转化为积分 $\int vdu$. 当后一个积分比前一个积分容易计算时，分部积分公式的优越性就显示出来.

例：求积分 $\int xcosxdx.$

例：求 $\int \frac{lncosx}{cos^2 x}dx.$

例：求 $\int e^x sin2xdx.$

2.3 分部积分法

定理：设 $u=u(x), v=v(x)$ 的导数连续，则
$\int udv = uv - \int vdu.$

上述公式称为分部积分公式. 它把积分 $\int udv$ 转化为积分 $\int vdu$. 当后一个积分比前一个积分容易计算时，分部积分公式的优越性就显示出来.

例：求积分 $\int xcosxdx.$

例：求 $\int \frac{lncosx}{cos^2 x}dx.$

例：求 $\int e^x sin2xdx.$

例：求 $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$，其中 n 为正整数，$a>0.$

例：设 $f(x)$ 是单调连续函数，$f^{-1}(x)$ 是它的反函数，且已知 $\int f(x)dx = F(x) + C$, 求 $\int f^{-1}(x)dx$. $\int arcsinxdx$, $\int lnxdx$.

例：设 $f(x)$ 是单调连续函数，$f^{-1}(x)$ 是它的反函数，且已知 $\int f(x)dx = F(x) + C$，求 $\int f^{-1}(x)dx$. $\int arcsinxdx$, $\int lnxdx$.

2.4 有理函数的积分法

例：设 $f(x)$ 是单调连续函数，$f^{-1}(x)$ 是它的反函数，且已知 $\int f(x)dx = F(x) + C$，求 $\int f^{-1}(x)dx$. $\int arcsinxdx$, $\int lnxdx$.

2.4 有理函数的积分法

2.4.1 有理函数及其相关性质

例：设 $f(x)$ 是单调连续函数，$f^{-1}(x)$ 是它的反函数，且已知 $\int f(x)dx = F(x) + C$, 求 $\int f^{-1}(x)dx$. $\int arcsinxdx$, $\int lnxdx$.

2.4 有理函数的积分法

2.4.1 有理函数及其相关性质

两个多项式的商 $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 称为有理函数，其中 $P_n(x)$, $Q_m(x)$ 分别为 x 的 n, m 次多项式. 若 $n < m$, 称 $R(x)$ 为 (有理) 真分式，否则称为 (有理) 假分式.

例：设 $f(x)$ 是单调连续函数，$f^{-1}(x)$ 是它的反函数，且已知 $\int f(x)dx = F(x) + C$, 求 $\int f^{-1}(x)dx$. $\int arcsinxdx$, $\int lnxdx$.

2.4 有理函数的积分法

2.4.1 有理函数及其相关性质

两个多项式的商 $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 称为有理函数，其中 $P_n(x)$, $Q_m(x)$ 分别为 x 的 n, m 次多项式. 若 $n < m$, 称 $R(x)$ 为 (有理) 真分式，否则称为 (有理) 假分式.

一个假分式可以化为一个多项式和一个真分式的和. 所有有理函数的积分可以归结为真分式的积分.

基本分式: (1) $\frac{A}{x-a}$, (2) $\frac{A}{(x-a)^k}, (k>1)$, (3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, (4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}(k>1)$, 其中 x^2+px+q 无实根, 即 $\frac{p^2}{4}-q<0$, $k>1$ 为自然数. 每一个有理真分式都可以唯一地表示成有限个基本分式的和.

基本分式: (1) $\frac{A}{x-a}$, (2) $\frac{A}{(x-a)^k}$, $(k>1)$, (3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, (4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}(k>1)$, 其中 x^2+px+q 无实根，即 $\frac{p^2}{4}-q<0$, $k>1$ 为自然数. 每一个有理真分式都可以唯一地表示成有限个基本分式的和.

例：将 $\frac{1}{x(x-1)^2}$, $\frac{4x}{x^4+1}$ 分解为部分分式之和.

基本分式: (1) $\frac{A}{x-a}$, (2) $\frac{A}{(x-a)^k}$, $(k>1)$, (3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, (4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}(k>1)$, 其中 x^2+px+q 无实根，即 $\frac{p^2}{4}-q<0$, $k>1$ 为自然数. 每一个有理真分式都可以唯一地表示成有限个基本分式的和.

例：将 $\frac{1}{x(x-1)^2}$, $\frac{4x}{x^4+1}$ 分解为部分分式之和.

2.4.2 部分分式的积分法

基本分式: (1) $\frac{A}{x-a}$, (2) $\frac{A}{(x-a)^k}$, $(k>1)$, (3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, (4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}(k>1)$, 其中 x^2+px+q 无实根，即 $\frac{p^2}{4}-q<0$, $k>1$ 为自然数. 每一个有理真分式都可以唯一地表示成有限个基本分式的和.

例：将 $\frac{1}{x(x-1)^2}$, $\frac{4x}{x^4+1}$ 分解为部分分式之和.

2.4.2 部分分式的积分法

2.4.3 有理函数的积分法

例：求 $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$.

基本分式: (1) $\frac{A}{x-a}$, (2) $\frac{A}{(x-a)^k}$, $(k>1)$, (3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, (4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$$(k>1)$, 其中 x^2+px+q 无实根，即 $\frac{p^2}{4}-q<0$, $k>1$ 为自然数. 每一个有理真分式都可以唯一地表示成有限个基本分式的和.

例：将 $\frac{1}{x(x-1)^2}$, $\frac{4x}{x^4+1}$ 分解为部分分式之和.

2.4.2 部分分式的积分法

2.4.3 有理函数的积分法

例：求 $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$.

例：求 $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

2.5 三角函数有理式的积分法

万能代换： $t = tan\frac{x}{2}$， $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$， $sinx = \frac{2t}{1+t^2}$， $cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

2.5 三角函数有理式的积分法

万能代换：$t=tan\frac{x}{2}$，$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$，$sinx=\frac{2t}{1+t^2}$，$cosx=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

例：求 $\int\frac{dx}{2sinx-cosx+3}$.

2.5 三角函数有理式的积分法

万能代换： $t=tan\frac{x}{2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $sinx=\frac{2t}{1+t^2}$, $cosx=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

例： 求 $\int \frac{dx}{2sinx-cosx+3}$.

例： 求 $\int \frac{sin^5x}{cos^4x}dx$.

2.5 三角函数有理式的积分法

万能代换：$t=tan\frac{x}{2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $sinx=\frac{2t}{1+t^2}$, $cosx=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

例：求 $\int\frac{dx}{2sinx-cosx+3}$.

例：求 $\int\frac{sin^5x}{cos^4x}dx$.

例：求 $\int\frac{cosx}{sinx+cosx}dx$.

2.5 三角函数有理式的积分法

万能代换：$t=tan\frac{x}{2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $sinx=\frac{2t}{1+t^2}$, $cosx=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

例：求 $\int\frac{dx}{2sinx-cosx+3}$.

例：求 $\int\frac{sin^5x}{cos^4x}dx$.

例：求 $\int\frac{cosx}{sinx+cosx}dx$.

例：求 $\int\frac{x-1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}dx$.

练习：$\int \frac{ln(1+x)}{\sqrt{x}} dx.$

练习：$\int \frac{ln(1+x)}{\sqrt{x}} dx.$

练习：$\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}} dx.$

练习： $\int \frac{ln(1+x)}{\sqrt{x}}dx.$

练习： $\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx.$

练习： 已知 $f'(e^x) = xe^{-x}$， 且 $f(1) = 0$, 求 $f(x)$.

练习：$\int \frac{ln(1+x)}{\sqrt{x}}dx.$

练习：$\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx.$

练习：已知 $f'(e^x) = xe^{-x}$，且 $f(1) = 0$, 求 $f(x)$.

练习：已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $(1 + sinx)lnx$，求 $\int xf'(x)dx.$

练习：$\int \frac{ln(1+x)}{\sqrt{x}} dx.$

练习：$\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}} dx.$

练习：已知 $f'(e^x) = xe^{-x}$，且 $f(1) = 0$，求 $f(x)$.

练习：已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $(1 + sinx)lnx$，求 $\int xf'(x)dx.$

练习：求 $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx.$