高等数学
第一章：函数、极限与连续函数

张道平

南开大学数学科学学院 414

daopingzhang@nankai.edu.cn

4.1 无穷小量与无穷大量的概念

4.1 无穷小量与无穷大量的概念

定义：如果 $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0$(或 $\lim_{x\to\infty}\alpha(x)=0$), 则称 $\alpha(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时 (或 $x\to\infty$ 时) 的无穷小量；如果 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$, 则称 x_n 是当 $n\to\infty$ 时的无穷小量. 简称无穷小量为无穷小.

4.1 无穷小量与无穷大量的概念

定义：如果 $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0$(或 $\lim_{x\to\infty}\alpha(x)=0$), 则称 $\alpha(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时 (或 $x\to\infty$ 时) 的无穷小量；如果 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$, 则称 x_n 是当 $n\to\infty$ 时的无穷小量. 简称无穷小量为无穷小.

例：举一些无穷小的例子.

定理：极限 $\lim_{x \to x_0 (x \to \infty)} f(x) = A$(或 $\lim_{n \to \infty} x_n = a$) 的充分必要条件时 $f(x) = A + \alpha(x)$(或 $x_n = a + \alpha_n$), 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \to x_0 (x \to \infty)$ 时的无穷小 (或其中 α_n 是当 $n \to \infty$ 时的无穷小).

定理：极限 $\lim_{x\to x_0(x\to\infty)} f(x) = A$(或 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$) 的充分必要条件时 $f(x) = A + \alpha(x)$(或 $x_n = a + \alpha_n$), 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \to x_0(x \to \infty)$ 时的无穷小 (或其中 α_n 是当 $n \to \infty$ 时的无穷小).

定理：(1) 有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量; (2) 无穷小量与有界变量的乘积是无穷小量; (3) 有限个无穷小量的乘积是无穷小量.

例：计算 $\lim_{n\to\infty} \frac{sinn}{n}$, $\lim_{x\to 0} xsin\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{arctanx}{x}$.

例：计算 $\lim_{n\to\infty}\frac{sinn}{n}$, $\lim_{x\to 0} xsin\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{arctanx}{x}$.

定义：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)=\{x|0<|x-x_0|<\delta_0\}$ 内 (或在 $|x|>X_0$) 有定义. 如果对于任意给定的正数 M，不论它多么大，总存在 δ(或正数 X), 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 (或当 $|x|>X$ 时)，就有 $|f(x)|>M$, 则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷大量 (或当 $x\to\infty$ 时的无穷大量)，简称为无穷大，记作 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$(或 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$). 类似可以定义当 $n\to\infty$ 时的无穷大的数列 $\{x_n\}$，记作 $\lim_{n\to\infty} x_n=\infty$.

∞ 是个数?

∞ 是个数?

正无穷大，负无穷大

∞ 是个数?

正无穷大，负无穷大

几何意义：铅垂渐近线，水平渐近线

∞ 是个数?

正无穷大，负无穷大

几何意义：铅垂渐近线，水平渐近线

例：试证

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty, \lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty, \lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}=\infty.$

定理：在同一极限过程中，无穷大的倒数是无穷小，非零无穷小的倒数是无穷大.

定理：在同一极限过程中，无穷大的倒数是无穷小，非零无穷小的倒数是无穷大.

例：确定常数 A, B，使得 $\lim_{x\to\infty}[\frac{x^2+1}{x+1}-(Ax+B)]=0$. 几何意义?

定理：在同一极限过程中，无穷大的倒数是无穷小，非零无穷小的倒数是无穷大.

例：确定常数 A, B，使得 $\lim_{x\to\infty}[\frac{x^2+1}{x+1} - (Ax + B)] = 0$. 几何意义?

4.2 无穷小量的比较

定理：在同一极限过程中，无穷大的倒数是无穷小，非零无穷小的倒数是无穷大.

例：确定常数 A, B，使得 $\lim_{x\to\infty}[\frac{x^2+1}{x+1} - (Ax + B)] = 0$. 几何意义?

4.2 无穷小量的比较

如果在某一极限过程中函数 $f(x)$ 收敛于 A, 我们自然要问 $f(x)$ 趋于极限 A 的速度如何? 这个问题等价于探讨无穷小量 $\alpha(x) = f(x) - A$ 趋于零的速度，为此，我们来讨论无穷小量的比较.

定义：设 $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, $\lim_{x\to x_0}\beta(x)=0$, 且 $\alpha(x)\neq 0$,

(1) 如果 $\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$, 则称当 $x\to x_0$ 时，$\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小，记作 $\beta(x)=o(\alpha(x))(x\to x_0)$;

(2) 如果 $\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=c\neq 0$，则称当 $x\to x_0$ 时，$\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是同阶无穷小；特别地，如果 $\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$, 则称当 $x\to x_0$ 时，$\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是等价无穷小，记作 $\beta(x)\sim\alpha(x)(x\to x_0)$;

(3) $\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty$，则称当 $x\to x_0$ 时，$\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 低阶的无穷小；

(4) 以 $\alpha(x)$ 作基准无穷小量，如果 $\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^k}=c\neq 0$, 其中常数 $k>0$, 则称 $x\to x_0$ 时, $\beta(x)$ 是关于 $\alpha(x)$ 的 k 阶无穷小.

(3) $\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty$，则称当 $x\to x_0$ 时，$\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 低阶的无穷小；
(4) 以 $\alpha(x)$ 作基准无穷小量，如果 $\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^k}=c\neq 0$, 其中常数 $k>0$, 则称 $x\to x_0$ 时，$\beta(x)$ 是关于 $\alpha(x)$ 的 k 阶无穷小.

例：$1-cosx$ 是关于 x 的二阶无穷小，$ln(1+x)$ 是 x 的等价无穷小.

下面论述中的无穷小 α, β 等都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小，“lim” 表示在此变化过程中的极限. 为了便于书写，常用 $o(1)$ 表示在此变化过程中的无穷小.

下面论述中的无穷小 α, β 等都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小，“lim” 表示在此变化过程中的极限. 为了便于书写，常用 $o(1)$ 表示在此变化过程中的无穷小.

定理：β 与 $\alpha(\alpha \neq 0)$ 是等价无穷小的充分必要条件为 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.

下面论述中的无穷小 α, β 等都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小，“lim” 表示在此变化过程中的极限. 为了便于书写，常用 $o(1)$ 表示在此变化过程中的无穷小.

定理：β 与 $\alpha(\alpha \neq 0)$ 是等价无穷小的充分必要条件为 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.

定理：设 α, β 为无穷小. 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c$, 则 $\beta = c\alpha + o(\alpha)$.

下面论述中的无穷小 α, β 等都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小，“lim” 表示在此变化过程中的极限. 为了便于书写，常用 $o(1)$ 表示在此变化过程中的无穷小.

定理：β 与 $\alpha(\alpha \neq 0)$ 是等价无穷小的充分必要条件为 $\beta = \alpha + o(\alpha)$.

定理：设 α, β 为无穷小. 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c$, 则 $\beta = c\alpha + o(\alpha)$.

例：试证 $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n} (x \to 0)$.

常用的等价无穷小，需要记住！

常用的等价无穷小，需要记住！

定理：设 $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$, u 为某个函数，并且 $\lim(u \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_1}) = A$ 存在，则 $\lim(u \cdot \frac{\beta}{\alpha}) = \lim(u \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_1}) = A$.
(这个定理说了什么事情？)

常用的等价无穷小，需要记住！

定理：设 $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$, u 为某个函数，并且 $\lim(u \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_1}) = A$ 存在，则 $\lim(u \cdot \frac{\beta}{\alpha}) = \lim(u \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_1}) = A$.
(这个定理说了什么事情？)

例：$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{(1-\cos x)(x+3)}$. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

常用的等价无穷小，需要记住！

定理：设 $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$, u 为某个函数，并且 $\lim(u \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_1}) = A$ 存在，则 $\lim(u \cdot \frac{\beta}{\alpha}) = \lim(u \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_1}) = A$.
(这个定理说了什么事情？)

例：$\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. $\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x^2)}{(1-cosx)(x+3)}$. $\lim_{x\to 0} \frac{tanx-sinx}{x^3}$.

例：$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{nsin\frac{1}{n^2}}$.

常用的等价无穷小，需要记住！

定理：设 $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$, u 为某个函数，并且 $\lim(u \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_1}) = A$ 存在，则 $\lim(u \cdot \frac{\beta}{\alpha}) = \lim(u \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_1}) = A$.
(这个定理说了什么事情？)

例：$\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. $\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x^2)}{(1-cosx)(x+3)}$. $\lim_{x\to 0} \frac{tanx-sinx}{x^3}$.

例：$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{nsin\frac{1}{n^2}}$.

例：$\lim_{x\to+\infty}(x \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot sin\frac{3}{x^2})$.

4.3 无穷小的主部与无穷大量的比较

4.3 无穷小的主部与无穷大量的比较

定义：在某极限过程中，选定 α 为基准无穷小，如果 $\beta \sim c\alpha^k (c \neq 0)$, 其中 $k > 0$，即 $\beta = c\alpha^k + o(\alpha^k)$, 则称 $c\alpha^k$ 为无穷小量 β 的主部. 通常，当 $x \to 0$ 时，选定 x 为基准无穷小；当 $x \to \infty$ 时，选定 $\frac{1}{x}$ 为基准无穷小；当 $n \to \infty$ 时，选定 $\frac{1}{n}$ 为基准无穷小，如此等等.

4.3 无穷小的主部与无穷大量的比较

定义：在某极限过程中，选定 α 为基准无穷小，如果 $\beta \sim c\alpha^k (c \neq 0)$, 其中 $k > 0$，即 $\beta = c\alpha^k + o(\alpha^k)$, 则称 $c\alpha^k$ 为无穷小量 β 的主部. 通常，当 $x \to 0$ 时，选定 x 为基准无穷小；当 $x \to \infty$ 时，选定 $\frac{1}{x}$ 为基准无穷小；当 $n \to \infty$ 时，选定 $\frac{1}{n}$ 为基准无穷小，如此等等.

例：$x \to 0$ 时，$1 - cosx$ 的主部? $n \to \infty$ 时，$ln(1 + \frac{1}{n^2})$ 的主部?

定义：设 u, v 在某极限过程中皆是无穷大量：$\lim u=\infty, \lim v=\infty$.

(1) 若 $\lim \frac{v}{u}=\infty$, 则称在该极限过程中 v 比 u 为高阶无穷大；或称 u 比 v 为低阶无穷大；

(2) 若 $\lim \frac{v}{u}=A \neq 0$, 则称在该极限过程中 v 与 u 为同阶无穷大. 特别，若 $\lim \frac{v}{u}=1$, 则称在该极限过程中 v 与 u 是等价无穷大，记作 $v \sim u$. 如果 $\lim \frac{v}{u}=A \neq 0$, 则 $v \sim Au$;

(3) 在某极限过程中，选定 u 为基准无穷大量，如果 $\lim \frac{v}{u^k}=A \neq 0$, 其中常数 $k>0$，则称在该极限过程中 v 关于 u 为 k 阶无穷大，此时有 $v \sim Au^k$.

通常，当 $x \to 0$ 时，选定 $\frac{1}{x}$ 为基准无穷大；当 $x \to \infty$ 时，选定 x 为基准无穷大；当 $n \to \infty$, 选定 n 为基准无穷大，如此等等.

通常，当 $x \to 0$ 时，选定 $\frac{1}{x}$ 为基准无穷大；当 $x \to \infty$ 时，选定 x 为基准无穷大；当 $n \to \infty$, 选定 n 为基准无穷大，如此等等.

例：求 $\lim_{x \to \infty} x^3 (tan \frac{1}{x} - sin \frac{1}{x})$.

通常，当 $x \to 0$ 时，选定 $\frac{1}{x}$ 为基准无穷大；当 $x \to \infty$ 时，选定 x 为基准无穷大；当 $n \to \infty$, 选定 n 为基准无穷大，如此等等.

例：求 $\lim_{x\to\infty} x^3(tan\frac{1}{x} - sin\frac{1}{x})$.

例：求 $\lim_{x\to\infty} x^2(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}})$.

通常，当 $x \to 0$ 时，选定 $\frac{1}{x}$ 为基准无穷大；当 $x \to \infty$ 时，选定 x 为基准无穷大；当 $n \to \infty$, 选定 n 为基准无穷大，如此等等.

例：求 $\lim_{x\to\infty} x^3(tan\frac{1}{x} - sin\frac{1}{x})$.

例：求 $\lim_{x\to\infty} x^2(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}})$.

例：求 $\lim_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a})(a > 0,$ 且 $a \neq 1)$.

通常，当 $x \to 0$ 时，选定 $\frac{1}{x}$ 为基准无穷大；当 $x \to \infty$ 时，选定 x 为基准无穷大；当 $n \to \infty$, 选定 n 为基准无穷大，如此等等.

例：求 $\lim_{x\to\infty} x^3(tan\frac{1}{x} - sin\frac{1}{x})$.

例：求 $\lim_{x\to\infty} x^2(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}})$.

例：求 $\lim_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a})(a > 0,$ 且 $a \neq 1)$.

练习：证明：当 $x \to 0$ 时，$e^x - 1 \sim x$.