高等数学
第六章：微分方程初步

张道平

南开大学数学科学学院 414

daopingzhang@nankai.edu.cn

2.1 可降阶的特殊二阶微分方程

2.1 可降阶的特殊二阶微分方程

1. $y'' = f(x)$ 型

2.1 可降阶的特殊二阶微分方程

1. $y'' = f(x)$ 型

直接积分一次得 $y' = \int f(x)dx + C_1$. 再积分一次，便得到原方程的通解

$$y = \int [\int f(x)dx]dx + C_1x + C_2.$$

2.1 可降阶的特殊二阶微分方程

1. $y'' = f(x)$ 型

直接积分一次得 $y' = \int f(x)dx + C_1$. 再积分一次，便得到原方程的通解

$$y = \int [\int f(x)dx]dx + C_1 x + C_2.$$

2. $y'' = f(x, y')$ 型

这类方程的特征是不显含未知变量 y. 求解方程的方法是先求出 y'.

为此令 $u = y'$, 原方程化为

$$u' = f(x, u),$$

从而方程降了一阶，变成一阶方程. 设此一阶方程可求出通解，将其再积分一次，便可得到原方程的通解.

为此令 $u = y'$, 原方程化为

$$u' = f(x, u),$$

从而方程降了一阶，变成一阶方程. 设此一阶方程可求出通解，将其再积分一次，便可得到原方程的通解.

例：求微分方程 $y'' = y' + x$ 的通解.

为此令 $u = y'$, 原方程化为

$$u' = f(x, u),$$

从而方程降了一阶，变成一阶方程. 设此一阶方程可求出通解，将其再积分一次，便可得到原方程的通解.

例：求微分方程 $y'' = y' + x$ 的通解.

3. $y'' = f(y, y')$ 型
方程

$$y'' = f(y, y')$$

的特征是不显含自变量 x.

为求解，令 $y' = p$，则

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

这样，方程(3)就可变为

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

这是一个关于 y, p 的一阶微分方程.

设它的通解为

$$y' = p = \phi(y, C_1),$$

若将其分离，两端积分就可以得到(3)的通解

$$\int \frac{dy}{\phi(y, C_1)} = x + C_2.$$

设它的通解为

$$y' = p = \phi(y, C_1),$$

若将其分离，两端积分就可以得到(3)的通解

$$\int \frac{dy}{\phi(y, C_1)} = x + C_2.$$

例：求解下列二阶微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} cosx\frac{d^2x}{dt^2} + sinx(\frac{dx}{dt})^2 = \frac{dx}{dt}, \\ x|_{t=-1} = \frac{\pi}{6}, \frac{dx}{dt}|_{t=-1} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2.2 二阶线性微分方程的通解结构

2.2 二阶线性微分方程的通解结构

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{1}$$

是二阶线性微分方程，其中 $f(x)$ 称为方程的自由项.

若 $f(x) \equiv 0$, 则方程(1)取形式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{2}$$

称它为方程(1)相应的齐次线性微分方程.

2.2 二阶线性微分方程的通解结构

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{1}$$

是二阶线性微分方程，其中 $f(x)$ 称为方程的自由项.

若 $f(x) \equiv 0$, 则方程(1)取形式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{2}$$

称它为方程(1)相应的齐次线性微分方程.

若 $f(x) \not\equiv 0$, 则称(1)为非齐次线性微分方程.

我们引进线性微分算子 $L[y] = y'' + py' + qy$,
则(1)与(2)可分别写为

$$L[y] = f(x), L[y] = 0. \tag{3}$$

我们引进线性微分算子 $L[y]=y''+py'+qy$,
则(1)与(2)可分别写为

$$L[y]=f(x), L[y]=0. \tag{3}$$

定理：如果方程(1)的系数 $p(x), q(x)$ 及自由项 $f(x)$ 均在 $[a,b]$ 上连续，则对任一 $x_0\in[a,b]$ 及任意给定的初值条件

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0'. \tag{4}$$

方程(1)在 $[a,b]$ 上必有一个，而且只有一个满足此条件的解.

1. 齐次线性方程的一般理论

1. 齐次线性方程的一般理论
(1) 线性微分算子的性质
性质 1: 对于任意常数 C 及 $[a, b]$ 上的任何二次可微函数 y, 有

$$L[Cy] = CL[y].$$

1. 齐次线性方程的一般理论

(1) 线性微分算子的性质

性质 1: 对于任意常数 C 及 $[a,b]$ 上的任何二次可微函数 y, 有

$$L[Cy]=CL[y].$$

性质 2: 对于 $[a,b]$ 上任意两个二次可微函数 y_1,y_2, 有

$$L[y_1\pm y_2]=L[y_1]\pm L[y_2].$$

若 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程(2)的解，则对于任意常数 C_1, C_2,

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是方程(2)的解.

若 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程(2)的解，则对于任意常数 C_1, C_2,

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

也是方程(2)的解.

(2) 函数组的线性相关与线性无关

若 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程(2)的解，则对于任意常数 C_1, C_2,

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

也是方程(2)的解.

(2) 函数组的线性相关与线性无关
设函数 $y_1(x), y_2(x)$ 可导，我们把行列式

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

称为函数组 $y_1(x), y_2(x)$ 的朗斯基 (Wronski) 行列式.

定理：如果函数组 $y_1(x), y_2(x)$ 在 $[a, b]$ 上线性相关，则在此区间上，其朗斯基行列式恒等于零.

定理：如果函数组 $y_1(x), y_2(x)$ 在 $[a, b]$ 上线性相关，则在此区间上，其朗斯基行列式恒等于零.

设 y_1, y_2 是方程(2)的两个解，如果 y_1, y_2 的朗斯基行列式在 $x_0 \in [a, b]$ 处等于零，则这两个解 $y_1(x), y_2(x)$ 必在 $[a, b]$ 上线性相关，从而可推知在 $[a, b]$ 上朗斯基行列式 $W(x) \equiv 0$.

定理：如果函数组 $y_1(x), y_2(x)$ 在 $[a, b]$ 上线性相关，则在此区间上，其朗斯基行列式恒等于零.

设 y_1, y_2 是方程(2)的两个解，如果 y_1, y_2 的朗斯基行列式在 $x_0 \in [a, b]$ 处等于零，则这两个解 $y_1(x), y_2(x)$ 必在 $[a, b]$ 上线性相关，从而可推知在 $[a, b]$ 上朗斯基行列式 $W(x) \equiv 0$.

综上，可得到：方程(2)的两个解 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 在 $[a, b]$ 上线性无关的充分必要条件是：在 $[a, b]$ 上 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 的朗斯基行列式 $W(x)$ 处处不等于零.

定理：如果 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是齐次线性方程(2)的两个线性无关的解，则齐次方程(2)的通解为

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

其中 C_1, C_2 是任意常数. 此定理称为齐次线性方程的通解结构定理.

定理：如果 $y_1(x), y_2(x)$ 是齐次线性方程(2)的两个线性无关的解，则齐次方程(2)的通解为

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

其中 C_1, C_2 是任意常数. 此定理称为齐次线性方程的通解结构定理.

刘维尔 (Liouvile) 公式：$y_2 = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx.$

定理：如果 $y_1(x), y_2(x)$ 是齐次线性方程(2)的两个线性无关的解，则齐次方程(2)的通解为

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

其中 C_1, C_2 是任意常数. 此定理称为齐次线性方程的通解结构定理.

刘维尔 (Liouvile) 公式：$y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx.$

例：求解 $y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0.$

2. 非齐次线性方程的解

2. 非齐次线性方程的解

定理：若 y_1, y_2 为方程(2)的两个线性无关的解，$\bar{y}$ 是方程(1)的一个特解，则(1)的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_1 y_2 + \bar{y}.$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

2. 非齐次线性方程的解

定理：若 y_1, y_2 为方程(2)的两个线性无关的解，$\bar{y}$ 是方程(1)的一个特解，则(1)的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_1 y_2 + \bar{y}.$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

例：求解 $y'' - \frac{4}{x} y' + \frac{6}{x^2} y = x^2 - 1.$

2. 非齐次线性方程的解

定理：若 y_1, y_2 为方程(2)的两个线性无关的解，$\bar{y}$ 是方程(1)的一个特解，则(1)的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_1 y_2 + \bar{y}.$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

例: 求解 $y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = x^2 - 1.$

2.3 二阶常系数齐次线性微分方程解法

2. 非齐次线性方程的解

定理：若 y_1, y_2 为方程(2)的两个线性无关的解，$\bar{y}$ 是方程(1)的一个特解，则(1)的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_1 y_2 + \bar{y}.$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

例: 求解 $y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = x^2 - 1.$

2.3 二阶常系数齐次线性微分方程解法

在方程(1)中，当 $p(x), q(x)$ 分别为常数 a, b 时，即

$$L[y] \equiv y'' + ay' + by = f(x),$$

称为二阶常系数线性微分方程.

与它相应的齐次线性微分方程为

$$L[y] \equiv y'' + ay' + by = 0.$$

与它相应的齐次线性微分方程为

$$L[y] \equiv y'' + ay' + by = 0.$$

特征方程，特征根．三种情况．齐次线性方程的实虚部原理．

与它相应的齐次线性微分方程为

$$L[y] \equiv y'' + ay' + by = 0.$$

特征方程，特征根. 三种情况. 齐次线性方程的实虚部原理.

例：求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 0$ 的解.

与它相应的齐次线性微分方程为

$$L[y] \equiv y'' + ay' + by = 0.$$

特征方程，特征根．三种情况．齐次线性方程的实虚部原理．

例：求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 0$ 的解．

例：求微分方程 $4\frac{d^2x}{dt^2} - 20\frac{dx}{dt} + 25x = 0$ 的通解．

与它相应的齐次线性微分方程为

$$L[y] \equiv y'' + ay' + by = 0.$$

特征方程，特征根．三种情况．齐次线性方程的实虚部原理．

例：求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 0$ 的解．

例：求微分方程 $4\frac{d^2x}{dt^2} - 20\frac{dx}{dt} + 25x = 0$ 的通解．

例：求解 $y'' + y' + 2y = 0$.

2.4 二阶常系数非齐次线性微分方程解法

2.4 二阶常系数非齐次线性微分方程解法
讨论求二阶常系数非齐次线性方程

$$y'' + ay' + by = f(x).$$

的一个特解 y^* 的求法.

2.4 二阶常系数非齐次线性微分方程解法

讨论求二阶常系数非齐次线性方程

$$y'' + ay' + by = f(x).$$

的一个特解 y^* 的求法.

1. $f(x) = e^{kx}P_m(x)$, 其中
$P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$.

2.4 二阶常系数非齐次线性微分方程解法
讨论求二阶常系数非齐次线性方程

$$y'' + ay' + by = f(x).$$

的一个特解 y^* 的求法.

1. $f(x) = e^{kx}P_m(x)$, 其中
$P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$.

2. $f(x) = e^{\alpha x}[P_{m_1}(x)cos\beta x + P_{m_2}(x)sin\beta x]$.

2.4 二阶常系数非齐次线性微分方程解法
讨论求二阶常系数非齐次线性方程

$$y'' + ay' + by = f(x).$$

的一个特解 y^* 的求法.

1. $f(x) = e^{kx}P_m(x)$, 其中
$P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m.$

2. $f(x) = e^{\alpha x}[P_{m_1}(x)cos\beta x + P_{m_2}(x)sin\beta x].$

例：求方程 $y'' - 2y' + 5y = e^x sin2x.$

例：所求曲线 $y = f(x)(x \geq 0)$ 是微分方程 $2y'' + y' - y = (4 - 6x)e^{-x}$ 的一条积分曲线，此曲线通过原点处的切线斜率为 0，试求曲线 $y = f(x)$ 到 x 轴的最大距离.

例：所求曲线 $y=f(x)(x\geq 0)$ 是微分方程 $2y''+y'-y=(4-6x)e^{-x}$ 的一条积分曲线，此曲线通过原点处的切线斜率为 0, 试求曲线 $y=f(x)$ 到 x 轴的最大距离.

2.5 欧拉方程

例：所求曲线 $y=f(x)(x\geq 0)$ 是微分方程 $2y''+y'-y=(4-6x)e^{-x}$ 的一条积分曲线，此曲线通过原点处的切线斜率为 0, 试求曲线 $y=f(x)$ 到 x 轴的最大距离.

2.5 欧拉方程形如

$$x^2y''+axy'+by=f(x)$$

的方程称为 (二阶) 欧拉方程，其中 a,b 为常数. 欧拉方程可以化为常系数线性方程来解. 作变量替换 $x=e^t$(对 $x<0$，作 $x=-e^t$), 则有 $y'=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$,
$y''=\frac{1}{x^2}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})$.

将其代入原方程，欧拉方程便化为以 t 为自变量的二阶常系数线性方程

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = f(e^t).$$

将其代入原方程，欧拉方程便化为以 t 为自变量的二阶常系数线性方程

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = f(e^t).$$

例：求解 $x^2y'' + xy' + y = x.$