# 概率论与数理统计课程
# 习题课

# 选择题

1. 设$A,B$为随机事件，且$0<P(B)<1$，下列命题中为假命题的是(　　)

（A）若$P(A|B)=P(A)$，则$P\left(A\middle|\bar{B}\right)=P(A)$

（B）若$P(A|B)>P(A)$，则$P\left(\bar{A}\middle|\bar{B}\right)>P\left(\bar{A}\right)$

（C）若$P(A|B)>P\left(A\middle|\bar{B}\right)$，则$P(AB)>P(A)P(B)$

（D）若$P(A|A\cup B)>P\left(\bar{A}|A\cup B\right)$，则$P(A)>P(B)$

**【解析】** $P(A|A\cup B)=\dfrac{P(A(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$，

$$P(\bar{A}|A\cup B)=\frac{P\left(\bar{A}(A\cup B)\right)}{P(A\cup B)}=\frac{P\left(\bar{A}B\right)}{P(A\cup B)}=\frac{P(B)-P(AB)}{P(A)+P(B)-P(AB)},$$

由$P(A|A\cup B)>P\left(\bar{A}|A\cup B\right)$可得$P(A)>P(B)-P(AB)$，故选（D）.

**【注】** 由$P(A|B)=P(A)$知$A$与$B$相互独立，所以$P\left(A\middle|\bar{B}\right)=P(A)$，故（A）正确；

若$P(A|B)>P(A)$，由对称性知$P\left(\bar{A}\middle|\bar{B}\right)>P\left(\bar{A}\right)$，故(B)正确；若$P(A|B)>P\left(A\middle|\bar{B}\right)$，

则$\dfrac{P(AB)}{P(B)}>\dfrac{P\left(A\bar{B}\right)}{P\left(\bar{B}\right)}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$，所以$P(AB)>P(A)P(B)$，故（C）正确.

2021年考研数学(一)第8题

2. 设 A, B, C 为三个随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12}$，则 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为（ ）.

A. $\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{5}{12}$

解析：$P(A\bar{B}\bar{C})=P(A\overline{B\cup C})=P(A)-P[A(B\cup C)]$

$=P(A)-P(AB+AC)$

$=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)$

$=\dfrac{1}{4}-0-\dfrac{1}{12}+0=\dfrac{1}{6}$

$P(B\bar{A}\bar{C})=P(B\overline{A\cup C})=P(B)-P[B(A\cup C)]$

$=P(B)-P(BA)-P(BC)+P(ABC)$

$=\dfrac{1}{4}-0-\dfrac{1}{12}+0=\dfrac{1}{6}$

$P(C\bar{B}\bar{A})=P(C\overline{B\cup A})=P(C)-P[C\cup(B\cup A)]$

$=P(C)-P(CB)-P(CA)+P(ABC)$

$=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{12}+0=\dfrac{1}{12}$

$P(A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C)=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)$

$=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{5}{12}$

选择 D

3. 设随机变量 $X,Y$ 相互独立，且均服从参数为 $\lambda$ 的指数分布，令 $Z=|X-Y|$，则下列随机变量与 $Z$ 同分布的是(　　)

A. $X+Y$　　B. $\dfrac{X+Y}{2}$　　C. $2X$　　D. $X$

【解析】令 $Z=|X-Y|$，则 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{|X-Y|\le z\}$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $z\ge 0$ 时，

$$F_Z(z)=\iint\limits_{|x-y|\le z} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{|x-y|\le z} \lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}dxdy$$

$$=2\int_0^{+\infty}dy\int_y^{y+z}\lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}dx=1-e^{-\lambda z}.$$

所以 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ 1-e^{-\lambda z}, & z\ge 0\end{cases}$.显然 $Z=|X-Y|$ 与 $X$ 同分布. 故选 D.

4. 设随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，在 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，随机变量 $Y$ 服从区间 $(x,1)$ 上的均匀分布，则 $Cov(X,Y)=($　　$)$

A. $-\frac{1}{36}$　　B. $-\frac{1}{72}$　　C. $\frac{1}{72}$　　D. $\frac{1}{36}$

【解析】当 $0<x<1$ 时，$f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, x<y<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$　　$f(x,y)=\begin{cases}2, x<y<1, 0<x<1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$

$$EXY=\iint\limits_{\substack{-\infty<x<+\infty\\ -\infty<y<+\infty}} xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y 2xydx=\frac{1}{4}$$

$$EX=\int_0^1 x2(1-x)dx=\frac{1}{3}$$

$$EY=\iint\limits_{\substack{-\infty<x<+\infty\\ -\infty<y<+\infty}} yf(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y 2ydx=\frac{2}{3}$$

$Cov(X,Y)=EXY-EXEY=\frac{1}{36}$. 故选 D.

5. 设随机变量$X\sim N(0,1)$，在$X=x$条件下，随机变量$Y\sim N(x,1)$，则$X$与$Y$的相关系数为（　　）

（A）$\dfrac{1}{4}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**【解析】**依题设，$X$的概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty,$$

$Y$关于$X=x$的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2}},-\infty<x<+\infty,$$

$X$和$Y$的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2+xy-\frac{y^2}{2}},-\infty<x,y<+\infty,$$

于是$Y$的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2+xy-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}},-\infty<y<+\infty,$$

即$Y\sim N(0,2)$，从而$DY=2$.

所以$\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\dfrac{EXY-EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\dfrac{1-0}{1\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 选（D）.

2022年考研数学(一)第10题

6. 设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同分布，且$X_1$的 4 阶矩存在，设$\mu_k=E\left(X_1^k\right)(k=1,2,3,4)$，则由切比雪夫不等式，对$\forall\varepsilon>0$，有$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\mu_2\right|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant($　　$)$

（A）$\dfrac{\mu_4-\mu_2^2}{n\varepsilon^2}$　　（B）$\dfrac{\mu_4-\mu_2^2}{\sqrt{n}\,\varepsilon^2}$　　（C）$\dfrac{\mu_2-\mu_1^2}{n\varepsilon^2}$　　（D）$\dfrac{\mu_2-\mu_1^2}{\sqrt{n}\,\varepsilon^2}$

**【解析】**令$Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，则$E(Y)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=E\left(X_1^2\right)=\mu_2$，根据切比雪夫不等式有

$$P\left\{\left|Y-\mu_2\right|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant\frac{DY}{\varepsilon^2}=\frac{DX_1^2}{n\varepsilon}=\frac{\mu_4-\mu_2^2}{n\varepsilon^2}.$$

**【答案】**选（A）.

7. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$N(\mu_1,\sigma^2)$的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$为来自总体$N(\mu_2,2\sigma^2)$的简单随机样本，且两样本相互独立，记$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\bar{Y}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}Y_i$，$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2,S_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2$，则(　　)

(A) $\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$　(B) $\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$　(C) $\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$　(D) $\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

**【解析】**因为$U=\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),V=\frac{(m-1)S_2^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(m-1)$，且$U$与$V$相互独立，

于是$\frac{U/(n-1)}{V/(m-1)}=\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$，答案选(D).

2023年考研数学(一)第9题

8. 设$X_1,X_2$为来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，其中$\sigma(\sigma>0)$是未知参数.记$\hat{\sigma}=a|X_1-X_2|$，若$E(\hat{\sigma})=\sigma$，则$a=$(　　)

(A) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$　(C) $\sqrt{\pi}$　(D) $\sqrt{2\pi}$

**【解析】**因为$Y=X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)$，则

$$E(\hat{\sigma})=a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|y|}{2\sqrt{\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}}dy=2a\int_{0}^{+\infty}\frac{y}{2\sqrt{\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}}dy=\frac{2a\sigma}{\sqrt{\pi}}=\sigma.$$ 所以$a=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.故答案选(A).

2023年考研数学(一)第10题

9. 设$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$为来自总体$N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$的简单随机样本，令 $\theta=\mu_1-\mu_2$，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i,\hat{\theta}=\bar{X}-\bar{Y}$，则（　　）

（A）$\hat{\theta}$是$\theta$的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

（B）$\hat{\theta}$不是$\theta$的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

（C）$\hat{\theta}$是$\theta$的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

（D）$\hat{\theta}$不是$\theta$的无偏估计，$D(\hat{\theta})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

**【解析】** 由题意可得

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2),\bar{X}\sim N\left(\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{n}\right),\bar{Y}\sim N\left(\mu_2,\frac{\sigma_2^2}{n}\right),cov(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2,$$

由于$(X,Y)$服从二维正态分布，所以$(\bar{X},\bar{Y})$也服从二维正态分布，则$\bar{X}-\bar{Y}$服从一维正态分布，于是$E(\hat{\theta})=E(\bar{X}-\bar{Y})=E(\bar{X})-E(\bar{Y})=\theta$，故$\hat{\theta}$是$\theta$的无偏估计；

$$cov(\bar{X},\bar{Y})=cov\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)=\frac{1}{n^2}cov\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)=\frac{n\rho\sigma_1\sigma_2}{n^2}=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{n},$$

于是$D(\hat{\theta})=D(\bar{X}-\bar{Y})=D(\bar{X})+D(\bar{Y})-2cov(\bar{X},\bar{Y})=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$，选（C）.

10. 设$x_1,x_2,\cdots,x_{16}$是来自总体$N(\mu,4)$的简单随机样本，考虑假设检验问题：$H_0:\mu\leqslant 10,H_1:\mu>10$，$\Phi(x)$表示标准正态分布函数，若该检验问题的拒绝域为$W=\left\{\bar{X}\geqslant 11\right\}$，其中$\bar{X}=\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}X_i$，则$\mu=11.5$时，该检验犯第二类错误的概率为(　　)

（A）$1-\Phi(0.5)$　　（B）$1-\Phi(1)$　　（C）$1-\Phi(1.5)$　　（D）$1-\Phi(2)$

**【解析】**检验犯第二类错误的概率为$P\left\{\bar{X}<11\right\}$.

由题意知$\bar{X}\sim N\left(11.5,\dfrac{1}{4}\right)$，所以 $P\left\{\bar{X}<11\right\}=P\left\{\dfrac{\bar{X}-11.5}{\frac{1}{2}}\leqslant\dfrac{11-11.5}{\frac{1}{2}}\right\}=1-\Phi(1)$. 选（B）.

# 填空题

1. 设随机试验每次成功的概率为$P$，现进行 3 次独立重复试验，在至少成功 1 次的条件下，3 次试验全部成功的概率为$\frac{4}{13}$，则 $P=$________

【解析】设随机变量$X$表示三次试验中成功的次数，则$X\sim B(3,p)$，

所以

$$P\{X=3|X\geq 1\}=\frac{P\{X=3,X\geq 1\}}{P\{X\geq 1\}}=\frac{P\{X=3\}}{P\{X\geq 1\}}=\frac{C_3^3p^3}{1-C_3^0(1-p)^3}=\frac{4}{13}\quad 故\ p=\frac{2}{3}.$$

2024年考研数学(一)第16题

设随机变量$X,Y$相互独立，且$X\sim B\left(1,\frac{1}{3}\right),Y\sim B\left(2,\frac{1}{2}\right)$，则$P\{X=Y\}=$________.

【解析】
$$\begin{aligned}P\{X=Y\}&=P\{X=Y=0\}+P\{X=Y=1\}\\&=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}\\&=P\{X=0\}P\{Y=0\}+P\{X=1\}P\{Y=1\}\\&=\frac{2}{3}C_2^0\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

2023年考研数学(一)第16题

2. 设$A,B,C$为三个随机事件，$A$与$B$互不相容，$A$与$C$互不相容，$B$与$C$相互独立，且$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，则$P(B\cup C|A\cup B\cup C)=$________.

**【解析】**依题设，$P(AB)=0,P(AC)=0,P(BC)=P(B)P(C)=\frac{1}{9}$；

由条件概率公式得：$P(B\cup C|A\cup B\cup C)=\frac{P(B\cup C)}{P(A\cup B\cup C)}$

$$=\frac{P(B)+P(C)-P(BC)}{P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)}=\frac{5}{8}.$$

2022年考研数学(一)第16题

3. 甲、乙两个盒子中各装有2个红球和2个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球. 令$X,Y$分别表示从甲盒和乙盒中取到的红色球个数，则$X$与$Y$的相关系数为________.

**【解析】**由题可得

$$(X,Y)\sim\begin{pmatrix}(0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1)\\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10}\end{pmatrix},\quad X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad XY\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{7}{10} & \frac{3}{10}\end{pmatrix},$$

$$EX=EY=\frac{1}{2},DX=DY=\frac{1}{4},E(XY)=\frac{3}{10},$$

$$cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=\frac{1}{20}，则\rho_{XY}=\frac{1}{5}.$$

2021年考研数学(一)第16题

# 解答证明题

1. 设随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$ 对 $X$ 进行独立重复的观测，直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止．记 $Y$ 为观测次数.

(Ⅰ) 求 $Y$ 的概率分布； (Ⅱ) 求 $EY$.

**解**. (Ⅰ) 记 $p$ 为观测值大于 3 的概率，则

$$p=P(X>3)=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8},$$

从而 $Y$ 的概率分布为

$$P\{Y=n\}=C_{n-1}^{1}p(1-p)^{n-2}p=(n-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^{n-2},\quad n=2,3,\cdots$$

(Ⅱ) 由离散型数学期望的公式得

$$E(Y)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot P\{Y=n\}=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^{n-2}$$

$$=\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\sum_{n=2}^{\infty}x^n\right)''\Bigg|_{x=\frac{7}{8}}=\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''\Bigg|_{x=\frac{7}{8}}=\left(\frac{1}{8}\right)^2\frac{2}{(1-x)^3}\Bigg|_{x=\frac{7}{8}}=16.$$

2. 设随机变量 $X_1$，$X_2$，$X_3$ 相互独立，其中 $X_1$ 与 $X_2$ 均服从标准正态分布，$X_3$ 的概率分布为 $P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\frac{1}{2}, Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$.

（1）求二维随机变量（$X_1$，$Y$）的分布函数，结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示.

（2）证明随机变量 $Y$ 服从标准正态分布.

（Ⅰ）$(X_1,Y)$ 的分布函数 $F(x,y)$

$$\begin{aligned}F(x,y) &= P\{X_1\leqslant x, Y\leqslant y\} = P\{X_1\leqslant x, X_3X_1+(1-X_3)X_2\leqslant y\}\\ &= P\{X_3=0\}P\{X_1\leqslant x, X_3X_1+(1-X_3)X_2\leqslant y \mid X_3=0\}+\\ &\quad P\{X_3=1\}P\{X_1\leqslant x, X_3X_1+(1-X_3)X_2\leqslant y \mid X_3=1\}\\ &= \frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x, X_2\leqslant y \mid X_3=0\}+\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x, X_1\leqslant y \mid X_3=1\}\\ &= \frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x, X_2\leqslant y\}+\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x, X_1\leqslant y\}\\ &= \frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x\}P\{X_2\leqslant y\}+\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant \min(x,y)\}\\ &= \frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(\min(x,y))\end{aligned}$$

（Ⅱ）$Y$ 的分布函数

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P\{X_3X_1+(1-X_3)X_2\leqslant y\}\\ &= P\{X_3=0\}P\{X_3X_1+(1-X_3)X_2\leqslant y \mid X_3=0\}+\\ &\quad P\{X_3=1\}P\{X_3X_1+(1-X_3)X_2\leqslant y \mid X_3=1\}\\ &= \frac{1}{2}P\{X_2\leqslant y \mid X_3=0\}+\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant y \mid X_3=1\}\\ &= \frac{1}{2}P\{X_2\leqslant y\}+\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant y\} = \frac{1}{2}\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(y) = \Phi(y)\end{aligned}$$

$Y\sim N(0,1)$.

2020年考研数学(一)22题

3. 设随机变量为 $X$，$Y$ 相互独立，且 $X$ 的概率分布为 $P(X=0)=P(X=1)=\frac{1}{2}$，Y的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(Ⅰ) 求 $P(Y\leqslant EY)$； (Ⅱ) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

**解.** (Ⅰ) 由数字特征的公式可知

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 2y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{3},$$

则有

$$P\{Y\leqslant EY\}=P\left\{Y\leqslant\frac{2}{3}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{2}{3}} f(y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{2}{3}} 2y\,\mathrm{d}y=\frac{4}{9}.$$

(Ⅱ) $Z$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}\\&=P\{X=0\}P\{X+Y\leqslant z|X=0\}+P\{X=1\}P\{X+Y\leqslant z|X=1\}\\&=\frac{1}{2}P\{Y\leqslant z\}+\frac{1}{2}P\{Y\leqslant z-1\}=\frac{1}{2}F_Y(z)+\frac{1}{2}F_Y(z-1).\end{aligned}$$

因此 $Z$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\frac{1}{2}f_Y(z)+\frac{1}{2}f_Y(z-1)=\begin{cases}z, & 0<z<1;\\ z-2, & 2<z<3;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

2017年考研数学(一)22题

4. 在区间$(0,2)$上随机取一点，将该区间分成两段，较短一段的长度记为$X$，较长一段的长度记为$Y$.令$Z=\dfrac{Y}{X}$.

（Ⅰ）求$X$的概率密度；（Ⅱ）求$Z$的概率密度；（Ⅲ）求$E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.

【解析】（Ⅰ）$X+Y=2, X<Y$，由题意可得，$X\sim U(0,1)$，则$X$的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, 0<x<1\\ 0, \quad 其他\end{cases};$$

（Ⅱ）由题意可得$Y=2-X$，即$Z=\dfrac{2-X}{X}$，先求$Z$的分布函数：

$$F_Z=P\{Z\le z\}=P\left\{\frac{2-X}{X}\le z\right\}=P\left\{\frac{2}{X}-1\le z\right\};$$

当$z<1$时，$F_Z(z)=0$；

当$z\ge 1$时，$F_Z(z)=P\left\{\dfrac{2}{X}-1\le z\right\}=1-P\left\{X\le\dfrac{2}{z+1}\right\}=1-\displaystyle\int_0^{\frac{2}{z+1}}1\,\mathrm{d}x=1-\dfrac{2}{z+1}$，

所以$Z$的概率密度为$f_Z(z)=(F_Z(z))'=\begin{cases}\dfrac{2}{(z+1)^2}, z\ge 1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$.

（Ⅲ）$E\left(\dfrac{X}{Y}\right)=E\left(\dfrac{X}{2-X}\right)=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{2-x}\cdot 1\,\mathrm{d}x=2\ln 2-1$.

2021年考研数学(一)22题

5. 设二维随机变量$(X,Y)$的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}(x^2+y^2), & x^2+y^2\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

(I)求$X$与$Y$的协方差；

(II)$X$与$Y$是否相互独立？

(III)求$Z=X^2+Y^2$的概率密度.

**【解析】**(I)$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}x\cdot\dfrac{2}{\pi}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，同理

$EY=0$，$E(XY)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}xy\dfrac{2}{\pi}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，于是$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY=0$.

(II)$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$.

当$x<-1$或$x>1$时，$f_X(x)=0$；

当$-1\leqslant x\leqslant 1$时，$f_X(x)=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{2}{\pi}(x^2+y^2)\mathrm{d}y=\dfrac{4}{3\pi}(1+2x^2)\sqrt{1-x^2}$；

同理可得$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{4}{3\pi}(1+2y^2)\sqrt{1-y^2}, & -1\leqslant y\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

显然$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故$X$与$Y$不相互独立.

(III)设$Z$的分布函数为$F_Z(z)$，则$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X^2+Y^2\leqslant z\}$.

当$z<0$时，$F_Z(z)=0$；

当$z\geqslant 1$时，$F_Z(z)=1$；

当$0\leqslant z<1$时，$F_Z(z)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z}\dfrac{2}{\pi}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}}r^3\mathrm{d}r=z^2$；

故$Z$的概率密度为$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}2z, & 0<z<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

2023年考研数学(一)22题

6. 设随机变量 $X,Y$ 相互独立，$X$ 服从参数为 1 的指数分布，$Y$ 的概率分布为：

$P\{Y=-1\}=p$，$P\{Y=1\}=1-p$，$(0<p<1)$. 令 $Z=XY$.

(Ⅰ) 求 $Z$ 的概率密度；(Ⅱ) $p$ 为何值时，$X$ 与 $Z$ 不相关；(Ⅲ) $X$ 与 $Z$ 是否相互独立？

(Ⅰ) $X$ 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0; \\ 0, & x\leqslant 0. \end{cases}$$

$Z$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{XY\leqslant z\}=P\{XY\leqslant z, Y=1\}+P\{XY\leqslant z, Y=-1\} \\ &=P\{X\leqslant z\}P\{Y=1\}+P\{X\geqslant -z\}P\{Y=-1\} \\ &=(1-p)P\{X\leqslant z\}+pP\{X\geqslant -z\} \\ &=(1-p)F_X(z)+p(1-F_X(-z)). \end{aligned}$$

因此 $Z$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=pf_X(-z)+(1-p)f_X(z)=\begin{cases} pe^{z}, & z<0; \\ 0, & z=0; \\ (1-p)e^{-z}, & z>0. \end{cases}$$

(Ⅱ) 因为随机变量 $X,Y$ 相互独立，且 $D(X)=1$，$E(Y)=1-2p$，所以

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Z)&=E(XZ)-E(X)E(Z)=E(X^2Y)-E(X)E(XY) \\ &=E(X^2)EY-(EX)^2EY=DX\cdot EY=1-2p. \end{aligned}$$

故 $X,Z$ 不相关等价于 $\mathrm{Cov}(X,Z)=1-2p=0$，即 $p=0.5$.

(Ⅲ) 由 (Ⅱ) 可知，当 $p\neq 0.5$ 时，$X$ 与 $Z$ 是相关的，从而不相互独立. 而当 $p=0.5$ 时，因为

$$P\{X>1\}=\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx=e^{-1},$$

$$P\{Z<1\}=P\{X>-1, Y=-1\}+P\{X<1, Y=1\}=1-\frac{1}{2}e^{-1},$$

$$P\{X>1, Z<1\}=P\{X>1, XY<1\}=P\{X>1\}P\{Y=-1\}=\frac{1}{2}e^{-1},$$

从而 $X$ 与 $Z$ 也是不相互独立的.

7. 已知随机变量 $X$，$Y$ 相互独立，且 $P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\frac{1}{2}$，$Y$ 服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布，令 $Z=XY$。

(Ⅰ) 求 $\mathrm{Cov}(X,Z)$；(Ⅱ) 求 $Z$ 的概率分布.

(Ⅰ) 由题设可得 $DX=1$，$EY=\lambda$. 所以

$$\mathrm{Cov}(X,Z)=\mathrm{Cov}(X,XY)=E(X^2Y)-E(X)E(XY)$$

$$=E(X^2)E(Y)-[E(X)]^2E(Y)=D(X)E(Y)=\lambda.$$

(Ⅱ) 由条件可知 $Z$ 的取值为所有整数，则有

$$P\{Z=k\}=P\{XY=k\}$$

$$=P\{X=1\}P\{XY=k|X=1\}+P\{X=-1\}P\{XY=k|X=-1\}$$

$$=P\{X=1\}P\{Y=k\}+P\{X=-1\}P\{Y=-k\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{Y=k\}+\frac{1}{2}P\{Y=-k\}.$$

因为 $Y$ 服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布，所以当 $k=0$ 时有

$$P\{Z=0\}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-\lambda};$$

当 $k>0$ 有

$$P\{Z=k\}=\frac{1}{2}\frac{\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}+0=\frac{\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda}}{2k!};$$

当 $k<0$ 有

$$P\{Z=k\}=0+\frac{1}{2}\frac{\lambda^{-k}\mathrm{e}^{-\lambda}}{(-k)!}=\frac{\lambda^{-k}\mathrm{e}^{-\lambda}}{2(-k)!}.$$

综上所述，$Z$ 的概率分布为

$$P\{Z=k\}=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{|k|}\mathrm{e}^{-\lambda}}{2|k|!}, & k=\pm1,\pm2\cdots; \\ \mathrm{e}^{-\lambda}, & k=0.\end{cases}$$

8. 设 $X$ 的概率密度为

$$f(x,\sigma)=\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

其中 $\sigma\in(0,+\infty)$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本，记 $\sigma$ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(Ⅰ) 求 $\hat{\sigma}$；(Ⅱ) 求 $E(\hat{\sigma})$，$D(\hat{\sigma})$.

(Ⅰ) 由条件可知，似然函数为

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x_i|}{\sigma}}.$$

取对数得

$$\ln L(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}\left[-\ln 2\sigma-\frac{|x_i|}{\sigma}\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[-\ln 2-\ln\sigma-\frac{|x_i|}{\sigma}\right].$$

求导并令导数为零得到

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{\sigma}+\frac{|x_i|}{\sigma^2}\right]=-\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_1|}{\sigma^2}=0.$$

解得 $\sigma$ 得极大似然估计 $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_1|$.

(Ⅱ) 由前面已知 $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_1|$，所以

$$E(\hat{\sigma})=E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\,\mathrm{d}x=\sigma,$$

$$D(\hat{\sigma})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_1|\right)=\frac{1}{n}D(|X|)=\frac{1}{n}\left[E(X^2)-[E(|X|)]^2\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\,\mathrm{d}x-\sigma^2\right]=\frac{1}{n}\left[2\sigma^2-\sigma^2\right]=\frac{\sigma^2}{n}.$$

2018年考研数学(一)23题

9. 设总体 $X$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$$

其中 $\mu$ 是已知参数，$\sigma$ 是未知参数，$A$ 是常数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X$ 的简单随机样本.

(Ⅰ) 求常数 $A$ 的值；(Ⅱ) 求 $\sigma^2$ 的最大似然估计量.

(Ⅰ) 由概率密度的归一性可知

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\mu}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=A\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}A,$$

所以 $A=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

(Ⅱ) 似然函数为

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\sigma)=\begin{cases}\dfrac{A^n}{\sigma^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant\mu;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant\mu$ 时，取对数得

$$\ln L(\sigma^2)=n\ln A-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

对 $\sigma^2$ 求导并令导数等于零得

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}(\sigma^2)}=-\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0.$$

解方程得 $\sigma^2$ 的最大似然估计值为 $\widehat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$，故 $\sigma^2$ 的最大似然估计量为 $\widehat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.

2019年考研数学(一)23题

10. 设总体$X$服从$[0,\theta]$上的均匀分布，其中$\theta\in(0,+\infty)$为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$X$的简单随机样本，记

$$X(n)=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}，\ T_c=cX(n).$$

（1）求$c$，使得$T_c$是$\theta$的无偏估计；（2）记$h(c)=E(T_c-\theta)^2$，求$c$使得$h(c)$最小.

【解析】(1) $X$的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta},0<x<\theta\\ 0,其它\end{cases}$，

$X$的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0,x<0\\ \dfrac{1}{\theta}x,0\le x<\theta.\\ 1,x\ge\theta\end{cases}$

$X_{(n)}$的分布函数为：

$F_{X_{(n)}}(x)=P\{\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\le x\}$

$=P\{X_1\le x,X_2\le x,\cdots,X_n\le x\}$

$=P\{X_1\le x\}\cdot P\{X_2\le x\}\cdot\cdots\cdot P\{X_n\le x\}=F^n(x)$，

$X_{(n)}$概率密度为$f_{X_{(n)}}(x)=nF^{n-1}(x)\cdot f(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta^n}x^{n-1},0<x<\theta\\ 0,其它\end{cases}.$

$E(T_c)=cE(X_{(n)})=c\int_0^\theta x\cdot\dfrac{n}{\theta^n}x^{n-1}dx=\dfrac{cn}{n+1}\theta$，令$E(T_c)=\dfrac{cn}{n+1}\theta=\theta$，得$c=\dfrac{n+1}{n}$.

(2) $E(T_c^2)=c^2E(X_{(n)}^2)=c^2\int_0^\theta x^2\cdot\dfrac{n}{\theta^n}x^{n-1}dx=\dfrac{c^2n}{n+2}\theta^2$

$h(c)=E(T_c-\theta)^2$

$=E(T_c^2-2\theta T_c+\theta^2)$

$=E(T_c^2)-2\theta E(T_c)+\theta^2$

$=\dfrac{c^2n}{n+2}\theta^2-\dfrac{2cn}{n+1}\theta^2+\theta^2.$

$h'(c)=\dfrac{2cn}{n+2}\theta^2-\dfrac{2n}{n+1}\theta^2$，令$h'(c)=0$得$c=\dfrac{n+2}{n+1}$. $h''(c)=\dfrac{2n}{n+2}\theta^2>0$，

所以当$c=\dfrac{n+2}{n+1}$时，$h(c)$最小.

2024年考研数学(一)22题

11. 某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 $n$ 次测量，该物体的质量 $\mu$ 是已知的，设 $n$ 次测量结果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 该工程师记录的是 $n$ 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|(i=1,2,\cdots,n)$，利用 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 估计 $\sigma$.

(Ⅰ) 求 $Z_i$ 的概率密度；

(Ⅱ) 利用一阶矩求 $\sigma$ 的矩估计量；

(Ⅲ) 求 $\sigma$ 的最大似然估计量.

(Ⅰ) 因为 $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$，所以 $Y_i=\dfrac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$. 设 $Z_i$ 的分布函数为 $F(z)$，

当 $z<0$ 时，$F(z)=0$；当 $z\geqslant 0$ 时，

$$F(z)=P\{Z_i\leqslant z\}=P\left\{-\frac{z}{\sigma}\leqslant Y_i\leqslant\frac{z}{\sigma}\right\}$$

$$=\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{z}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right)-1.$$

则 $Z_i$ 的概率密度为

$$f(z)=F'(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sigma}\varphi\left(\dfrac{z}{\sigma}\right), & z\geqslant 0\\ 0, & z<0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z\geqslant 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

(Ⅱ) 因为

$$EZ_i=\int_0^{+\infty}z\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}z=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}},$$

所以 $\sigma=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}EZ_i$，从而 $\sigma$ 的矩估计量为 $\hat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\overline{Z}$.

(Ⅲ) 由题设知对应的似然函数为

$$L(z_1,z_2,\cdots,z_n,\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}},$$

取对数得

$$\ln L=\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\sqrt{\frac{2}{\pi}}-\ln\sigma-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}\right).$$

所以由

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{\sigma}+\frac{z_i^2}{\sigma^3}\right)=0,$$

得 $\sigma=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2}$，所以 $\sigma$ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i^2}$.

2017年考研数学(一)23题

12. 设总体 $X$ 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，$X_1,X_2,X_3$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本，令 $T=\max\{X_1,X_2,X_3\}$. (Ⅰ) 求 $T$ 的概率密度；(Ⅱ) 确定 $a$，使得 $aT$ 为 $\theta$ 的无偏估计.

**解.** (Ⅰ) 根据题意，$X_1,X_2,X_3$ 独立同分布，$T$ 的分布函数为

$$F_T(t)=P\{\max\{X_1,X_2,X_3\}\leqslant t\}=P\{X_1\leqslant t,X_2\leqslant t,X_3\leqslant t\}$$

$$=P\{X_1\leqslant t\}P\{X_2\leqslant t\}P\{X_3\leqslant t\}=(P\{X\leqslant t\})^3.$$

当 $t<0$ 时，$F_T(t)=0$；当 $t\geqslant 0$ 时，$F_T(t)=1$；当 $0<t<\theta$ 时，

$$F_T(t)=\left(\int_0^t\frac{3x^2}{\theta^3}\mathrm{d}\theta\right)^3=\frac{t^9}{\theta^9}.$$

所以 $T$ 的概率密度

$$f_T(t)=\begin{cases}\dfrac{9t^8}{\theta^9}, & 0<t<\theta;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(Ⅱ) 欲使 $aT$ 为 $\theta$ 的无偏估计，得有

$$\theta=E(aT)=aET=a\int_0^\theta t\frac{9t^8}{\theta^9}\mathrm{d}t=\frac{9}{10}a\theta,$$

解得 $a=\dfrac{10}{9}$.

2016年考研数学(一)23题

13. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

其中 $\theta$ 为未知参数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(I) 求 $\theta$ 的矩估计量；(II) 求 $\theta$ 的最大似然估计量.

**解.** (I) 总体的数学期望

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{1}x\cdot\frac{1}{1-\theta}\mathrm{d}x=\frac{1+\theta}{2}.$$

令 $E(X)=\overline{X}$，即 $\dfrac{1+\theta}{2}=\overline{X}$，解得 $\widehat{\theta}=2\overline{X}-1$ 为 $\theta$ 的矩估计量.

(II) 似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{1-\theta}\right)^n, & \theta\leqslant x_i\leqslant 1\ (i=1,2,\cdots,n);\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

当 $\theta\leqslant x_i\leqslant 1$（$i=1,2,\cdots,n$）时，$\ln L(\theta)=-n\ln(1-\theta)$. 从而

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{1-\theta}>0,$$

即 $\ln L(\theta)$ 关于 $\theta$ 单调增加. 所以当 $\theta=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 时 $L(\theta)$ 达到最大值，故 $\theta$ 的最大似然估计量为 $\widehat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

14. 设总体 $X$ 的分布函数为 $F(x;\theta)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ 其中 $\theta$ 是未知参数且大于零．$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X$ 的简单随机样本.

(Ⅰ) 求 $E(X)$ 与 $E(X^2)$；(Ⅱ) 求 $\theta$ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$；(Ⅲ) 是否存在实数 $a$，使得对任何 $\epsilon>0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-a\right|\geqslant\epsilon\right\}=0$?

**解.** (Ⅰ) 总体 $X$ 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$ 所以

$$EX=\int_0^{+\infty}x\frac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\,\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi\theta},$$

$$EX^2=\int_0^{+\infty}x^2\frac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\,\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x^2\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}\right)=\theta.$$

(Ⅱ) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本观测值，则似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases}\frac{2^n x_1x_2\cdots x_n}{\theta^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}, & x_1,x_2,\cdots,x_n>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$ 时,

$$\ln L(\theta)=n\ln 2+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$，解得 $\theta=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$，所以 $\theta$ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$.

(Ⅲ) 存在 $a=\theta$．因为 $\{X_n^2\}$ 是独立同分布的随机变量序列，且 $E(X_n^2)=\theta<+\infty$,

所以根据辛钦大数定律, 当 $n\to\infty$ 时, $\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 $EX^2=\theta$.

因此对任何 $\epsilon>0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|\geqslant\epsilon\right\}=0$.

2014年考研数学(一)23题