线性代数-线性方程组

- 矩阵的初等变换
- 矩阵初等变换与矩阵乘法的联系
- 矩阵的秩
- 线性方程组有解判定定理
- 线性方程组的应用

3.1 矩阵的初等变换

矩阵的初等变换

引例：消元法求解线性方程组.

设有如下线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 & (1) \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (2) \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 & (3) \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 & (4) \end{cases} \qquad (B_0)$$

$$\xrightarrow[(3)\div 2]{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (1) \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 & (2) \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 & (3) \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 & (4) \end{cases} \qquad (B_1)$$

将x_1从后三个方程中消去:

$$\xrightarrow[\substack{(3)-2\times(1) \\ (4)-3\times(1)}]{(2)-(3)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (1) \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 & (2) \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6 & (3) \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3 & (4) \end{cases} \qquad (B_2)$$

说明. 上面对方程组的三种操作(交换两个方程, 将某个方程两边同乘一个非零实数, 将某个方程的倍数加到另一个方程上)不改变方程组的解.

矩阵的初等变换

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (1) \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 & (2) \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6 & (3) \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3 & (4) \end{cases} \qquad (B_2)$$

再把x_2从后两个方程中消去：

$$\xrightarrow[\substack{(3)+5\times(2) \\ (4)-3\times(2)}]{(2)\times\frac{1}{2}} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (1) \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 & (2) \\ 2x_4 = -6 & (3) \\ x_4 = -3 & (4) \end{cases} \qquad (B_3)$$

（这时x_3也已消去）

$$\xrightarrow[4-2\times(3)]{(3)\leftrightarrow(4)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (1) \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 & (2) \\ x_4 = -3 & (3) \\ 0 = 0 & (4) \end{cases} \qquad (B_4)$$

矩阵的初等变换

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (1) \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 & (2) \\ x_4 = -3 & (3) \\ 0 = 0 & (4) \end{cases} \qquad (B_4)$$

将x_4回代到前两个方程:

$$\xrightarrow[(2)-(3)]{(1)-(3)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 7 & (1) \\ x_2 - x_3 = 3 & (2) \\ x_4 = -3 & (3) \\ 0 = 0 & (4) \end{cases} \qquad (B_5)$$

将x_2回代到第1个方程:

$$\xrightarrow{(1)-(2)} \begin{cases} x_1 - x_3 = 4 & (1) \\ x_2 - x_3 = 3 & (2) \\ x_4 = -3 & (3) \\ 0 = 0 & (4) \end{cases} \qquad (B_6)$$

有效方程

无效方程

矩阵的初等变换

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad - x_3 = 4 & (1) \\ \quad\quad x_2 - x_3 = 3 & (2) \\ \quad\quad\quad\quad\quad x_4 = -3 & (3) \\ \quad\quad\quad\quad\quad 0 = 0 & (4) \end{cases} \qquad (B_6)$$

(B_6)有3个有效方程，4个未知量，故某个未知量无法确定，这样的未知量称为**自由未知量**.

令x_3为自由未知量，原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 + 3 \\ x_4 = \quad -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{令}x_3=c\text{为任意实数}} \begin{cases} x_1 = c + 4 \\ x_2 = c + 3 \\ x_3 = c + 0 \\ x_4 = 0 - 3 \end{cases}.$$

于是方程组的解可写成**向量形式**:

$$x \triangleq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c+0 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{其中}c\text{是任意实数}.$$

矩阵的初等变换

思考：是否能够取其他未知量为自由未知量?

令x_2为自由未知量，原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 1 \\ x_3 = x_2 - 3 \\ x_4 = \quad -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{令}x_2=c\text{为任意实数}} x = \begin{pmatrix} c+1 \\ c+0 \\ c-3 \\ 0-3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

思考：$c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$与上面的解是否是表示同一个集合?

$$x = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= (c+3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

当c取遍所有实数，$c+3$也取遍所有实数，因此两种形式表示的是同一个集合.

矩阵的初等变换

在上述消元过程中，实际上只有方程组的系数和常数进行运算，未知量并没有参与运算.

因此，对方程组所做的变换实际上是对其增广矩阵$B = (A, b) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$所做的变换.

将对方程组的三种同解变换翻译到矩阵上，就是矩阵的初等行变换.

定义(矩阵的初等行变换). 下面三种变换称为矩阵的初等行变换:

- 对换矩阵中的两行($r_i \leftrightarrow r_j$);
- 把某一非零数k乘以某一行的所有元素($r_i \times k$);
- 把某一行各元素的k倍加到另一行对应元素上去($r_i + kr_j$).

说明. 将上述定义中的”行”改成”列”，即得到矩阵的初等列变换的定义. 矩阵的初等行变换和初等列变换统称为初等变换.

矩阵的初等变换

定义(矩阵的相抵关系). 设A, B为同型矩阵，若A能够经过有限次初等行(列)变换变成B，则称A行(列)相抵于B，记作$A \sim_r B$($A \sim_c B$).

若A能够经过有限次初等变换变成B，则称A相抵于B，记作$A \sim B$.

相抵关系的性质. 相抵关系是一个**等价关系**，即它满足下列三个性质：

- **反身性** $A \sim A$.
- **对称性** 若$A \sim B$，则$B \sim A$.
- **传递性** 若$A \sim B$，$B \sim C$，则$A \sim C$.

证明. 反身性和传递性显然.

要证对称性，只需证明若A能够经过1次初等行变换变成B，则B也能够经过1次初等行变换变回A.

- 若$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$，则$B \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} A$.
- 若$A \xrightarrow{r_i \times k} B$, 则$B \xrightarrow{r_i \times \frac{1}{k}} A$.
- 若$A \xrightarrow{r_i + k r_j} B$，则$B \xrightarrow{r_i + (-k) r_j} A$. ■

行阶梯形矩阵

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (1) \\ \quad\;\; x_2 - x_3 + x_4 = 0 & (2) \\ \qquad\qquad\quad\; x_4 = -3 & (3) \\ \qquad\qquad\quad\;\; 0 = 0 & (4) \end{cases} \qquad (B_4)$$

$$\Updownarrow$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵

定义(行阶梯形矩阵). 满足下面两个条件的矩阵称为行阶梯形矩阵:

- 非零行在零行的上面;
- 非零行的首非零元所在列在上一行(如果存在的话)的首非零元所在列的右面.

说明. 上述第2个条件可等价表述为:

若矩阵有r个非零行且第i行的首非零元出现在第j_i列($1 \leq i \leq r$), 则$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} & j_1 & j_2 & j_r \end{array} \\
\begin{array}{r} r\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ m-r\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array} &
\begin{pmatrix}
 & \$ & & \\
 & & \$ & \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & \$ \\
0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

行阶梯形矩阵

定义(行阶梯形矩阵). 满足下面两个条件的矩阵称为行阶梯形矩阵:

- 非零行在零行的上面;
- 非零行的首非零元所在列在上一行(如果存在的话)的首非零元所在列的右面.

例: $B_4=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

是一个有3个非零行的行阶梯形矩阵, 其第1行首非零元出现在第1列, 第2行首非零元出现在第2列, 第3行首非零元出现在第4列.

说明. 行阶梯形矩阵的特点是

- 阶梯线下方的元素全为0.
- 每个台阶是一行, 台阶数即非零行的行数.
- 阶梯线的竖线后面的第一个元素为相应行的首非零元.

思考: 上三角矩阵是否为行阶梯形矩阵?

行最简形矩阵

定义(行最简形矩阵). 满足下面两个条件的行阶梯形矩阵称为行最简形矩阵:

- 每个非零行的首非零元为1;
- 非零行的首非零元所在列的其余元素为0.

例: $B_6 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$是一个行最简形矩阵.

思考: 有4个非零行的4×4行最简形矩阵是什么矩阵?

行最简形矩阵

因为

$$\text{线性方程组} \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{矩阵}$$

$$\text{线性方程组的三种同解变换} \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{矩阵的初等行变换}$$

所以，

消元法求解线性方程组 $\Leftrightarrow$ 通过初等行变换将其增广矩阵化为行最简形矩阵.

行最简形矩阵

例： $B_0=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{2}]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\2&-3&1&-1&2\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&2&-2&2&0\\0&-5&5&-3&-6\\0&3&-3&4&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3+2r_2\\r_4-3r_2}]{r_2\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&2&-6\\0&0&0&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_3]{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3}\begin{pmatrix}1&1&-2&0&7\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&0&-1&0&4\\0&\mathbf{1}&-1&0&3\\0&0&0&\mathbf{1}&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

练习： 将$\begin{pmatrix}0&2&-3&1\\0&3&-4&3\\0&4&-7&1\end{pmatrix}$通过初等行变换化为行最简形矩阵.

行最简形矩阵

定理(初等行变换化行最简). **任何$\boldsymbol{m\times n}$矩阵都能经过有限次初等行变换化为行最简形矩阵.**

证明. 对$m+n$用数学归纳法（习题）. ■

3.2 初等变换与矩阵乘法

初等变换与矩阵乘法

定义(初等矩阵). 由单位阵E经过1次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

- $E \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} E(i,j)$
- $E \xrightarrow{r_i \times k} E(i(k))$
- $E \xrightarrow{r_i + k r_j} E(ij(k))$

说明. 这里只考虑初等行变换, 初等列变换是对称的.

定义(标准单位向量). 称n维列向量$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 第i个分量 为标准单位向量.

性质. **设A为$n \times m$矩阵, 则$e_i^T A = A$的第i行.**

证明. 根据矩阵乘法的定义直接验证. ∎

初等变换与矩阵乘法

引理(初等矩阵与矩阵乘法的联系). **设$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$矩阵，则对$\boldsymbol{A}$施行1次初等行变换等价于在$\boldsymbol{A}$的左边乘上相应的$\boldsymbol{m}$阶初等矩阵，即**

(1) 若$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}\boldsymbol{B}$, 则$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})\boldsymbol{A}$.

(2) 若$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\times k}\boldsymbol{B}$, 则$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}\big(\boldsymbol{i}(\boldsymbol{k})\big)\boldsymbol{A}$.

(3) 若$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i+kr_j}\boldsymbol{B}$, 则$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}\big(\boldsymbol{ij}(\boldsymbol{k})\big)\boldsymbol{A}$.

证明. 对A按行分块有$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}$, 其中$\alpha_i$为$A$的第$i$行.

(1) 设$A\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}B$, 对$E(i,j)$按行分块计算$E(i,j)A$：

$$\begin{array}{r} \textbf{第}\boldsymbol{i}\textbf{个分量}\\ \\ \textbf{第}\boldsymbol{j}\textbf{个分量}\end{array}\quad E(i,j)A=\begin{pmatrix}e_1^T\\ \vdots\\ e_j^T\\ \vdots\\ e_i^T\\ \vdots\\ e_m^T\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}e_1^TA\\ \vdots\\ e_j^TA\\ \vdots\\ e_i^TA\\ \vdots\\ e_m^TA\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=B.$$

(2)和(3)类似可证(练习). ■

初等变换与矩阵乘法

定理(通过初等矩阵刻画可逆矩阵). **方阵A可逆当且仅当A可表示成有限个初等矩阵的乘积.**

证明. **充分性.** 假设$A = P_1P_2 \cdots P_\ell$，其中$P_i\,(1 \le i \le \ell)$为初等矩阵.

注意到初等矩阵是可逆的:

$$E(i,j)^{-1} = E(i,j),$$
$$E\big(i(k)\big)^{-1} = E(i(\tfrac{1}{k})),$$
$$E\big(ij(k)\big)^{-1} = E(ij(-k)).$$

故A可逆.

必要性. 假设A为n阶可逆矩阵. 设A经过初等行变换后化为行最简形矩阵B.

由**初等矩阵与矩阵乘法引理**，存在初等矩阵$P_1, \dots, P_\ell$使得

$$(P_\ell \cdots P_1)A = B.$$

因为A可逆且初等矩阵可逆，B可逆.

因此，B有n个非零行，从而$B = E_n$. 于是，

$$A = P_1^{-1} \cdots P_\ell^{-1}$$

为初等矩阵的乘积. ■

初等变换与矩阵乘法

定理(初等变换与矩阵乘法的联系). **设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$矩阵. 则$\boldsymbol{A}\sim_r\boldsymbol{B}$当且仅当存在$\boldsymbol{m}$阶可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使得$\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$.**

证明. $A\sim_r B \overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow}$ A经过有限次初等变换化为B

$\overset{\text{引理}}{\Longleftrightarrow}$ 存在有限个初等矩阵$P_1,\dots,P_\ell$使得$(P_\ell\cdots P_1)A=B$

$\overset{\text{定理}}{\Longleftrightarrow}$ 存在可逆阵P使得$PA=B$.

从而定理得证. ■

说明.

- 对初等列变换有：$A\sim_c B$当且仅当存在n阶可逆矩阵Q使得$AQ=B$.
- 对初等变换有：$A\sim B$当且仅当存在可逆矩阵P,Q使得$PAQ=B$.

推论. **$\boldsymbol{n}$阶方阵$\boldsymbol{A}$可逆 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}\sim_r\boldsymbol{E_n}$.**

证明. A可逆 $\Leftrightarrow$ 存在可逆阵P使得$PA=E_n$ **可逆的定义**

$\Leftrightarrow$ $A\sim_r E_n$. **初等变换与矩阵乘法的联系**

推论得证. ■

初等变换的应用

应用 1：求解矩阵方程$AX=B$，其中A为m阶可逆矩阵.

方法 1. 先求出A^{-1}，再计算$A^{-1}B$.

方法 2. 利用初等行变换.

- 将A,B做成一个分块矩阵(A,B)：由于A为m阶方阵， X必为$m\times s$矩阵（s为某个正整数），从而B为$m\times s$矩阵．因此，(A,B)是一个$m\times(m+s)$矩阵，其中前m列为A，后s列为B.
- 对(A,B)作初等行变换，当对应A的子块变为E_m时，对应B的子块即为$A^{-1}B$.

证明．设$(A,B)\sim_r(E_m,Y)$．由**初等变换与矩阵乘法的联系**，存在可逆矩阵P使得

$$P(A,B)=(E_m,Y),$$

即$\begin{cases}PA & = & E_m \\ PB & = & Y\end{cases}$.　　故$Y=PB=A^{-1}B$.　■

初等变换的应用

应用 1：求解矩阵方程$AX=B$，其中A为m阶可逆矩阵.

- 当$B=E_m$时，$X=A^{-1}$.
- 当$B=b$为m维列向量时，$X=A^{-1}b$为线性方程组$AX=b$的解.

例：求$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$的逆矩阵.

解：
$$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1\times\frac{1}{3}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3+2r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4/3 & 0 & 2/3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2\times-\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4/3 & 0 & 2/3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-3r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 3/2 & 2/3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3\times 6} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1+\frac{2}{3}r_3]{r_2+\frac{1}{2}r_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{array}\right).$$

故$A^{-1}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

初等变换的应用

应用 2：给定$m\times n$矩阵A，求可逆矩阵P使得PA为行最简形矩阵.

- 将A,E_m做成分块矩阵(A,E_m)：(A,E_m)是一个$m\times(m+n)$矩阵，其中前n列为A，后m列为E_m.
- 对(A,E_m)作初等行变换，当对应A的子块变为行最简形矩阵时，对应E_m的子块即为所求.

证明. 设$(A,E_m)\sim_r(R,Y)$，其中R为行最简形矩阵. 由**初等变换与矩阵乘法的联系**，存在可逆矩阵P使得

$$P(A,E_m)=(R,Y),$$

即$\begin{cases} PA &= & R \\ PE_m &= & Y \end{cases}$. 故$Y=PE_m=P$即为所求. ∎

初等变换的应用

应用 2：给定$m\times n$矩阵A，求可逆矩阵P使得PA为行最简形矩阵.

例：求$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\1&1&-2\\4&-6&2\end{pmatrix}$. 求可逆矩阵$P$使得$PA$为行最简形矩阵.

解：$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}2&-1&-1&1&0&0\\1&1&-2&0&1&0\\4&-6&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-2&0&1&0\\2&-1&-1&1&0&0\\4&-6&2&0&0&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-2&0&1&0\\0&-3&3&1&-2&0\\0&-10&10&0&-4&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\times-\frac{1}{3}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-2&0&1&0\\0&1&-1&-1/3&2/3&0\\0&-10&10&0&-4&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow{r_3+10r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-2&0&1&0\\0&1&-1&-1/3&2/3&0\\0&0&0&-10/3&8/3&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-1&1/3&1/3&0\\0&1&-1&-1/3&2/3&0\\0&0&0&-10/3&8/3&1\end{array}\right).$

故A的行最简形矩阵为$R=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，而$P=\begin{pmatrix}1/3&1/3&0\\-1/3&2/3&0\\-10/3&8/3&1\end{pmatrix}$满足$PA=R$.

说明. 满足条件的矩阵P不唯一.

初等变换的应用

练习：

1. 设$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$，求$X$使得$AX=B$.

2. 设$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$. 求可逆矩阵$P$使得$PA$为行最简形矩阵.

3.3 矩阵的秩

矩阵的秩

- 问题：给定$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$A$的任何两个行阶梯形矩阵是否一定有相同的非零行行数?

矩阵的秩

定义(k阶子式). 任取$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$的$k$行$k$列($k\le m, k\le n$)，位于这些行列交叉点上的$k^2$个元素，不改变它们在$A$所处的位置次序而得到的$k$阶行列式称为$A$的$k$阶子式. 不为零的子式称为$A$的非零子式.

例：取$B_4=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的1，2，3行以及1，2，4列得到一个3阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0.$$

该子式是一个非零子式.

矩阵的秩

定义(矩阵的秩). 若矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$有一个不为0的$r$阶子式$D$且$A$的所有$r+1$阶子式都为0，那么$D$称为$A$的最高阶非零子式且$r$称为$A$的秩，记作$R(A)$.

规定零矩阵的秩为0.

例：$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$的秩为?

思考.

- n阶方阵A可逆 $\Leftrightarrow$?
- 若n阶方阵A有$R(A)\leq n-2$，则$A^*=O$. 为什么?
- 若A为行阶梯形矩阵，则$R(A)=$ A的非零行行数. 为什么?

矩阵的秩

引理(初等行变换不改变矩阵的秩)． 若$A \sim_r B$，则$R(A) = R(B)$.

证明． 只需证明若B由A经过1次初等行变换而得到，则$R(A) = R(B)$.

另外根据$\sim_r$的对称性，只需证明$R(B) \geq R(A)$.

设D是A的最高阶非零子式，其阶数为r． 下面证明B有1个r阶非零子式.

情况 1． $A \xrightarrow{r_i \times k} B$. 令$D'$取$D$的行和列.

- 若D不含r_i，则$D' = D \neq 0$.
- 若D包含r_i，则$D' = kD \neq 0$. 行列式性质 3

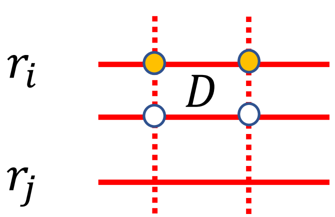
矩阵的秩

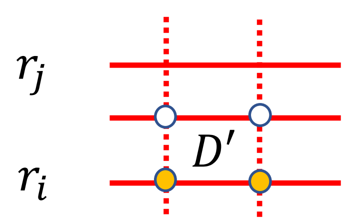
证明(续).

情况 2. $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$. 根据$D$是否包含$r_i$与$r_j$分情况讨论.

- D不包含r_i和r_j. 则D也是B的非零子式.
- D包含r_i和r_j. 令D'取D的行和列，则$D' = -D \neq 0$. 行列式性质 2
- D包含r_i但不含r_j(不含r_i但包含r_j的情况是对称的).

令D'取D的列，除第i行外的所有行以及第j行. 则D'是由D经过若干次行交换而得到的. 故$D' = \pm D \neq 0$.





矩阵的秩

证明(续). **情况 3.** $A\xrightarrow{r_i+kr_j}B$. 不妨假设$r_i=r_1$, $r_j=r_2$. 令D'取D的行和列.

若D不含第1行, 则$D'=D\neq 0$.

若D包含第1行, 则

$$D'=\begin{vmatrix} r_1+kr_2 \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} r_1 \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} r_2 \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix}=D+k\begin{vmatrix} r_2 \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix},$$

这里所有的行都是限制在D的列上的.

- 若$p=2$, 即D包含第2行, 则$D^*\triangleq\begin{vmatrix} r_2 \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix}=0$, 故$D'=D\neq 0$.
- 若$p\neq 2$, 则D^*也是B的r阶子式. 由假设$0\neq D=D'-kD^*$.

  故D'与D^*不能同时为零, 从而B有一个r阶子式. ∎

矩阵的秩

推论(初等变换不改变矩阵的秩). 若$A \sim B$, 则$R(A) = R(B)$.

证明. 因为**初等行变换不改变矩阵的秩**, 只需证初等列变换不改变矩阵的秩. 假设$A \sim_c B$.

$$A \sim_c B \iff A\text{可经过初等列变换化为}B$$
$$\iff A^T\text{可经过初等行变换化为}B^T.$$

故$R(A^T) = R(B^T)$.

注意到对任意矩阵X有$R(X^T) = R(X)$. 从而$R(A) = R(B)$. ■

矩阵的秩

问题：给定$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$A$的任何两个行阶梯形矩阵是否一定有相同的非零行行数?

定理(行阶梯形矩阵的非零行行数是矩阵的不变量)．设A_1,A_2是矩阵A的两个不同的行阶梯形矩阵．则A_1的非零行行数 $=$ A_2的非零行行数.

证明．由**行阶梯形矩阵秩的性质**以及**初等行变换不改变矩阵的秩**,

$$A_1\text{的非零行行数} = R(A_1)=R(A)=R(A_2) = A_2\text{的非零行行数}. \qquad \blacksquare$$

思考：这个定理与之前学过的哪个定理有异曲同工之妙?

矩阵的秩

求秩的方法. 通过初等行变换化为阶梯形矩阵，其非零行行数即为秩.

例：设$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & \lambda & -1\\ 5 & 6 & 3 & \mu\end{pmatrix}$. 已知$R(A)=2$，求$\lambda$和$\mu$.

解. $A \xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -4 & \lambda+3 & -4\\ 0 & -4 & 8 & \mu-5\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -4 & \lambda+3 & -4\\ 0 & 0 & 5-\lambda & \mu-1\end{pmatrix}.$$

因为$R(A)=2$, A的最后一行必定为零行, 即

$\begin{cases}5-\lambda & = & 0\\ \mu-1 & = & 0\end{cases}$, 所以$\lambda=5, \mu=1$.

练习：设$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3k\\ -1 & 2k & -3\\ k & -2 & 3\end{pmatrix}$. 问$k$为何值时可分别使$R(A)=1,2,3$?

矩阵的秩

- 问题：已证若$A \sim B$，则$R(A) = R(B)$．逆命题是否成立?

矩阵的秩

相抵标准形.

$$B_0=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}B_6=\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

欲把红色元素变为0且保持行最简，初等行变换能否做到?

需要初等列变换!

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_5+3c_4}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3+c_2]{c_5-3c_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3+c_1]{c_5-4c_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3\leftrightarrow c_4}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_3&O_{3\times2}\\O_{1\times3}&O_{1\times2}\end{pmatrix}.$$

B_0的相抵标准形

矩阵的秩

练习:

$$\text{通过初等变换将}\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & -4 & 4\end{pmatrix}\text{化为相抵标准形.}$$

矩阵的秩

定理(相抵标准形). 任何$m\times n$矩阵A都能经过有限次初等变换化为相抵标准形$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 其中$r=R(A)$. 因而相抵标准形由$A$唯一确定.

证明. 对$m+n$用数学归纳法可以证明A都能经过有限次初等变换化为相抵标准形$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$. 因为初等变换不改变矩阵的秩,

$$r = R\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = R(A).$$

■

矩阵的秩

定理(初等变换与矩阵秩的联系). 设A,B为$m\times n$矩阵. 则

$$A\sim B\Leftrightarrow R(A)=R(B).$$

证明. 必要性已证.

充分性. 设$R(A)=R(B)=r$.

由**相抵标准形定理**,

$$A\sim\begin{pmatrix}E_r & O_{r\times(n-r)}\\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)}\end{pmatrix}\text{且}B\sim\begin{pmatrix}E_r & O_{r\times(n-r)}\\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)}\end{pmatrix}.$$

因为~是等价关系, $A\sim B$. ■

矩阵的秩

秩的性质.

性质 1: $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\}$.

性质 2: 若$A \sim B$, 则$R(A) = R(B)$.

性质 3: 若P, Q可逆, 则$R(PAQ) = R(A)$.

性质 4: $R(A^T) = R(A)$.

性质 5: 若A为n阶可逆矩阵, 则$R(A^{-1}) = R(A) = n$.

性质 6: $R(kA) = \begin{cases} R(A) & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$.

性质 7: $\max\{R(A), R(B)\} \le R(A, B) \le R(A) + R(B)$.

性质 8: $R(A + B) \le R(A) + R(B)$.

性质 9: $R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$.

矩阵的秩

性质 7： $\max\{R(A),R(B)\} \le R(A,B) \le R(A)+R(B)$.

证明. 因为所有A和B的k阶子式都是(A,B)的k阶子式，所以$R(A,B) \ge \max\{R(A),R(B)\}$.

下证$R(A,B) \le R(A)+R(B)$. 首先,

$$R(A,B) = R(A,B)^T = R\begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix}.$$

对A^T作初等行变换化为行阶梯形矩阵$\tilde{A}$, 对B^T作初等行变换化为行阶梯形矩阵$\tilde{B}$. 从而

$$\begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix} \sim_r \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{pmatrix}.$$

设$R(A)=s, R(B)=t$. 则$\tilde{A}$和$\tilde{B}$分别有s个和t个非零行，从而$\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{pmatrix}$有$s+t$个非零行.

因此$\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{pmatrix}$的所有$s+t+1$阶子式为0，即$R\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{pmatrix} \le s+t$. 故

$$R(A,B) = R\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{pmatrix} \le s+t = R(A)+R(B). \qquad \blacksquare$$

说明. $\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{pmatrix}$不一定是行阶梯形矩阵.

矩阵的秩

性质 7： $\max\{R(A),R(B)\} \le R(A,B) \le R(A)+R(B).$

$$\max\{R(A),R(B)\} \le R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \le R(A)+R(B).$$

性质 8： $R(A+B) \le R(A)+R(B).$

证明. 对$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$作初等行变换化为$\begin{pmatrix} A \\ A+B \end{pmatrix}$.

由**性质 7**,

$$R(A+B) \le R\begin{pmatrix} A \\ A+B \end{pmatrix}$$

$$= R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$\le R(A)+R(B).$$

■

矩阵的秩

定理(矩阵方程). **矩阵方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$有解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.**

性质 9: $R(AB)\le \min\{R(A),R(B)\}$.

证明. 令$C=AB$. 则矩阵方程$AX=C$有解. 从而

$$R(A)=R(A,C) \qquad \text{矩阵方程定理}$$

$$\ge R(C). \qquad \text{秩的性质 7}$$

$R(C)\le R(B)$类似可证(考虑$C^T=B^TA^T$). ■

矩阵的秩

例 1：设A为n阶方阵．证明$R(A+E)+R(A-E)\geq n$.

证明.

$$R(A+E)+R(A-E)=R(A+E)+R(E-A)$$

$$\geq R(2E) \qquad \text{性质 8}$$

$$=n. \qquad \blacksquare$$

矩阵的秩

例 2：证明：若$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s}=\boldsymbol{C}$且$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{n}$，则$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{C})$.

证明. 因为$R(A)=n$，A的行最简形矩阵为$\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}$. 故存在$m$阶可逆矩阵$P$使得

$$PA=\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}.$$

初等变换与矩阵乘法的联系

于是$PC=P(AB)=(PA)B=\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}B\\O\end{pmatrix}$.

由于左乘可逆矩阵不改变矩阵的秩（**性质 3**），

$$R(C)=R(PC)=R\begin{pmatrix}B\\O\end{pmatrix}=R(B).$$

■

说明.

- 若矩阵A的秩等于其列数，则称A为列满秩矩阵. 例题的结论说左乘列满秩矩阵不改变矩阵的秩，这是**性质 3**的推广.
- 若$C=O$，则本题结论为$AB=O$且A列满秩，则$B=O$这被称为矩阵乘法的消去律.

矩阵的秩

练习： 设有分块矩阵$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$，其中$A$和$B$为非零方阵.

(a) 若A和B分别为2阶和1阶方阵，证明$R\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \le R(A) + R(B)$.

(b) 上述结论对一般方阵A, B是否成立?