线性代数–矩阵

- 矩阵的概念及其应用
  - 矩阵的概念
  - 矩阵的应用
- 矩阵的运算
  - 加法与数乘
  - 乘法与方幂
  - 转置
  - 方阵的行列式
- 可逆矩阵
- 分块矩阵

2.1 矩阵的概念及其应用

矩阵的基本概念

定义(矩阵). 由$m\times n$个数$a_{ij}(1\le i\le m,1\le j\le n)$排成的$m$行$n$列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做一个$m\times n$矩阵，其中a_{ij}称为矩阵的第i行第j列元素或者(i,j)−元.

记号.

- 通常用A,B,C或X,Y,Z等大写英文字母表示矩阵.
- $m\times n$矩阵通常简记为$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$.

例: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ -9 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$是一个$3\times 4$矩阵.

说明. 矩阵是矩形的阵列的简称.

矩阵相等

定义(同型矩阵). 若两个矩阵行数相等且列数相等, 则称这两个矩阵为同型矩阵.

定义(矩阵相等). 若矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$和$B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$对应元素相等, 即对任何$i=1,2,\ldots,m$和$j=1,2,\ldots,n$有$a_{ij}=b_{ij}$, 则称$A$与$B$相等, 记为$A=B$.

例:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$a=1, b=2, c=3, d=4, e=5, f=6.$$

特殊矩阵

下面介绍几类常用的特殊矩阵.

（1）行矩阵和列矩阵.

- 只有一行的矩阵称为行矩阵或行向量

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

- 只有一列的矩阵称为列矩阵或列向量

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

（2）零矩阵：所有元素都为零的矩阵. $m \times n$零矩阵记为$O_{m\times n}$.

特殊矩阵

（3）方阵：行数和列数相等的矩阵.

说明. $n\times n$方阵通常称为n阶方阵，方阵是正方形的阵列的简称.

（4）对角矩阵：除主对角线上的元素外其他元素都为零的方阵.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

通常简记为$A=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\dots,a_{nn})$.

思考：零矩阵是否为对角矩阵?

特殊矩阵

（5） 单位矩阵： 主对角线上元素都为1的对角矩阵.

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

为n阶单位矩阵.

说明. E_n的作用与1在实数运算中的作用类似: $EA = AE = A$.

（6） 上(下)三角矩阵： 主对角线下(上)方的元素全为零的方阵.

上三角矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 下三角矩阵

特殊矩阵

（7）对称矩阵和反对称矩阵. 设$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$.

- 若对任何$i,j=1,2\ldots,n$, 都有$a_{ij}=a_{ji}$, 则称A为对称矩阵.
- 若对任何$i,j=1,2\ldots,n$, 都有$a_{ij}=-a_{ji}$, 则称A为反对称矩阵.

例:

- $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$是一个3阶对称矩阵.
- $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \\ 3 & -7 & 0 \end{pmatrix}$是一个3阶反对称矩阵.

思考: 什么矩阵既是对称矩阵又是反对称矩阵?

矩阵应用举例

应用 1：产品发送量矩阵.

- 某厂向三个商店发送四种不同产品的数量可以由矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

表示, 其中a_{ij}是工厂向第i个商店发送第j种产品的数量.

- 这四种产品的单价以及单件重量可以由矩阵

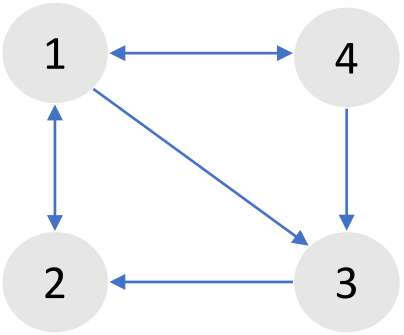
$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}$$

其中b_{i1}为第i种产品的单价, b_{i2}为第i种产品的单件重量.

矩阵应用举例

应用 2：图的邻接矩阵.

四个城市间的单向航线图如右图所示



则该航线图可用一个4阶方阵$A=\left(a_{ij}\right)_{4\times 4}$表示:

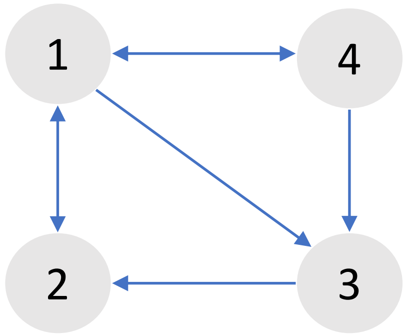
- A的第i行对应城市i, A的第j列对应城市j;
- $a_{ij}=\begin{cases}1, & 若i市到j市有1条单向航线\\ 0, & 若i市到j市无1条单向航线\end{cases}$.

从而$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$.

矩阵应用举例

应用 2(续)：图的邻接矩阵.

四个城市间的单向航线图



$$\Leftrightarrow \quad A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}.$$

一般地, n个城市之间的单向航线图可以用一个n阶方阵表示, 这个矩阵称为图的邻接矩阵.

思考：写出$\overleftrightarrow{K_n}$的邻接矩阵.

矩阵应用举例

应用 3：线性变换的矩阵.

n个变量$x_1,x_2,\dots,x_n$与m个变量$y_1,y_2,\dots,y_m$之间的关系

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \quad\vdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{cases} \qquad (*)$$

表示从变量$x_1,x_2,\dots,x_n$到变量$y_1,y_2,\dots,y_m$的线性变换, 其中a_{ij}为常数.

- 由$(*)$确定的线性变换可以由a_{ij}构成的矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$来描述.
- 反之, 给定一个$m\times n$矩阵$A=(a_{ij})$, A对应了由$(*)$确定的线性变换.

矩阵 $\xLeftrightarrow{\text{一一对应}}$ **线性变换**

矩阵应用举例

应用 3：线性变换的矩阵.

例 1：

- 线性变换 $\begin{cases} y_1 = 3x_1 \qquad\quad + 6x_3 \\ y_2 = 2x_1 - x_2 + x_3 \end{cases}$ 对应矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 单位矩阵 $E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ 对应

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ \qquad \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}.$$

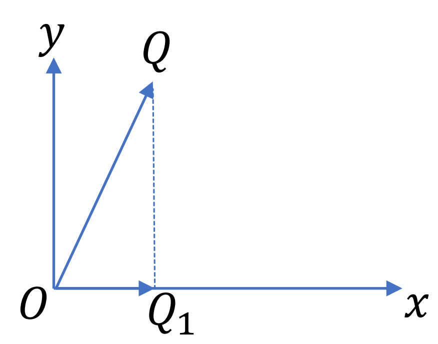
矩阵应用举例

应用 3：线性变换的矩阵.

例 2：矩阵$P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$对应从变量$x,y$到$x_1,y_1$的线性变换

$$\begin{cases}x_1=1x+0y=x\\ y_1=0x+0y=0\end{cases}.$$

若把x,y看作平面上某点Q的坐标，x_1,y_1看作平面上某点Q_1的坐标, 则矩阵P对应把点Q变为点Q_1的变换.



几何意义．P是一个投影变换，即将平面上的点投影到x轴上的变换.

矩阵应用举例

应用 3：线性变换的矩阵.

例 3：矩阵$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$对应从变量$x, y$到$x_1, y_1$的线性变换

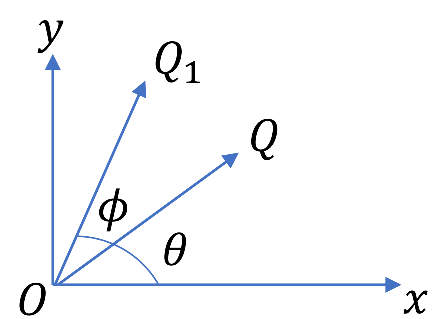
$$\begin{cases} x_1 = \cos\phi\, x - \sin\phi\, y \\ y_1 = \sin\phi\, x + \cos\phi\, y \end{cases} \qquad (1)$$

令$Q(x, y)$和$Q_1(x_1, y_1)$是xOy平面上的两个点.

- 设Q的极坐标为(r, θ)，则$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (2)$
- 将(2)代入(1)得:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta = r\cos(\phi+\theta) \\ y_1 = r\sin\phi\cos\theta + r\cos\phi\sin\theta = r\sin(\phi+\theta) \end{cases},$$

故Q_1的极坐标为$(r, \theta + \phi)$.



几何意义. R_ϕ是将给定平面向量$\overrightarrow{OQ}$逆时针旋转角度ϕ的变换.

矩阵应用举例

练习：

1. 写出将xOy平面中给定点投影到y轴上的变换所对应的矩阵.

2. 写出将xOy平面给定向量逆时针旋转90°的变换所对应的矩阵.

矩阵应用举例

应用 4：线性方程组.

设有n个变量与m个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (*)$$

其中a_{ij}与b_k为常数.

- $A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$称为$(*)$的**系数矩阵**.
- $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$称为$(*)$的**增广矩阵**.

线性方程组 $\xLeftrightarrow{\text{一一对应}}$ **矩阵**

2.2 矩阵的运算

矩阵的运算-加法

定义(矩阵的和差). 设$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$和$B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$是两个矩阵.

- 称$m\times n$矩阵$C=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n}$为$A$与$B$的和，记作$A+B$.
- $-A\triangleq\left(-a_{ij}\right)_{m\times n}$称为$A$的负矩阵.
- A和B的差定义为$A-B\triangleq A+(-B)$.

例：设$A=\begin{pmatrix}3&0&6\\2&-1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&5&4\end{pmatrix}$. 则

$$-B=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\1&-5&-4\end{pmatrix},$$

$$A-B=\begin{pmatrix}2&0&4\\3&-6&-3\end{pmatrix}.$$

矩阵的运算-加法

矩阵加法运算规律． 设A,B,C是同型矩阵，O为与A同型的零矩阵．则

- $A+B=B+A$ 加法交换律
- $(A+B)+C=A+(B+C)$ 加法结合律
- $A+O=O+A=A$ 零矩阵
- $A+(-A)=O$ 负矩阵

矩阵的运算-数乘

定义(数乘). 设$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$且$k$是实数，则称矩阵

$$\left(ka_{ij}\right)_{m\times n}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

为数k与A的数乘，记作kA.

运算规律.

- $1A=A$ $\qquad (k\ell)A=k(\ell A)$
- $k(A+B)=kA+kB$ $\qquad (k+\ell)A=kA+\ell A$

例：设$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$且$2A-3X=B$，求$X$.

解: $2A-3X=B \quad \Leftrightarrow \quad 3X=2A-B$. 从而$X=\frac{1}{3}(2A-B)=\begin{pmatrix} 8/3 & -1/3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

矩阵的运算-乘法

引例 1：总收入与总利润.

三个工厂甲、乙、丙生产四类产品的年销量由下表给出：

	1	2	3	4
甲	20	30	10	45
乙	15	10	70	20
丙	20	15	35	25

另外，每种产品的单价和单位利润如下：

	单价	单位利润
1	100	20
2	150	45
3	300	120
4	200	60

求各工厂的总收入和总利润.

矩阵的运算-乘法

引例 1：总收入与总利润.

解：分别计算甲的总收入和总利润.

甲的总收入 ＝ 甲的各类产品收入之和

$$= \sum_{i=1}^{4} \text{甲的}i\text{类产品销量} \times i\text{类产品单价}$$

$$= 20 \times 100 + 30 \times 150 + 10 \times 300 + 45 \times 200$$

$$= 18500.$$

	1	2	3	4
甲	**20**	**30**	**10**	**45**
乙	15	10	70	20
丙	20	15	35	25

	单价	单位利润
1	**100**	20
2	**150**	45
3	**300**	120
4	**200**	60

矩阵的运算-乘法

引例 1：总收入与总利润.

解(续)：分别计算甲的总收入和总利润.

甲的总利润 $=$ 甲的各类产品利润之和

$$= \sum_{i=1}^{4} \text{甲的}i\text{类产品销量} \times i\text{类产品单位利润}$$

$$= 20 \times 20 + 30 \times 45 + 10 \times 120 + 45 \times 60$$

$$= 5650.$$

	1	2	3	4
甲	**20**	**30**	**10**	**45**
乙	15	10	70	20
丙	20	15	35	25

	单价	单位利润
1	100	**20**
2	150	**45**
3	300	**120**
4	200	**60**

矩阵的运算-乘法

引例 1：总收入与总利润.

解(续)：乙和丙的总收入和总利润可以类似计算.

	总收入	总利润
甲	18500	5650
乙	28000	10350
丙	19750	6775

矩阵的运算-乘法

	1	2	3	4
甲	20	30	10	45
乙	15	10	70	20
丙	20	15	35	25

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 & 45 \\ 15 & 10 & 70 & 20 \\ 20 & 15 & 35 & 25 \end{pmatrix}$$

	单价	单位利润
1	100	20
2	150	45
3	300	120
4	200	60

$$B = \begin{pmatrix} 100 & 20 \\ 150 & 45 \\ 300 & 120 \\ 200 & 60 \end{pmatrix}$$

	总收入	总利润
甲	18500	5650
乙	28000	10350
丙	19750	6775

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$\forall i = 1,2,3;\ j = 1,2,$

$\boldsymbol{c_{ij} = A}$**的第**$\boldsymbol{i}$**行与**$\boldsymbol{B}$**的第**$\boldsymbol{j}$**列对应元素乘积之和.**

矩阵的运算-乘法

引例 2：线性变换的复合

现有三组变量x_1,x_2,x_3,x_4、y_1,y_2,y_3、z_1,z_2满足

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \\ x_4 = a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

(I)和(II)隐含了从z_1,z_2到x_1,x_2,x_3,x_4的线性变换:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 \\ x_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 \\ x_3 = c_{31}z_1 + c_{32}z_2 \\ x_4 = c_{41}z_1 + c_{42}z_2 \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

求c_{ij}.

矩阵的运算-乘法

引例 2：线性变换的复合

解：求c_{ij}只需将(II)代入(I).

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\
&= a_{11}(b_{11}z_1 + b_{12}z_2) + a_{12}(b_{21}z_1 + b_{22}z_2) + a_{13}(b_{31}z_1 + b_{32}z_2) \\
&= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})z_2
\end{aligned}
$$

$$x_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})z_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})z_2$$

$$x_3 = (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31})z_1 + (a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32})z_2$$

$$x_4 = (a_{41}b_{11} + a_{42}b_{21} + a_{43}b_{31})z_1 + (a_{41}b_{12} + a_{42}b_{22} + a_{43}b_{32})z_2$$

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \\ x_4 = a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

矩阵的运算-乘法

引例 2：线性变换的复合

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \\ x_4 = a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2 \end{cases} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 \\ x_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 \\ x_3 = c_{31}z_1 + c_{32}z_2 \\ x_4 = c_{41}z_1 + c_{42}z_2 \end{cases} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \underbrace{(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})}_{c_{11}}z_1 + \underbrace{(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})}_{c_{12}}z_2$$

矩阵的运算-乘法

引例 2：线性变换的复合

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \\ x_4 = a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 \end{cases} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2 \end{cases} \Longrightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 \\ x_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 \\ x_3 = c_{31}z_1 + c_{32}z_2 \\ x_4 = c_{41}z_1 + c_{42}z_2 \end{cases} \Longrightarrow C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix}$$

$\forall i = 1,2,3,4; j = 1,2,$

$\boldsymbol{c_{ij}} = \boldsymbol{A}$的第$\boldsymbol{i}$行与$\boldsymbol{B}$的第$\boldsymbol{j}$列对应元素乘积之和.

矩阵的运算-乘法

定义(矩阵的乘法). 给定矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times s}$和$B=\left(b_{ij}\right)_{s\times n}$，定义$A$与$B$的乘积为

$$AB=\left(c_{ij}\right)_{m\times n},$$

其中$c_{ij}=$ A的第i行与B的第j列对应元素乘积之和.

理解.

- AB有定义的必要条件为A的列数 $=$ B的行数.
- 如何用数学表达式表示c_{ij}?

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}.$$

- 如何记忆?

高中时所学的向量的数量积.

矩阵的运算-乘法

例 1：矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&3&-1\\2&1&0&2\end{pmatrix}_{2\times4}$，$B=\begin{pmatrix}4&1&0\\-1&1&3\\2&0&1\\1&3&4\end{pmatrix}_{4\times3}$，求$AB$.

解：$AB=\begin{pmatrix}9&-2&-1\\9&9&11\end{pmatrix}_{2\times3}$.

例 2：矩阵$A=\begin{pmatrix}-2&4\\1&-2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&4\\-3&-6\end{pmatrix}$，求$AB$和$BA$.

解：$AB=\begin{pmatrix}-16&-32\\8&16\end{pmatrix}$.

$BA=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

矩阵的运算-乘法

注意事项.

- AB有定义，BA不一定有定义．即使AB和BA都有定义，两者也不一定相等，即矩阵乘法不满足交换律！

$$AB\text{读作“}A\text{左乘}B\text{”或“}B\text{右乘}A\text{”}$$

- $AB=O \nRightarrow A=O$或$B=O$.
- 矩阵乘法不满足消去律：$AB=CB$且$B\neq O \nRightarrow A=C$.

矩阵的运算-乘法

运算规律.

- $O_{m\times s}A_{s\times n}=O_{m\times n}$，$A_{m\times s}O_{s\times n}=O_{m\times n}$.
- 设A是$m\times n$矩阵，则$AE_n=A$，$E_mA=A$.
- $(AB)C=A(BC)$. 乘法结合律
- $A(B+C)=AB+AC$，$(B+C)A=BA+CA$. 乘法关于加法的分配律
- $k(AB)=(kA)B=A(kB)$.

矩阵的运算–乘法

性质：**设$\boldsymbol{A}$是$\boldsymbol{m\times n}$矩阵，则$\boldsymbol{AE_n=A}$，$\boldsymbol{E_mA=A}$.**

证明：设$A=(a_{ij})_{m\times n}$. 下面证明$AE_n=A$. 根据矩阵相等的定义，只需证明AE_n的(i,j)–元为a_{ij}即可.

$$AE_n\text{的}(i,j)\text{–元} = A\text{的第}i\text{行与}E_n\text{的第}j\text{列对应元素乘积之和}$$

$$= (a_{i1}\dots a_{ij}\dots a_{in})\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{第}j\text{个分量}$$

$$= a_{ij}. \qquad \blacksquare$$

练习：证明矩阵乘法的结合律.

矩阵的运算-方幂

定义(矩阵的方幂). 设A是n阶方阵，m是一个正整数. 称m个A相乘为A的m次幂，记为A^m. 即

$$A^m = \underbrace{AA\cdots A}_{m\text{个}}.$$

另外规定$A^0 = E_n$.

运算法则. 设A是n阶方阵，k,ℓ是正整数. 则

$$A^k A^\ell = A^{k+\ell}, \qquad \left(A^k\right)^\ell = A^{k\ell}.$$

说明. $(AB)^k \neq A^k B^k$；$(A+B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB$.

思考：A,B满足什么条件等式成立?

矩阵的运算-方幂

例 1：设$P=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，求$P^n$.

解 1：$P^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=P.$

$P^3=P^2P=P^2=P.$

$\vdots$

$P^n=P.$

解 2：P是将xOy平面上的点投影到x轴上的变换.

- P^2的效果是先将平面上任何一点Q投影到x轴上得到点Q_1，再将Q_1投影到x轴上，投影点仍为Q_1.
- 因此P^2的效果和P的效果完全相同，故$P^2=P$.
- 同理当$n\geq 2$，$P^n=P$.

矩阵的运算-方幂

例 2：设$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$，求${R_\phi}^n$.

解 1：回忆R_ϕ是将平面给定向量$\overrightarrow{OQ}$逆时针旋转角度ϕ的变换.

- ${R_\phi}^n$的效果是将给定向量$\overrightarrow{OQ}$逆时针旋转角度ϕ n次；
- 这个变换所对应的矩阵为$R_{n\phi} = \begin{pmatrix} \cos n\phi & -\sin n\phi \\ \sin n\phi & \cos n\phi \end{pmatrix}$.

解 2：首先计算${R_\phi}^2$以及${R_\phi}^3$猜出结果，再对n用数学归纳法证明.

动手尝试！

矩阵的运算-转置

定义(矩阵的转置). 把矩阵A的行换成同序数的列而得到的新矩阵称为A的转置，记作A^T.

等价地，若$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，则$A^T=\left(b_{ij}\right)_{n\times m}$，其中$b_{ij}=a_{ji}, 1\le i\le n; 1\le j\le m$.

例：若$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 8\\ 5 & 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$, 则$A^T=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -3 & 2\\ 2 & -1\\ 8 & 0\end{pmatrix}$.

思考：如何用转置的语言描述对称矩阵和反对称矩阵?

运算法则.

- $(A^T)^T=A$.
- $(A+B)^T=A^T+B^T$.
- $(kA)^T=kA^T$.
- $(AB)^T=B^TA^T$.
- 若A为n阶方阵，$(A^m)^T=(A^T)^m$.

矩阵的运算−转置

性质： $(AB)^T = B^T A^T$.

证明. 设$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times s}$， $B=\left(b_{ij}\right)_{s\times n}$.

- $(AB)^T$与$B^T A^T$是同型矩阵.
- 根据矩阵相等的定义，只需证这两个矩阵对应元素相等即可.

$(AB)^T$ 的(i,j)−元 $=$ (AB) 的(j,i)−元 转置定义

$=$ A的第j行与B的第i列对应元素乘积之和. 乘法定义

$B^T A^T$ 的(i,j)−元 $=$ B^T的第i行与A^T的第j列对应元素乘积之和 乘法定义

$=$ B的第i列与A的第j行对应元素乘积之和. 转置定义

所以，$(AB)^T = B^T A^T$. ■

练习：证明第五个性质$(A^m)^T = (A^T)^m$.

矩阵的运算-转置

例 1：设$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求$(AB)^T$.

解 1：先乘积再转置.

解 2：先转置再乘积.

$$(AB)^T=\begin{pmatrix}0 & 17\\ 14 & 13\\ -3 & 10\end{pmatrix}.$$

例 2：设A为$n\times 1$矩阵且$A^TA=1$. 证明$B=E_n-2AA^T$为对称矩阵且$B^2=E_n$.

证明. $B^T=(E_n-2AA^T)^T=E_n^T-(2AA^T)^T$

$$=E_n-2(AA^T)^T=E_n-2(A^T)^TA^T$$

$$=E_n-2AA^T=B.$$

故B为对称矩阵.

$$B^2=(E_n-2AA^T)(E_n-2AA^T)$$

$$=E_n-4AA^T+4A(A^TA)A^T$$

假设条件$A^TA=1$

$$=E_n.$$

■

矩阵的运算-行列式

定义(方阵的行列式). 设A为n阶方阵, 用$|A|$表示A的行列式.

运算法则. 设A, B为n阶方阵.

- $|A^T| = |A|$. 行列式性质 1
- $|kA| = k^n|A|$. 矩阵数乘定义 + 行列式性质 3
- $|AB| = |A||B|$.

第三个性质的证明. 只证$n = 2$的情况. 设$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. 令

$$D = \begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = |A||B|.$$

思想: 通过行列式对行和列的操作使得AB出现.

矩阵的运算-行列式

第1步：将b_{11}乘以第1列以及b_{21}乘以第2列加到第3列上.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & -1 & 0 & b_{22} \end{vmatrix}.$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

第2步:将b_{12}乘以第1列以及b_{22}乘以第2列加到第4列上.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_1+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & AB \\ -E & O \end{vmatrix}.$$

第3步：交换1, 3行以及2, 4行.

$$D=(-1)^2\begin{vmatrix} -E & O \\ A & AB \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^2|-E||AB|$$

分块行列式定理

$$=(-1)^2(-1)^2|AB|=|AB|.$$

■

思考：对n阶方阵，证明哪些地方需要改动?

矩阵的运算-行列式

定义(伴随矩阵). 设A为n阶方阵, 行列式$|A|$的各个元素的代数余子式A_{ij}所组成的如下方阵$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots A_{nn} \end{pmatrix}$称为方阵$A$的伴随矩阵.

性质: **设$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{n}$阶方阵. 则$\boldsymbol{AA^*} = \boldsymbol{A^*A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E_n}$.**

证明. 我们证$AA^* = |A|E_n$.

$$\begin{aligned} AA^* \text{ 的}(i,j)\text{-元} &= A\text{的第}i\text{行与}A^*\text{的第}j\text{列对应元素乘积之和} \\ &= (a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{in})\begin{pmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \vdots \\ A_{jn} \end{pmatrix} \\ &= a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} \\ &= \begin{cases} |A|, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \end{aligned}$$

代数余子式线性组合定理

因此, $AA^* = |A|E_n$. ∎

矩阵的运算-练习

1. 写出$A=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$的伴随矩阵.　　$A^*=\begin{pmatrix}-3&6&-3\\6&-12&6\\-3&6&-3\end{pmatrix}$

2. 设$A=\frac{1}{2}(B+E)$. 证明$A^2=A\Leftrightarrow B^2=E$.

3. 设$A^2=A$且$B^2=B$. 证明$(A+B)^2=A+B\Leftrightarrow AB=BA=O$.

4. 设$A=\begin{pmatrix}3&1\\1&-3\end{pmatrix}$. 求$A^{50}$和$A^{51}$.

5. 设A为n阶方阵. 若$AA^T=E_n$且$|A|=-1$, 证明$|A+E|=0$.

扩展阅读

扩展阅读–哈达马矩阵

定义(哈达马矩阵). 若n阶方阵A满足任何元素都是$+1$或-1且$AA^T = nE_n$，则称A为n阶哈达马矩阵.

例：$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$是一个2阶的哈达马矩阵.

哈达马猜想. 对于任何正整数$k \geq 1$，存在$4k$阶的哈达马矩阵.

截至目前, 2000以内还不知道是否存在下面阶数的哈达马矩阵:

668, 716, 892, 1132, 1244, 1388, 1436, 1676, 1772, 1916, 1948, 1964.