

## § 1. 牛顿三定律

### 牛顿第一定律:

一个物体，如果不受其他物体作用（或所受合力为零），则它将保持静止或作匀速直线运动。

### 牛顿第一定律的意义:

一定存在这样的参考系，在该系中，所有不受力的物体都保持自己的速度不变。这类参考系，称为惯性参考系，或称惯性系。

即：惯性定律断言，惯性系一定存在。

## 牛顿第二定律:

运动的改变与所加的动力成正比, 并发生在所加的力  
的那个直线方向上。

### 一、力与加速度的关系:

力: 几种定义:

- 1、力是一个物体对另一个物体的作用;
- 2、力是使物体获得加速度的原因;
- 3、其他物体使某一物体的运动状态发生变化的作用,  
叫做其他物体施于该物体的作用力, 简称力。

实验证明: 同一物体, 加速度的大小与力的大小  
成正比, 方向相同。

即  $\vec{a} \propto \vec{F}$

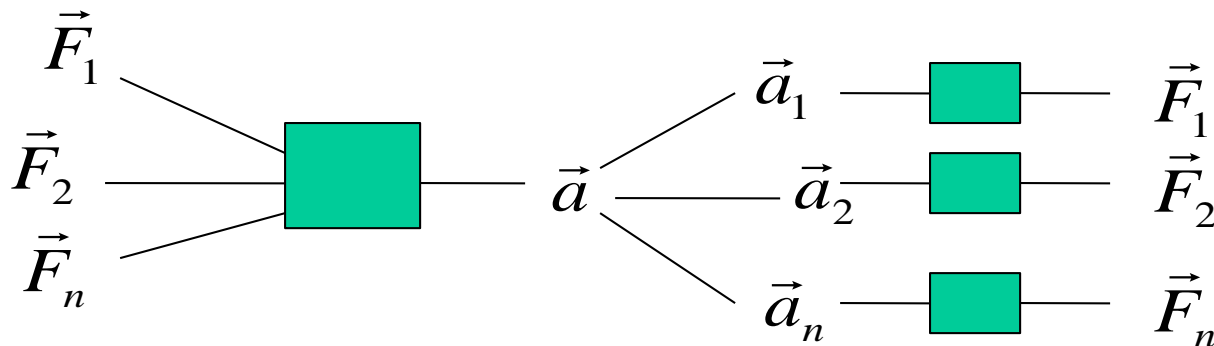
## 二、质量与加速度的关系

- 同一物体，力与加速度的比值一定，不同物体的，这种比值不同。这种比值正好反映物体运动状态改变的难易程度，即反映了惯性的大小。
  - ✓ 为了描述惯性，引入惯性质量的概念：
- 质量：质量是物体惯性的量度。常用 $m$ 表示。质量是物体具有物质的多少。单位：Kg
- 实验证明：
  - 同一作用力作用于不同质量的物体所获得加速度的大小与质量成反比。

$$a \propto \frac{1}{m}$$

### 三、力的独立作用原理

- 实验证明：n个力同时作用的效果等于它们单独作用效果的总和。——力的独立作用原理。
- 有  $\vec{F}_i \rightarrow \vec{a}_i$      $\sum \vec{F}_i \rightarrow \sum \vec{a}_i$



- 合力：如n个力  $\vec{F}_i$  同时作用在一个物体上，物体获得的加速度等于某一个力  $\vec{F}$  单独作用时产生的加速度，则  $\vec{F}$  叫做几个力  $\vec{F}_i$  的合力。

实验证明， $\vec{F}$  与  $\vec{F}_i$  满足矢量合成规律。

第二定律的数学表述为：

$$\vec{F} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\sum F_i = ma$$

$$\sum \vec{F}_i = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

$$\sum F_{ix} = m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{dx^2}{dt^2}$$

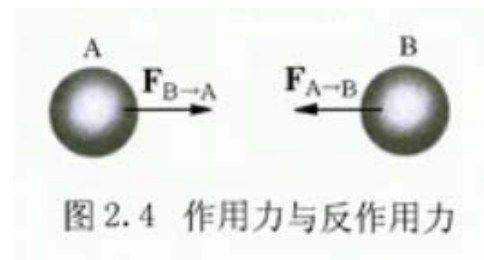
$$\sum F_{iy} = m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{dy^2}{dt^2}$$

$$\sum F_{iz} = m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{dz^2}{dt^2}$$

## 牛顿第三定律：

每一个作用总是有一个相等的反作用和它对抗；或者说，两物体彼此之间的相互作用永远大小相等，方向相反。

$$\vec{F}_{A-B} = -\vec{F}_{B-A}$$



## 应用该定律时注意：

- 1、二力作用于两个物体，不能抵消。
- 2、如两个物体作为一个整体研究，二力为一对内力，对整体的加速度没有贡献。
- 3、物体加速度由外力产生，和它作用于别的物体的力无关。
- 4、二力性质相同。
- 5、无论运动状态如何，定律都成立。

## 动力学求解的问题

质点动力学问题的求解**关键是力**。牛顿运动定律指出，力使质点获得加速度。而质点在各个瞬时的加速度（附以适当的初始条件）则完全确定了质点的运动情况，这是我们在质点运动学中研究过的问题。这样，力对质点运动情况的影响是通过加速度表现出来的。因此，**加速度这个物理量起着很重要的“桥梁”作用**，它将牛顿运动定律与质点运动学结合起来，而牛顿运动定律与质点运动学知识相结合，就提供了解决各种各样质点动力学问题的原则依据。

## ► 变力问题的处理方法（重点）

- 力随时间变化： $F=f(t)$

在直角坐标系下，以x方向为例，由牛顿第二定律：

$$m \frac{dv_x}{dt} = f(t)$$

且：  $t=t_0$  时，  $v_x=v_0$  ；  $x=x_0$   
则：

$$dv_x = \frac{1}{m} f(t) dt$$

直接积分得：

$$v_x = \int dv_x = \int \frac{1}{m} f(t) dt$$
$$= v(t) + c$$

由速度求积分可得到运动学方程：

$$x = \int v_x dt = x(t) + c_2$$

例题：

飞机着陆时受到的阻力为 $F = -ct$ ，（ $c$ 为常数）

且 $t=0$ 时， $v=v_0$ 。

求：飞机着陆过程中的速度。

例题：

飞机着陆时受到的阻力为 $F = -ct$ ，（ $c$ 为常数）

且 $t=0$ 时， $v=v_0$ 。

求：飞机着陆过程中的速度。

解：根据牛顿第二定律： $-ct = m \, dv / dt$

$$v = \int dv = \int -\frac{c}{m} t dt$$

$$= -\frac{c}{2m} t^2 + c_1$$

当 $t=0$ 时， $v=v_0$ ，代入得： $v_0 = c_1$

$$v = v_0 - \frac{c}{2m} t^2$$

- 力随速度变化： $F=f(v)$

直角坐标系中，x方向 $f(v) = m dv/dt$

经过移项可得： $dt = m \frac{dv}{f(v)}$

等式两边同时积分得： $t - t_0 = \int dt = \int \frac{m}{f(v)} dv = m \int \frac{1}{f(v)} dv$

具体给出 $f(v)$ 的函数式就可进行积分运算。

### 例题：（重点）

质量为 $m$ 的小球，从距水平面高 $h$ 处以速度 $v_0$ 沿水平方向被抛入粘性流体中。小球受到阻力 $f = -cv$ （ $c$ 为常数）而减速，求：小球的运动速度及运动学方程。

### 例题：（重点）

质量为 $m$ 的小球，从距水平面高 $h$ 处以速度 $v_0$ 沿水平方向被抛入粘性流体中。小球受到阻力 $f=-cv$ （ $c$ 为常数）而减速，求：小球的运动速度及运动学方程。

解：选取坐标系，令 $t=0$ 时， $x=0, y=-h, v_{x_0} = v_0, v_{y_0} = 0$

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = -cv_x \\ m \frac{dv_y}{dt} = mg - cv_y \end{cases} \quad \text{移项变换:} \quad \begin{cases} \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{c}{m} dt \\ \frac{dv_y}{g - \frac{c}{m} v_y} = dt \end{cases}$$

$$\text{积分得:} \quad \begin{cases} \ln v_x \Big|_{v_0}^{v_x} = -\frac{c}{m} t \Big|_0^t \\ -\frac{m}{c} \ln \left( g - \frac{c}{m} v_y \right) \Big|_0^{v_y} = t \Big|_0^t \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v_0 e^{-nt} \\ v_y = \frac{g}{n} (1 - e^{-nt}) \end{cases} \quad \text{其中:} \quad n = \frac{c}{m}$$

$$\begin{cases} dx = v_0 e^{-nt} dt \\ dy = \frac{g}{n} (1 - e^{-nt}) dt \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{v_0}{n} (1 - e^{-nt}) \\ y = -h + \frac{g}{n} t - \frac{g}{n^2} (1 - e^{-nt}) \end{cases}$$

- 力随位移变化： $F=f(x)$

直角坐标系中， $x$ 方向：

$$f(x) = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dx} = mv \frac{dv}{dx}$$

经过移项可得： $f(x)dx = mv dv$

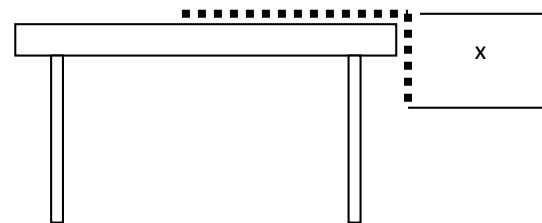
等式两边同时积分得：

$$\int f(x)dx = \int mv dv = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$$

例题：（重点）

光滑的桌面上一质量为 $M$ ，长为 $L$ 的匀质链条，有极小一段被推出桌子边缘。

求：链条刚刚离开桌面时的速度。



解：链条所受的力F是个变力：  $F=m(x)g$

$$m(x) = \frac{M}{L}x$$

根据牛顿第二定律：

$$\frac{M}{L}xg = M \frac{dv}{dt} = M \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dx} = Mv \frac{dv}{dx}$$

$$\int_0^L \frac{M}{L}gxdx = \int_0^v Mv dv$$

$$\frac{M}{2L}gL^2 = \frac{1}{2}Mv^2$$

$$v = \sqrt{gL}$$

## § 1. 功

□ 功是力对距离的积累效果。

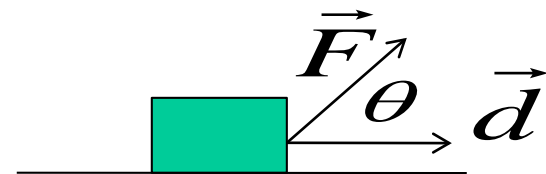
### 一、恒力作功

力  $\vec{F}$  作用于物体上，如果  $\vec{F}$  与位移  $\vec{d}$  同向，  
则  $\vec{F}$  对物体所做的功为：

$$A = Fd$$

➤ 如果  $\vec{F}$  与  $\vec{d}$  不同方向，夹角为  $\theta$ ，那么  $\vec{F}$  对物体所做的功为：

$$A = Fd \cos \theta$$



➤ 也可写作：  $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$

➤ 定义：力对物体所做的功为力沿位移方向的分量与位移的乘积。或功是力与位移的标积。

说明：

1) 功是标量，没有方向但有正负

- $\theta < 90^\circ$       功为正
- $\theta = 90^\circ$       功为0
- $\theta > 90^\circ$       功为负

2) 功的单位：

SI中，      牛顿·米=焦耳（J）

CGS中，      达因·厘米=尔格（erg）

3) 功可看做力的分量与位移的乘积，也可看做是位移沿力的方向的分量与力的乘积。

$$\text{即 } A = (F \cos \theta)d = F(d \cos \theta)$$

4) 提到功，必须指明是哪个力所作的功。

5) 这里的位移有时需要看做作用点的位移（例如通过动滑轮拉一个物体）。

## 二、变力所作的功

- 当  $\vec{F}$  不恒定，即  $\vec{F}$  是位置的函数时，即

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$$

- 可将轨道分成很多小段，每个小段内， $\vec{F}(\vec{r})$  可近似看做恒力，每个小段可看做直线。

• 则

$$\Delta A_i = F_i |\Delta \vec{r}_i| \cos \theta_i$$

$$dA = F |d\vec{r}| \cos \theta$$

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$|d\vec{r}| = ds$$

$$dA = F ds \cos \theta$$

$$A = \int_{a(L)}^b F \cos \theta ds$$

$$A = \int_{a(L)}^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

在直角坐标系中：

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$A = \int_{a(L)}^b F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

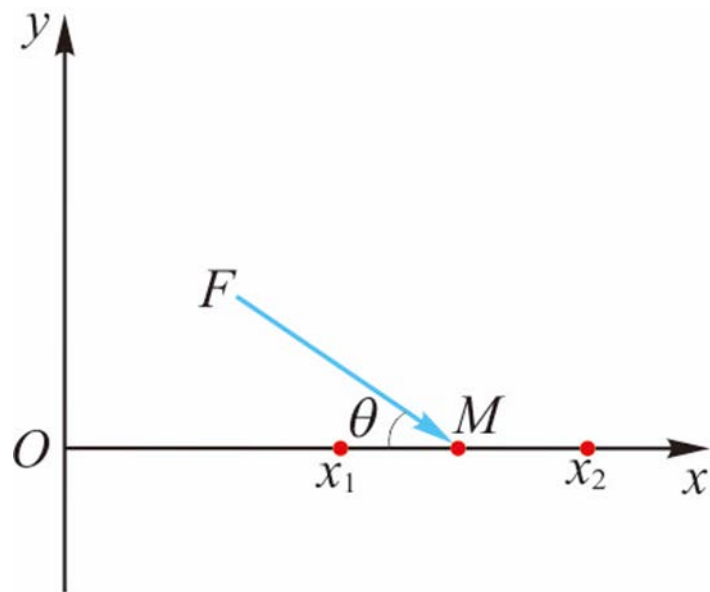
在自然坐标系中：

若F为恒力，质点直线运动

$$A = \int_{a(L)}^b F \cos \theta ds = Fs \cos \theta$$

质点M 在力F 作用下沿坐标轴Ox 运动,力F 的大小和方向角 $\theta$  随x 变化的规律分别为 $F = 6x$  , $\cos\theta=0.7-0.02x$  ,其中F 的单位为N , x 、 y 的单位为m.试求质点从 $x_1=10\text{m}$ 处运动到 $x_2=20\text{m}$ 处的过程中,力F所做的功.

已知:  $F=6x$ ;  $\cos\theta=0.70-0.02x$



求: 质点从 $x_1=10\text{m}$ 到 $x_2=20\text{m}$ 过程中F所作的功

已知：  $F=6x$ ；  $\cos\theta=0.70-0.02x$

求： 质点从  $x_1=10\text{m}$  到  $x_2=20\text{m}$  过程中  $F$  所作的功

解：

$$dA = F \cos \theta dx = 6x(0.70 - 0.02x) dx$$

积分得：

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_1}^{x_2} 6x(0.70 - 0.02x) dx \\ &= \int_{10}^{20} 4.2x dx - \int_{10}^{20} 0.12x^2 dx \\ &= 350(J) \end{aligned}$$

# § 1. 质点动量定理

## ► 动量

牛顿第二定律: 
$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1)$$

质量改变: 
$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (2)$$

(2) 式的写法比 (1) 式的写法更具有普遍性。

当  $m$  为常数时, (2) 式由导数运算可得 (1) 式;

当  $m$  为变量时, (1) 式解决不了问题, 但 (2) 式能解决。

$P = mv$  就是大家非常熟悉的物理量——动量

(2) 式可解释成: 力的效果是使质点的动量发生变化。

力 = 质点动量的变化率

## ➤ 冲量

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

两边同乘 $dt$ 可得:  $\vec{F}dt = d\vec{P}$

等式两边同时积分得:  $\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}dt = \int_{P_0}^{P_1} d\vec{P} = P_1 - P_0 = \Delta\vec{P}$

冲量的定义:  $\vec{I} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}dt$

- 注意:

➤ 冲量是**矢量**。冲量的方向：与力F的方向没有必然联系，它由F对时间的积分决定。

元冲量 $dI = Fdt$ 的方向与F的方向相同。

➤ 冲量与力的作用过程有关，是**过程量**。

冲量的大小：即与 $F(t)$ 函数形式有关，还与时间间隔（积分限）有关。

## ► 动量定理

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt = \int_{P_0}^{P_1} d\vec{P} = P_1 - P_0 = \Delta \vec{P} \quad (3) \quad \text{微分形式}$$

$$\vec{I} = \int \vec{F}(t) dt = \vec{P}_1 - \vec{P}_0 \quad (4) \quad \text{积分形式}$$

(4) 式左边与力的作用过程有关，即与  $F(t)$  和  $t_0$ 、 $t_1$  有关；

(4) 式右边与作用过程毫不相关——**状态量**

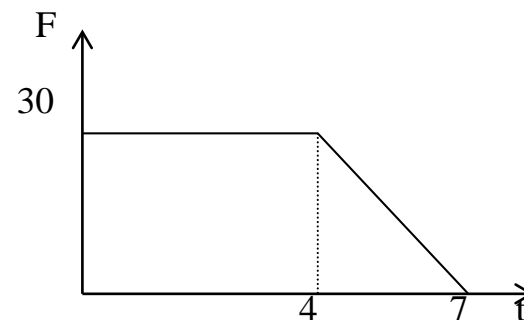
动量只与质点的运动状态有关，与力的作用过程无关，故称其为状态量。

**力对质点的作用过程的结果 = 质点运动状态的变化**

# 例题

已知：  $m=10\text{kg}$ ，  $F$ 大小如图， 摩擦系数  $\mu=0.2$ ，  $v_0=0$

求：  $t=6\text{s}$ 时木箱的速度。



## 例题

已知：  $m=10\text{kg}$ ，  $F$  大小如图， 摩擦系数  $\mu=0.2$ ，  $v_0=0$

求：  $t=6\text{s}$  时木箱的速度。

解：  $F$  的表达式：

$t_0=0$  到  $t_1=4\text{s}$ ，  $F=30\text{N}$ ，

$t=4\text{s}$  到  $7\text{s}$ ，  $F=70-10t$ 。

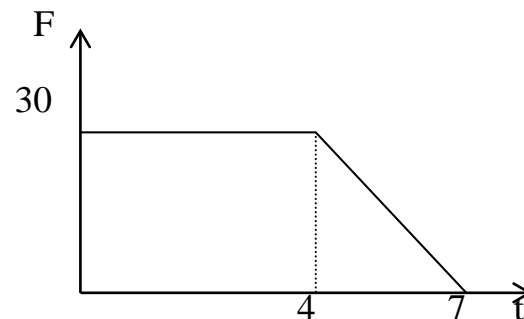
$t_2=6\text{s}$  时， 木箱的速度为  $v$

根据质点动量定理：

$$(F - \mu mg)(t_1 - t_0) + \int_{t_1}^{t_2} (70 - 10t) dt - \mu mg(t_2 - t_1) = mv - 0$$

$$(F - \mu mg)(t_1 - t_0) + 70(t_2 - t_1) - 5(t_2^2 - t_1^2) - \mu mg(t_2 - t_1) = mv$$

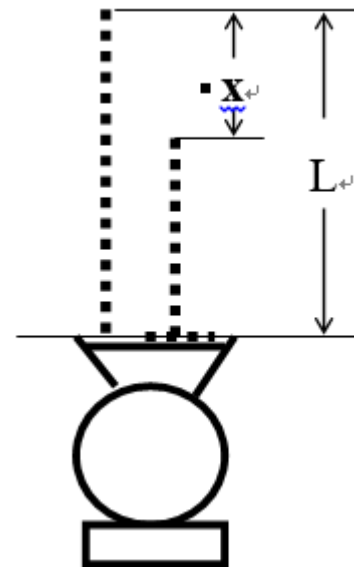
$$v = \frac{(30 - 19.6) \times 4 + (70 - 19.6) \times 2 - 5(36 - 16)}{10} = 4.24 \quad (\text{m/s})$$



## 例题

已知：质量为 $M$ ，长为 $L$ 的匀质链条，上端悬挂，下端刚和称盘接触，使链条自由下落。

求：下落长度 $x$ 时，称的读数。



## 例题

已知：质量为 $M$ ，长为 $L$ 的匀质链条，上端悬挂，下端刚和称盘接触，使链条自由下落。

求：下落长度 $x$ 时，称的读数。

解法1： 称的读数  $N=mg+F$

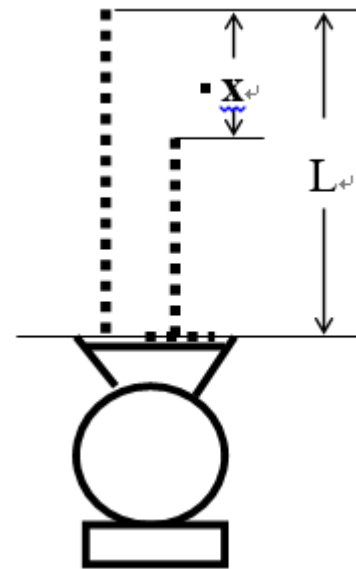
$mg$ 是落在称上的链条的重量， $F$ 是链条下落时具有速度 $v$ 的一小段与称盘碰撞，速度由 $v$ 变成0时给称盘的冲力。

根据动量定理： $Fdt=dmv-dm0$

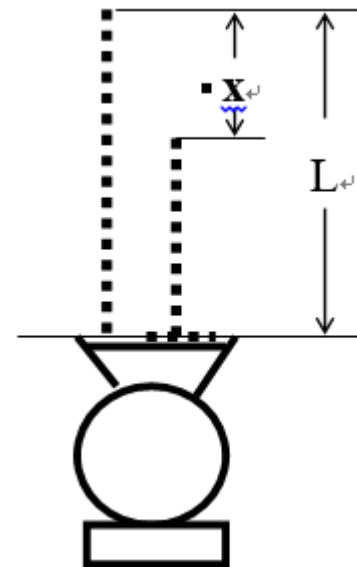
$$dm=M/Ldx, \quad v^2=2gx$$

$$F=\frac{dm}{dt}v=\frac{M}{L}\frac{dx}{dt}v=\frac{M}{L}v^2=\frac{M}{L}2gx$$

$$N=\frac{M}{L}gx+2\frac{M}{L}gx=3\frac{M}{L}gx$$



称的读数是落在称盘上链条质量的3倍。



解法2: 上边的链条:

$$F_1 = m_1 g = \frac{M}{L} x g$$

下边的链条:

$$m_2 g - F_2 = \frac{dP}{dt}$$

$$P = \frac{M}{L} (L-x) \frac{dx}{dt} = \frac{M}{L} (L-x) \sqrt{2gx}$$

$$F_2 = m_2 g - \frac{dp}{dt} = \frac{M}{L} (L-x) g - \frac{d}{dt} \left[ \frac{M}{L} (L-x) \sqrt{2gx} \right] = \frac{M}{L} (L-x) g - \frac{Mg}{L} (L-3x) = \frac{Mg}{L} 2x$$

对整根链条:

$$F = F_1 + F_2 = 3 \frac{M}{L} g x$$

质点

刚体（定轴转动）

运动方程

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{M} = J_z \vec{\beta}$$

做功

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$dA = M_z(F) d\theta$$

动能定理

$$A = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$A = \frac{1}{2}J_z\omega_2^2 - \frac{1}{2}J_z\omega_1^2$$

动量定理

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

$$L_z = J_z\omega$$

$$\int_{t_0}^t F dt = (mv)_{t_1} - (mv)_{t_0}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} M_z dt = (J_z\omega)_{t_1} - (J_z\omega)_{t_0}$$

转动惯量定义：

$$J = \sum \Delta m_i r_i^2$$




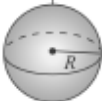
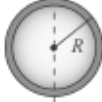
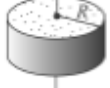
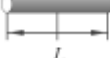
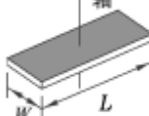
力矩定义：

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

动量矩定义为：

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

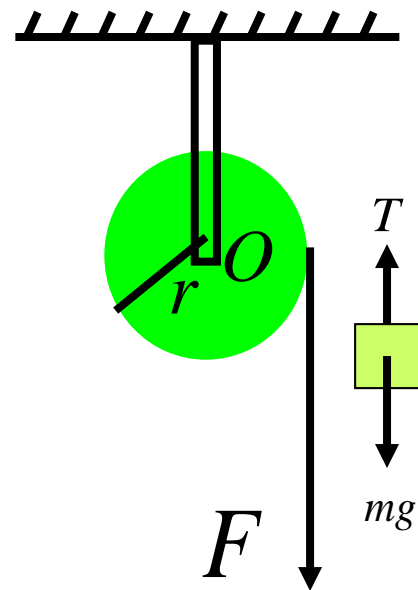
表 6.1 几种常用刚体的转动惯量

刚 体	转 轴	转动惯量	图
均质圆环 (质量为 $M$ , 半径为 $R$ )	通过圆环中心 与环面垂直	$M R^2$	
均质圆柱壳 (质量为 $M$ , 半径为 $R$ , 宽度为 $W$ )	沿直径方向通 过柱壳中心	$\frac{1}{2} M R^2 + \frac{1}{12} M W^2$	
均质圆盘 (质量为 $M$ , 半径为 $R$ )	通过圆盘中心 与盘面垂直	$\frac{1}{2} M R^2$	
均质球体 (质量为 $M$ , 半径为 $R$ )	沿直径	$\frac{2}{5} M R^2$	
均质球壳 (质量为 $M$ , 半径为 $R$ )	沿直径	$\frac{2}{3} M R^2$	
均质圆柱体 (质量为 $M$ , 半径为 $R$ )	沿几何轴	$\frac{1}{2} M R^2$	
均质细杆 (质量为 $M$ , 长为 $L$ )	通过中心与杆 垂直	$\frac{1}{12} M L^2$	
均质长方形板 (质量为 $M$ , 长为 $L$ , 宽为 $W$ )	通过中心与板 面垂直	$\frac{1}{12} M (L^2 + W^2)$	

例 一轻绳绕在半径  $r=20\text{ cm}$  的飞轮边缘，在绳端施以  $F=98\text{ N}$  的拉力，飞轮的转动惯量  $J=0.5\text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ，飞轮与转轴间的摩擦不计，(见图)

求 (1) 飞轮的角加速度

(2) 如以重量  $P=98\text{ N}$  的物体挂在绳端，试计算飞轮的角加速



例 一轻绳绕在半径  $r=20\text{ cm}$  的飞轮边缘，在绳端施以  $F=98\text{ N}$  的拉力，飞轮的转动惯量  $J=0.5\text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ，飞轮与转轴间的摩擦不计，(见图)

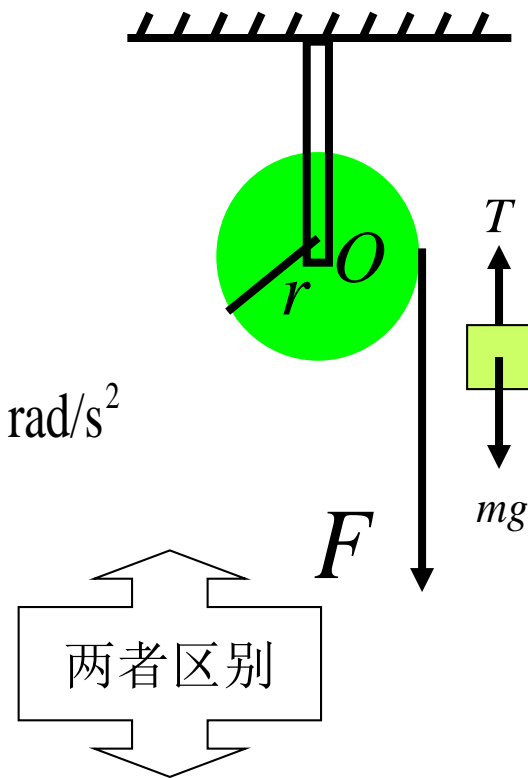
求 (1) 飞轮的角加速度

(2) 如以重量  $P=98\text{ N}$  的物体挂在绳端，试计算飞轮的角加速

解 (1)  $Fr = J\beta$        $\beta = \frac{Fr}{J} = \frac{98 \times 0.2}{0.5} = 39.2\text{ rad/s}^2$

(2) 
$$\left. \begin{aligned} mg - T &= ma \\ Tr &= J\beta \\ a &= r\beta \end{aligned} \right\}$$

$$\beta = \frac{mgr}{J + mr^2} = \frac{98 \times 0.2}{0.5 + 10 \times 0.2^2} = 21.8\text{ rad/s}^2$$



## § 6.3 动量矩和动量矩守恒定律

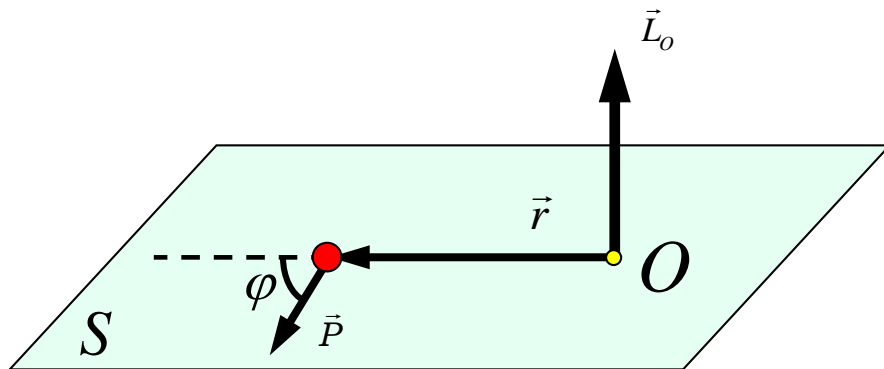
### 一. 质点动量矩 (角动量)定理和动量矩守恒定律

#### 1. 质点的动量矩(对O点)

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

其大小

$$L_O = rps\sin\phi = mrvs\sin\phi$$



惯性参照系

特例：质点作圆周运动  $L = rp = mrv$



说明

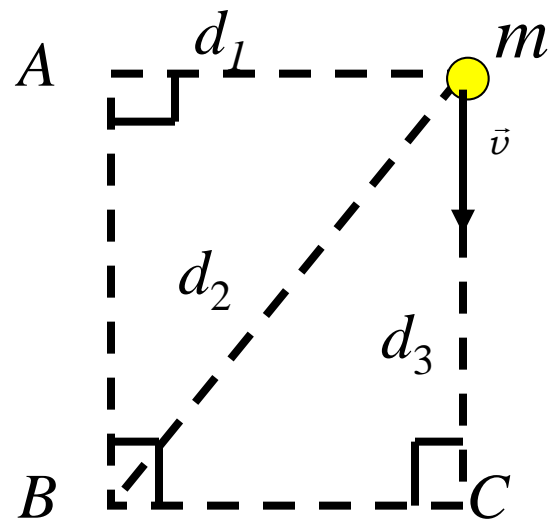
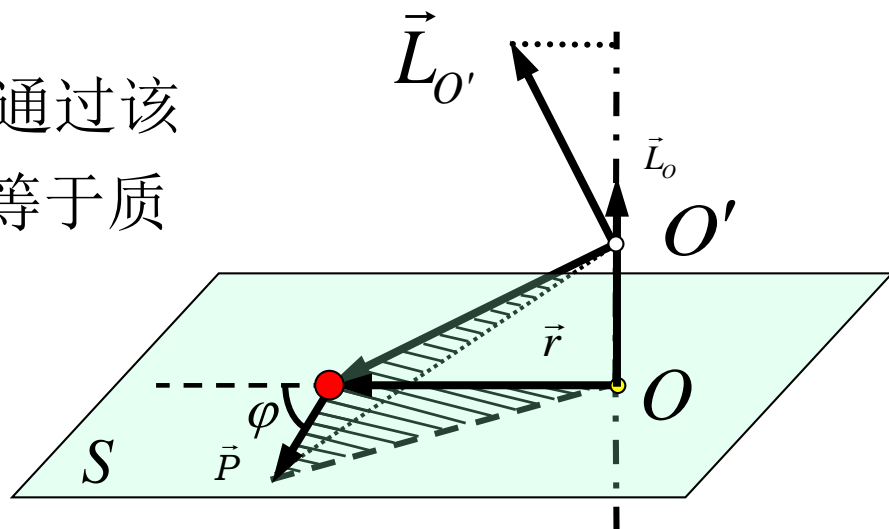
(1) 质点的动量矩与质点的动量及位矢(取决于固定点的选择)有关

(2) 当质点作平面运动时, 质点对运动平面内某参考点 $O$ 的动量矩也称为质点对过 $O$ 垂直于运动平面的轴的动量矩

(3) 质点对某点的动量矩, 在通过该点的任意轴上的投影就等于质点对该轴的动量矩

例 一质点 $m$ , 速度为 $v$ , 如图所示,  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 分别为三个参考点, 此时 $m$ 相对三个点的距离分别为 $d_1$ 、 $d_2$ 、 $d_3$

求 此时刻质点对三个参考点的动量矩



## 2. 质点的动量矩定理

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

$$\vec{v} \times m\vec{v} = 0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \vec{M}dt = d\vec{L} \quad (\text{质点动量矩定理的微分形式})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} \cdot dt = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 \quad (\text{质点动量矩定理的积分形式})$$

质点所受合力矩的冲量矩等于质点的动量矩的增量

★ 说明

- (1) 冲量矩是质点动量矩变化的原因
- (2) 质点动量矩的变化是力矩对时间的积累结果

### 3. 质点动量矩守恒定律

若  $\vec{M} = 0$  , 则  $\vec{L} = \text{常矢量}$  ——质点动量矩守恒定律

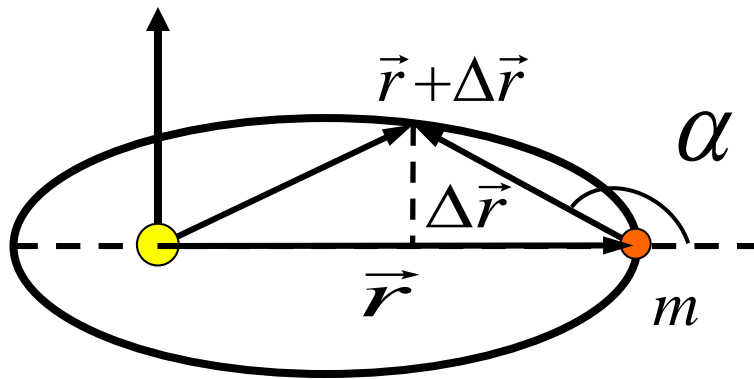


讨论

- (1) 动量矩守恒定律是物理学的基本定律之一，它不仅适用于宏观体系，也适用于微观体系，且在高速低速范围均适用
- (2) 通常对有心力： $\vec{F}$ 过 $O$ 点, $M=0$ ,动量矩守恒

例如 由动量矩守恒定律可导出行星运动的开普勒第二定律

行星对太阳的位矢在相等的时间内扫过相等的面积



### 3. 质点动量矩守恒定律

若  $\vec{M} = 0$  , 则  $\vec{L} = \text{常矢量}$  ——质点动量矩守恒定律



讨论

(1) 动量矩守恒定律是物理学的基本定律之一，它不仅适用于宏观体系，也适用于微观体系，且在高速低速范围均适用

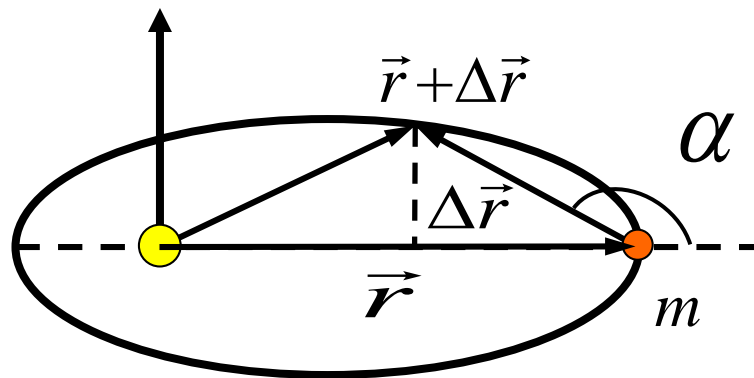
(2) 通常对有心力： $\vec{F}$ 过O点, $M=0$ ,动量矩守恒

例如 由动量矩守恒定律可导出行星运动的开普勒第二定律

行星对太阳的位矢在相等的时间内扫过相等的面积

$$L = mvr\sin\alpha = m \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} r\sin\alpha$$

$$= 2m \frac{\frac{1}{2} |\Delta\vec{r}| r \sin(\alpha)}{\Delta t} = 2m \frac{\frac{1}{2} |\Delta\vec{r}| r \sin(\pi - \alpha)}{\Delta t} = 2m \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

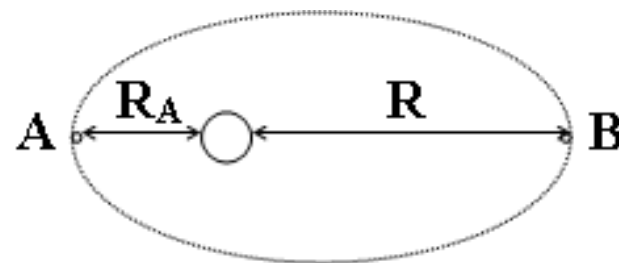


## 例题

人造卫星在椭圆轨道上运行，地球中心可看作固定点，近地点离地面的距离为439km，远地点离地面的距离为2384km，近地点速度为8.12km/s，地球半径为6370km。

求：卫星在远地点的速度 $v_B$  = ?

解：以卫星为研究对象，  
卫星受地球引力作用，该力  
指向地球中心，对地球中心而言  
，  
该力的力矩为0，卫星对地球中  
心的动量矩保持不变。



$$\therefore \quad m v_A R_A = m v_B R_B$$

$$v_B = v_A R_A / R_B$$

$$R_A = 439 + 6370 = 6809 \text{ (km)}$$

$$R_B = 2384 + 6370 = 8754 \text{ (km)}$$

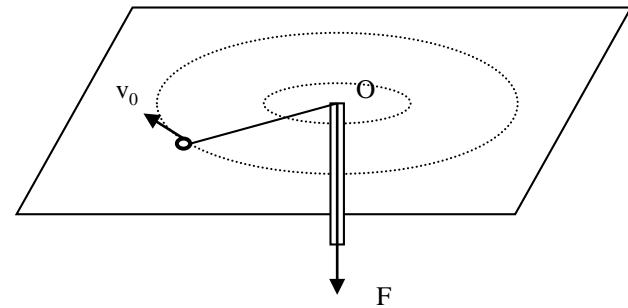
$$\text{代入数值得: } v_B = 6.32 \text{ (km/s)}$$

由此题看到，卫星在近地点速度快（8.12km/s），远地点速度慢（6.32 km/s），两点处的动量不同，但动量矩相同。

## 例题6.12 (P.215) (重点)

质量为 $m$ 的小球系在绳子的一端，绳穿过一铅直套管，使小球限制在一光滑水平面上运动。先使小球以速度 $v_0$ 绕管心作半径为 $r_0$ 的圆周运动，然后向下拉绳，使小球轨迹最后成为半径为 $r$ 的圆。

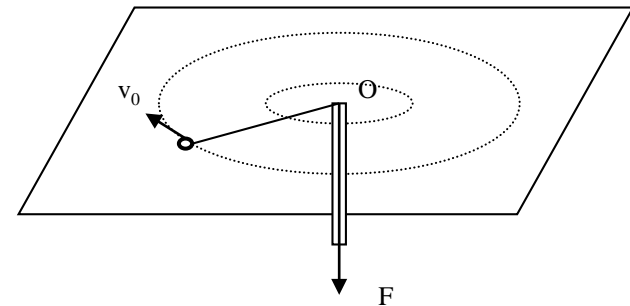
试求：小球距管心 $r$ 时速度 $v$ 的大小，绳从 $r_0$ 缩短到 $r$ 过程中，力 $F$ 所作的功。



## 例题6.12 (P.215) (重点)

质量为 $m$ 的小球系在绳子的一端，绳穿过一铅直套管，使小球限制在一光滑水平面上运动。先使小球以速度 $v_0$ 绕管心作半径为 $r_0$ 的圆周运动，然后向下拉绳，使小球轨迹最后成为半径为 $r$ 的圆。

试求：小球距管心 $r$ 时速度 $v$ 的大小，绳从 $r_0$ 缩短到 $r$ 过程中，力 $F$ 所作的功。



解：绳子对小球的作用力始终通过圆心 $O$ ，为有心力，该力对 $O$ 点产生的力矩为 $0$ ，因此，在整个过程中，质点的动量矩守恒。

$$mv_0 r_0 = mvr$$

$$\therefore v = v_0 r_0 / r$$

随着半径减小，质点的速度增加，动能增加。动能增加的原因是力F对小球作了功。

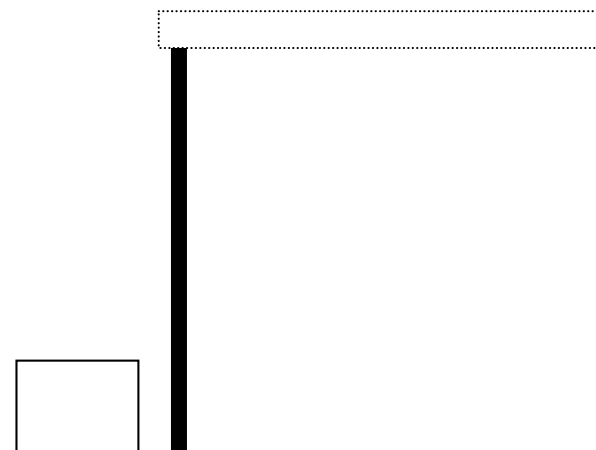
由于系统没有耗散力，做功的结果是使动能增加。

$$A = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 - 1 \right]$$

### 书中例题6.16(P. 221) (重点)

长为 $L$ ，质量为 $M$ 的均匀杆，一端悬挂，由水平位置无初速度地下落，在铅直位置与质量为 $m$ 的物体A做完全非弹性碰撞，碰后，物体A沿摩擦系数为 $\mu$ 的水平面滑动。

求：物体A滑动的距离。



## 书中例题6.16(P. 221) (重点)

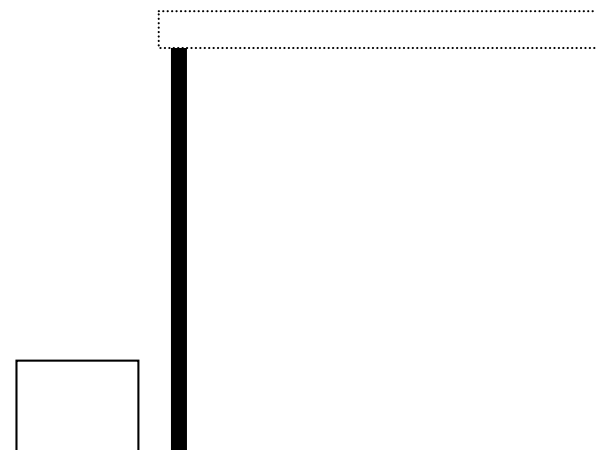
长为 $L$ ，质量为 $M$ 的均匀杆，一端悬挂，由水平位置无初速度地下落，在铅直位置与质量为 $m$ 的物体A做完全非弹性碰撞，碰后，物体A沿摩擦系数为 $\mu$ 的水平面滑动。

求：物体A滑动的距离。

解：整个过程分为三个阶段：

- 1、杆由水平位置绕端点的轴转动：机械能守恒
- 2、与A作完全非弹性碰撞：动量矩守恒
- 3、A滑动：动能被摩擦力耗散掉

。



## 第一阶段：机械能守恒

	动能	势能
初：	0	$Mg L/2$
终：	$1/2J_z\omega^2$	0

$$1/2J_z\omega^2 = Mg L/2 \quad \text{其中 } J_z = 1/3ML^2$$

$$\therefore \omega^2 = 3g/L$$

## 第二阶段：动量矩守恒

$$\text{初： } J_z\omega \quad ; \quad \text{终： } J_z\omega' + mL^2\omega'$$

$$\therefore J_z\omega = J_z\omega' + mL^2\omega'$$

代入 $J_z$ 和 $\omega$ 值得：

$$\frac{1}{3}ML^2\sqrt{\frac{3g}{L}} = \frac{1}{3}ML^2\omega' + mL^2\omega'$$

$$\omega' = \frac{M\sqrt{\frac{3g}{L}}}{M + 3m}$$

第三阶段，动能定理

A的速度： $\omega'L$ ； 摩擦力 $mg\mu$

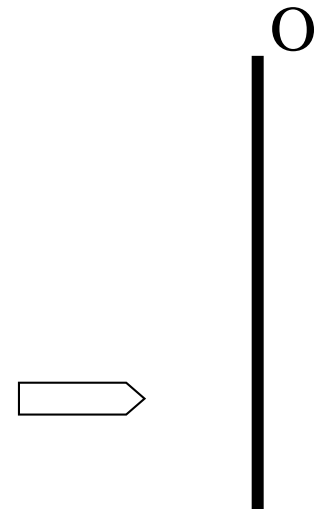
$$\frac{1}{2}m(l\omega')^2 = mg\mu s \qquad s = \frac{3LM^2}{2\mu(M + 3m)^2}$$

## 书中习题6.22 (p228) (重点)

一均质细杆，长 $L=1\text{m}$ ，可绕通过一端的水平光滑的轴 $O$ 在铅垂面内自由转动，开始时杆静止于铅直位置。一子弹沿水平方向以 $v=10\text{m/s}$ 的速度射入杆，射入点距离 $O$ 点的距离为 $3L/4$ ，子弹的质量为杆质量的 $1/9$ 。

试求：(1) 子弹与杆共同运动的角速度

(2) 杆的最大摆角  $\theta$



## 书中习题6.22 (p228) (重点)

一均质细杆，长 $L=1\text{m}$ ，可绕通过一端的水平光滑的轴O在铅垂面内自由转动，开始时杆静止于铅直位置。一子弹沿水平方向以 $v=10\text{m/s}$ 的速度射入杆，射入点距离O点的距离为 $3L/4$ ，子弹的质量为杆质量的 $1/9$ 。

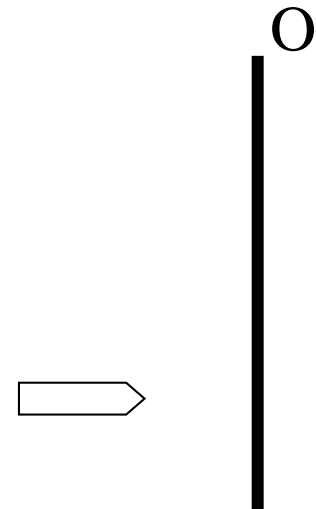
试求：(1) 子弹与杆共同运动的角速度

(2) 杆的最大摆角  $\theta$

解：两个阶段

1. 碰撞：动量矩守恒

2. 转动：机械能守恒



射入前，子弹的动量矩  $\vec{l} \times m\vec{v} = \frac{3}{4}L\frac{1}{9}Mv$

射入过程动量矩守恒

$$\frac{3}{4}L\frac{1}{9}Mv = \left[ \frac{1}{9}M\left(\frac{3}{4}L\right)^2 + \frac{1}{3}ML^2 \right] \omega$$

$$\omega = \frac{4v}{19L} = 2.1(\text{rad} / \text{s})$$

入射后，子弹与杆共同摆动，机械能守恒

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{9}M\left(\frac{3}{4}L\right)^2 + \frac{1}{3}ML^2 \right] \omega^2 = \left[ \frac{1}{9}Mg\frac{3}{4}L + Mg\frac{L}{2} \right] (1 - \cos \theta)$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{2v^2}{133Lg} = 0.8466$$

$$\theta = 32.16^\circ$$

## 五、简谐振动的特征参量

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

描述一个简谐振动的特征参量有三个：振幅、角频率和相位。

### (1) 振幅 $A$

$A$ 代表质点偏离中心（平衡位置）的最大距离，它正比于 $(E)^{1/2}$ ，即它的平方正比于系统的机械能，

$$A^2 \propto E$$

## (2) 角频率 $\omega$ (也称圆频率)

振动的特征之一是运动具有周期性。完成一次完整的振动所经历的时间称为**周期**，用  $T$  表示。

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0 + 2\pi)$$

$$x = A \cos[\omega(t + \frac{2\pi}{\omega}) + \varphi_0]$$

可知周期  $T$  与角频率  $\omega$  的关系为：  $T = 2\pi / \omega$  。周期的倒数称为**频率  $\nu$** ，  $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ ，表示每秒内完全振动的次数。

周期的单位是“秒”，频率的单位是“秒<sup>-1</sup>”，有个专门的名称叫“赫兹（Hz）”，角频率的单位是“弧度/秒（rad/s）”。对于弹簧振子，周期和频率为：

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$\omega$ 、 $\nu$ 、 $T$  都是由振动系统本身性质决定的，故常称为**固有角频率**、**固有频率**、**固有周期**。

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

(3) 相位（或位相）

$$\varphi = \omega t + \varphi_0$$

其中时刻 $t=0$ 的相位，称为初相位。相位是相对的，通过计时零点的选择，我们总可以使初相位：

$$\varphi_0 = 0$$

而多个简谐运动之间的相位差是重要的。

- 两同频率振动的相位比较:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

两振动相位差:

$$(\omega t + \varphi_1) - (\omega t + \varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi$$

如 $\Delta\varphi > 0$ , 则振动1超前振动2  $\Delta\varphi$

如 $\Delta\varphi < 0$ , 则振动1落后振动2  $\Delta\varphi$

如 $\Delta\varphi = 0$ , 则振动1与振动2同步 (或同相)

我们说振幅、角频率（或频率、周期）和相位是描绘简谐振动的三个特征参量，是因为有了它们就可以把一个简谐振动完全确定下来。振幅和相位与频率不同，它们不是振子的固有性质，而是由初始条件决定的。

## 振幅及初相位的确定

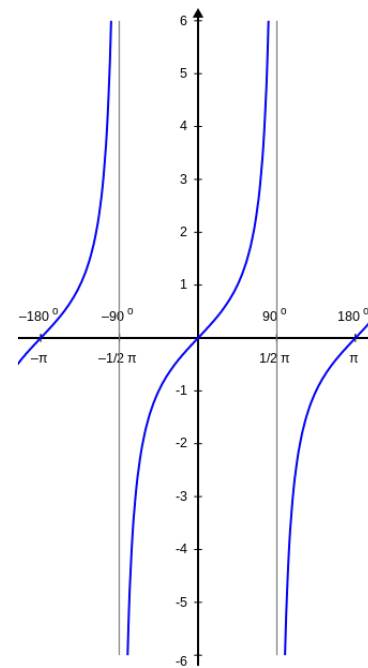
A、 $\varphi_0$  是积分常数，由振动的初始条件确定：

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \\ v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

设初始条件：  $t = 0$  时，  $x = x_0, v = v_0$

$$\text{则: } \begin{cases} x_0 = A \cos \varphi_0 \\ v_0 = -\omega A \sin \varphi_0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \\ \operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega x_0} \end{cases} \quad (2)$$



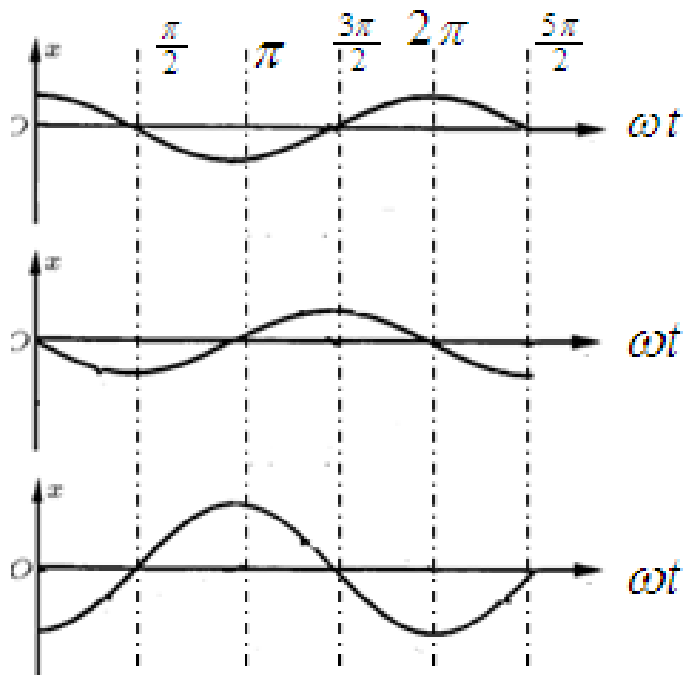
- 振幅取正值， $\varphi_0$  一般在  $-\pi \sim \pi$  之间选取，但在此区间内，有两个值的正切值相同，但只有一个是正确的，需同时满足 (1) 中两式。

## § 2. 简谐振动的速度和加速度

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) = \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$



取  $\varphi_0 = 0$ ,

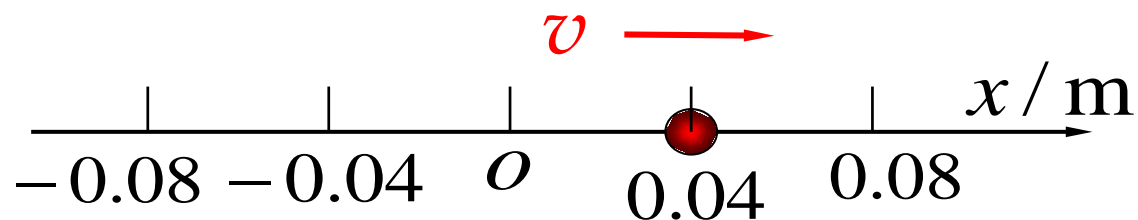
$$x = A \cos \omega t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin \omega t$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos \omega t$$

**例** 一质量为  $0.01 \text{ kg}$  的物体作谐振动，其振幅为  $8 \text{ cm}$ ，周期为  $4 \text{ s}$ 。  $t = 0$  时，物体位于  $x = 4 \text{ cm}$  处并向  $x$  轴正方向运动，求：

(1)  $t = 1.0 \text{ s}$  时，物体的位置坐标、速度和所受的力； (2) 若取物体在平衡位置并向  $x$  轴负方向运动的时刻开始计时，试求初相和由起始位置到  $x = -8 \text{ cm}$  处所需的最短时间。



解：振动方程为： $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$

由已知条件： $A = 0.08 \text{ m}$ ， $\omega = 2\pi/T = \pi/2$ ，

$t = 0$ 时， $x = 0.04 \text{ m}$ ，代入得：

$$0.04 = 0.08 \cos \varphi_0$$

所以  $\varphi_0 = \pi/3$  或  $\varphi_0 = 5\pi/3$

由于是向x轴正方向运动， $v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$

$$\varphi_0 = 5\pi/3$$

振动方程为：
$$x = 0.08 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{5\pi}{3}\right)$$

$$x = 0.08 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{5\pi}{3}\right)$$

$$v = -0.04\pi \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{5\pi}{3}\right)$$

$$a = -0.02\pi^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{5\pi}{3}\right)$$

$$t=1 \text{ s时}, x = 0.08 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{3}\right) \approx 0.07 \text{ m}$$

$$v = -0.04\pi \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{3}\right) \approx 0.06 \text{ (m / s)}$$

$$F=ma = -0.02\pi^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{3}\right) \times 0.01 \approx -1.71 \times 10^{-3} \text{ (N)}$$

(2) 若取物体在平衡位置并向x 轴负方向运动的时刻开始计时, 试求初相和由起始位置到 $x = -8 \text{ cm}$ 处所需的最短时间.

$$x = 0.08 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \varphi_0\right)$$

$$v = -0.04\pi \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \varphi_0\right)$$

$$t=0 \text{ s时}, x=0$$

$$\varphi_0 = \pi/2 \quad \text{或} \quad \varphi_0 = 3\pi/2$$

$$v < 0$$

$$\varphi_0 = \pi/2$$

$$x = 0.08 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$-0.08 = 0.08 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) = -1, t = 1 \text{ s}$$

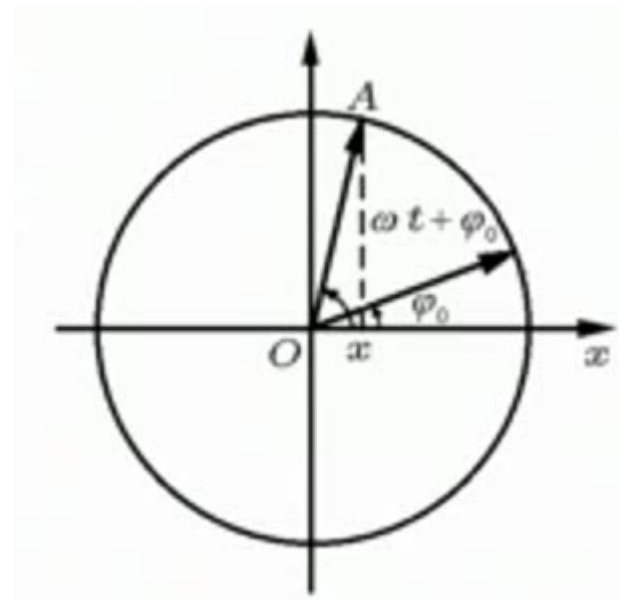
## § 4. 简谐振动的描述

### 振幅矢量法

- 简谐振动的表达式：

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

- 振幅矢量  $\vec{A}$  自  $t=0$  开始，以  $\omega$  为角速度，沿逆时针方向匀速转动，在  $t$  时刻，与  $x$  轴成的角为  $(\omega t + \varphi_0)$ 。



圆周运动的投影是振动

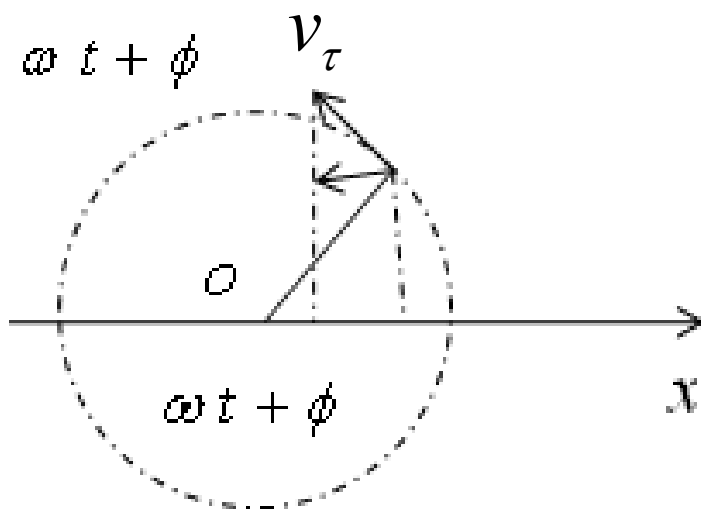
由此可见，其在  $x$  轴上的投影为：

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

正好是简谐振动的运动方程。

——简谐振动的**矢量表示法**或**几何表示法**。

- $\vec{A}$  的端点——参考点，参考点的运动轨迹为参考圆， $\vec{A}$  叫振幅矢量，参考点在  $x$  轴上的投影位置即为质点位置，投影点的运动即为简谐振动。



$$v_\tau = A\omega$$

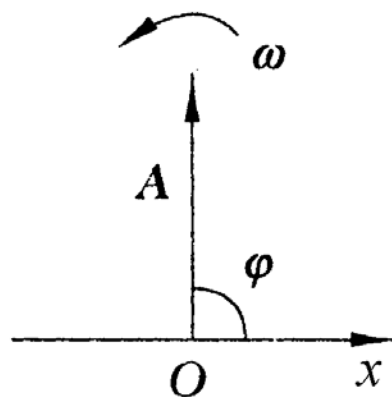
$$v = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$a_n = A\omega^2$$

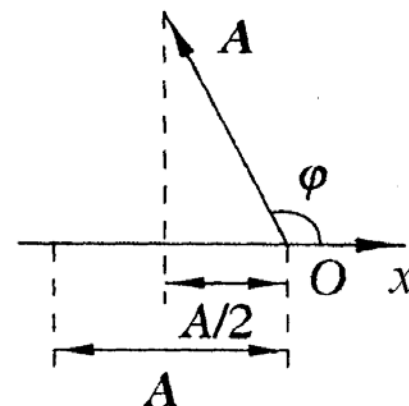
$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

- 简谐振动矢量表示在讨论振动合成时非常有用。

**例** 设一音叉的振动为谐振动，其角频率 $\omega = 6.28 \times 10^2 \text{ rad/s}$ ，音叉尖端的振幅 $A$ 为 $1.0 \text{ mm}$ 。试用旋转矢量法求以下两种情况的初相，并写出运动学方程。（1）当 $t = 0$ 时，音叉尖端通过平衡位置并向 $x$ 轴负方向运动；（2）当 $t = 0$ 时，音叉尖端在 $x$ 轴的负方向一边，离开平衡位置距离为振幅之半，且向 $x$ 轴负方向运动。



(a)



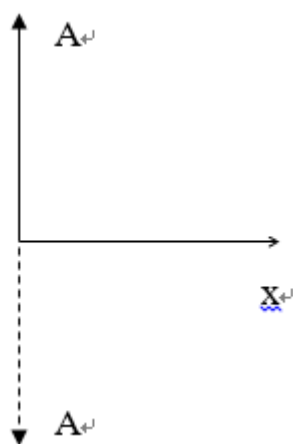
(b)

已知：角频率  $\omega$  和振幅  $A$ ，用旋转矢量法求以下情况的初相位和运动学方程：

$t=0$  时，由平衡位置向  $x$  负方向运动。

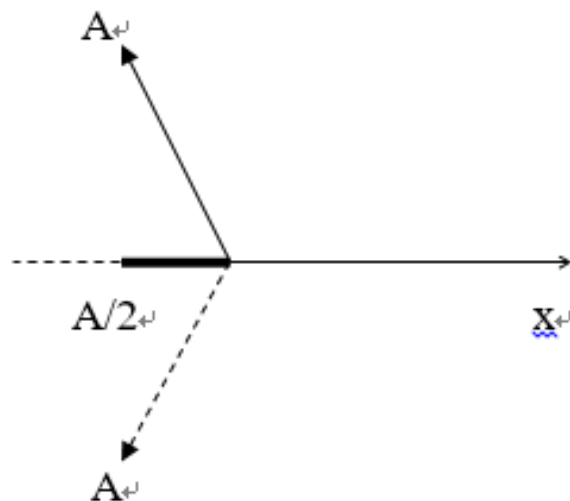
$t=0$  时，在  $x$  负方向一侧，离开平衡位置为振幅的一半，且向  $x$  轴负方向运动。

解：（1）



$$x = A \cos (\omega t + 1/2\pi) = 0.001 \cos (6.28 \times 10^2 t + 1/2\pi)$$

(2)



$$x = A \cos (\omega t + 2/3\pi) = 0.001 \cos (6.28 \times 10^2 t + 2/3\pi)$$

## § 1. 机械波

- 如果在空间某处发生的扰动，以一定的速度由近及远向四处传播，则称这种传播着的扰动为**波**。
- 不同性质的扰动的传播机制虽不相同，但由此形成的波却具有共同的规律性，波是能量传播的形式之一。
- 机械振动在弹性介质内的传播形成**机械波**（又称**弹性波**）。
- 由电磁扰动在真空或介质内的传播形成**电磁波**。
- 此外，近代物理指出，微观粒子以至任何物体都具有波形，这种波叫**物质波**，尽管物质波与机械波或电磁波有本质的不同（例如它并不传播能量），但在传播、叠加等方面仍与上述两种波有着共同的性质。

□ 振动的传播过程叫做**波**。

□ 机械振动在弹性介质中的传播——**机械波**。

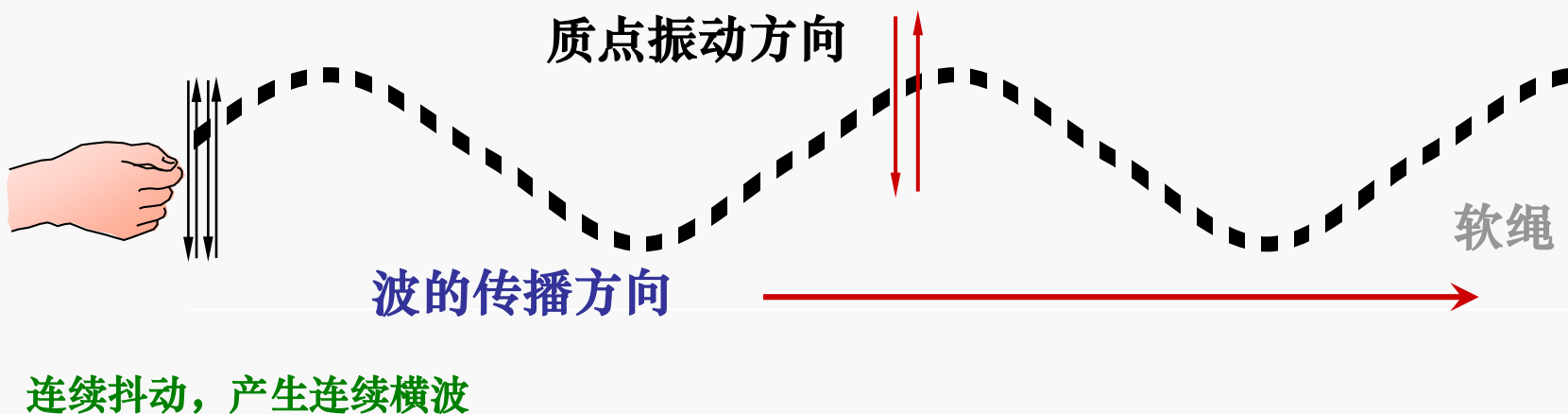
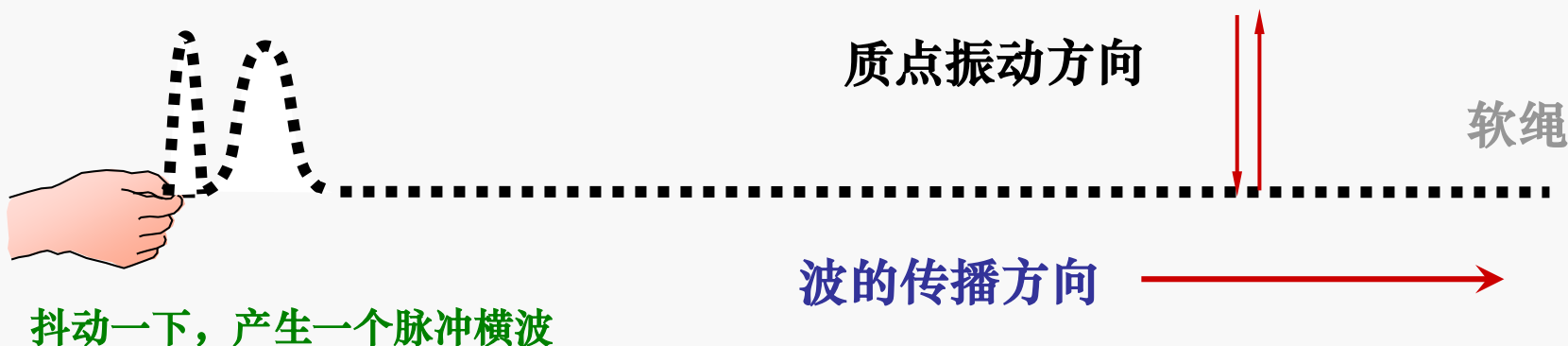
➤ **机械波的特点：**

1. 机械波是一种机械运动形式，必须具备两个条件：振源和弹性介质；
2. 波是指介质整体所表现的运动状态；
3. 波的传播是质点**振动状态**的传播过程，亦即振动位相的传播过程，而所有的质点都仍在各自的平衡位置附近振动。

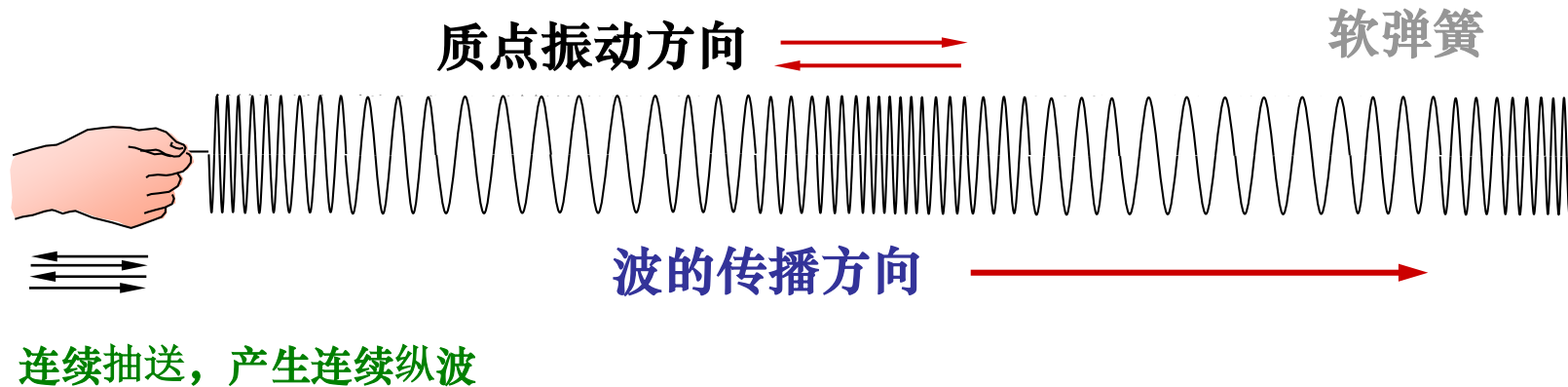
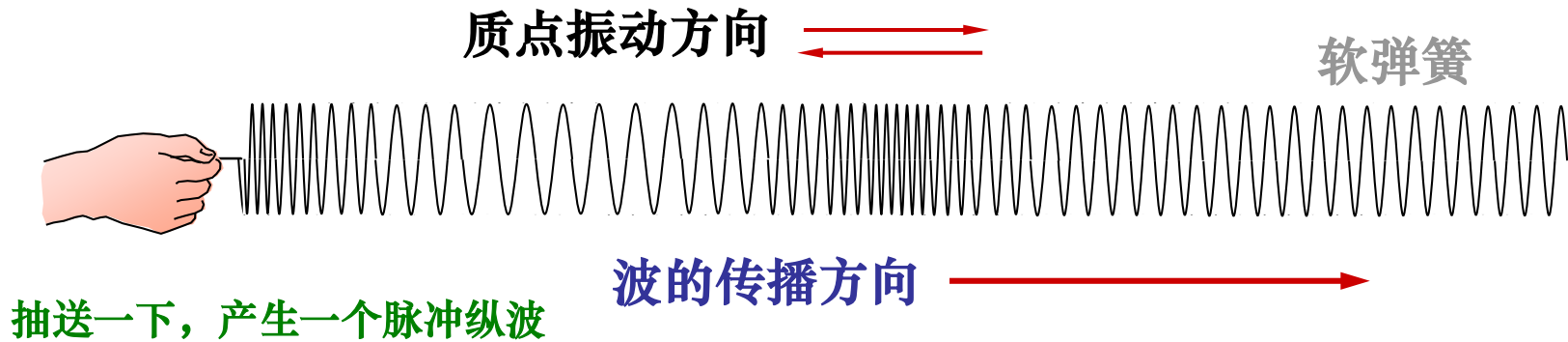
## 弹性介质和振源

- 由无穷多的质点，通过相互之间的弹性作用组合在一起的连续介质——**弹性介质**。
- 在弹性介质中，可以设想各质点（质元）有一个平衡位置，它一离开平衡位置，即受到各附近质点的指向平衡位置的合力。质元间的相互作用（如弹性）使波得以传播，质元的惯性使波以有限的速度传播。
- 引起波动的初始振动物体——**波源/振源**。
- 足够小，可看做质点的波源叫**点波源**。
- **产生机械波的条件**：振源、弹性介质。
- 波：振动向前传播，传播的只是**振动状态**，而不是质点。
- 振动：质点只在**平衡位置**附近振动，不会随波作超过自身振动范围的运动。

## § 2. 波的分类



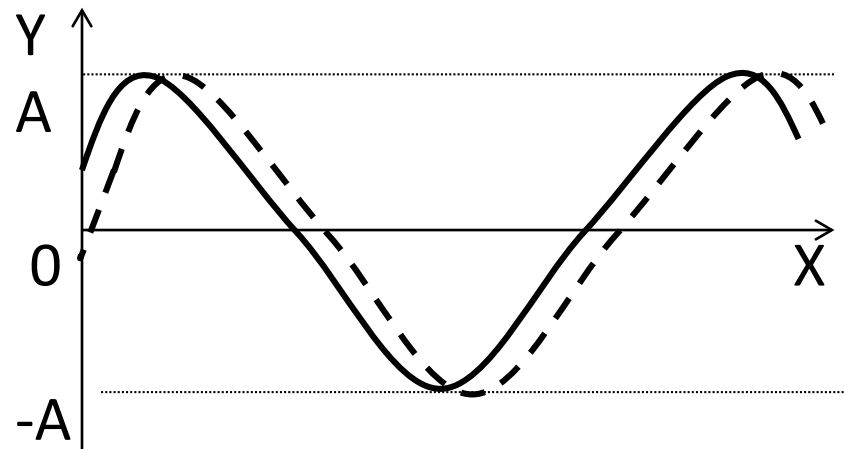
如果波源振动方向与波的传播方向垂直，就会形成周期性峰、谷的传播。这样的波，称为**横波**。



如果波源振动方向与波的传播方向平行，就会形成周期性疏、密的传播。这样的波，称为**纵波**。

# 一、按传播方式

• **波形曲线**：以质点的位置为横坐标，以质点的位移为纵坐标所画的曲线称为波形曲线。



**对于横波**：曲线正好与介质中的波形一致。可直接看出**波峰**和**波谷**。

**对于纵波**：质点的运动方向与波的传播方向一致，曲线上点的Y坐标只代表质点的位移。可推断**疏部**和**密部**的位置。

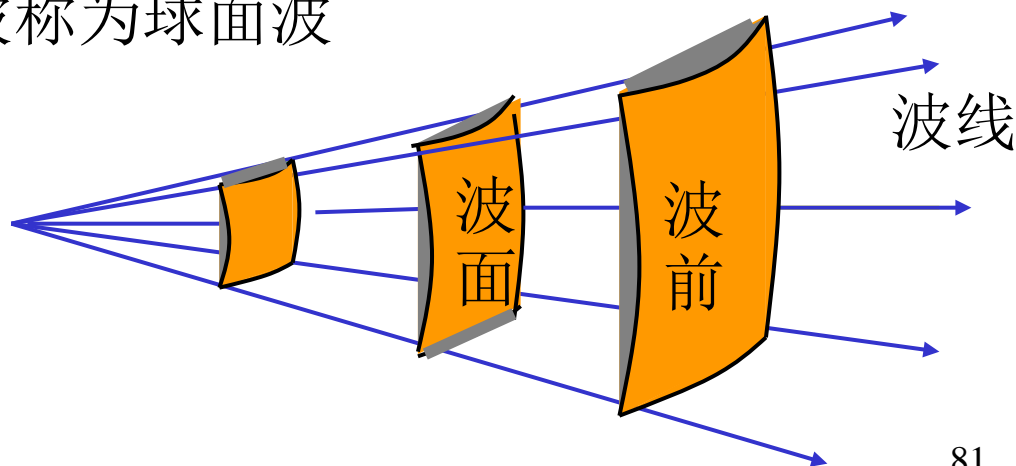
## 二、按空间形状

如果波在各向同性的均匀无限介质中传播，那么，从一个点波源发出的扰动，经过一定时间后，扰动将到达一个球面上，如果扰动是周期性的，介质中各处也相继发生同频率的周期性扰动。

**波阵面：**介质中振动位相相同的点的轨迹称为波阵面，简称波面。

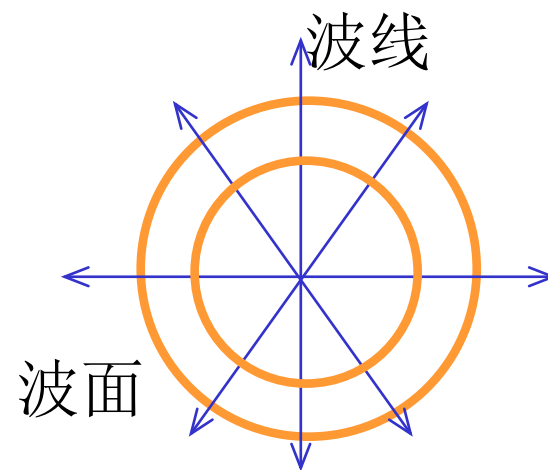
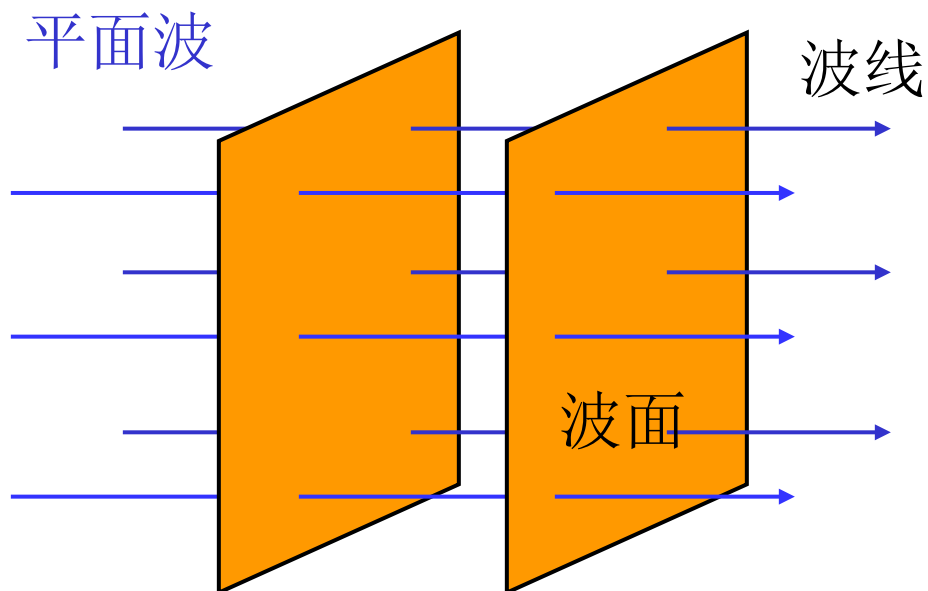
**波前：**最前面的波阵面称为波前。

**球面波：**波阵面是球面的波称为球面波



**平面波：** 在离波源足够远处，在观察的不大范围内，球面可看成平面，这种波就称为平面波

**波线：** 自波源出发且沿着波的传播方向所画的线叫波线，在各向同性介质中，波线和波面互相垂直。



### 三、按波源振动方式

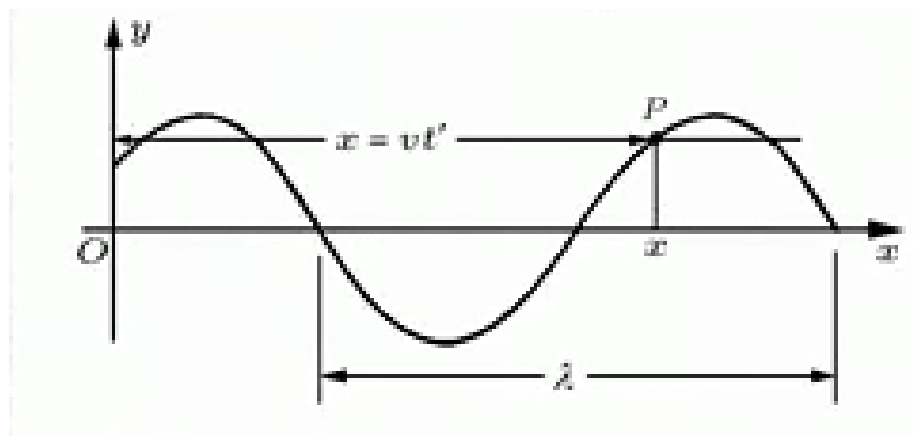
波源作周期振动形成的波称为**周期波**。

波源作间歇振动形成的波称为**脉冲波**。

波源作简谐振动形成的波称为**简谐波**。

## § 3. 平面简谐波

如果波源作简谐振动，介质中各质点也将相继作同频率的简谐振动，这样形成的波叫**简谐波**。如果波面为平面，则这样的波称为**平面简谐波**。由于平面简谐波的波面上每一点的振动和传播规律完全一样，故平面简谐波可以用一维的方式来处理。



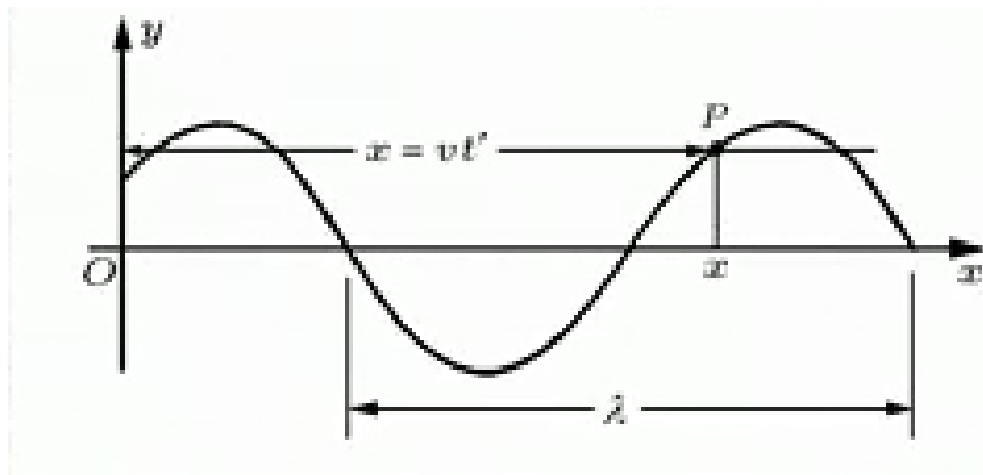
如图所示，设一简谐波沿正x方向传播，已知在t时刻坐标原点O处振动位移的表示为：

$$y_0 = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

于是P点的位移为：

$$y = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$

波的运动方程



u称为波的位相速度，也称为波速，它表示单位时间某一振动相位所传播的距离。

由于波是向右传播的，又称为右行波。

令：  $\lambda = uT$

**T**: 波源作一次完全振动的时间。周期表征了波的时间周期性。

**$\lambda$** : 相邻同相位两点间的距离为简谐波的波长。波源作一次完全振动，波前进的距离，反映了波的空间周期性

$$y = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \right] \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad u = \frac{\lambda}{T}$$

$$y = A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

时间的周期性

空间的周期性

令  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

称为**波数**，它表示在 $2\pi$ 米内所包含的波长数

$$y = A \cos(\omega t - kx)$$

## 平面简谐波

$$y = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$$

$\omega$ ,  $T$  是和时间有关的量

$$y = A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right]$$

$\kappa$ ,  $\lambda$  是和空间有关的量

$$y = A \cos (\omega t - kx + \varphi_0)$$

其对应关系为:

时间  $t$ :            角频率  $\omega$

周期  $T$

空间  $x$ :            波数  $k$

波长  $\lambda$

而它们由波速相互联系:

$$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

$$y = A \cos(\omega t - kx)$$

从以上表达式看出， $x$ 处的相位比0处的相位落后 $kx$ ，这说明波是由0处传到 $x$ 处的，即沿 $x$ 轴方向传播。

如果 $x$ 处的相位比0处的相位超前 $kx$ ，则波是由 $x$ 处传到0处的，即沿 $-x$ 轴方向传播，可表示为：

$$y = A \cos(\omega t + kx)$$

$$y = A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

其中 $T$ 由波源决定， $u$ 由介质决定。

## 二. 库仑定律

库仑 (Charlse-Augustin de Coulomb 1736 ~1806)

### 法国物理学家



1773年提出的计算物体上应力和应变分布情况的方法，是结构工程的理论基础。

1779年对摩擦力进行分析，提出有关润滑剂的科学理论。

1785~1789年，用扭秤测量静电力和磁力，导出著名的库仑定律。

他还通过对滚动和滑动摩擦的实验研究，得出摩擦定律。

## 5. 规律

库仑定律的表述：

在真空中，两个静止点电荷之间的相互作用力，大小与它们的电量的乘积成正比，与它们之间距离的平方成反比；作用力的方向沿着两点电荷间的连线，同号电荷相斥，异号电荷相吸。

$$f_{\text{电}} = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$\vec{f}_{\text{电}} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

由上式可知：静止点电荷的相互作用力满足牛顿第三定律：

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$$

K为比例系数，它的取值与采用的单位制有关。

在国际单位制中，力为牛顿，电量单位为库仑，长度单位为米。K由实验确定：

$$k = 9 \times 10^9 \text{ m}^2 \text{ N} / \text{C}^2$$

在厘米克秒制（高斯单位制）中， $k=1$ ，因为电量的单位**绝对静电单位制电量**（CGSE）就是根据库仑定律定义的。

$$1\text{C} = 3.0 \times 10^9 \text{ CGSE}$$

为了使电学中其它许多常用公式能够简化，尽量少出现无理 $\pi$ ，因而把库仑定律的 $k$ 写作：

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

这时相应的 $\epsilon_0$ 值为：

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{m^2 N}$$

叫做真空中的介电常数。

从库仑定律中，我们可以发现电力的很多特征：

- ① 与距离 $r$ 的平方成反比（实验结果）
- ② 与电量成正比（电量的定义）
- ③ 两点电荷间的作用力是沿连线的，或点电荷的场强沿径向（空间对称性的要求）
- ④ 电力具有球对称性（空间对称性的要求）

## § 3. 静电场的高斯定理和环路定理

静电力的特点：非接触

非接触物体间作用力的作用机制？

分歧：超距作用，近距作用

电作用模式： 电荷  $\longleftrightarrow$  电场  $\longleftrightarrow$  电荷

电磁场：一种特殊形式的物质，需要研究这个场！

法拉第：对于力线的研究，比对于产生力线的源的研究更为重要！

真空中，闭合曲面的电场矢量通量等于该曲面内所包围的电荷的代数和与真空介电常数  $\epsilon_0$  之比，这就是静电场高斯定理。

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{S \text{ 内}} q_i$$

通过任意闭合曲面的电通量

Gauss 面上的场强，是所有电荷产生的场

Gauss 面

面内电量的代数和，与面外电荷无关

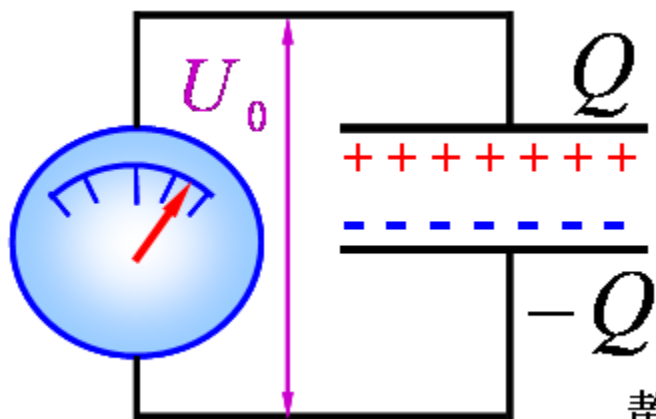
## § 7 静电场中的电介质

### 电介质 (Dielectric)

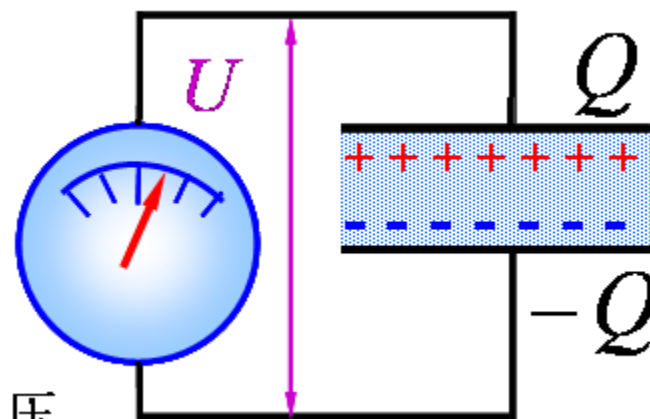
- 是由大量电中性的分子组成的电的绝缘体
- 分子中电子被原子核束缚得很紧
- 内部没有自由电荷，不能导电
- 紧束缚的正、负电荷在外场中是否发生变化？

电场  电介质  
相互作用？

# 1. 法拉第实验：电介质对电场的影响



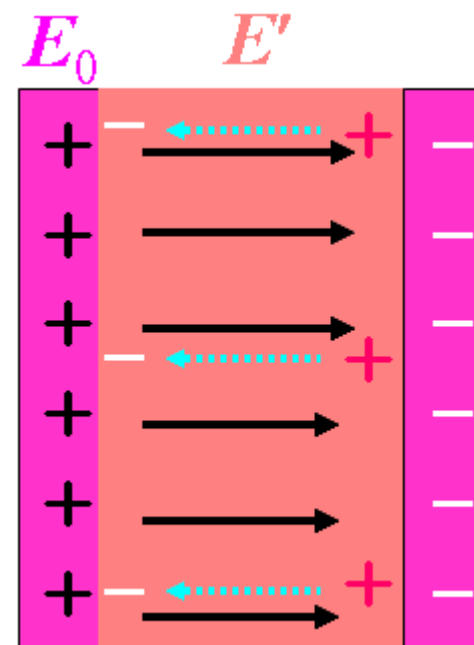
静电计测电压



- 充电的电容器两板连接到静电计，静电计指针显示两板间的电势差；
- 保持一切条件不变，插入电介质，静电计指示两极板间电势差减小。
- 分析：  $U_0 > U \rightarrow E_0 > E$ ，而  $E = E_0 + E'$   $\rightarrow$  附加场  $E'$  与外场  $E_0$  反方向。 $E'$  为介质与外电场相互作用所产生！

## 2. 介质极化

$E'$  与外场  $E_0$  反方向，说明电介质的表面出现了与极板电荷异号的电荷，这种电荷只能在分子范围内移动，与电介质是不可分离的，称为**极化电荷**或**束缚电荷**。



电介质在外电场作用下，其表面甚至内部出现极化电荷的现象，叫做**电介质的极化**。

电介质中的总电场为两个电场之和：

$$E = E_0 + E' \neq 0$$

### 3. 介质微观结构

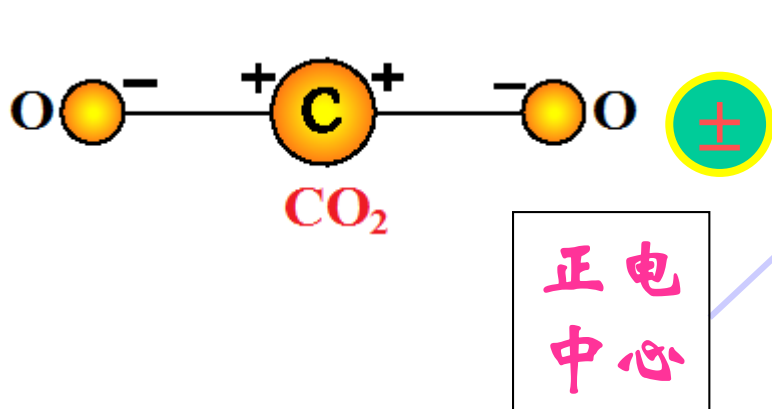
- 中心模型:

- 在分子中, 所有正点荷和所有负点荷分别集中于两点上, 称为正、负电荷的中心。
- 电荷分布是对时间的积累, 其中心则是在此基础上对空间的平均。

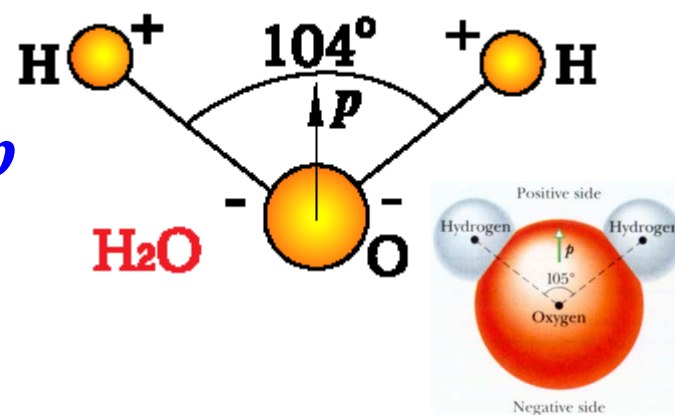
- 介质分类

- 无极分子: 无外场时分子电荷的正负中心重合, 无固有电偶极矩。如:  $\text{He}$ ,  $\text{Ne}$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{CO}_2$ ,  $\text{CH}_4$
- 有极分子: 无外场时分子电荷的正负中心分开, 有固有电偶极矩, 如: 水,  $\text{HCl}$ ,  $\text{NH}_3$ ,  $\text{CH}_3\text{OH}$

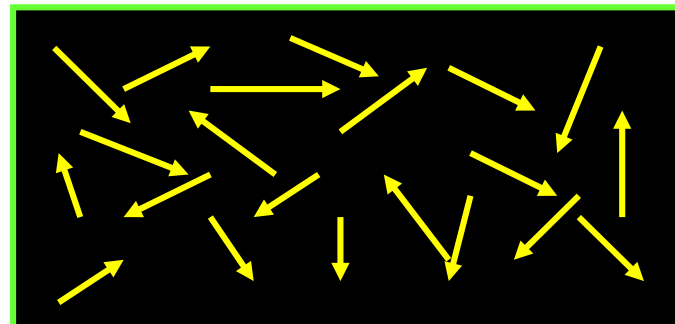
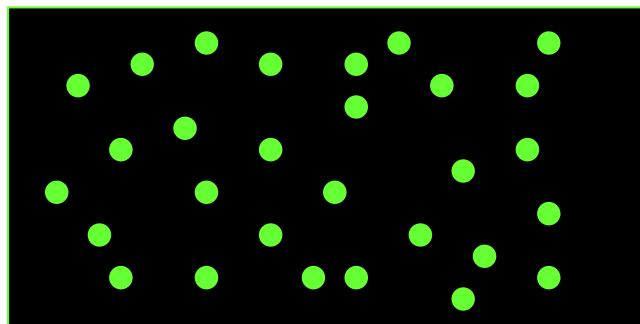
## 无极分子



## 有极分子



无外场时(热运动)

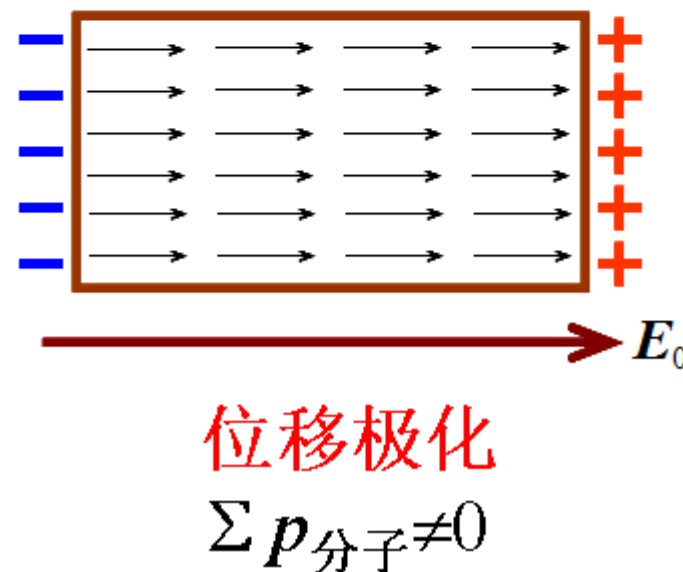
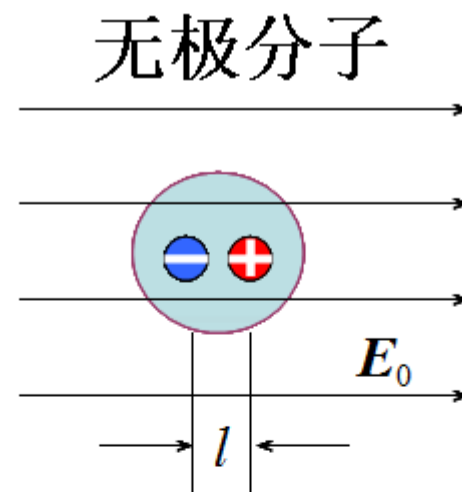


无序排列整体对外不呈现电性!

## 4. 极化的微观机制

### (1) 无极分子的极化

- 无外电场时，无极分子的正、负电荷重心重合， $p_{\text{分子}}=0$ ，  
 $\rightarrow \Sigma p_{\text{分子}}=0$ ，
- 外电场使得正、负电荷中心发生位移，不再重合，形成电偶极子，表面出现束缚电荷。
- 极化是电荷中心相对位移的结果，故称为位移极化。

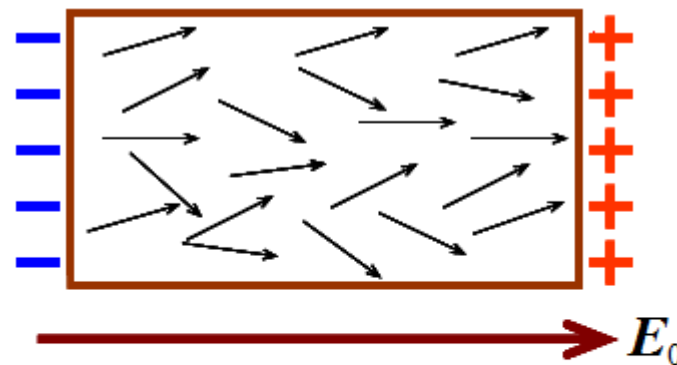
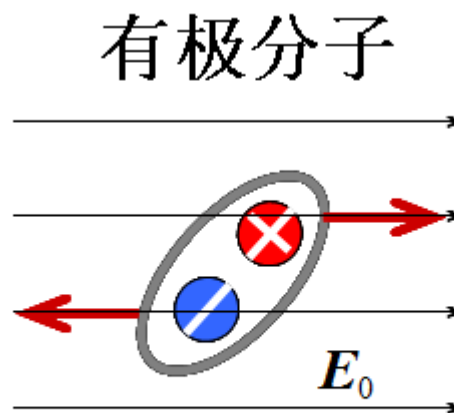


## (2) 有极分子的极化

- 无外电场时，有极分子就相当于一个电偶极子，只是由于热运动而排列无序。

$$p_{\text{分子}} \neq 0, \quad \Sigma p_{\text{分子}} = 0,$$

- 外电场使得分子电偶极矩受力矩作用而转向外场方向，表面出现束缚电荷。
- 极化是分子电偶极矩转向的结果，故称为取向极化。



取向极化

$$\Sigma p_{\text{分子}} \neq 0$$

### \*\*\*几点说明:

- 在外电场中均匀介质内**电中性**，**表面**出现**极化电荷**
- 极化电荷不能在电介质内部自由移动，更不能转移到其它带电体（对比：导体中的**自由电荷**）。
- 介质极化过程中无电荷宏观移动，只有微观**束缚电荷**的变化；（对比：静电感应有电荷的宏观移动，出现感应电荷）
- 无外场时分子的电偶极矩称**固有电偶极矩**；外电场引起的电偶极矩称**感应电偶极矩**（远小于前者）。
- 无极分子只有位移极化，感生电矩的方向沿外场方向；有极分子有两种极化，取向极化>>位移极化。
- 极化电荷的电场使介质中实际电场**减弱**，电中性**有电场**。

## 电介质与导体的区别

	电介质	导体
导电性	不导电	导电
在静电场中	电子和原子核在电场作用下在原子范围内作微观的相对位移	自由电子在电场作用下脱离所属原子作宏观移动
静电平衡时	内部场强 $E \neq 0$	内部场强 $E = 0$

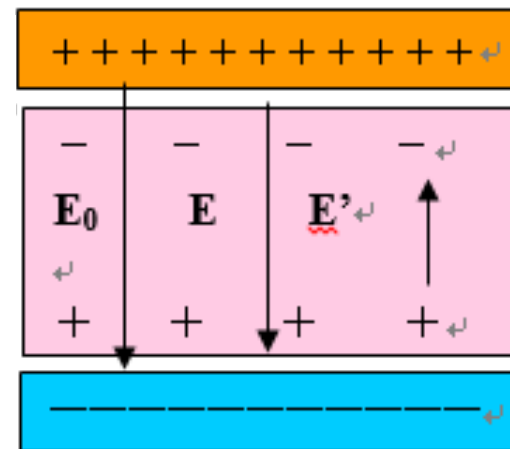
## § 8 电介质中的高斯定理、环路定理

### 一、电介质中的电场强度

电介质被极化后，产生极化电荷，  
这些极化电荷要产生电场——附加电场，用 $\vec{E}'$ 表示。

电解质内部任意一点的电场强度 $E$ 应等于极板上的自由电荷产生的电场强度 $E_0$ 与极化电荷产生的电场强度 $E'$ 的矢量和：

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$



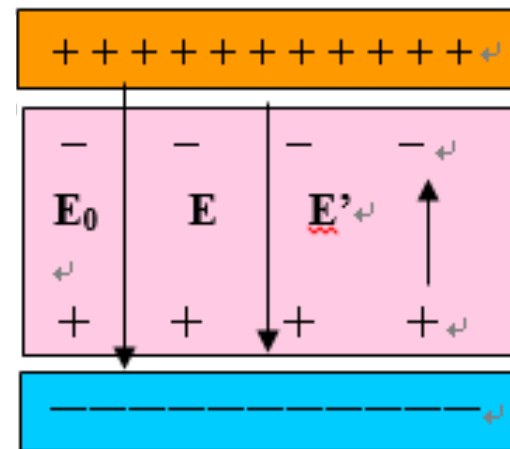
在电介质内附加电场 $\vec{E}'$ 总是与外电场 $\vec{E}_0$ 方向相反， $\vec{E}'$ 使外加电场减弱，阻碍电介质的极化，故把附加电场叫做**退极化场**。

自由电荷产生的电场强度：

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

极化电荷产生的电场强度：

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$



$E_0$ 与 $E'$ 的方向相反

$$\therefore E = E_0 - E' = \sigma_0 / \epsilon_0 - \sigma' / \epsilon_0$$

$E_0$ 可用真空中的平行板电容器测量出来，也可计算出来；

$E'$ 无法测量出来，也很难计算出来；

$E$ 可用介质中的平行板电容器测量出来：

将平行板电容器放入电介质（油）中，测量电势 $U$ 的变化，发现电势由 $U_0$ 减小为 $U$ ，为原来电势的 $1/\epsilon_r$ 倍：

$$U = \frac{U_0}{\epsilon_r}$$

$\epsilon_r$ 称为相对电容率或相对介电常数

相应的电场强度：

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

$$\sigma' = \sigma_0 - \frac{\sigma_0}{\varepsilon_r} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \sigma_0$$

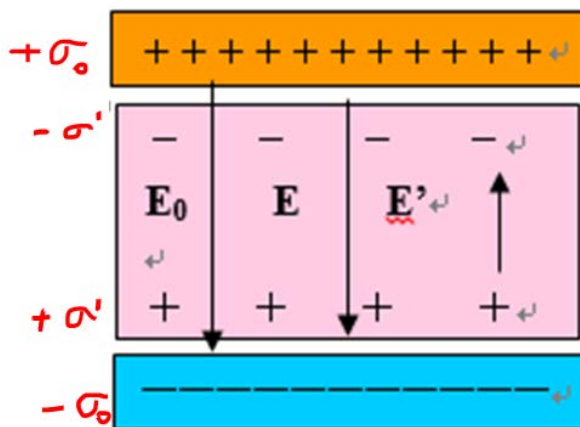
由此得出极化电荷密度是自由电荷密度的 $1 - 1/\varepsilon_r$ 倍。

$\varepsilon_r$ 由电介质材料决定的。

## 二、电介质中的高斯定理 电位移矢量D（重点）

存在电介质时，静电场的高斯定理仍然成立。

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q}{\epsilon_0}$$



只不过，这里的  $\vec{E}$  要把电介质的退极化电场考虑在内，而这里的高斯面内电荷 $q$ 除了包括自由电荷外，还应考虑电介质的极化电荷：

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{(\sum q_0 + \sum q')}{\epsilon_0} = \frac{(\sigma_0 - \sigma')\Delta S}{\epsilon_0}$$

其中：  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$

将  $\sigma' = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \sigma_0$  代入得

$$\frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_0 - \sigma') = \frac{1}{\varepsilon_0} \left[ \sigma_0 - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \sigma_0 \right] = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

高斯定理为：

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \Delta S$$

移项得：

$$\oiint_S \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sigma_0 \Delta S = q_0$$

定义电位移矢量  $\mathbf{D}$ ：

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

令  $\varepsilon_r \rightarrow$  相对介电常数, 则  $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$

令  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \rightarrow$  (绝对) 介电常数, 则  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

电介质中的高斯定理

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

通过高斯面的电位移通量等于高斯面包围的自由电荷的代数和, 与极化电荷无关。

### 三、电介质中的环路定理

在真空条件下，静电场的环路定理在有电介质存在的情况下仍然成立，即

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

也就是说，不论是真空还是存在电介质，静电场都是保守场，电场矢量的线积分与积分路径无关，或者说电场矢量沿闭合环路的线积分等于零。

有了上述一系列关系，在求总电场 $\vec{E}$ 时，就不必知道极化电荷 $q'$ 的分布。

直接利用高斯定理，由自由电荷分布求得电位移矢量分布。

因为  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ，所以求  $\vec{D}$  的方法类似于真空中高斯定理的应用。

进一步，可由  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  求得总电场 $\vec{E}$ 的分布。

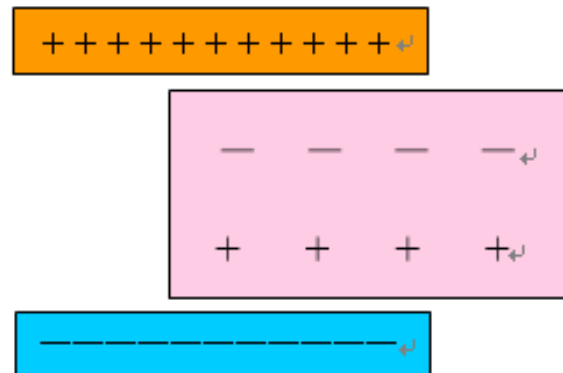
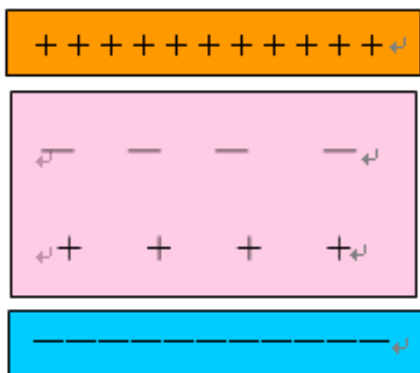
## 有电介质存在时电场的能量

### 例题

平行板电容器的极板面积为 $S$ ，极板间距 $d$ ，中间充满相对介电常数为 $\epsilon_r$ 电介质。当充电后，两极板间的电势差为 $\Delta u$ 。

求：（1）电容器中电场的能量；

（2）如果切断充电电源，把电介质从电容器中抽出来，外界要作多少功。



解：对于平行板介质电容器，其电容为：

$$C = \varepsilon_r C_0 = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d}$$

电势差  $\Delta u = Ed$ ，电场的能量为：

$$W = \frac{1}{2} C \Delta u^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 S d = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 V$$

电场的能量密度为：

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} \vec{D} \bullet \vec{E}$$

此式是**电场能量密度的普遍表达式**。

充电后，极板所带的电量为：

$$Q = C\Delta u = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d} \Delta u$$

切断电源，极板上的电量 $Q$ 不变，抽出电介质后，电容器的电容变为：

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

此时电容器中电场的能量为：

$$W' = \frac{Q^2}{2C_0} = \frac{\left( \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{d} \Delta u \right)^2}{2 \frac{\varepsilon_0 S}{d}} = \frac{\varepsilon_r^2 \varepsilon_0 S}{2d} \Delta u^2$$

抽出电介质前后，电容器中电场能量之差等于外界所作的功：

$$W' - W = \frac{\varepsilon_r^2 \varepsilon_0 S}{2d} \Delta u^2 - \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{2d} \Delta u^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 S \Delta u^2 \left( \frac{\varepsilon_r - 1}{d} \right)$$

介质抽走以后，电场增强了，能量增加了，增加的部分来自于抽出介质时外力所作的功。

## 四、电场能量

1、电容储能:  $W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U$

2、电场能量密度:  $w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$

各向同性介质:  $w = \frac{1}{2} D E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$

真空:  $w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$

### 3、电场能量计算

$$\iiint \omega dV = \frac{1}{2} \iiint \vec{D} \cdot \vec{E} dV = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{2} \iiint E^2 dV$$

## §2. 毕奥—萨伐尔定律

### 1、稳恒电流的磁场

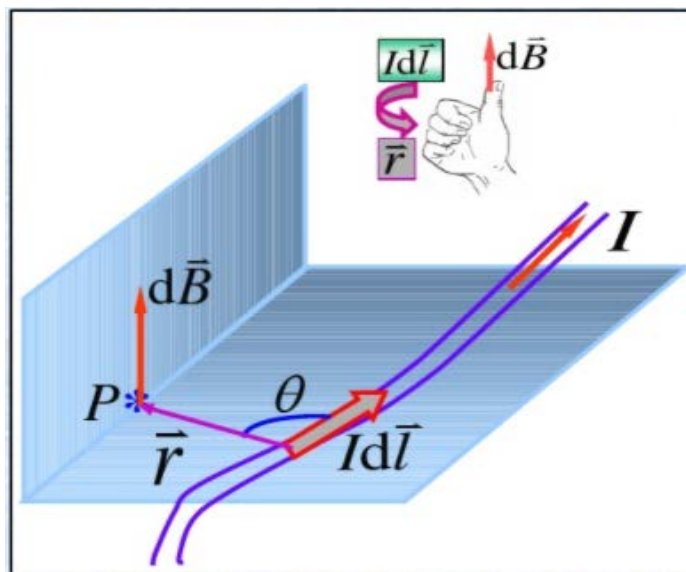
研究一段电流元产生磁感应强度的规律。

电流元：流过某线元矢量  $d\vec{l}$  的电流  $I$  与  $d\vec{l}$  的乘积  $I d\vec{l}$

由实验发现一段长为  $dl$  通有电流为  $I$  的电流元产生的磁感应强度：

$$** \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$dN$ 个电荷的宏观效应！



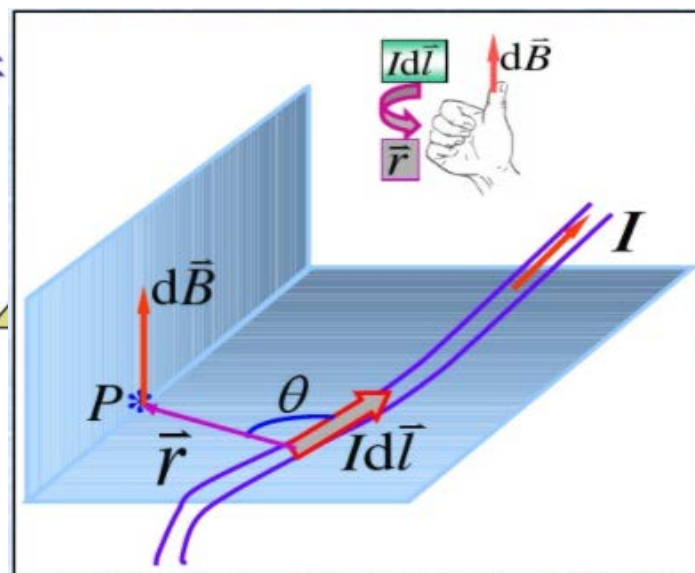
大小: 
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}$$

方向: 从  $d\vec{l}$  右旋到  $\vec{r}$ ,  
磁场方向为大拇指指向

$d\vec{B}$  的方向垂直于  $d\vec{l}$  和  $\vec{r}$  所形成的平面。

真空中的磁导率

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$$

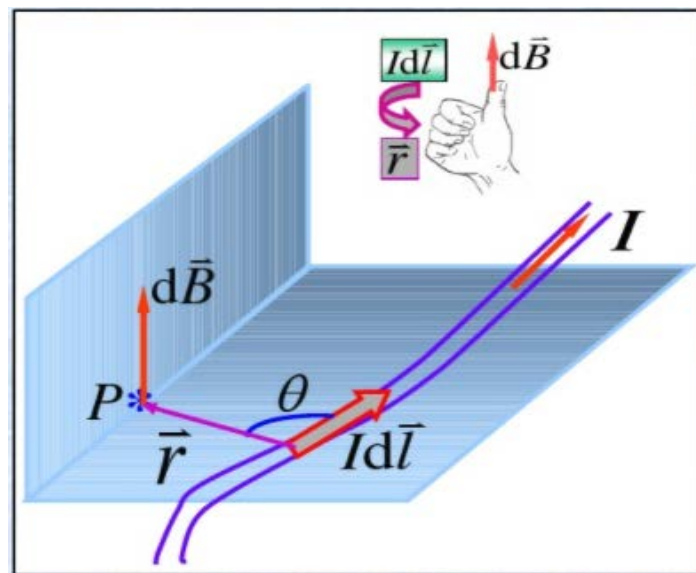


## 磁场叠加原理

若干个运动电荷或电流在空间某点产生的磁场，等于各运动电荷或电流单独存在时在该点产生的磁场的矢量和

可知一段载流导体的磁场

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \int_l \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$



## 2、运动电荷的磁场

电流  $\longleftrightarrow$  电荷定向运动

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{n \cdot s dl \cdot q}{dt} = qnvS$$

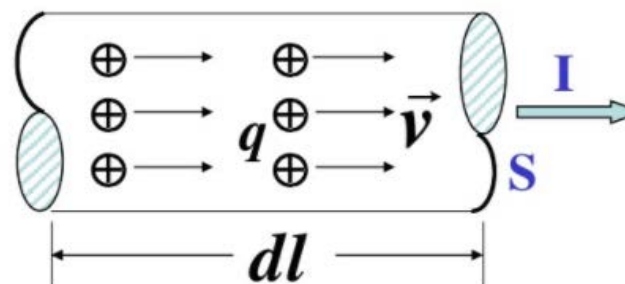
电荷    密度    速率    截面积

电流元  $I d\vec{l}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2}$$

单个运动电荷的磁感应强度：

$$\vec{B} = \frac{d\vec{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \sin(\vec{v}, \vec{r}_0)}{r^2}$$



载流子总数

$$dN = n dV = n S dl$$

也即：

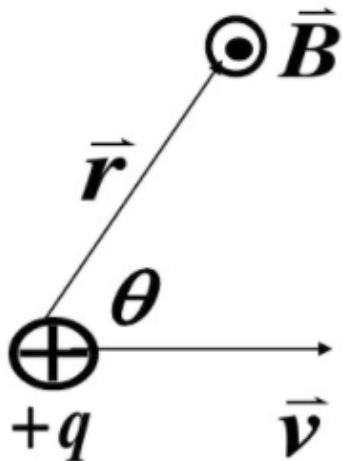
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

# 单个电荷的微观效应！

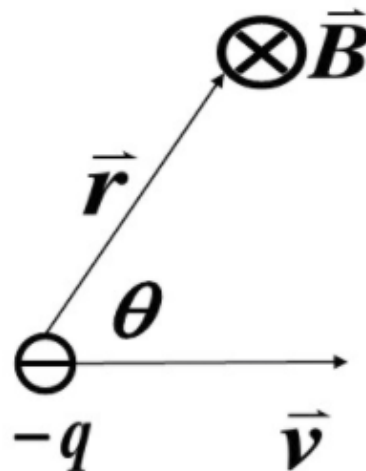
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin \alpha}{r^2}$$

若  $q > 0$ ,  $\vec{B}$  与  $\vec{v} \times \vec{r}$  同向



若  $q < 0$ ,  $\vec{B}$  与  $\vec{v} \times \vec{r}$  反向



## 应用毕萨定律解题的方法及应用

1. 分割电流元;

2. 建立坐标系;

3. 确定电流元的磁场;

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

4. 求  $B$  的分量  $B_x$ 、 $B_y$ ;

$$B_x = \int dB_x \quad B_y = \int dB_y$$

5. 由  $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$  求总场。

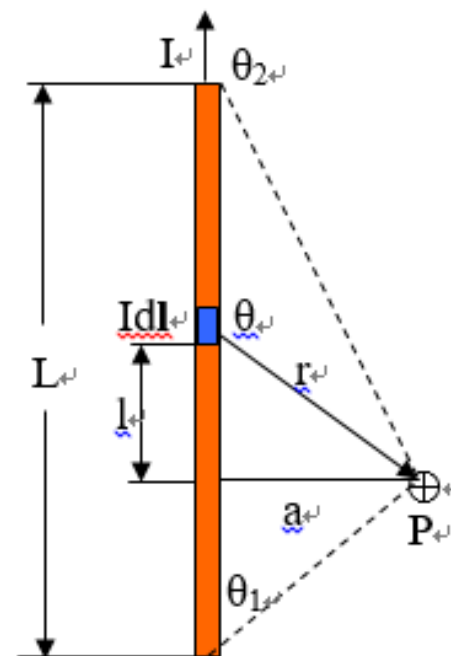
注意：应指出 **B** 的方向。

## 毕奥—萨伐尔定律

### 例题1

长为 $L$ 的直导线通有恒定电流 $I$ 。

求：距离直导线为 $a$ 处一点 $P$ 的磁感应强度 $B$ 。



## 毕奥—萨伐尔定律

### 例题1

长为 $L$ 的直导线通有恒定电流 $I$ 。

求：距离直导线为 $a$ 处一点 $P$ 的磁感应强度 $B$ 。

解：在直导线上取一电流元 $Idl$ ，

在 $P$ 点产生的磁感应强度 $dB$ 为：

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2}$$

方向：右手定则

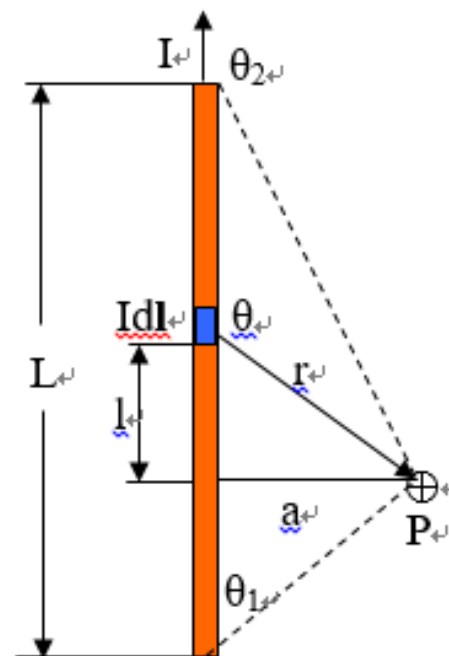
变量： $l$ ,  $r$ ,  $\theta$ , 三者之间的关系：

$$a = r \sin(\pi - \theta) = r \sin \theta$$

$$r = a / \sin \theta$$

$$l = r \cos(\pi - \theta) = -r \cos \theta$$

$$dl = a \csc^2 \theta d\theta$$



代入得：

$$\begin{aligned} B &= \int dB = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\frac{ad\theta}{\sin^2 \theta} \sin \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \end{aligned}$$

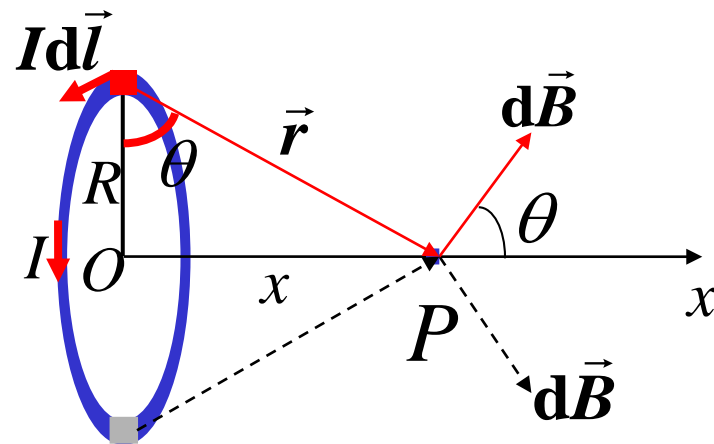
对于无限长直导线：  $\theta_1=0$ ，  $\theta_2=\pi$ 代入得：

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

## 例题2

半径为 $R$ 的线圈，通有电流 $I$ 。

求：通过圆心、垂直圆平面的轴线上，与圆心相距为 $x$ 处一点 $P$ 的磁感应强度 $B$ 。



## 例题2

半径为 $R$ 的线圈，通有电流 $I$ 。

求：通过圆心、垂直圆平面的轴线上，与圆心相距为 $x$ 处一点 $P$ 的磁感应强度 $B$ 。

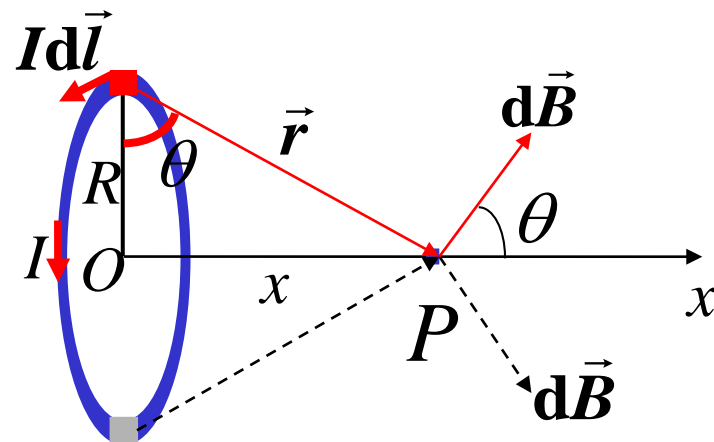
解：线圈上的电流元 $I dl$

总是和 $r$ 垂直，

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2}$$

$$B = \int dB \cos \theta = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{(R^2 + x^2)^{1/2}}$$



$$B = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{(R^2 + x^2)} \frac{R}{(R^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \int dl$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(R^2 + x^2)^{3/2}} 2\pi R = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

在圆环中心处,  $x=0$

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R}$$

在远处,  $x \gg R$

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{x^3} = \frac{\mu_0 I \pi R^2}{2\pi x^3} = \frac{\mu_0 IS}{2\pi x^3}$$

定义线圈的磁矩

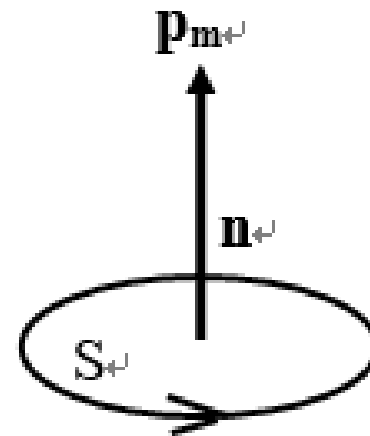
$$\vec{p}_m = IS\hat{n}$$

用磁矩表示远处磁感应强度：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi x^3}$$

用磁矩表示中心处磁感应强度：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi R^3}$$



## 二、高斯定理

▲ **高斯定理**：通过任意闭合曲面S的磁通量等于零，即

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

▲ **物理意义**：反映了磁场的“无源性”，孤立的磁荷不可能存在， 磁场线闭合（一般地说）。

### 三、安培环路定理

- 安培环路定理：稳恒磁场的磁感矢量 $\vec{B}$ 沿闭合环路的线积分，等于穿过环路的电流代数总和的 $\mu_0$ 倍，即

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

- 这里的 $\vec{B}$ 是总的 $\vec{B}$ 。
- 式中 $\mu_0$ 为真空的磁导率。
- $L$ 叫安培环路，要规定绕行方向。
- 电流有正负之分，需要求代数总和，电流正负规定：右手弯曲四指指向环路绕行方向，拇指所指方向为电流的正方向。

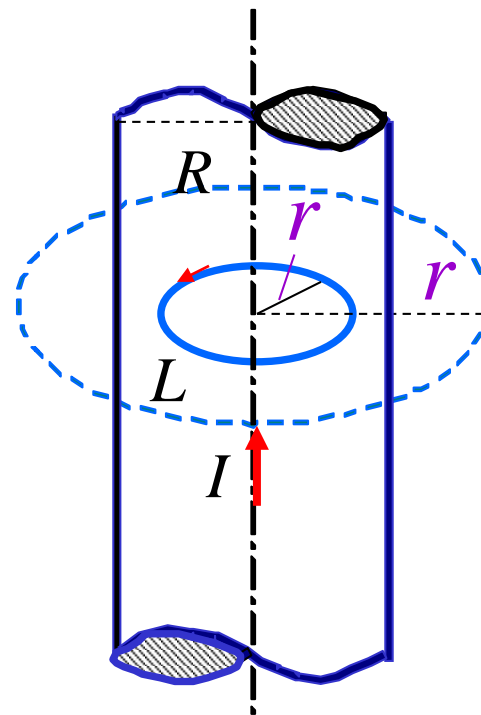
总结：

安培环路定理的应用类似静电场中的高斯定理的应用。其主要应用为：已知电流分布求磁感应强度矢量分布。前面介绍了一种方法，就是利用毕—萨定律求解。但当电流分布具有某种对称性时，利用安培定理求解，会使问题更为简单。

## 例题

无限长均匀载流圆柱导体的截面半径为 $R$ ，电流为 $I$ 沿轴线方向流动。

求：载流圆柱导体内、外的磁感应强度 $B$ 。

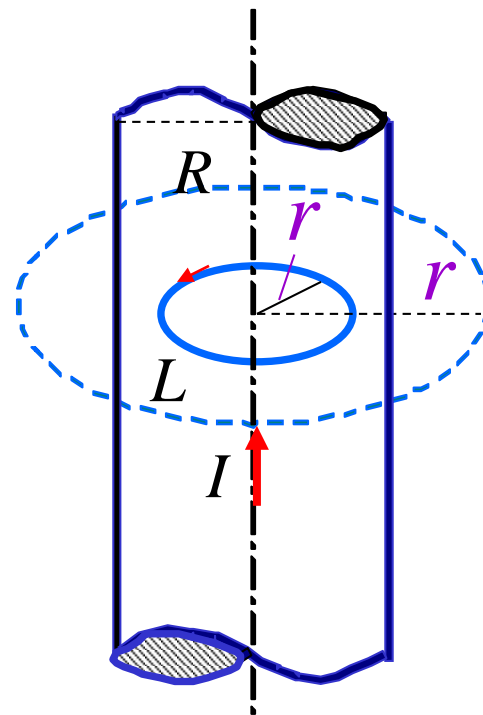


## 例题

无限长均匀载流圆柱导体的截面半径为 $R$ ，电流为 $I$ 沿轴线方向流动。

求：载流圆柱导体内、外的磁感应强度 $B$ 。

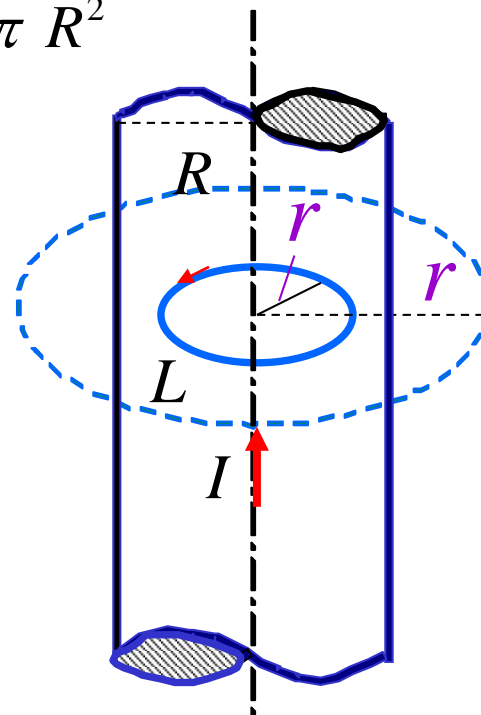
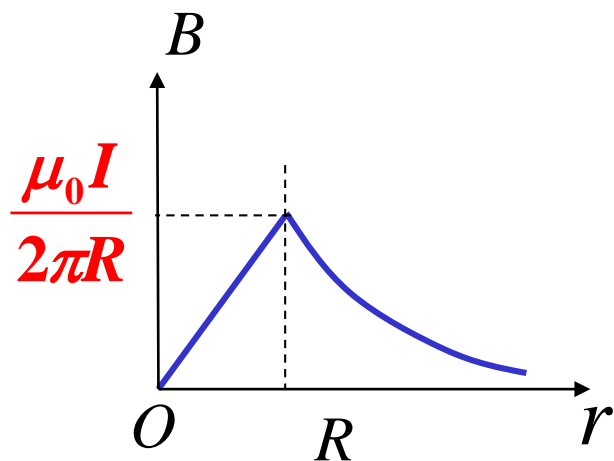
解：无限长导体的磁场以圆柱体轴线为对称轴，以 $r$ 为半径作一圆形安培环路 $L$ ，在 $L$ 上 $B$ 的大小处处相等。



$$\int_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \int_L dl = B 2\pi r = \mu_0 I'$$

当  $r < R$  时,  $I' = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = I \frac{r^2}{R^2}$   $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{rI}{R^2}$

当  $r > R$  时,  $I' = I$   $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$



无限长载流圆柱面的磁场分布：

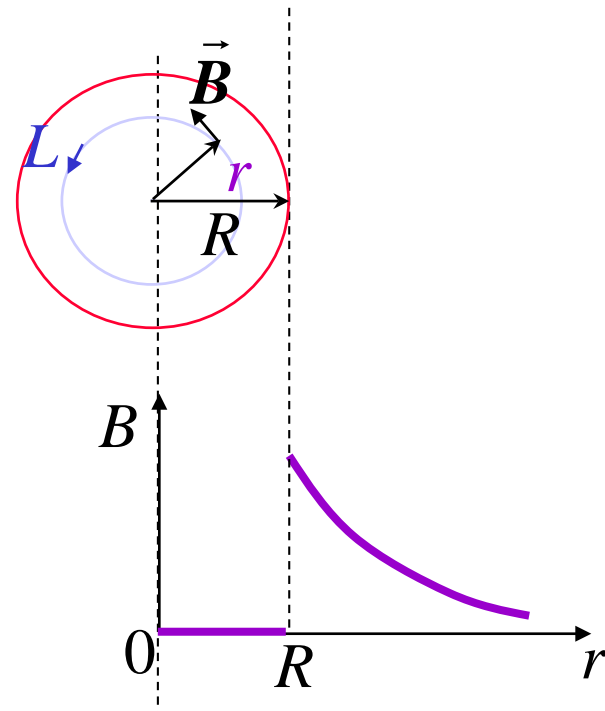
①圆柱面外 ( $r > R$ )

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B_{\text{外}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

②圆柱面内 ( $r < R$ )

$$B_{\text{内}} = 0$$

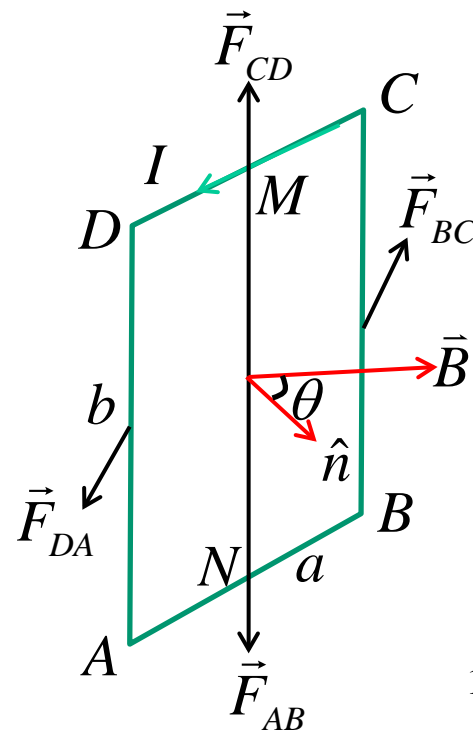


## 二、均匀磁场对平面载流线圈的作用

各种发动机、电动机以及各种电磁式仪表都涉及载流线圈在磁场中的运动。因此，研究平面载流线圈在磁场中受到的安培力有重要的实际意义。

$I$  为逆时针方向， $\vec{B}$  与  $\hat{n}$  成  $\theta$  角，

$\vec{F}_{AB}$  与  $\vec{F}_{CD}$  相等，方向相反，作用线相同，对线圈运动没有贡献。



$\vec{F}_{BC}$  与  $\vec{F}_{DA}$  大小相等，方向相反，作用线不同，对线圈不构成加速度，但构成了力矩。

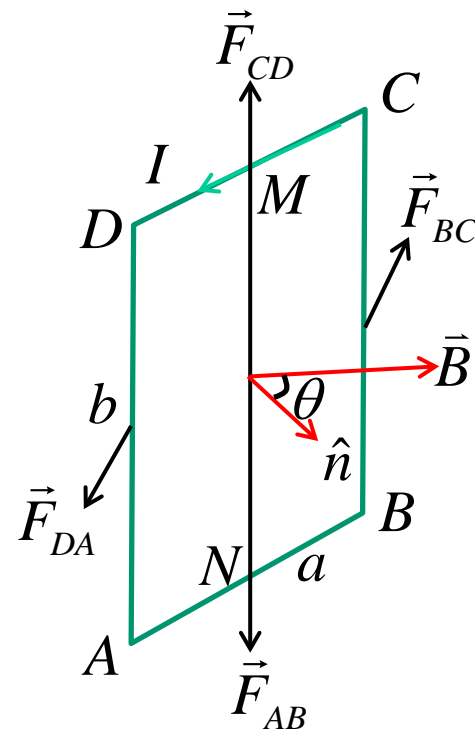
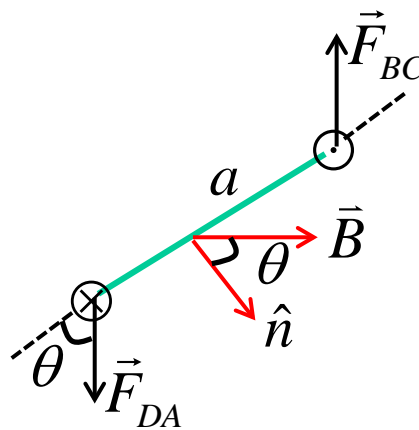
$$F_{BC} = I b B \quad \text{方向垂直向里}$$

$$F_{DA} = I b B \quad \text{方向垂直向外}$$

线圈所受力矩：

$$M = F_{BC} \cdot \frac{a}{2} \sin \theta$$

$$+ F_{DA} \cdot \frac{a}{2} \sin \theta = I a b B \sin \theta = I S B \sin \theta$$



其中 $S=L_{AD}L_{AB}$ 是线圈的面积， $\theta$ 是线圈的正法线方向 $\mathbf{n}$ （由电流方向用右手定则确定）与 $\mathbf{B}$ 间的夹角。

根据线圈磁矩的定义  $\bar{\mathbf{p}}_m = IS\hat{\mathbf{n}}$  可将线圈所受到的磁力矩写成矢量的形式： $\bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{p}}_m \times \bar{\mathbf{B}}$

如果有 $N$ 匝，则  $\bar{\mathbf{M}} = N\bar{\mathbf{p}}_m \times \bar{\mathbf{B}}$

上式说明均匀磁场对平面载流线圈的磁力矩 $\mathbf{M}$ 与线圈的电流 $I$ 、线圈的面积 $S$ 、磁感应强度 $\mathbf{B}$ 以及线圈平面与磁感应强度间的夹角有关。

当 $\varphi = \pi/2$ （线圈平面与 $\mathbf{B}$ 平行）时，磁力矩 $\mathbf{M}$ 达到最大值

$$M_{\max} = BIS$$

当 $\varphi = 0$ （线圈平面与 $\mathbf{B}$ 垂直）时，磁力矩 $\mathbf{M} = 0$

### 三、磁场力的功

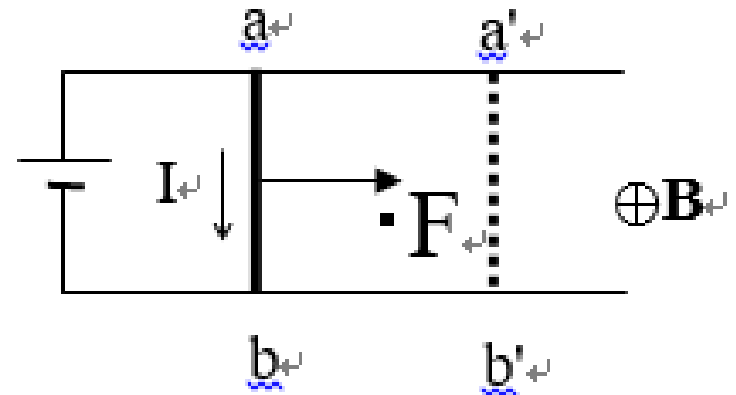
#### 1. 载流导线在磁场中平动时，磁场力的功

导线ab长为L，通有电流I，

可沿导轨无摩擦地滑动。

导线ab所受安培力为：

$$F = ILB$$



在安培力的作用下，导线由ab移到a'b'，这时安培力作的功为：

$$A = Faa' = ILBaa' = IB\Delta S = I\Delta\Phi$$

此式说明，磁场力的功等于电流乘以通过回路所包围面积内磁通量的增量。

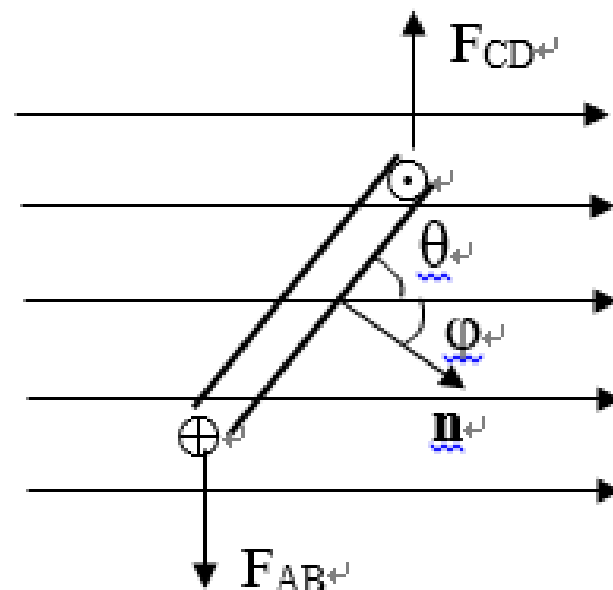
## 2. 载流线圈在磁场内转动时磁场力所作的功

线圈受到的磁力矩为：

$$M = BIS \sin \varphi$$

当线圈转过 $d\varphi$ 角时，磁力作的元功为：

$$\begin{aligned} dA &= -M d\varphi = -BIS \sin \varphi d\varphi \\ &= Id(BS \cos \varphi) = Id\Phi \end{aligned}$$



其中负号表示磁力矩作正功时， $\varphi$ 角减小， $d\varphi$ 为负值。

当线圈从 $\Phi_1$ 转 $\Phi_2$ 到时，由积分得到磁力矩作的功：

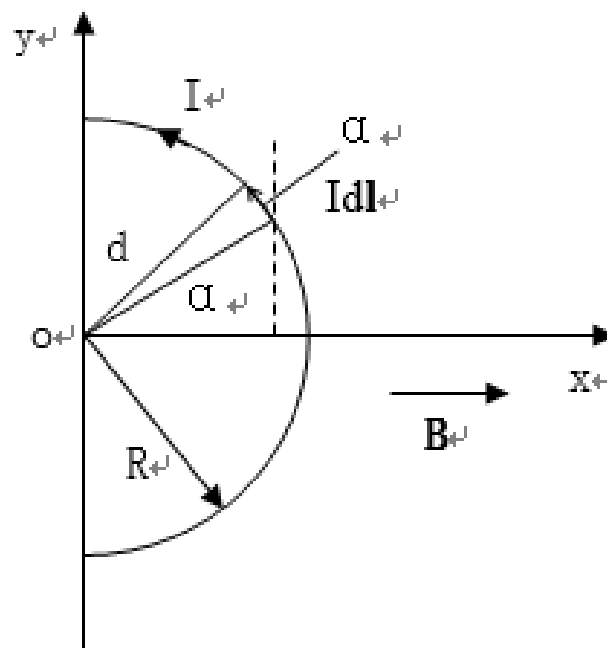
$$A = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} I d\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\Delta\Phi$$

可以证明，磁力做功的表达式： $A=I\Delta\Phi$ 是普遍的表达式。

# 例9.15(p.399)

在匀强磁场中，有一半径为 $R$ 的半圆形平面载流线圈，通有电流 $I$ ， $B$ 的方向与线圈平面平行。

- 求：（1）线圈所受安培力对 $y$ 轴之力矩 $M$ ；  
（2）线圈平面转过 $\pi/2$ 时，磁力矩 $M$ 所做的功。



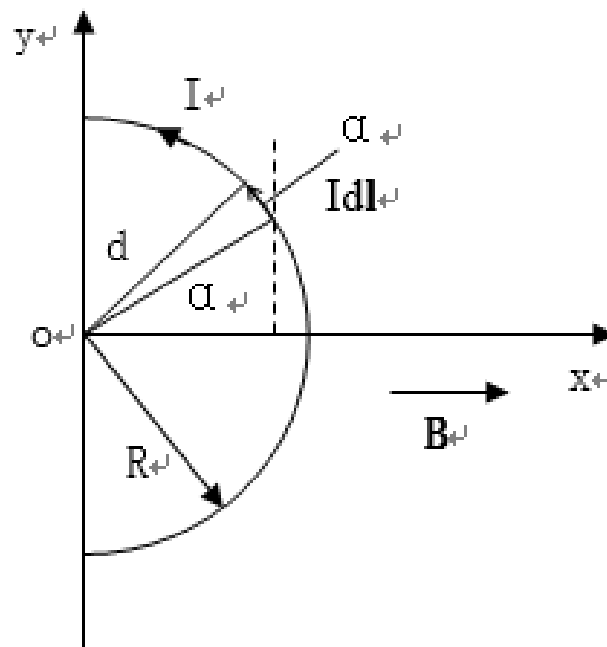
### 例9.15(p.399)

在匀强磁场中，有一半径为 $R$ 的半圆形平面载流线圈，通有电流 $I$ ， $B$ 的方向与线圈平面平行。

- 求：（1）线圈所受安培力对 $y$ 轴之力矩 $M$ ；  
（2）线圈平面转过 $\pi/2$ 时，磁力矩 $M$ 所做的功。

解：（1）在半圆线圈上取一电流元 $Idl$ ，它所受到的安培力的大小 $BIdl\sin(\pi/2 + \alpha)$ 方向指向纸面里，它对 $y$ 轴的力矩为：

$$dM = x dF = x B Idl \sin(\pi/2 + \alpha)$$



将 $x=R\cos\alpha$ ,  $dl=Rd\alpha$ , 代入得

$$dM=BI R^2 \cos^2 \alpha d\alpha$$

从 $-\pi/2$ 到 $\pi/2$ 积分得

$$M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} BIR^2 \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{\pi}{2} IR^2 B$$

(2) 线圈转过 $\pi/2$ , 磁通量变化为 $\Delta\Phi=1/2\pi R^2 B$

磁力矩作的功为:

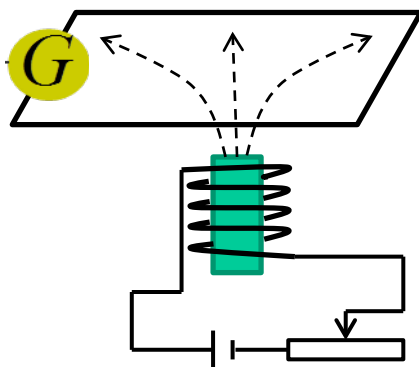
$$A=I\Delta\Phi=1/2\pi IR^2 B$$

## 二、Faraday电磁感应定律

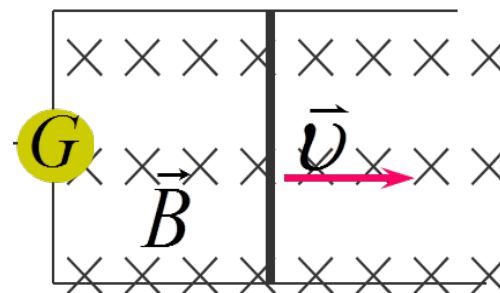
### 1. 电磁感应现象

两种类型：

第一类



第二类



两类的共同特点是：以闭合回路为边界的曲面的磁通量随时间发生变化，就会在闭合回路中产生电流——电磁感应现象。产生的电流——感应电流。有电流必然就有电动势——感应电动势。

实验发现，当保持其他条件不变，只改变闭合回路的电阻时发现： $R$ 增大，则 $I$ 减小； $R$ 减小，则 $I$ 增大；但感应电动势不变。

$$IR = \varepsilon$$

因此，与感应电流相比，感应电动势更能充分描述电磁感应的规律。事实上，即使不形成回路，甚至不存在导体，当然也不会有感应电流，在空间也可以产生感应电动势。

## 2. 电动势

只有静电场不能维持稳恒电流。（如电容器放电就是在静电场的作用下，电流由大到小到0的衰变过程，不能维持稳恒的电流。）

要维持稳恒的电流，必须有**非静电力做功**，将其它形式的能量补充给电路，即电源。

在电源内部，非静电力使电荷从负极搬回到正极板。

**电动势的定义：**把单位正电荷从负极通过电源内部移到正极时，非静电力 $K$ 所作的功。

把正电荷 $q$ 经电源内部由负极移到正极时，非静电力作的功为：

$$A_k = \int_{-}^{+} q \overrightarrow{E_k} \bullet d\vec{l}$$

电动势为：

$$\varepsilon = \frac{A_k}{q} = \frac{1}{q} \int_{-}^{+} q \overrightarrow{E_k} \bullet d\vec{l} = \int_{-}^{+} \overrightarrow{E_k} \bullet d\vec{l}$$

### 3. 法拉第定律

精确的**实验**表明：

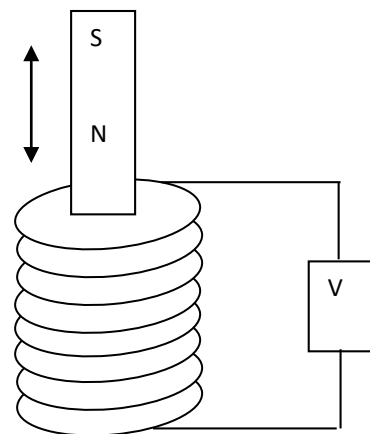
回路中的感应电动势等于磁通量 $\varphi_B$ 对时间变化率的负值，即：

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_S B \cos \theta ds$$

- 感应电动势的单位：在国际单位制中是，  
伏特=韦伯/秒
- 感应电动势是标量，但也有方向，可用正负表示。

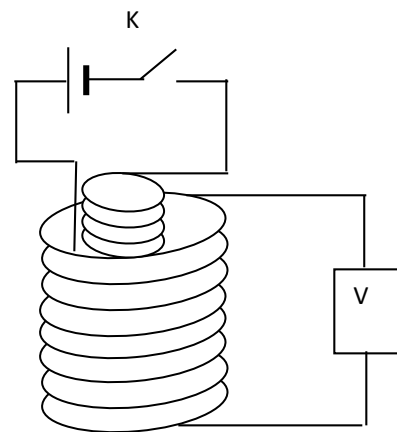
## 实验1:

磁铁插入线圈中，使线圈中的磁通量发生变化，从而在线圈中产生感应电动势。



## 实验2:

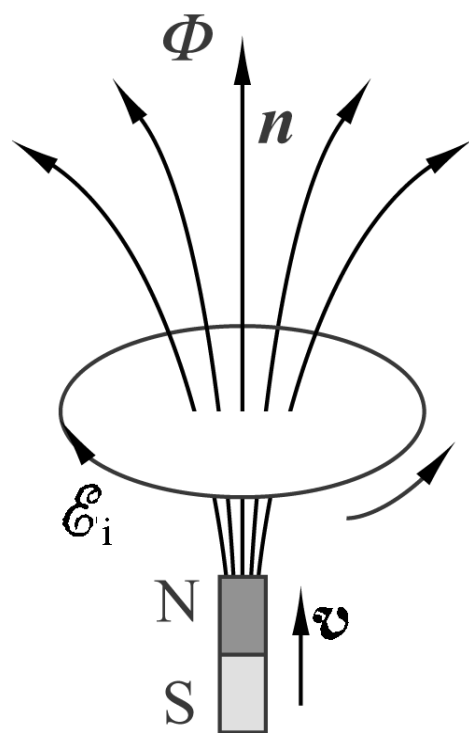
内线圈通、断电的变化产生一个变化的磁场，在外线圈中便产生了感应电动势，其中没有任何移动的部件，这样产生的电动势称为感生电动势。



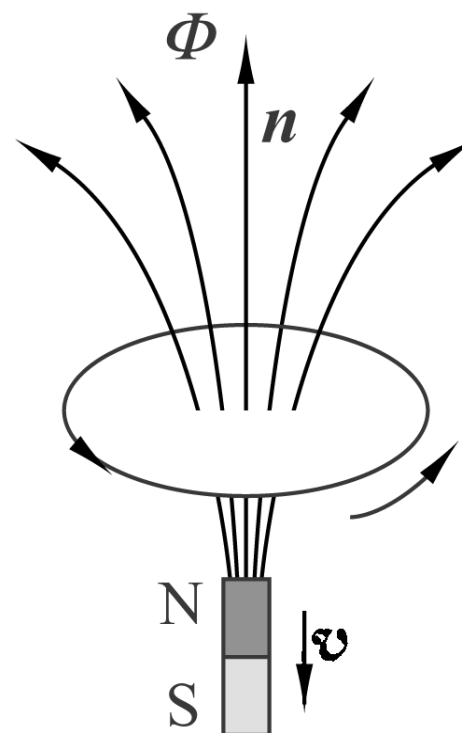
## 利用法拉第定律计算感应电动势：

- (1) 任意规定回路绕行的方向；
- (2) 按右手定则确定回路所围曲面的正法线方向 $\hat{n}$ ；
- (3) 再确定磁通量的正负， $\vec{B}$ 与 $\vec{n}$ 成锐角， $\varphi_B$ 为正， $\vec{B}$ 与 $\vec{n}$ 成钝角， $\varphi_B$ 为负；
- (4) 计算 $\varepsilon = -\frac{d\varphi_B}{dt}$ ；
- (5)  $\varepsilon$ 为正，说明 $\varepsilon$ 的方向与规定的绕行方向相同； $\varepsilon$ 为负，说明 $\varepsilon$ 的方向与规定的绕行方向相反。

# 电动势方向



(a)



(b)

## 4. 楞次定律

- 利用法拉第定律，能计算感应电动势的大小，又能判断其方向，但有时判定方向用楞次定律更为方便。
- **楞次定律：**感应电流（或感应电动势）总是补偿（或反抗）磁通量的变化。
- 说明：
  - （1）补偿指的是对磁通量变化的补偿，而不是磁通量的补偿。
  - （2）补偿并不意味着完全抵消。
- 法拉第定律适合用于定量求解，楞次定律适合定性判断，二者通称为**电磁感应定律**。

## § 2. 感应电动势

### —动生电动势与感生电动势

- 根据法拉第定律知，只要以闭合回路为边界的曲面的磁通量随时间发生变化，那么该闭合回路就会产生感应电动势。
- 存在的问题：
  - (1) 感应电动势对应的非静电力是什么力？
  - (2) 如果没有闭合环路，是否有感应电动势？
  - (3) 如果没有导体，是否有感应电动势？
- 回答这些问题需要对电磁感应现象进行分类，并分析产生感应电动势的内在原因。

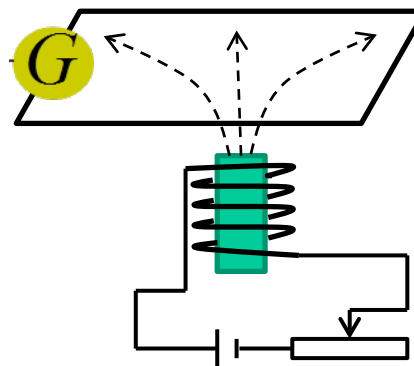
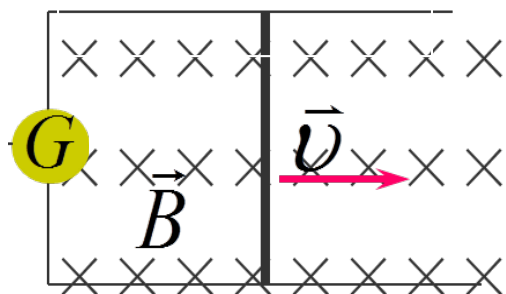
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_S B \cos \theta ds$$

• 引起磁通量变化的因素：

1. 导线在运动：引起面积、角度  $\cos \theta$  变化

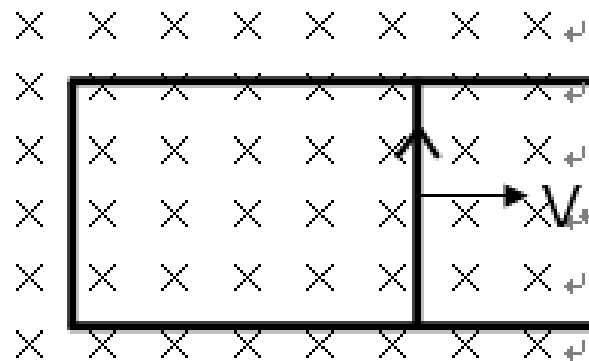
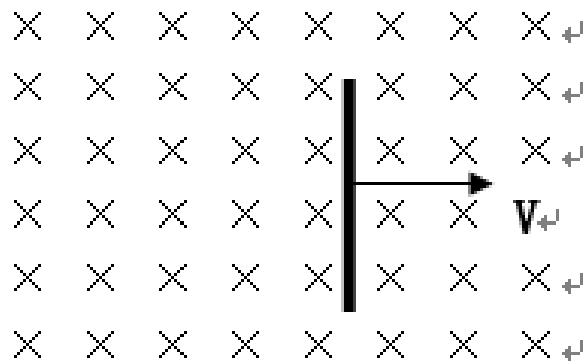
→ 动生电动势

2. 磁场变化 → 感生电动势



# 一、动生电动势

- 导体在磁场中运动产生的电动势——动生电动势。



利用Faraday定律：选定，顺时针为回路绕行方向。

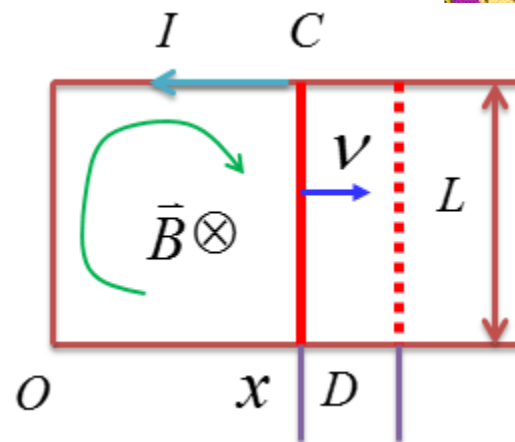
假定 $t = 0$ 时， $x = 0$ ， $t$ 时刻：

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \iint dS = BLx$$

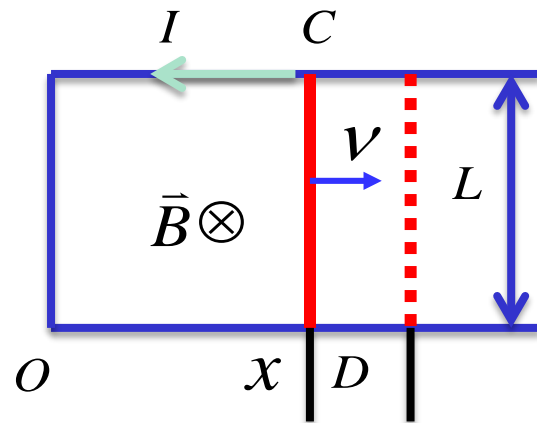
$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -BL \frac{dx}{dt} = -BLv$$

$\because \varepsilon < 0, \therefore \varepsilon$ 方向为逆时针。

- 这样的动生电动势是如何产生的呢？
- 动生电动势对应的非静电力是什么力？
- 这里的非静电力实际上就是洛伦兹力！



- $$\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$$



- 162

- 非静电力:

$$\overline{E_k} = \frac{\vec{F}}{-e} = \frac{-e(\vec{v} \times \vec{B})}{-e} = \vec{v} \times \vec{B}$$

- 根据电源电动势定义:

$$\varepsilon = \int_D^C \overline{E_k} \cdot d\vec{l} = \int_D^C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_D^C Bv dl = BLv$$

- 其结论与法拉第定律的结论相同, 假设成立, 即非静电力是洛伦兹力。
- 由以上分析可知: **动生电动势只分布在运动的导体上, 与回路中不运动的部分无关。**

- 实际上，即使不存在回路，只要有运动的导体，电动势就可能存在，而且大小不变，相当于一个开路电源。
- 以上结论虽然从特例中获得，但是适合普遍规律，普遍地讲，任一运动导体线元：

$$d\varepsilon = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

- 任一运动导体L：

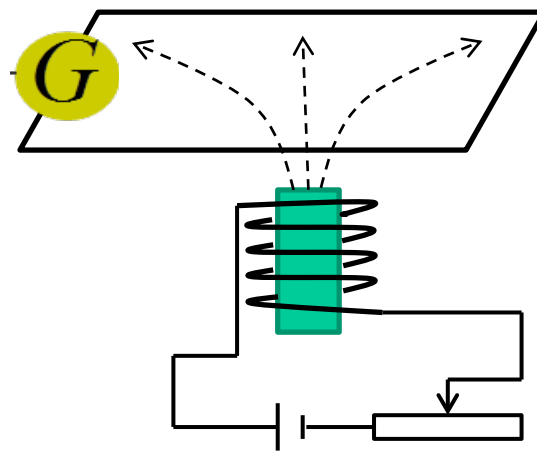
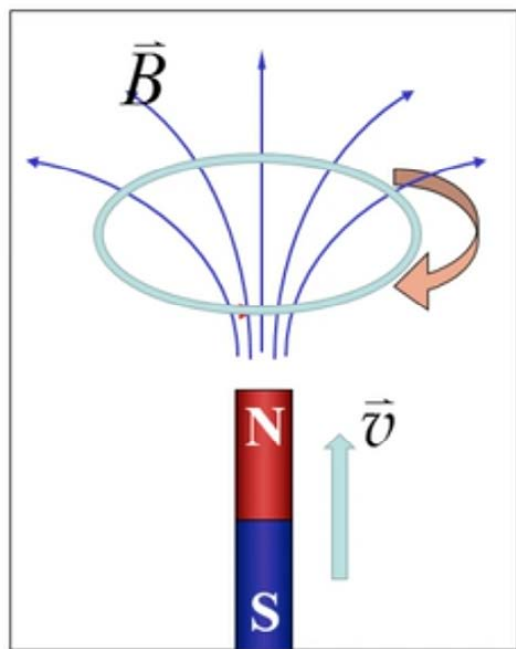
$$\varepsilon = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (\text{正负与} d\vec{l} \text{有关})$$

$\vec{v}$ 是导线线元 $d\vec{l}$ 相对于磁场 $\vec{B}$ 的速度。

$\vec{v}$ 、 $\vec{B}$ 可以是不均匀的， $L$ 可以是任意形状的。

## 二、感生电动势

- 洛伦兹力能很好地解释动生电动势产生的机制，却不能解释为什么在导体回路不动，只是磁场的变化，会在导体中产生感应电动势。



- 麦克斯韦在分析和研究了这类电磁感应现象后提出：无论有无导体或导体回路，变化的磁场都将在其周围空间产生一种电场，这种电场的电力线是闭合的，称为涡旋电场或有旋电场  $\vec{E}_{\text{旋}}$ 。

$$\mathcal{E}_{\text{感生}} = \oint \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l}$$

- 磁场随时间变化产生的电动势叫做感生电动势或涡旋电动势。

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{感应}} &= -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= \mathcal{E}_{\text{动生}} + \mathcal{E}_{\text{感生}} \\ &= \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} + \oint \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

根据法拉第定律和电动势的定义

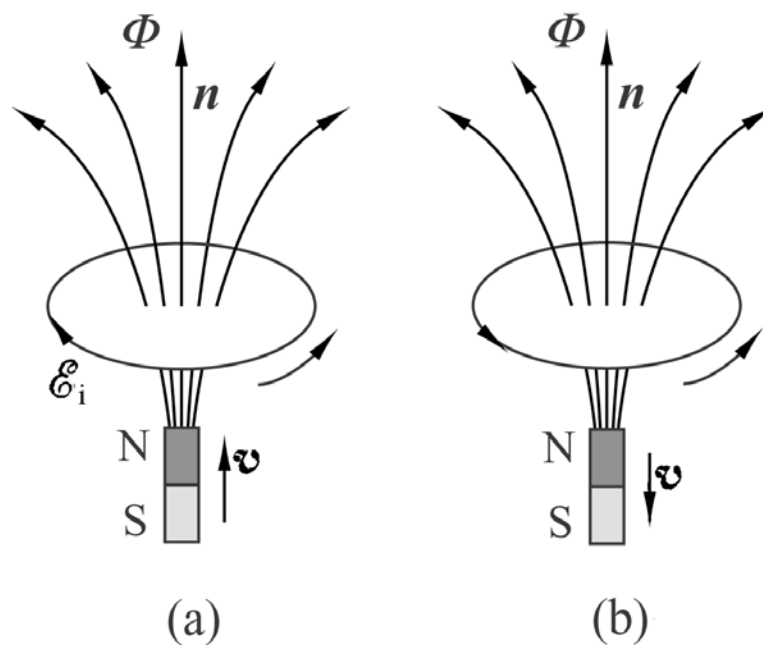
$$\mathcal{E}_{\text{感应}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

积分式中S是以闭合回路L为边界的曲面，当回路固定不变时：

$$\mathcal{E}_{\text{感生}} = \oint \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

因为B即是时间的函数，也是空间变量的函数，所以这里要用偏导数。

## 有旋电场的方向



在存在有旋电场的地方，如果有导体回路存在，则在有旋电场的作用下，在回路中产生电流；如果没有导体回路存在，有旋电场依然存在。

# 总结:

## 存在两种不同起源的电场

### 静电场

- 由静止电荷激发的电场
- 对电荷有作用力

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

- 环路定理

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

- 高斯定理

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{S \text{ 内}} q_i$$

### 感生电场

- 由变化的磁场激发的电场
- 对电荷有作用力

$$\vec{F}_k = q\vec{E}_{\text{旋}}$$

- 环路定理

$$\oint_L \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

- 高斯定理

$$\oiint_S \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{S} = 0$$

## 静电场

- 静电场是有源无旋场



- 静电场的电场线起于正电荷，终于负电荷，是一组不闭合的曲线

## 感生电场

- 感生电场无源有旋场



- 感生电场的电场线与变化的磁场方向满足右螺旋的反方向，是一组闭合的曲线

# 感生电动势（电场）的计算

## 一、方法一

应用  $\varepsilon = \int_l \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l}$  计算

- 这种方法要求先计算出积分路径上各点的  $\vec{E}_{\text{旋}}$ ，再通过做积分得到感生电动势
- 但是在一般情况下，计算  $\vec{E}_{\text{旋}}$  是困难的，所以只有在某些对称情况下（如长螺线管形成的变化磁场区域），才能比较方便计算感生电动势

## 二、方法二

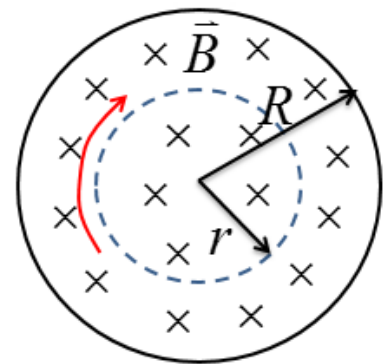
应用电磁感应定律计算  $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$

- 对于闭合电路，只需知道线圈的  $\frac{d\Phi}{dt}$ ，就可求出感生电动势
- 对于非闭合的一段导线  $ab$ ，可假设一条辅助曲线与  $ab$  组成闭合回路，只要知道这个闭合回路的  $\frac{d\Phi}{dt}$  也可以用法拉第定律求出感生电动势

## 书中例题 10.8(p.455)

半径为 $R$ 的长直螺线管中载有变化电流，管内产生均匀磁场，当磁感应强度的变化率以恒定速率增加时，

求：（1）管内外有旋电场 $\vec{E}_{\text{旋}}$ ，并计算同心圆形导体回路中的感生电动势。

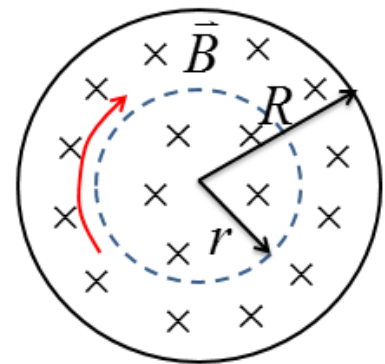


## 书中例题 10.8(p.455)

半径为 $R$ 的长直螺线管中载有变化电流，管内产生均匀磁场，当磁感应强度的变化率以恒定速率增加时，

求：（1）管内外有旋电场 $\vec{E}_{\text{旋}}$ ，并计算同心圆形导体回路中的感生电动势。

解： $r$ 为闭合回路半径，由于螺线管的对称性，可知涡旋电场也是对称的，其电力线为同心的圆周，在同一圆周上 $\vec{E}_{\text{旋}}$ 的大小相等方向沿切线方向。



思路：由法拉第定律求 $\varepsilon$ ，

由 $\varepsilon_{\text{感生}} = \oint_L \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l}$ ，则可求出 $\vec{E}_{\text{旋}}$

选定绕行方向：顺时针

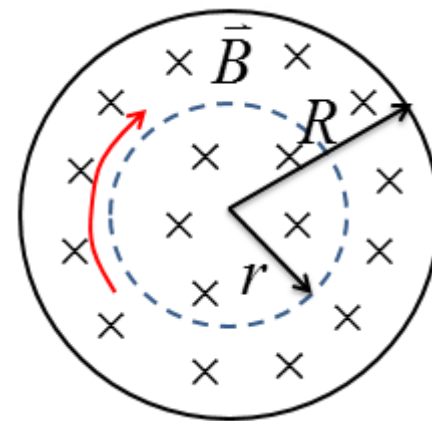
磁通量： $\phi = \pi r^2 B \quad (r < R)$

$\phi = \pi R^2 B \quad (r > R)$

电动势：

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} \quad (r < R)$$

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\pi R^2 \frac{dB}{dt} \quad (r > R)$$



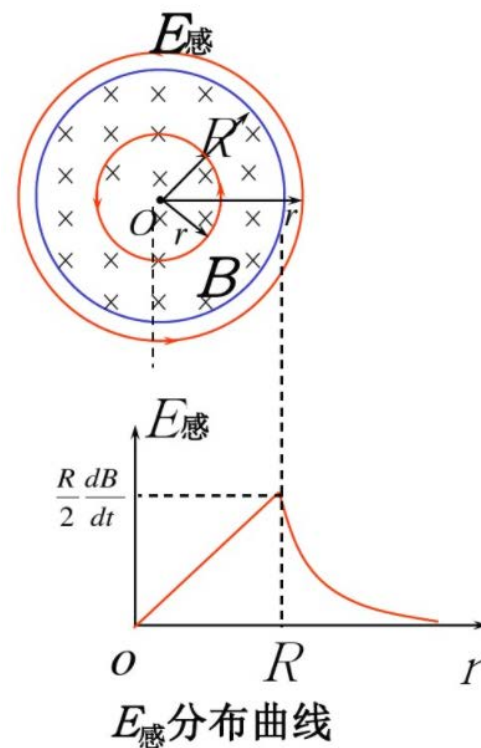
$$\mathcal{E}_{\text{感生}} = \oint \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = 2\pi r E_{\text{旋}}$$

涡旋电场：

$$E_{\text{旋}} = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r} = -\frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (r < R)$$

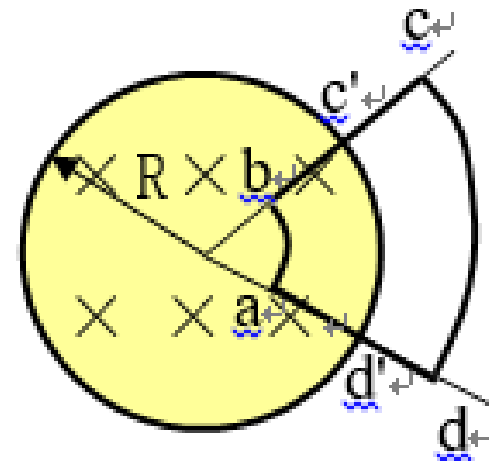
$$E_{\text{旋}} = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r} = -\frac{R^2}{2r} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (r > R)$$

方向：  $\frac{\partial B}{\partial t} > 0$ ，逆时针；  $\frac{\partial B}{\partial t} < 0$ ，顺时针。



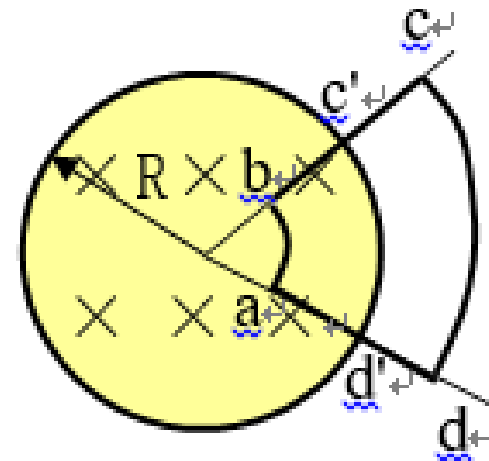
例题 求闭合回路abcda中的感生电动势。

其中，ab、cd是圆心角 $\theta = \pi/3$ 的圆弧，bc、ad沿半径， $ad' = dd' = oa = R/2$ ，c'、d'分别是bc和ad与圆柱截面的交点。



**例题** 求闭合回路abcda中的感生电动势。

其中，ab、cd是圆心角 $\theta = \pi/3$ 的圆弧，bc、ad沿半径， $ad' = dd' = oa = R/2$ ，c'、d'分别是bc和ad与圆柱截面的交点。



解：为了求abcda回路中的感生电动势，可将回路分段分别求 $\epsilon_{ab}$ 、

$\epsilon_{bc}$ 、 $\epsilon_{cd}$ 、 $\epsilon_{da}$ ，然后求其代数和。

由于ad、bc与有旋电场处处垂直，

$$\therefore \epsilon_{da} = \epsilon_{bc} = 0$$

对于ab段可用前面得到的结果，

且 $r=R/2$ ，积分限为 $0\sim\pi/3\cdot R/2=\pi R/6$ 。

$$E_{ab} = -\frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{R}{4} \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\mathcal{E}_{ab} = \int_a^b \vec{E}_{ab} \cdot d\vec{l} = -\int_0^{\pi R/6} \frac{R}{4} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = \frac{\pi R^2}{24} \frac{\partial B}{\partial t}$$

对于cd段可用前面得到的结果，且 $r=3R/2$ ，积分限为 $0\sim\pi/3\cdot 3R/2=\pi R/2$ 。

$$E_{cd} = -\frac{R^2}{2r} \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{R}{3} \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\varepsilon_{cd} = \int_c^d \vec{E}_{cd} \cdot d\vec{l} = - \int_0^{\pi R/2} \frac{R}{3} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = - \frac{\pi R^2}{6} \frac{\partial B}{\partial t}$$

回路abcd中总的电动势为：

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \varepsilon_{ab} + \varepsilon_{bc} + \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{da} \\ &= \frac{\pi R^2}{24} \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\pi R^2}{6} \frac{\partial B}{\partial t} = - \frac{\pi R^2}{8} \frac{\partial B}{\partial t} \end{aligned}$$

如果ab段的有旋电场与沿积分路径的方向一致的话，  
则cd段的有旋电场与沿积分路径的方向相反。

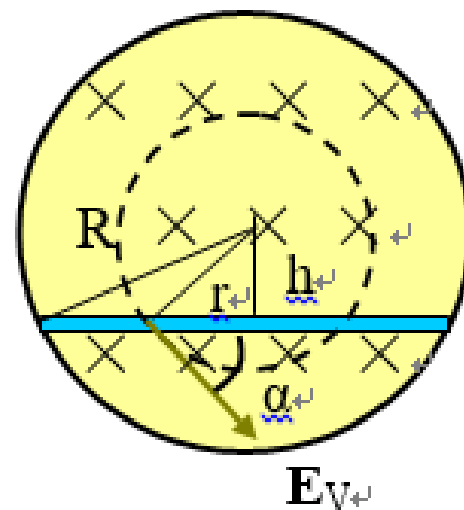
∴这两段的电动势是相减的。

以上是通过有旋电场对单位正电荷做功得到的回路中产生的电动势，如果从法拉第电磁感应定律可直接得到回路中的感应电动势：

$$\varepsilon = -\frac{1}{6} \left( \pi R^2 - \pi \frac{R^2}{4} \right) \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\pi R^2}{8} \frac{\partial B}{\partial t}$$

与前面得到的结果相同。

**例题** 将长为 $L$ 的导体棒 $ab$ 垂直于磁场放置在螺线管内，求棒两端的电动势。



**例题** 将长为 $L$ 的导体棒 $ab$ 垂直于磁场放置在螺线管内，求棒两端的电动势。

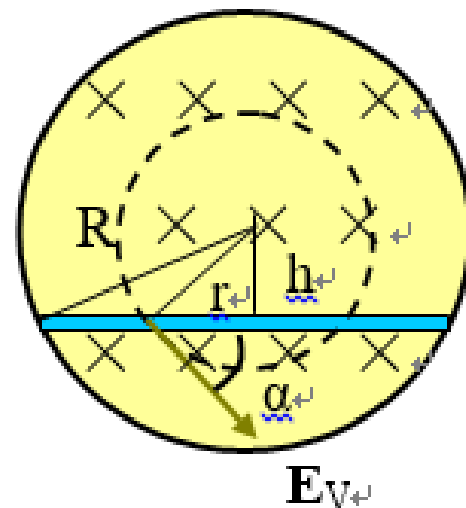
解法一：从有旋电场求 $ab$ 端的电动势。

$$\varepsilon_{ab} = \int_a^b \vec{E}_{ab} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E_{\text{旋}} \cos \alpha dl$$

$$\text{在 } r < R \text{ 区域内} \quad E_{\text{旋}} = -\frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\text{, 且} \quad \cos \alpha = \frac{h}{r}$$

$$\varepsilon_{ab} = -\int_a^b \frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{h}{r} dl = -\frac{h}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \int_a^b dl = -\frac{h}{2} \frac{\partial B}{\partial t} L = -\frac{L}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \frac{\partial B}{\partial t}$$



解法二：沿圆半径做辅助线Oa和Ob形成三角形，由于沿半径方向与有旋电场垂直，其电动势为0，只有ab段产生电动势，根据法拉第电磁感应定律，三角形回路中的感应电动势为：

$$\varepsilon_{ab} = -S \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{Lh}{2} \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{L}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \frac{\partial B}{\partial t}$$

## § 3. 自感和互感

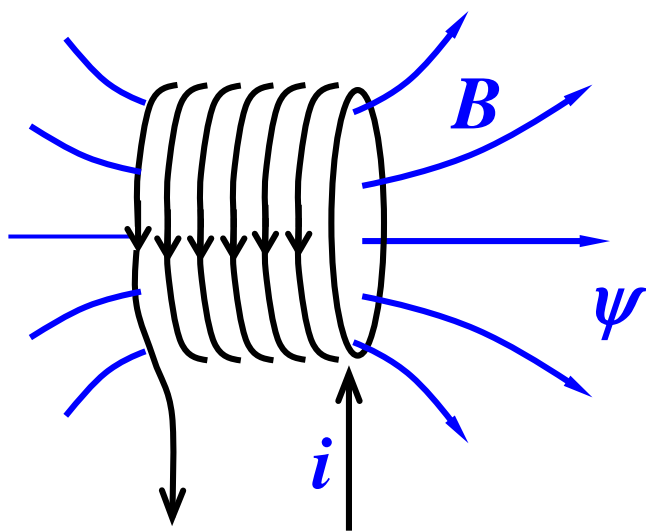
### 一、线圈的磁通量

- 设线圈共有 $N$ 匝，各匝围成的曲面的磁通量分别为： $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots \dots \varphi_N$ （内部有磁场），则该线圈总的磁通量应为各匝磁通量的代数和，即 $\psi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_N$ ——**线圈的全磁通**。
- 若每匝导线的磁通量都相同，并记作 $\varphi$ ，则线圈的全磁通为： $\psi = N\varphi$ 。
- 此时，如果磁场随时间变化，则由法拉第定律知，线圈总的感应电动势为：

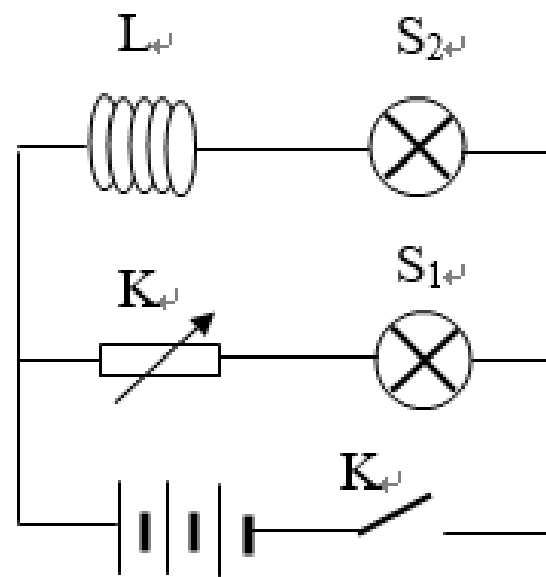
$$\varepsilon = -\frac{d\psi}{dt} = -N\frac{d\varphi}{dt}$$

## 二、自感

- 导体回路中由于电流的变化而在自身回路中产生感应电动势的现象称为**自感**，这种电动势成为**自感电动势**。



$$I(t) \rightarrow B(t) \rightarrow \psi(t) \rightarrow \mathcal{E}$$



**实验：**合上 $K$ 后， $S_1$ 立即点亮， $S_2$ 比 $S_1$ 亮的慢。从该装置可明显看到 $L$ 有阻碍电流增加的作用。

## 自感的定义：

根据比奥—萨伐尔定律，电流 $I$ 产生的磁感应强度正比于电流 $I$ ，所以在自身回路中产生的总磁通量也正比于回路中的电流 $I$ 。

$$\Psi = LI$$

- 与线圈本身的特性有关：匝数、形状、大小、介质情况等。
- $L$ 的单位：H（亨）

通过回路的总磁通 $\Psi$ 随电流的变化而变化，根据电磁感应定律线圈产生的自感电动势为：

$$\varepsilon_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

## 书中例题 10.11(p.465)

空心单层密绕长直螺线管，总匝数为 $N$ ，长为 $L$ ，半径为 $R$ ，且 $L \gg R$ 。

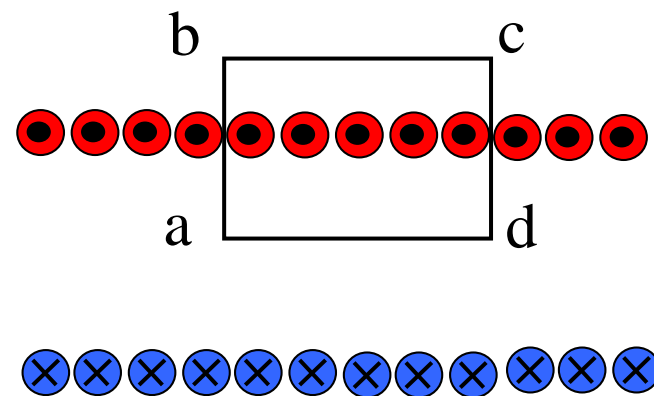
求：螺线管的自感 $L$

解：长直螺线管运用安培环路定律可得：

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{L} I$$

螺线管内的磁通量为：

$$\Phi = BS = \mu_0 \frac{NI}{L} \pi R^2$$



总的磁通为：

$$\Psi = NBS = \mu_0 \frac{N^2 I}{L} \pi R^2$$

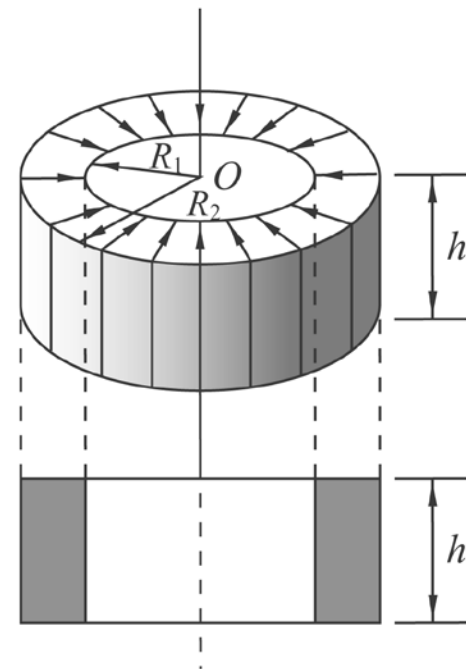
由自感的定义得：

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{L} \pi R^2 = \mu_0 n^2 V$$

## 书中例题 10.13(p.466)

横截面为矩形的密绕螺绕环，总匝数为 $N$ ，内外半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$ 。

求：螺绕环的自感



## 书中例题 10.13(p.466)

横截面为矩形的密绕螺绕环，总匝数为 $N$ ，内外半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$ 。

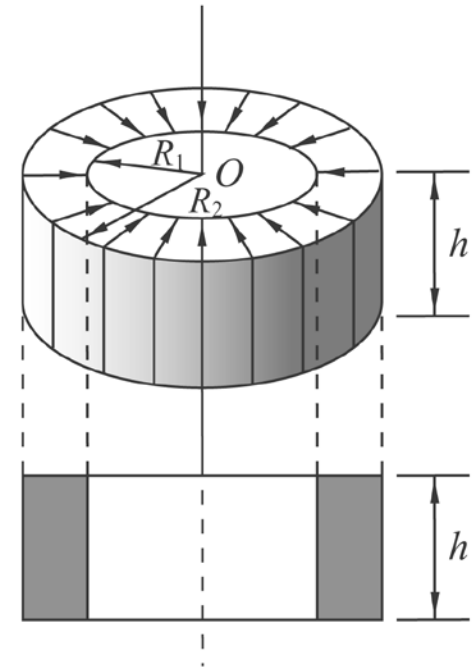
求：螺绕环的自感

解：环内离环心 $r$ 处的磁感应强度为：

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

穿过螺绕环横截面上面元 $dS = h dr$ 的磁通量为：

$$d\Phi_1 = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 NI h}{2\pi} \frac{dr}{r}$$



螺绕环横截面上的磁通量为：

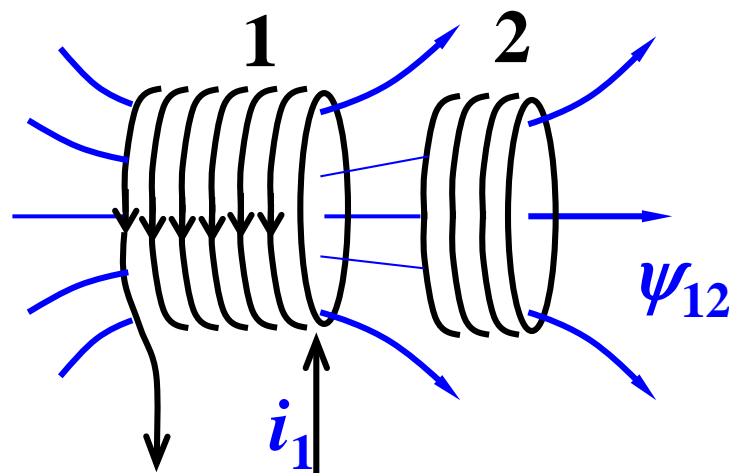
$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

根据自感的定义：

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

### 三、互感

- 一个线圈中电流发生变化，在另一邻近线圈中产生感应电动势的现象叫做**互感现象**，产生的电动势叫做**互感电动势**。



$$i_1(t) \Rightarrow \vec{B}_{12}(t) \Rightarrow \psi_{12}(t) \Rightarrow \mathcal{E}_{12}$$

$$i_2(t) \Rightarrow \vec{B}_{21}(t) \Rightarrow \psi_{21}(t) \Rightarrow \mathcal{E}_{21}$$

回路1中通有电流 $I_1$ 时，激发的磁场在回路2中产生的总磁通 $\Psi_{12}$ ，根据毕奥—萨伐尔定律， $\Psi_{12}$ 与 $I_1$ 成正比：

$$\Psi_{12} = M_{12} I_1$$

同理，回路2中通有电流 $I_2$ 时，激发的磁场在回路1中产生的总磁通 $\Psi_{21}$ ， $\Psi_{21}$ 与 $I_2$ 成正比：

$$\Psi_{21} = M_{21} I_2$$

其中， $M_{12}$ 称为回路1对回路2的互感系数； $M_{21}$ 称为回路2对回路1的互感系数。

可以证明： $M_{12} = M_{21} = M$

- 叫做两线圈之间的**互感系数**，简称**互感**。
- $M$ 与两线圈的匝数、大小、形状、相对位置、磁介质有关。
- 自感和互感统称为**电感**。
- $M$ 的单位：
$$\text{亨利} = \frac{\text{伏特} \cdot \text{秒}}{\text{安培}}$$
- 亨利是个大单位，一般用毫亨，微亨。
- 互感系数一般用实验方法测量出来。
- 变压器是互感的典型应用。

- 若线圈1中的电流*i*<sub>1</sub>变化，在线圈2中也会产生互感电动势，由法拉第定律知：

$$\varepsilon_{12} = -\frac{d\psi_{12}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt},$$

- 同样，若线圈2中的电流*i*<sub>2</sub>变化，在线圈1中也会产生互感电动势，由法拉第定律知：

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -M \frac{di_2}{dt}$$

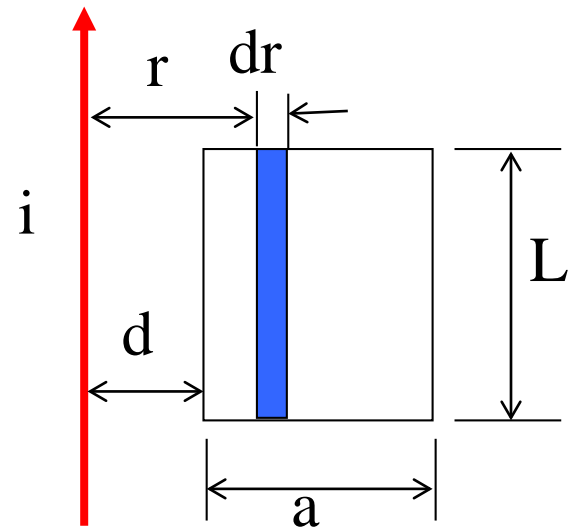
- 上两式统一表示成：

$$\varepsilon_M = -\frac{d\psi}{dt} = -M \frac{dI}{dt}$$

## 书中例题10.15(p.469) (重点)

矩形线圈ABCD，长为 $l$ ，宽为 $a$ ，匝数为 $N$ ，放在一长直导线旁边与之共面，长直导线是很大的回路的一部分，矩形线圈中通有电流 $i = I_0 \cos \omega t$ 。

求：长直导线中的互感电动势。



## 书中例题10.15(p.469) (重点)

矩形线圈ABCD，长为 $l$ ，宽为 $a$ ，匝数为 $N$ ，放在一长直导线旁边与之共面，长直导线是很大的回路的一部分，矩形线圈中通有电流 $i = I_0 \cos \omega t$ 。

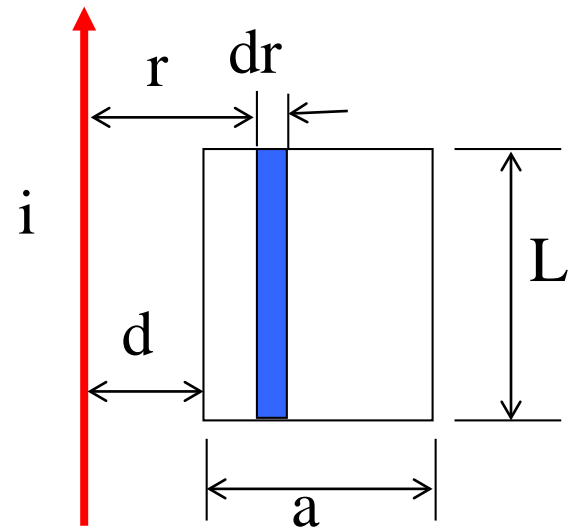
求：长直导线中的互感电动势。

解：由互感电动势：

$$\varepsilon_M = -M \frac{dI}{dt}$$

只要知道 $M$ 就能求出 $\varepsilon_M$

矩形线圈对直导线的互感不好计算，但 $M_{12} = M_{21} = M$ ，可计算长直导线对矩形线圈的互感。



在距长直导线为 $r$ 的矩形面积元 $ds=Ldr$ ，磁感应强度

$$B = \frac{\mu i}{2\pi r}$$

穿过面积元 $ds$ 的磁通量为：

$$d\Phi = B \bullet ds = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} L dr$$

穿过矩形线圈的磁通量为：

$$\Phi = \int B \bullet ds = \int_d^{a+d} \frac{\mu_0 i L}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 i L}{2\pi} \ln \frac{a+d}{d}$$

电流的磁场在矩形线圈中产生的总磁通为：

$$\Psi = N\Phi = \frac{\mu_0 NiL}{2\pi} \ln \frac{a+d}{d}$$

长直导线与矩形线圈之间的互感为：

$$M = \frac{\Psi}{i} = \frac{\mu_0 NL}{2\pi} \ln \frac{a+d}{d}$$

矩形线圈中的电流  $i = I_0 \cos \omega t$  在长直导线中产生的互感电动势为：

$$\begin{aligned} \varepsilon_M &= -M \frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 NL}{2\pi} \ln \frac{a+d}{d} \frac{d}{dt} (I_0 \cos \omega t) \\ &= \frac{\mu_0 NLI_0 \omega}{2\pi} \ln \frac{a+d}{d} \sin \omega t \end{aligned}$$

## § 4. 麦克斯韦电磁场理论

- 人们对自然界电磁现象的认识有一个过程：

起初：电、磁无关。

1820年：奥斯特发现了电流的磁效应。（运动电荷可以产生磁场）

1831年：法拉第发现电磁感应定律。Maxwell提出变化的磁场可以产生电场——涡旋电场。

1865年：麦克斯韦提出，变化的电场可以产生磁场。预言了电磁波的存在，总结出了电磁场的基本方程（麦克斯韦电磁场方程组）——可解决所有宏观电磁场问题，计算出了电磁波传播速度等于光速。

1888年：赫兹用实验验证了电磁波的存在。

# 一、位移电流

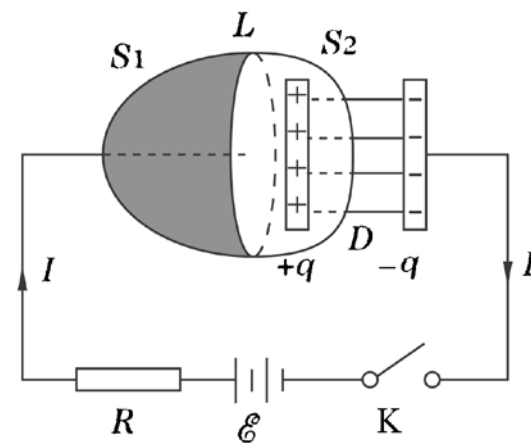
- **传导电流：** 电荷宏观定向运动。
- **磁化电流：** 分子电流有序排列的宏观表现。
- **位移电流：** 电场随时间变化而产生的电流。

恒定电流产生的磁场遵从安培环路定理：

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{L\text{内}} I_i$$

其中电流I是穿过闭合曲线L为边界的任意曲面S的传导电流。

对非稳恒状态是否成立，为什么？

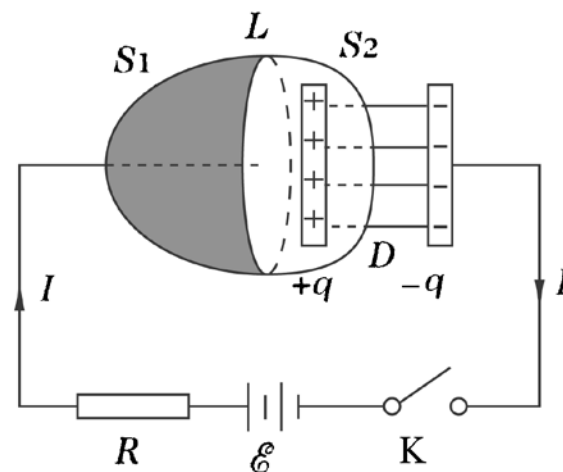


➤ 以电容充电过程为例，加以说明：

- 开关闭合电容充电时，电源正极流出的传导电流，终止于左极板上，左极板上就会有正电荷的积累。设 $t$ 时刻电流为 $i_f(t)$ ，则 $t$ 时刻左极板的电量为：

$$q_f = \int_0^t i_f dt \quad \text{或} \quad i_f = \frac{dq_f}{dt}$$

- 由图可看出，同一时刻 $t$ ，穿过 $S_1$ 的传导电流为 $i_f(t)$ ，但穿过 $S_2$ 的传导电流为0。

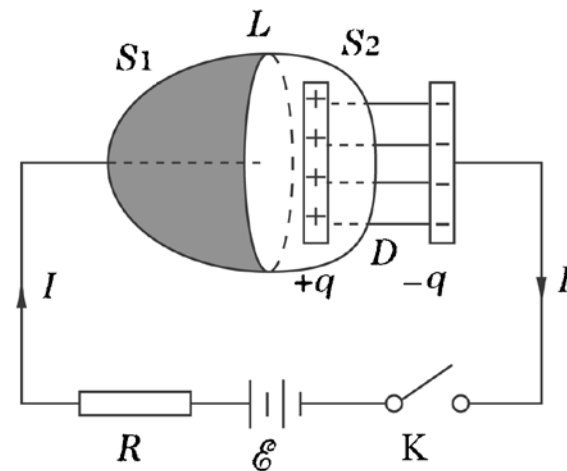


在非稳恒电流的情况下，电容器的充放电使交变电流能在回路中流动。如果以 $L$ 为边界作 $S_1$ 和 $S_2$ 两个曲面。在 $S_1$ 中有传导电流 $I$ 穿过该曲面，故有：

$$\int_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_f$$

对于 $S_2$ 曲面，它伸展到电容器两极板之间，不与载流导线相交，则穿过 $S_2$ 的传导电流为0，因此有：

$$\int_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$



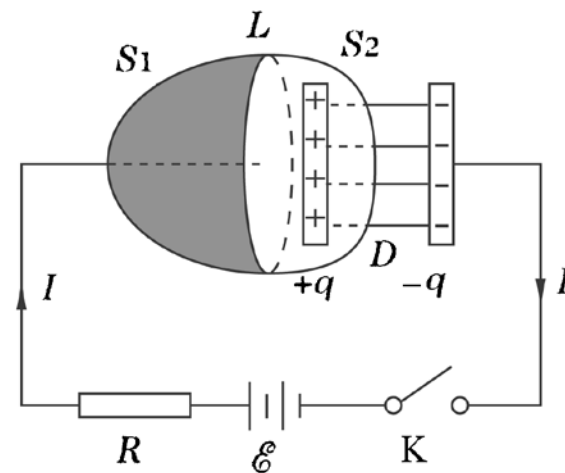
- 由此可见，在非稳恒电流的情况下，同一闭合曲线L为边界的不同曲面得到的结果完全不同。
- 麦克斯韦认为：这一矛盾的产生是由于把传导电流看成是唯一的电流。在电容器的极板之间，虽然没有传导电流，但电场在随时间不断变化。

- 进一步分析：

如图，电容器充电，选一高斯面：

$S_1 + S_2$ 。

- 高斯定理：
$$\oiint_{S_1+S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_f$$



$S_1$ 的电位移矢量通量为0,  $\therefore \iint_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_f$

对时间求导：
$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \frac{dq_f}{dt} = i_f$$

或  $\iint_{S_2} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = i_f$  其中， $i_f$  为穿过  $S_1$  的传导电流。

麦克斯韦把  $\iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$  叫做两极板间的位移电流。

用  $i_d$  表示，
$$i_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

或  $\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  一位移电流密度矢量 
$$i_d = \iint_S \vec{j}_D \cdot d\vec{S}$$

由前式可知： $i_{d_{S_2}} = i_{f_{S_1}}$ ，

- 引入位移电流后，在电容器极板处中断的**传导电流**  $I$  被**位移电流**接替，使电路中电流保持连续不断。
- 传导电流与位移电流之和称为**全电流**。
- 全电流在非稳恒电流情况下保持连续，这时的安培环路定理应推广为：

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_f + i_d \quad \text{— (稳态和非稳态都成立)}$$

- 此式说明，不仅传导电流能产生有旋磁场，**位移电流也能产生有旋磁场**。

- 注意：位移电流中，并不存在真实电荷的移动，而仅仅是电位移通量的变化率。形成位移电流不需要导体，也没有热效应，在真空中仍可以存在位移电流。概括起来就是：**变化的电场产生磁场**。

## 二、麦克斯韦方程组的积分形式

- 四个基本方程，是由麦克斯韦总结实验规律而得到的，下面分别介绍：
- 电场有两种：静电场、涡旋电场：

$$\text{任意电场: } \vec{E} = \vec{E}_{\text{静}} + \vec{E}_{\text{涡}} \quad \vec{D} = \vec{D}_{\text{静}} + \vec{D}_{\text{涡}}$$

$$\text{对于静电场: } \oiint \vec{D}_{\text{静}} \cdot d\vec{S} = q_f$$

$$\text{对于涡旋电场: } \oiint \vec{D}_{\text{涡}} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\text{两式相加: } \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_f \text{ —— (1)}$$

- 任意电场的电位移矢量对闭合曲面的通量等于闭合曲面所包围的自由电荷代数和。

对于静电场： $\oint_L \vec{E}_{\text{静}} \cdot d\vec{l} = 0$

对于涡旋电场： $\oint_L \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

两式相加： $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \text{—— (2)}$

- 任意电场沿闭合环路的线积分，等于以环路为边界的任意曲面的磁通量随时间变化率的负值。

## 磁场:

- 对于任意磁场，不管是由传导电流、运流电流、磁化电流、还是位移电流产生的，其共同特点是磁力线总是闭合的，故有：

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \text{——— (3)}$$

- 任意磁场对闭合曲面的磁通量都等于零。

- 如前所述，普适的安培环路定理：

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f + I_D \text{—— (4)}$$

$$I_D = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \text{—— (S为以L为边界的曲面)}$$

- 任意磁场的磁场强度矢量沿闭合环路的线积分等于穿过以环路为边界的任意曲面的传导电流和位移电流的代数和。
- (1) — (4) 式为麦克斯韦电磁场基本方程（普适方程）的积分形式。

## 总结起来:

- 电场可由电荷产生——无旋电场;  
还可由变化的磁场产生——有旋电场
- 磁场可由传导电流产生;  
还可由变化的电场——位移电流产生
- 整个电磁学可由麦克斯韦的四个方程概括:

## 麦克斯韦方程组:

$$(I) \quad \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_{0i}$$

$$(II) \quad \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$(III) \quad \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$(IV) \quad \int_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_0 + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$