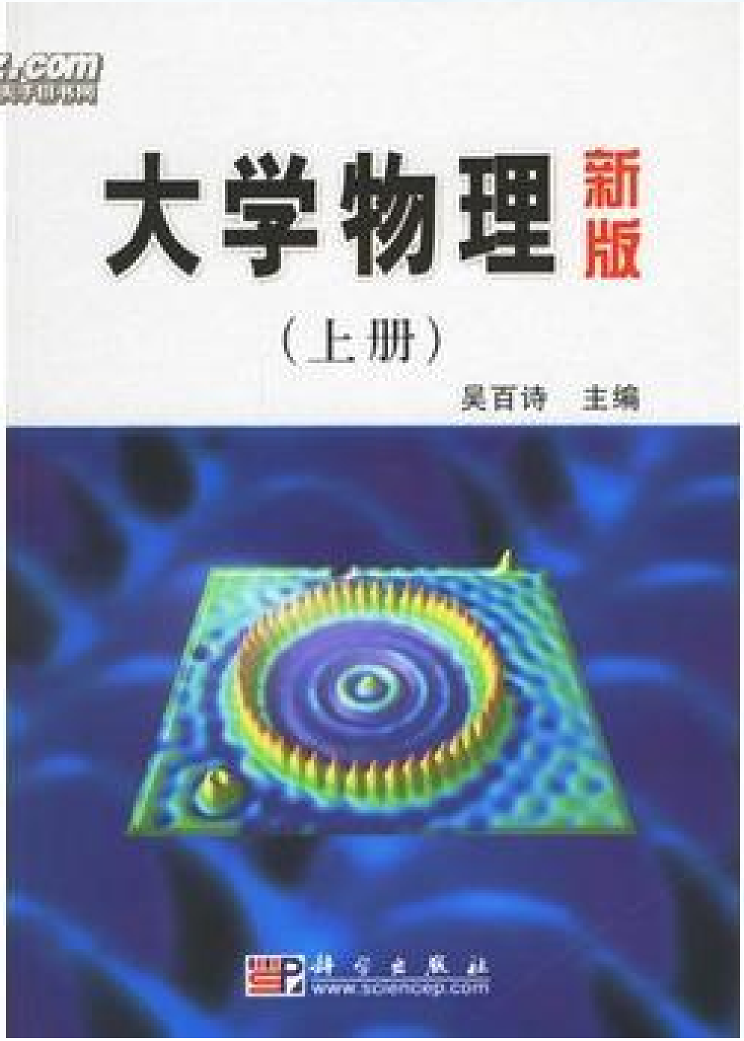


大学物理一

力学
电磁学

主 讲:丁毅
（电光学院，盛凡楼555室）
邮箱:yiding@nankai.edu.cn
电话：15102208002

➢授课计划

- 课时：80

第2学期，1~16周

- 周课时：5

周三（08:00~09:40）2

周五（08:55~11:40）3

➢课程考核

- 力学：35%

八周课时

- 电磁学：35%

八周课时，期末考试

- 平时成绩：30%

物理学是研究物质运动最一般规律和物质基本结构的学科。作为自然科学的带头学科，物理学研究大至宇宙（相对论），小至基本粒子（量子力学）等一切物质最基本的运动形式和规律，因此成为其他各自然科学学科的研究基础。力学研究弱引力场中宏观低速运动，属于介于相对论和量子力学之间的经典物理。

物理学的理论结构充分地运用数学作为自己的工作语言，以实验作为检验理论正确性的唯一标准，它是当今最精密的一门自然科学学科。

- 大约在135亿年前，经过所谓的“大爆炸”(Big Bang)之后，宇宙的物质、能量、时间和空间才成了现在的样子。宇宙的这些基本特性，就成了“物理学”。
- 在这之后过了大约30万年，物质和能量开始形成复杂的结构，称为“原子”，再进一步构成“分子”。至于这些原子和分子的故事以及它们如何互动，就成了“化学”。
- 大约38亿年前，在这个叫做地球的行星上，有些分子结合起来，形成一种特别庞大而又精细的结构，称为“有机体”。有机体的故事，就成了“生物学”。
- 到了大约7万年前，一些属于“智人”这一物种的生物，开始创造出更复杂的架构，称为“文化”。这种人类文化继续发展，就成了“历史学”。　　——《人类简史》

第一部分　力学

- 对象：

  质点、刚体、固体（弹性、振动、波）

- 方法：

  矢量运算、微积分等

- 目标：

  应用高等数学，分析与解决实际问题

力学的发展史

- 早在（公元前287~212）古希腊**阿基米德**著的《论比重》就奠定了静力学的基础。
- 意大利的**达芬奇**（1452~1519）研究了滑动摩擦、平衡、力矩。
- 波兰的**哥白尼**（1473~1543）创立了宇宙“日心说”。
- 德国的**开普勒**（1571~1630）提出了行星运动三定律。
- 意大利的**伽利略**（1564~1642）提出了自由落体定律、惯性定律及加速度的概念。
- 英国伟大的科学家**牛顿**（1643~1727）在1687年版的《自然哲学的数学原理》一书总其大成，提出动力学的三个基本定律，万有引力定律，天体力学等，是力学奠基人。

数学知识：矢量运算

一、矢量和标量的定义

1.标量：只有大小，没有方向的物理量。

如：温度 T、长度 L 等

2.矢量：不仅有大小，而且有方向的物理量。

如:力 $\vec{F}$、速度$\vec{V}$、电场 $\vec{E}$ 等

矢量表示为：

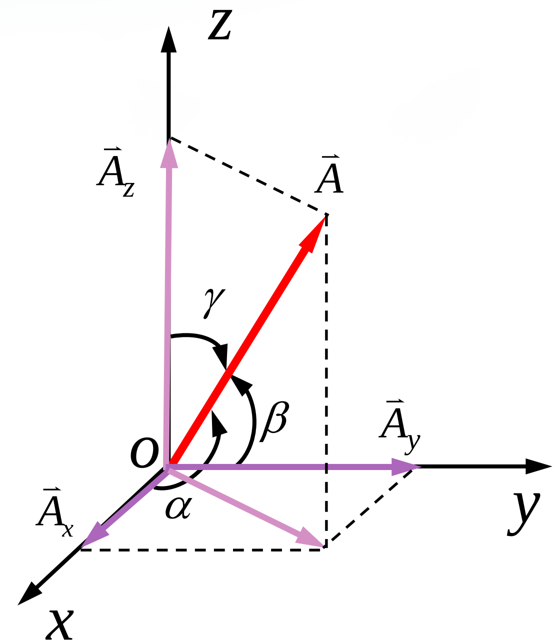
$$\vec{A}=|\vec{A}|\hat{a}$$

其中：$|\vec{A}|$为矢量的模，表示该矢量的大小。

$\hat{a}$ 为单位矢量，表示矢量的方向，其大小为1。

所以：一个矢量就表示成矢量的模与单位矢量的乘积。

直角坐标系下的矢量： $\vec{A} = A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z$



✧ **模的计算：** $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

✧ **单位矢量：** $\hat{a} = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \dfrac{A_x}{|\vec{A}|}\hat{a}_x + \dfrac{A_y}{|\vec{A}|}\hat{a}_y + \dfrac{A_z}{|\vec{A}|}\hat{a}_z$

$$= \cos\alpha\,\hat{a}_x + \cos\beta\,\hat{a}_y + \cos\gamma\,\hat{a}_z$$

✧ **方向角与方向余弦：** $\alpha,\ \beta,\ \gamma$

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|},\quad \cos\beta = \frac{A_y}{|\vec{A}|},\quad \cos\gamma = \frac{A_z}{|\vec{A}|}$$

在直角坐标系中三个矢量加法运算：

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (A_x + B_x + C_x)\hat{a}_x + (A_y + B_y + C_y)\hat{a}_y + (A_z + B_z + C_z)\hat{a}_z$$

矢量乘法：

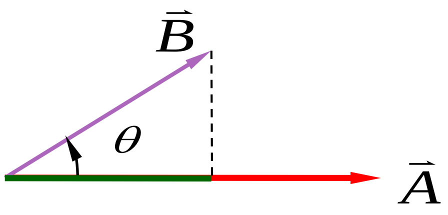
（1）标量与矢量的乘积：

$$k\vec{A} = k\,|\vec{A}|\,\hat{a} \quad \left\{ \begin{array}{ll} k>0 & \text{方向不变，大小为}|k|\text{倍} \\ k=0 & \\ k<0 & \text{方向相反，大小为}|k|\text{倍} \end{array} \right\}$$

（2）矢量与矢量乘积分两种定义

a. 标量积（点积）：

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cos\theta$$



✧两矢量的点积含义：

一矢量在另一矢量方向上的投影与另一矢量模的乘积，其结果是一标量。

推论1：满足交换律 $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$

推论2：满足分配律 $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

推论3：当两个非零矢量点积为零,则这两个矢量必正交。

- 在直角坐标系中，已知三个坐标轴是相互正交的，即

$$\hat{a}_x\cdot\hat{a}_y=0,\quad \hat{a}_x\cdot\hat{a}_z=0,\quad \hat{a}_y\cdot\hat{a}_z=0$$

$$\hat{a}_x\cdot\hat{a}_x=1,\quad \hat{a}_y\cdot\hat{a}_y=1,\quad \hat{a}_z\cdot\hat{a}_z=1$$

有两矢量点积:

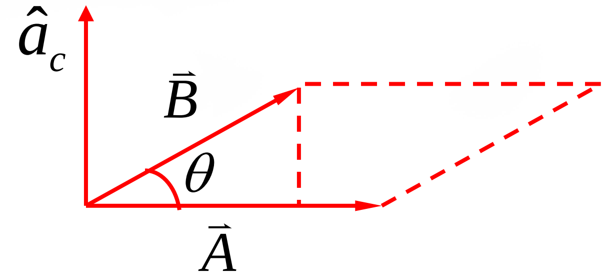
$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z)\cdot(B_x\hat{a}_x+B_y\hat{a}_y+B_z\hat{a}_z)$$

$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

- 结论: 两矢量点积等于对应分量的乘积之和。

b.矢量积（叉积）：

$$\vec{A}\times\vec{B}=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\sin\theta\,\hat{a}_c$$



•含义：

两矢量叉积，结果得一新矢量，其大小为这两个矢量组成的平行四边形的面积，方向为该面的法线方向，且三者符合右手螺旋法则。

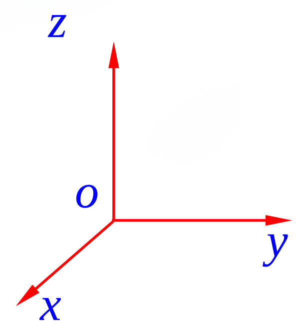
推论1：不服从交换律： $\vec{A}\times\vec{B}\neq\vec{B}\times\vec{A}$, $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$

推论2：服从分配律： $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$

推论3：不服从结合律： $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\neq(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$

推论4：当两个非零矢量叉积为零，则这两个矢量必平行。

在直角坐标系中，两矢量的叉积运算如下：



$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\hat{a}_x+A_y\hat{a}_y+A_z\hat{a}_z)\times(B_x\hat{a}_x+B_y\hat{a}_y+B_z\hat{a}_z)$$

$$=(A_yB_z-A_zB_y)\hat{a}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{a}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{a}_z$$

两矢量的叉积又可表示为：

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

定义1.5 在 n 阶行列式中,把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，余下的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式. 记为 M_{ij} . 称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

例如

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}$$

数学知识：微分

- 微分：

$$y = f(x)$$

$$y' = \dot{y} = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- 导数四则运算法则：

$$(C)' = 0$$

$$(Cu)' = Cu'$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (v \neq 0)$$

数学知识：微分

- 复合函数导数：

$$y = f(u) \qquad u = \varphi(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\varphi'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

- 反函数的导数

$$y = f(x) \qquad x = f^{-1}(y)$$

已知 $\frac{dy}{dx}$ $\qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

数学知识：微分

- **基本公式：**

$$\left(x^{n}\right)' = nx^{n-1}$$

$$\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a, \qquad \left(e^{x}\right)' = e^{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

$$(\cos x)' = -\sin x, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^{2} x}, \qquad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^{2}}$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^{2} x}, \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^{2}}$$

$$(\log_{a} x)' = \frac{1}{x\ln a} \quad (a>0), \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

数学知识：微分

- 从参变数表示的函数：

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha < t < \beta)$$

$$y = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

数学知识：积分

- 不定积分：

若 $F'(x) = f(x)$ 则 $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

- 性质：

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

$$\int\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]dx = \int f'(x)dx = f(x) + C$$

$$\int\left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int af(x)dx = a\int f(x)\,dx$$

第一章

质点运动学

- **运动学**：研究物体运动的几何性质，而不研究引起物体运动的原因。（位置，轨迹，距离，位移，速度，加速度等的描述和计算）
- **静力学**：研究物体在力系作用下的平衡规律，同时也研究力的一般性质和力系的简化方法等。（平衡方程的应用和受力分析）
- **动力学**：研究受力物体的运动变化与作用力之间的关系。（运动微分方程的建立和求解）

牛顿力学的适用范围：弱引力场中宏观物理的低速运动

一、质点和参考系

1、质点

- 实际物体：具有大小、形状，其运动可能有移动、转动、形变。物体上各点的运动情况可能是不同的，非常复杂（如火车运动）。

- 为了使描述简化，分清主次，引入“质点模型”。
  - **质点：有质量，没有体积，是一个理想模型。**

- 忽略了物体的形状、大小所产生的效果，突出了**质量**、**位置**和**力**三者之间的**主要矛盾**。

- 条件（满足其中一条）：

  ① 物体本身的几何线度比所研究问题中的线度小得多。

  ② 物体只有平移运动——平动。

- 实际问题中，先看作质点，然后再考虑形状、大小，对结论进行修正。

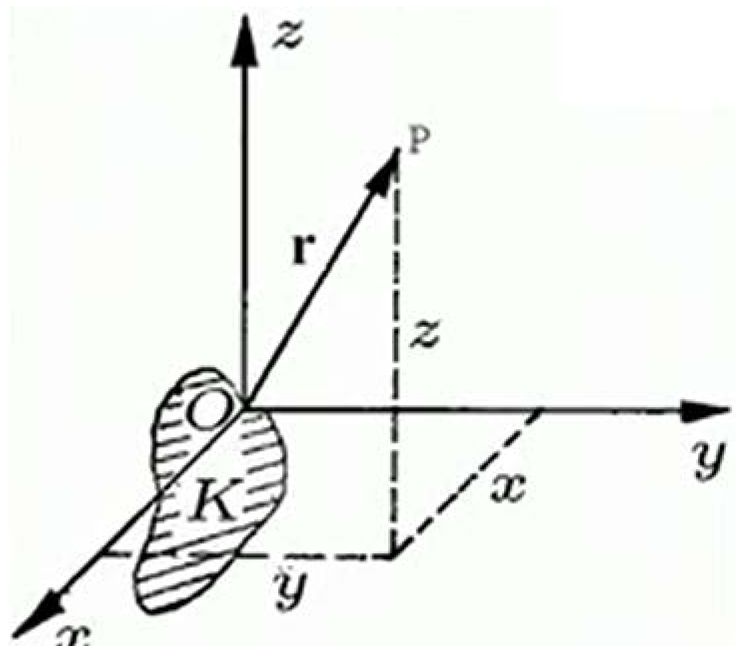
理论依据：质心运动定理

2、参考系

- **参考物**：为了研究运动，固定坐标系的物体

- **参考坐标系**：参考系=参考物+坐标架+钟

René Descartes (1596-1650)



$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

- 运动是绝对的，静止是相对的
  - ✓ 描述一个物体的运动，必须指明是以哪一个物体为参考系，这个被选作参考的物体就叫做<u>参考系</u>。
  - ✓ 运动的描述具有相对性——选不同的参照系，对物体所作的运动描述也不同。
  - ✓ 原则上参照系的选择是任意的，一般以便于描述所研究的对象为前提。

参考系的选择是任意的，对于同一个质点的位置，用不同参考系来描写时，则具有不同的位置矢量。就这一点，我们可以说，位置是具有相对性的物理量。

- 为了定量描述任一时刻物体的准确位置，需要建立一个坐标系。
  - 坐标系是固定在参照系上的。
  - 坐标系的种类很多：直角坐标、极坐标、球坐标、柱坐标、自然坐标系。以描述方便为前提。
  - 坐标系可看做是参照系的数学抽象。指明了坐标系也就确定了参照系。

二、轨迹、位移矢量与运动方程

1. 轨迹

质点在运动中所经历的各点在空间连成一条曲线，这条曲线我们称之为轨迹。

轨迹——运动的记录

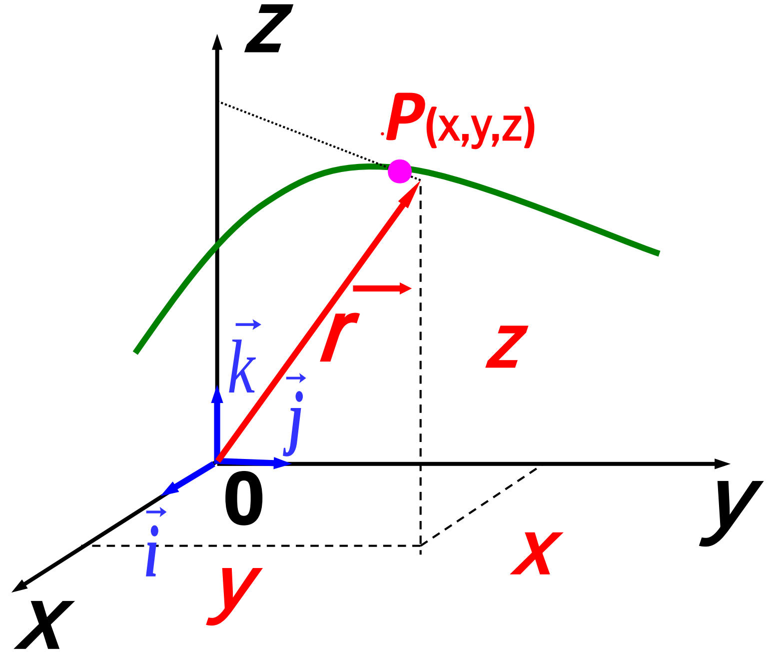
部分信息

2、位置矢量

- 在直角坐标系中，$\vec{r}$ 可以用三个坐标轴的分量表示：

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

（ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 为三坐标轴方向的单位矢量，是常矢量）



3、质点的运动方程

当质点在空间移动时，质点的位置矢量随时间发生变化：

$$\vec{r} = \vec{r}(\mathrm{t})$$

分量式 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

- 由质点的运动方程可以得到质点的全部运动信息：轨迹、速度、加速度

例：质点的运动学方程为：

$$x = R\cos(t)$$
$$y = R\sin(t)$$

$$\vec{r} = Rcos(t)\,\vec{i} + Rsin(t)\,\vec{j}$$

<u>坐标表示的运动方程</u>，消去 t 就可得到<u>轨迹方程</u>:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

- 运动方程的性质：

  – 单值的（某一时刻只能有一个位置）

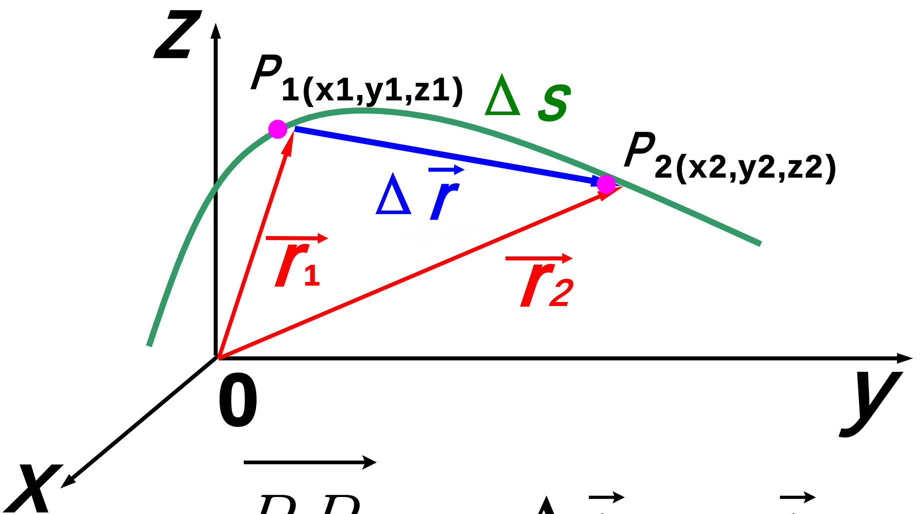
  – 连续的（质点运动是不间断的）

  – 可微的（质点运动一定有瞬时速度）

三、由位移求速度和加速度（重点）

1、位移与路程

- 位移：由起点指向终点的**矢量**，表示位置的变化。
- 路程：由起点到终点质点运动的实际路径长度，**标量**。



$$\overrightarrow{P_1P_2} = \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$ ——位移

$$\Delta s = \overset{\frown}{P_1P_2}$$ ——路程

- 位移矢量：只表示某段时间内位置的变化，不反映运动的过程。
  - 大小为起点到终点的直线距离，方向为从起点指向终点，单位：SI，m(米)
- 用坐标表示：
- 位置矢量：

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$

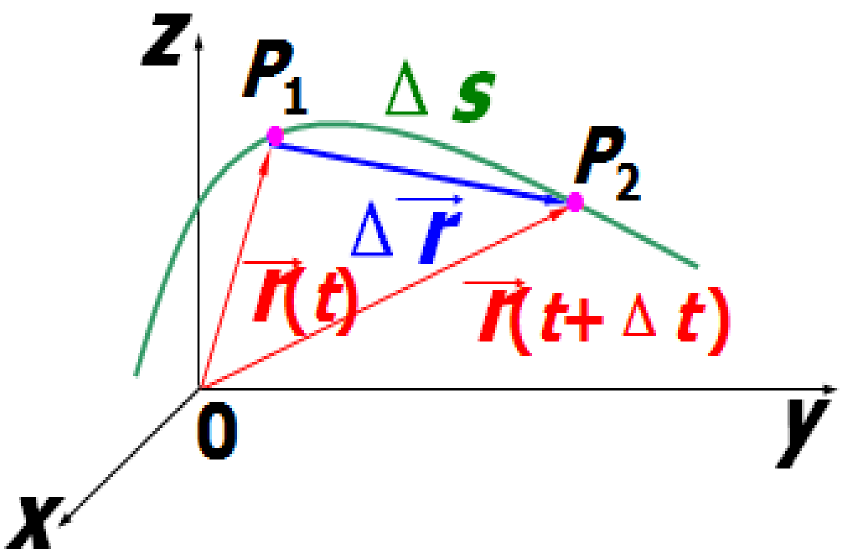
$$\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

- 位移：

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

位移和路程的关系：

位移为矢量，路程为标量，且一般情况下大小也不同。



- 由图可见，$\left|\Delta\vec{r}\right| \neq \Delta s$
- 二者相同的条件：

① 当 $\Delta t \to 0$ $\left|\Delta\vec{r}\right| = \Delta s$,

$$ds = \left|d\vec{r}\right|$$

② 始终沿一个方向的直线运动

2、速度

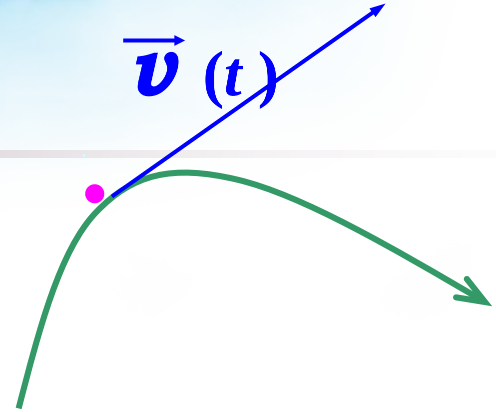
设 $t \to t+\Delta t$ 时间间隔内，位移矢量

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

速度是位移对时间的变化率：

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}$$

速度就是运动方程对时间求导数运算。



- 速度方向：沿轨迹切线方向。
- 速度大小：速率（标量），用v表示。

$$v = |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}$$

又$\because$ $\Delta t \to 0$时 $|\Delta \vec{r}| = \Delta s$ ，

$$\therefore \quad v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$ 路程对时间的一阶微商

- 在直角坐标系下：

$$\vec{v} = \frac{d\,\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} + v_z\,\vec{k}$$

- 分量形式为：

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$v_z = \frac{dz(t)}{dt}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

- 例题、质点的运动学方程为：

$$\vec{r} = 10\,\vec{i} + 15t\,\vec{j} + 5t^2\,\vec{k}$$

求：$t = 0,1$秒时的速度。

- 例题、质点的运动学方程为：

$$\vec{r} = 10\,\vec{i} + 15t\,\vec{j} + 5t^2\,\vec{k}$$

求：$t = 0,1$秒时的速度。

解：

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(10\vec{i} + 15t\vec{j} + 5t^2\vec{k}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}10\vec{i} + \frac{d}{dt}15t\vec{j} + \frac{d}{dt}5t^2\vec{k}$$

$$= 15\vec{j} + 10t\vec{k}$$

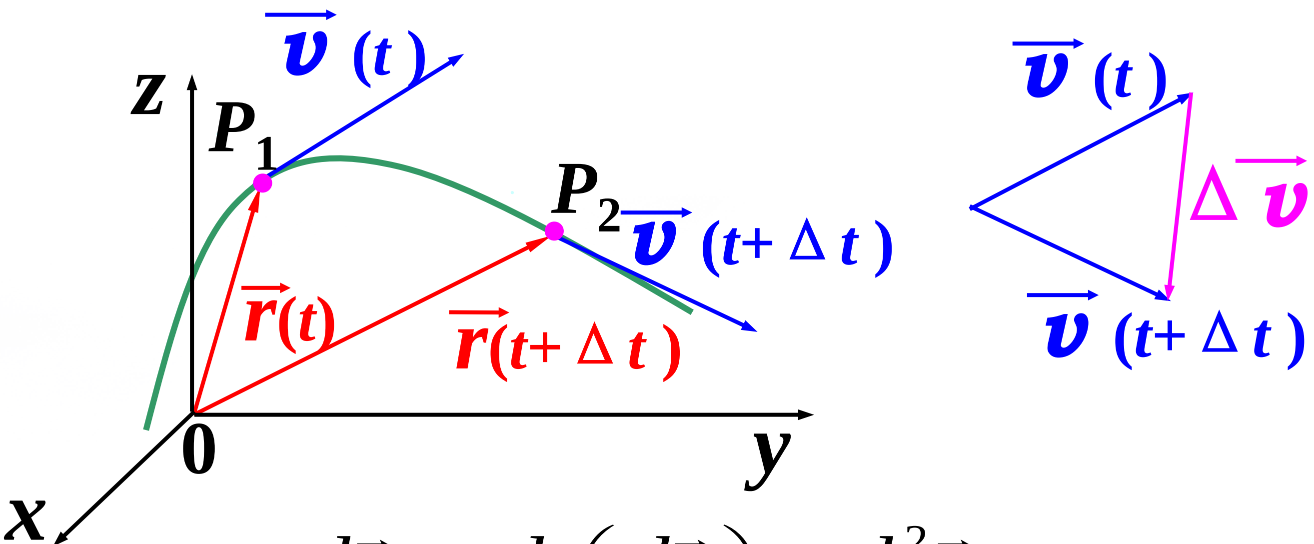
$$t = 0: \quad \vec{v} = 15\vec{j}$$

$$t = 1: \quad \vec{v} = 15\vec{j} + 10\vec{k}$$

3、 加速度

质点速度对时间的变化率叫加速度。

加速度就是速度对时间求导数运算；也是运动方程对时间求二阶导数。

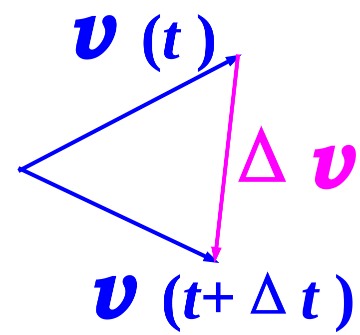


$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

➢ 关于加速度的说明：

1）$\vec{a}$ 是一矢量，方向同 $\Delta t \to 0, \Delta\vec{v}$ 的极限方向

直线运动：$\vec{a}$ 与 $\vec{v}$ 方向相同或相反；曲线运动：$\vec{a}$的方向偏向轨道凹的一侧。



2）在直角坐标系下加速度表示为：

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$= \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

➢ 关于加速度的说明：

2）写成分量形似：

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

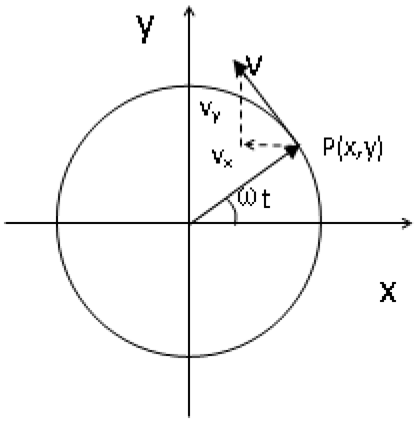
加速度的大小： $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

3）SI中，$\vec{a}$ 的单位是 m/s^2

例题1.1，1.4（P.6；P.15）

一质点作匀速圆周运动，半径为R，角速度为ω

求：直角坐标系中的运动方程，速度，加速度



例题1.1，1.4（P.6；P.15）

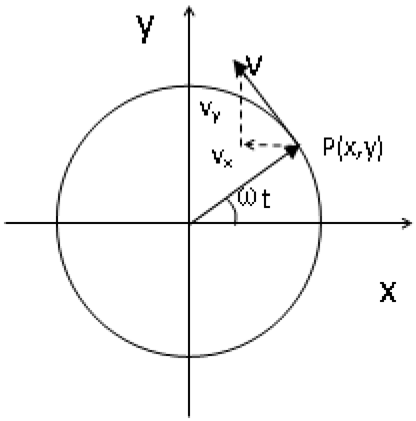
一质点作匀速圆周运动，半径为*R*，角速度为ω

求：直角坐标系中的运动方程，速度，加速度

解：运动方程：

$$x = R\cos(\omega t)$$

$$y = R\sin(\omega t)$$



消去时间*t*，得到轨迹方程：

$$x^2 + y^2 = R^2$$ 圆周运动

运动方程对时间求导得速度：

$$v_x = -R\omega\sin(\omega t) \boxed{= -V\sin(\omega t)}$$

$$v_y = R\omega\cos(\omega t) \boxed{= V\cos(\omega t)}$$

$$V = R\omega$$

速度的大小： $V^2 = v_x^2 + v_y^2$ $V = R\omega$

速度对时间求导得加速度： $a_x = -R\omega^2\cos(\omega t)$

$$a_y = -R\omega^2\sin(\omega t)$$

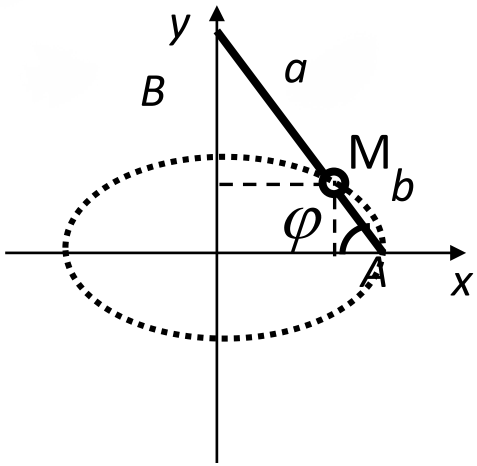
$$a^2 = a_x^2 + a_y^2$$

$$a = R\omega^2 = \frac{R^2\omega^2}{R} = \frac{V^2}{R}$$ 向心加速度

例题1.2，1.6（P.7；P.17）（重点）

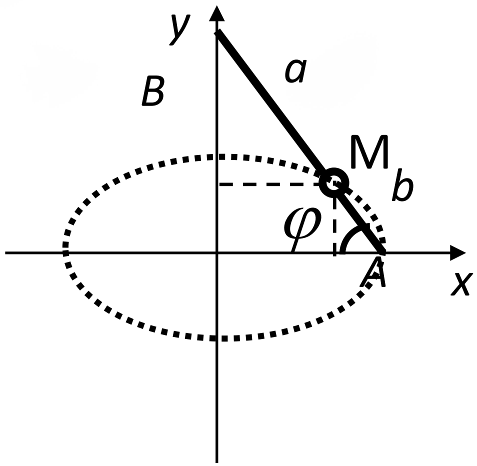
直杆AB两端可以分别在两固定且相互垂直的直导线槽上滑动，已知杆的倾角$\varphi = \omega t$随时间变化，其中ω为常量。

求：杆中M点的运动学方程。



例题1.2，1.6（P.7；P.17）（重点）

直杆AB两端可以分别在两固定且相互垂直的直导线槽上滑动，已知杆的倾角$\varphi = \omega t$随时间变化，其中ω为常量。



求：杆中M点的运动学方程。

解：运动学方程：

$$x = a\cos(\omega t)$$

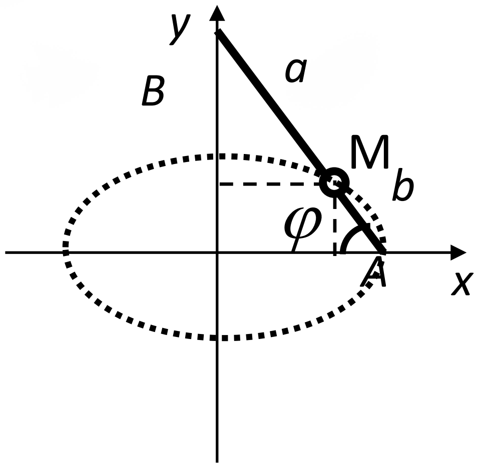
$$y = b\sin(\omega t)$$

消去时间t得到轨迹方程：$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ 椭圆

运动学方程对时间t求导数得速度：

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -a\omega\sin(\omega t)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = b\omega\cos(\omega t)$$



速度对时间t求导数得加速度：

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -a\omega^2\cos(\omega t)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -b\omega^2\sin(\omega t)$$

$$a = -\omega^2\left(a\cos\omega t\vec{i} + b\sin\omega t\vec{j}\right) = -\omega^2\vec{r}$$

例题1.3，1.5，1.7（P.7；P.16；P.18）

已知：运动学方程：

$$x = -0.31t^2 + 7.2t + 28$$

$$y = 0.22t^2 - 9.1t + 30$$

求：$t = 15s$时的位置矢量，方向，速度和加速度。

例题1. 3，1. 5，1. 7（P. 7；P. 16；P. 18）

已知：运动学方程： $x = -0.31t^2 + 7.2t + 28$

$$y = 0.22t^2 - 9.1t + 30$$

求：$t = 15s$时的位置矢量，方向，速度和加速度。

解：$t = 15s$时，x = -0.31×15²+7.2×15+28=66

y = 0.22×15²-9.1×15+30=-57

$$\vec{r} = 66\vec{i} - 57\vec{j}$$

r的大小为： $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{66^2 + (-57)^2} = 87$

r的方向可用r与x轴正方向的夹角表示为：

$$\theta = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{-57}{66} = -41^o$$

运动学方程对时间t求导数得速度：

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-0.31t^2 + 7.2t + 28\right) = -0.62t + 7.2$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(0.22t^2 - 9.1t + 30\right) = 0.44t - 9.1$$

$$\vec{v} = \left(-0.62t + 7.2\right)\vec{i} + \left(0.44t - 9.1\right)\vec{j}$$

t =15s时，$\vec{v} = \left(-0.62\times15 + 7.2\right)\vec{i} + \left(0.44\times15 - 9.1\right)\vec{j} = -2.1\vec{i} - 2.5\vec{j}$

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = 3.3$$

$$\theta = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\frac{-2.5}{-2.1} = -130^o$$

速度对时间t求导数得加速度：

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-0.62t + 7.2\right) = -0.62 \quad (m/s^2)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}\left(0.44t - 9.1\right) = 0.44 \quad (m/s^2)$$

$$\vec{a} = -0.62\vec{i} + 0.44\vec{j}$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = 0.76 \quad (m/s^2)$$

$$\theta = \arctan\frac{a_y}{a_x} = \arctan\frac{0.44}{-0.62} = 145^o$$

四、 由加速度求速度、位移

- 问：如果知道质点的加速度，能否确定质点的速度？
- 实例：自由落体实验
- (1) 自由落体；(2) 上抛；(3) 下抛

四、 由加速度求速度、位移

- ➢ 问：如果知道质点的加速度，能否确定质点的速度？
- 实例：自由落体实验
- (1) 自由落体；(2) 上抛；(3) 下抛
- ➢ 已知质点的**加速度**和质点的**初始速度**，则可运用导数的逆运算——不定积分+初条件，确定质点的速度。
- ➢ 已知质点的**速度**和质点的**初始位置**，则可运用导数的逆运算——不定积分+初条件，确定质点的运动学方程。

南開大學 Nankai University

- 例题、已知：$a=100-4t^2$ ，且 $t=0,\quad v=0,\quad x=0$

求：速度*v*和运动方程

- 例题、已知：$a = 100 - 4t^2$ ，且 $t = 0, \quad v = 0, \quad x = 0$

求：速度*v*和运动方程

解：$$v = \int a dt = \int \left(100 - 4t^2\right) dt = 100t - \frac{4}{3}t^3 + C$$

$t = 0$ 时， $v = 0$, 得：C = 0

$$\therefore \quad v = 100t - \frac{4}{3}t^3$$

$$x = \int v dt = \int \left(100t - \frac{4}{3}t^3\right) dt = 50t^2 - \frac{1}{3}t^4 + C'$$

$t = 0$ 时， $x = 0$, 得：C’ = 0

$$\therefore \quad x = 50t^2 - \frac{1}{3}t^4$$

五、几种典型的质点运动

一、直线运动：

运动轨迹为直线的运动，是最简单、最基本的一种质点运动。

- 简单：可用一个坐标表示、矢量可表示为标量
- 基本：曲线运动可分解为直线运动

即由运动方程可直接求出速度、加速度与时间的函数关系。

$$x = x(t), v = \frac{dx}{dt}, a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

南開大學 Nankai University

（1）如何由速度求运动方程:

即已知v=v(t),求x(t)=?

初始条件：当t=0时， $x = x_0$

$$\because v = \frac{dx}{dt} \therefore dx = vdt$$

$$\therefore \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t vdt$$

$$\therefore x - x_0 = \int_0^t vdt \therefore x = x_0 + \int_0^t vdt(\text{一般})$$

- 对于匀速直线运动，v为常数 $\therefore x = x_0 + vt$

  如起始位置为坐标原点，即t=0， $x_0 = 0$ 则 x=vt

(2)如何由加速度求运动方程:

即已知a=a(t)，求x(t)=?

初始条件： $t=0, x=x_0, v=v_0$

$$\because a=\frac{dv}{dt}, \quad \therefore dv=adt, \quad \therefore \int_{v_0}^{v} dv=\int_0^t adt, \quad \therefore v=v_0+\int_0^t adt\left(\text{一般}\right)$$

$$\therefore x=x_0+\int_0^t\left(v_0+\int_0^t adt\right)dt=x_0+v_0t+\int_0^t\int_0^t adtdt$$

- 对于匀变速直线运动: a=常数

$$v=v_0+at\left(\text{匀变速直线}\right) \qquad x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

如初始位置为坐标原点，则 $x_0=0$

$$\therefore x=v_0t+\frac{1}{2}at^2\left(\text{匀变速直线，}x_0=0\right)$$

(3)匀变速直线运动：速度与位置的关系

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore\ a dx=v dv$$

$$\therefore\ \int_{x_0}^{x} a dx=\int_{v_0}^{v} v dv$$

$$\therefore\ a(x-x_0)=\frac{1}{2}\left(v^2-v_0^2\right)$$

即 $v^2-v_0^2=2a(x-x_0)$(匀变速直线)

当 $x_0=0$ 时，$v^2-v_0^2=2ax$(匀变速直线, $x_0=0$)

□举例：

1）自由落体：

忽略空气阻力，为匀加速直线运动，

$$a = g = 9.81 m/s^2$$

初始条件：t=0时，y=0，

$$v_0 = 0$$

$$\begin{cases} v = gt \\ y = \dfrac{1}{2}gt^2 \\ v^2 = 2gy \end{cases}$$

0

y

2）竖直上抛

忽略空气阻力，为匀加速直线运动，

$$a = -g$$

初始条件：$t = 0$时，$y = 0$，

$$v = v_0$$

$$\begin{cases} v = v_0 - gt \\ y = v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2 \\ v^2 - v_0^2 = -2gy \end{cases}$$

y

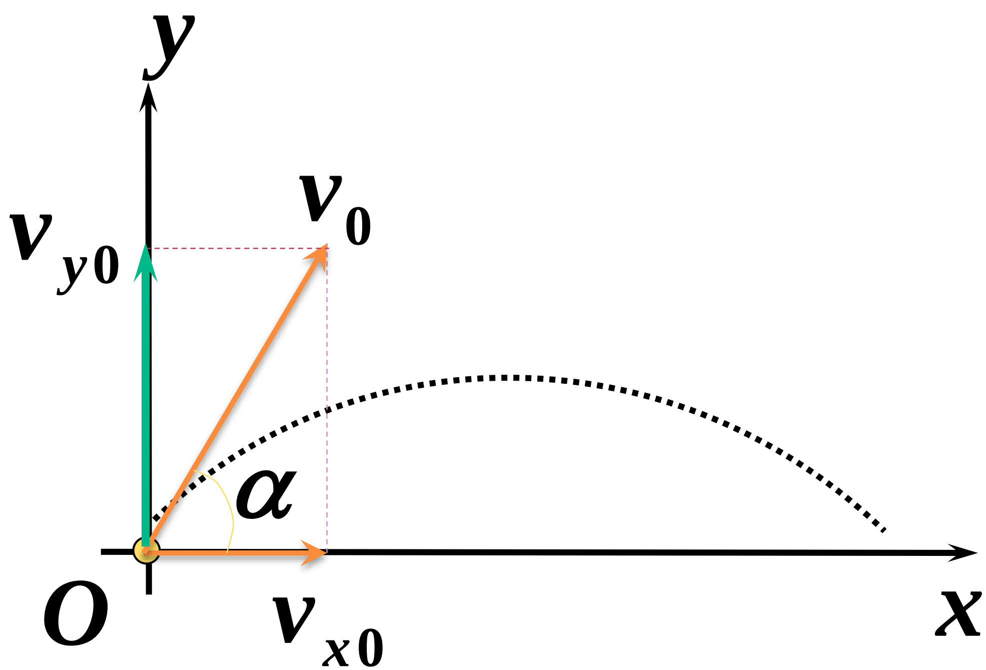
0

- 从地上基点把一物体以某一角度投射出去，如忽略空气阻力，物体在空中的运动就叫抛物运动。抛物运动属二维运动。

a. x、y方向是直线运动

b. 运动方程：

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$



□ 在x，y方向上，分别可直接应用直线运动的结论：

✓X方向：$a_x = 0$ 匀速直线运动　初始条件：

$$t = 0\text{时}, x = 0, v_{x_0} = v_0 \cos\alpha$$

✓Y方向：$a_y = -g$ 匀变速运动　初始条件：

$$t = 0\text{时}, y = 0, v_{y_0} = v_0 \sin\alpha$$

速度方程：
$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = v_0 \sin\alpha - gt \end{cases}$$

运动方程：
$$\begin{cases} \mathrm{x} = v_0 \cos\alpha \bullet t \\ \mathrm{y} = v_0 \sin\alpha \bullet t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

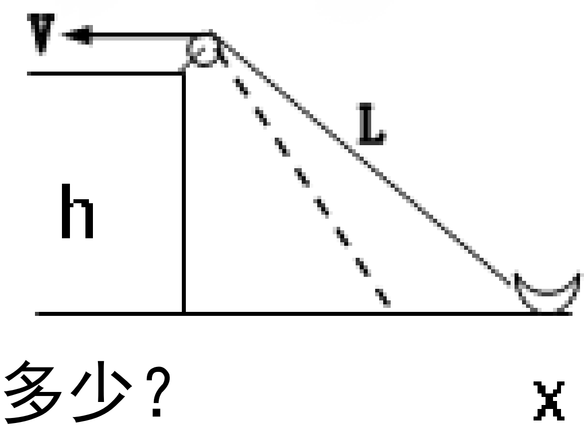
南開大學 Nankai University

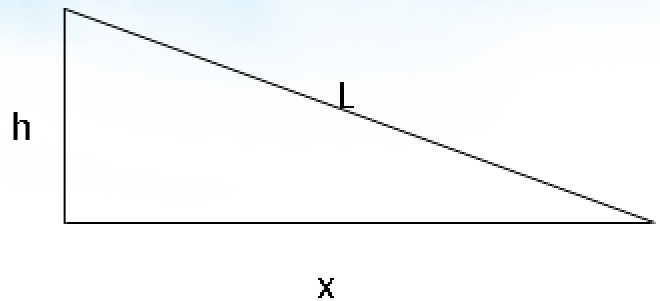
➢ 例题（重点）

- 在湖中有一小船，岸边有人用绳子跨过一高处的滑轮拉船靠岸，当绳子以v通过滑轮时，
- 求：船速比v大还是比v小？

  若v不变，船是否作匀速运动？

  如果不是匀速运动，其加速度是多少？





$$l=\left(h^2+x^2\right)^{1/2}$$

$$v=\frac{dl}{dt}=\frac{1}{2}\frac{2x}{(h^2+x^2)^{1/2}}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{(h^2+x^2)^{1/2}}{x}v$$

当x>>h时，dx/dt＝v，船速＝绳速
当x→0时，dx/dt→∞

加速度：

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left[\frac{(h^2+x^2)^{1/2}}{x}v\right]$$

$$=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{x}\bullet(h^2+x^2)^{1/2}v\right]$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\bullet(h^2+x^2)^{1/2}v\frac{dx}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d(h^2+x^2)^{1/2}}{dx}v\frac{dx}{dt}$$

$$=-\frac{1}{x^2}\bullet(h^2+x^2)^{1/2}v\frac{dx}{dt}+\frac{1}{x}\frac{1}{2}\frac{2x}{(h^2+x^2)^{1/2}}v\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{(h^2+x^2)^{1/2}}{x}v$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{1}{x^2}\bullet(h^2+x^2)^{1/2}v\frac{(h^2+x^2)^{1/2}}{x}v+\frac{1}{x}\frac{1}{2}\frac{2x}{(h^2+x^2)^{1/2}}v\frac{(h^2+x^2)^{1/2}}{x}v$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{(h^2+x^2)}{x^3}v^2+\frac{v^2}{x}=-\frac{h^2v^2}{x^3}$$

分析：

当x→∞, $\frac{d^2x}{dt^2}=0$

五、自然坐标系中运动的描述：

- 有时直角坐标系不是最好的坐标系，这是因为：

✓ 若我们研究的运动是受约束的运动，比如火车的行驶（它不能离开轨道），或穿在弯曲钢丝上的小环的运动等。这类运动往往轨迹的形状是给定的，由于约束力的参与（本章我们不讨论力，仅研究运动），加速度往往与轨迹上点的位置有关（有时还与质点在该点速度有关），此时运动往往不具有独立性。沿轨迹的曲线坐标系有可能是更好的坐标系。

✓ 即使我们研究运动是独立性有效的运动，使用直角坐标系使得数学运算简单了，但我们对其中的一些物理细节并不是很清楚。比如，我们知道速度的方向是沿着轨迹上质点所在位置的切线方向，但加速度的方向如何？加速度的方向对速度又有何影响？

用自然坐标表示平面曲线运动中的速度和加速度

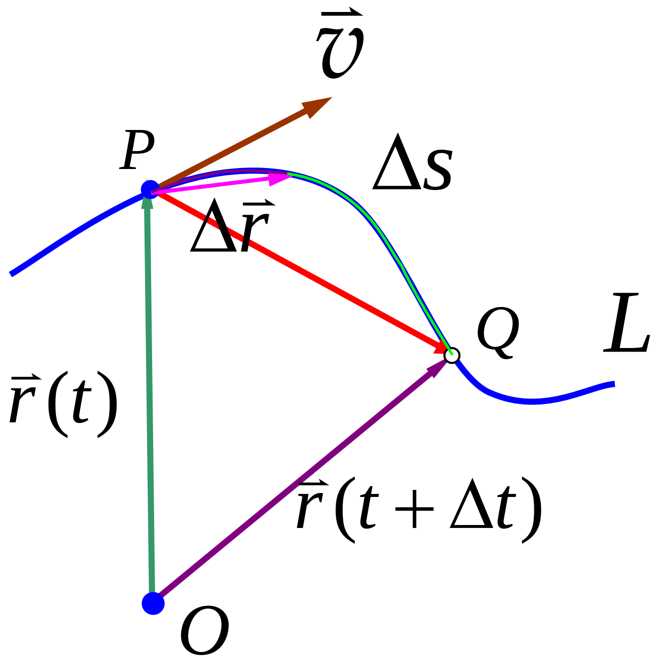
一、速度

$$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$$

$$= \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}\right)\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}v$$



$\Delta t \to 0$ 时，$\Delta \vec{r}$沿切线方向，即$\mathrm{d}\vec{r}$沿着轨迹的切线方向。

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} v$$

因为$\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = \mathrm{d}s$, $\mathrm{d}\vec{r}$沿着轨迹的切线方向，

所以$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}$是沿着切线方向的单位矢量。记做 $\boldsymbol{\tau}$

$$\therefore \vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} = v\vec{\tau}$$

圆周运动的角量描述 角量与线量关系

θ – 角坐标

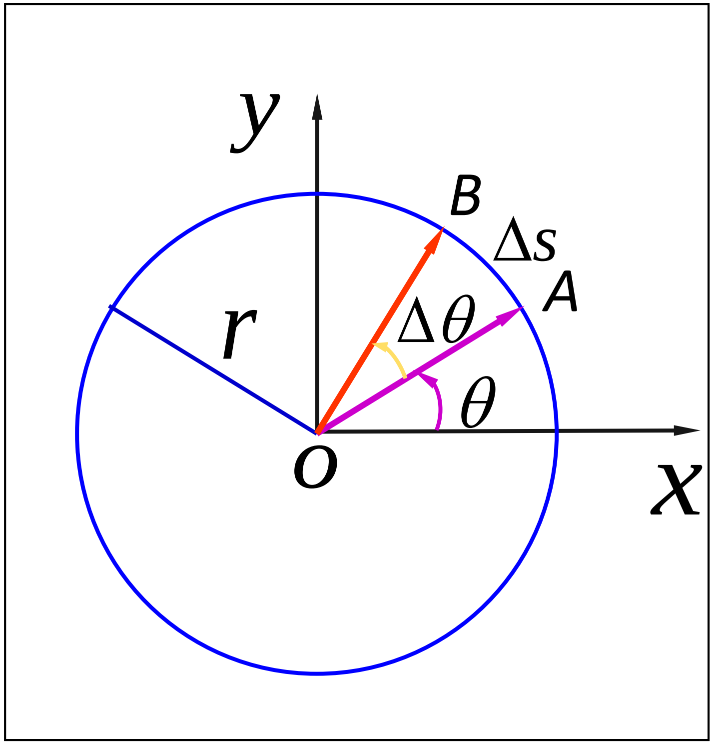
$\Delta\theta$ – 角位移

平均角速度

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

角速度

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$



平均角加速度 $$\bar{\beta} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

角加速度 $$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

角量与线量的关系

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} r = r\omega$$

$$\boldsymbol{v = r\omega}$$

匀变速率圆周运动

$$\beta = \frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,t} = \text{常量}$$

$$\mathrm{d}\omega = \beta \mathrm{d}t \quad , \quad \int_{\omega_0}^{\omega} \mathrm{d}\,\omega = \int_0^t \beta \mathrm{d}\,t$$

如 t =0 时, $\theta = \theta_0 \, , \omega = \omega_0$

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \beta t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 \\ \omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

与匀变速率直线运动类比

$$
\begin{cases}
\omega = \omega_0 + \beta t \\
\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 \\
\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta(\theta - \theta_0)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
v = v_0 + at \\
s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\
v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)
\end{cases}
$$

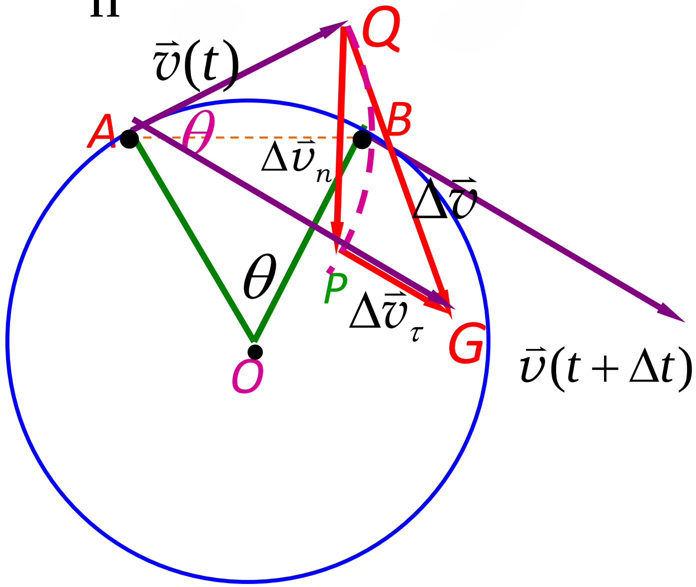
圆周运动中的加速度

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n$$

根据加速度定义

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\vec{v}}_\tau}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\vec{v}}_n}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$



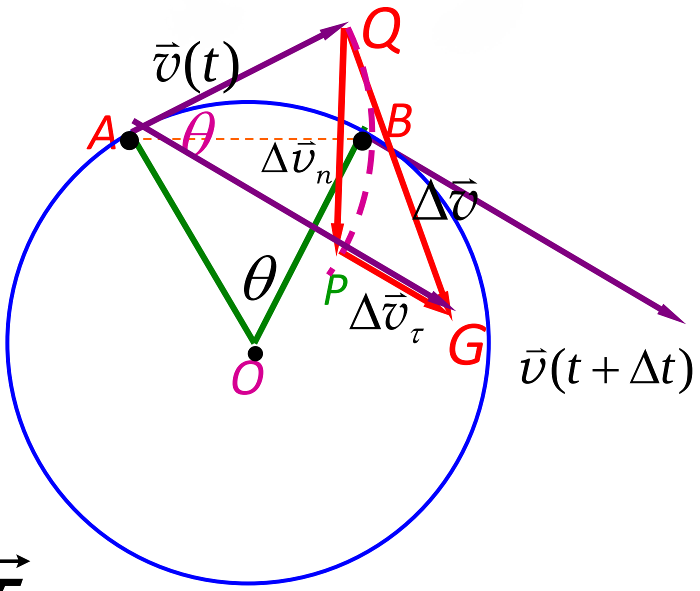
分析可知 $\vec{a}_n$ 永远指向圆心；$\vec{a}_\tau$ 沿着圆周的切线方向

$\vec{a}_n$ 反映速度方向变化的快慢　法向加速度

$\vec{a}_\tau$ 反映速度大小变化的快慢　切向加速度

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_\mathrm{n}$$

$$\therefore \mathrm{d}\vec{v} = \mathrm{d}\vec{v}_\tau + \mathrm{d}\vec{v}_\mathrm{n}$$



分析$\Delta t \to 0$的极限情形，可得：

$$\mathrm{d}\vec{v}_\tau = (\mathrm{d}v)\vec{\tau} \quad ; \quad \mathrm{d}\vec{v}_\mathrm{n} = v(\mathrm{d}\theta)\vec{n}$$

$$\therefore \vec{a}_\tau = \frac{d\vec{v}_\tau}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} = r\beta\vec{\tau} = a_\tau\vec{\tau}$$

$$\vec{a}_n = \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \frac{v d\theta}{dt}\vec{n} = v\omega\vec{n} = \frac{v^2}{r}\vec{n}$$

$$\vec{a} = a_n \vec{n} + a_\tau \vec{\tau} = \frac{v^2}{r} \vec{n} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \vec{\tau}$$

加速度的大小和方向分别为

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

$$\tan\theta = \frac{a_n}{a_\tau}$$

切向加速度（速度大小变化引起）

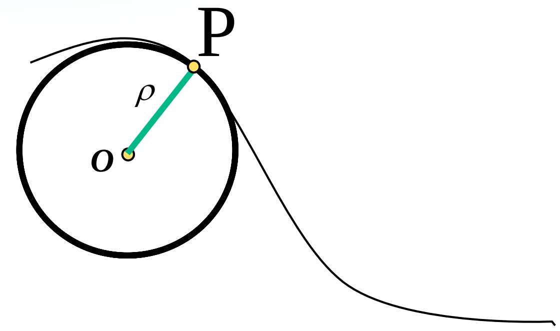
$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{\omega r})}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r\beta$$

法向加速度（速度方向变化引起）

$$\boldsymbol{a_n} = v\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{r}$$

南開大學 Nankai University

三、一般平面曲线运动中的加速度



- 对于曲线上的一点P，我们可以在曲线内侧作一个最大的内切圆，与曲线切与P点，这个圆叫做曲线在P点的曲率圆。
- 曲率圆的半径为曲线在P点的曲率半径 ρ 。

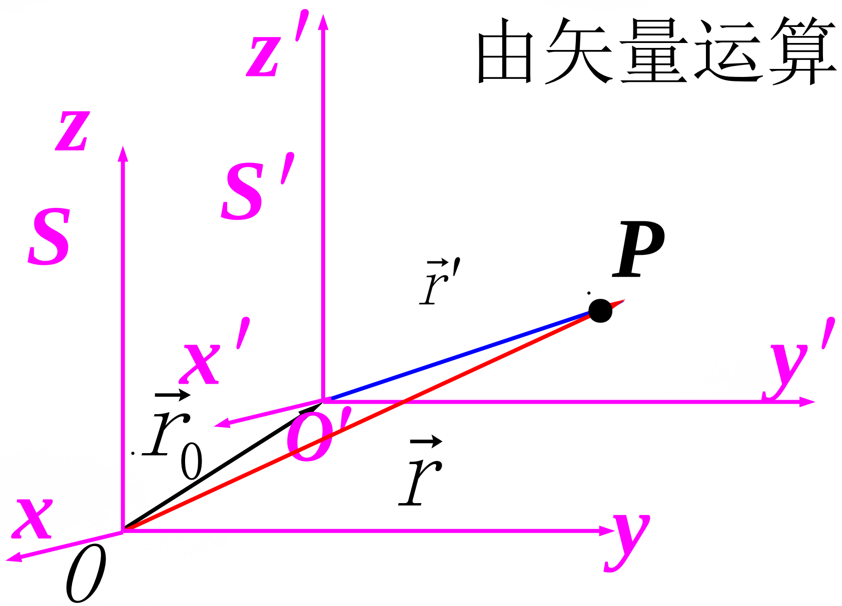
$$\vec{a}_n = a_n \vec{n} = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

$$\vec{a}_\tau = a_\tau \vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$$

$$\vec{a} = a_n \vec{n} + a_\tau \vec{\tau} = \frac{v^2}{\rho}\vec{n} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$$

六、相对运动

设两个参考系有相对运动，即S'相对于S 以速度 $\vec{v}_0$ 平动的情形，考察质点P的运动。



由矢量运算法则有： $\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'}$

$\vec{r}_0$ 是S'相对于S的位矢。

两边对时间微商：

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

即 $\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'}$ 相对平动参照系中的速度变换格式。

$\vec{v}$ ——绝对速度，是P相对于静止参照系S的速度

$\vec{v}_0$——牵连速度，是 S' 相对于S的速度

$\vec{v}'$——相对速度，是P相对于运动参照系 S' 的速度

两边再对时间微商：

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt}$$

即 $\boxed{\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'}$ 加速度变换式

$\vec{a}$ ——绝对加速度

$\vec{a}_0$——牵连加速度

$\vec{a}'$——相对加速度

例题：

在河水流速2m/s的地方有一小船渡河。如果希望小船以4m/s的速度垂直于河岸横渡，问小船上的指示速率应为多大，船头应指向何方？

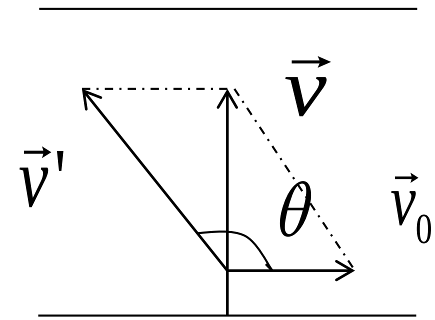
例题：

在河水流速2m/s的地方有一小船渡河。如果希望小船以4m/s的速度垂直于河岸横渡，问小船上的指示速率应为多大，船头应指向何方？

解：

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0$$



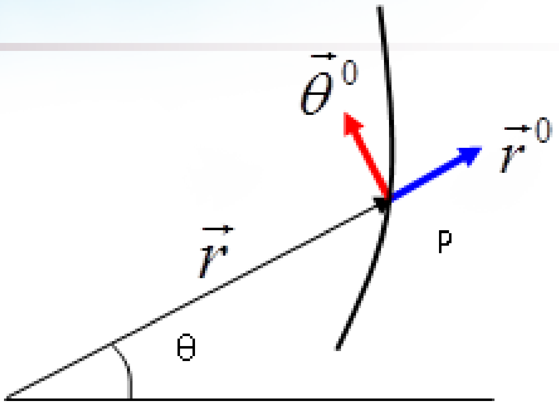
$$v' = \sqrt{v^2 + v_0^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4.47m/s$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} + arctg\frac{v_0}{v} = \frac{\pi}{2} + arctg\frac{2}{4} = 116.6^\circ$$

作业

P49　T1.6　T1.7　T1.8　T1.24　T1.27

➢ 补充内容



- **平面极坐标系中运动的描述**
- **平面极坐标：**

  质点P的位置用(r,θ)表示

- 平面极坐标中基矢量：

  $\vec{r}^0$ 大小：1；方向：$\vec{r}$

  $\vec{\theta}^0$ 大小：1；方向：与 $\vec{r}$垂直，以 θ增大方向为正

- 平面极坐标中P点的位置矢量 $\vec{r}$ 表示为：

$$\vec{r} = r\vec{r}^0$$ ——— 运动学方程

其中r表示 $\vec{r}$的大小，$\vec{r}^0$表示 $\vec{r}$ 的方向。

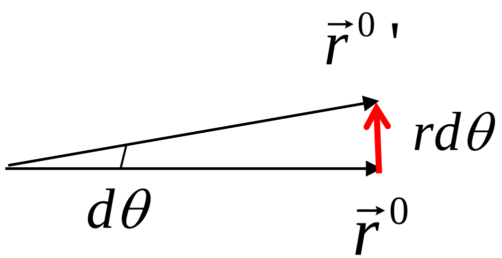
南開大學 Nankai University

- P点的速度

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d(r\vec{r}^{\,0})}{dt}=\frac{dr}{dt}\vec{r}^{\,0}+r\frac{d\vec{r}^{\,0}}{dt}$$

- 基矢量的导数：

$d\vec{r}^{\,0}$ 的大小：$rd\theta$

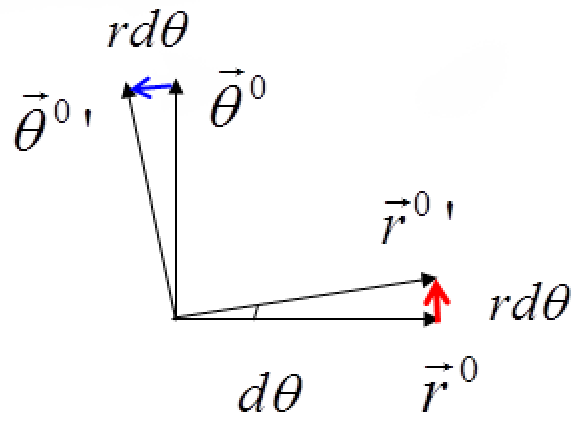


其中r＝1 ∴大小：$d\theta$

方向：$\vec{\theta}^{\,0}$

∴ $$\frac{d\vec{r}^{\,0}}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\vec{\theta}^{\,0}$$

$d\vec{\theta}^0$ 的大小： $rd\theta$



其中r＝1 ∴大小：$d\theta$

方向： $-\vec{r}^0$

$$\therefore \quad \frac{d\vec{\theta}^0}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{r}^0$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{r}^0 + r\frac{d\vec{r}^0}{dt}$$

$$= \frac{dr}{dt}\vec{r}^0 + r\frac{d\theta}{dt}\vec{\theta}^0$$

$$v_r = \frac{dr}{dt}$$ 径向速率

$$v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$$ 横向速率

例题

设质点在匀速转动（角速度为ω）的水平转盘上从开始自中心出发，以恒定的速率u沿一半径运动，求质点的轨迹，速度和加速度。

例题

设质点在匀速转动（角速度为ω）的水平转盘上从开始自中心出发，以恒定的速率u沿一半径运动，求质点的轨迹，速度和加速度。

解：选极坐标

运动学方程：

$$\begin{cases} r = ut \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_r = \dfrac{dr}{dt} = u \\ v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt} = r\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_r = \dfrac{dr}{dt} = u \\ v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt} = r\omega \end{cases}$$

$$a(t) = -r\omega^2\hat{r} + 2u\omega\hat{\theta}$$

轨迹方程： $r = \dfrac{u}{\omega}\theta$

此曲线为阿基米德螺线。

Nankai University 南開大學

$$\begin{cases} v_r = \dfrac{dr}{dt} = u \\ v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt} = r\omega \end{cases}$$

$$a(t) = -r\omega^2\hat{r} + 2u\omega\hat{\theta}$$

轨迹方程：$$r = \frac{u}{\omega}\theta$$

此曲线为阿基米德螺线。