第十一次作业 参考答案

12.11 - 12.17

习题 5.4 A 类

2

解:

M 点处切线为 $y+3=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} x$ 即 $y=4x-3$.

N 点处切线为 $y=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3}(x-3)$ 即 $y=-2x+6$.

由 $\begin{cases} y=4x-3 \\ y=-2x+6 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=3 \end{cases}$ 即这两条切线交于 $(\frac{3}{2},3)$。

$$
\begin{aligned}
\text{故} S &= \int_0^{\frac{3}{2}} \left[(4x-3)-\left(-x^2+4x-3\right)\right] dx + \int_{\frac{3}{2}}^{3} \left[(-2x+6)-\left(-x^2+4x-3\right)\right] dx \\
&= \int_0^{\frac{3}{2}} x^2 dx + \int_{\frac{3}{2}}^{3} \left(x^2-6x+9\right) dx \\
&= \left.\frac{1}{3}x^3\right|_0^{\frac{3}{2}} + \left.\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right)\right|_{\frac{3}{2}}^{3} \\
&= \frac{9}{4}.
\end{aligned}
$$

9

解:

由于 $r_2=a\left(1+\sin^2 2\theta\right) \geqslant a=r_1$.

$$
\begin{aligned}
\text{故} S &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(r_2^2-r_1^2\right) d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\left(\sin^4 2\theta+2\sin^2 2\theta\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\left(\frac{11}{8}+\frac{1}{8}\cos 8\theta-\frac{3}{2}\cos 4\theta\right) d\theta \\
&= \left.\frac{1}{2}a^2\left(\frac{11}{8}\theta+\frac{1}{64}\sin 8\theta-\frac{3}{8}\sin 4\theta\right)\right|_0^{2\pi} \\
&= \frac{11}{8}\pi a^2.
\end{aligned}
$$

13

解:

$$
\begin{aligned}
V&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(y_2^2-y_1^2\right)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 x\right)dx\\
&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx\\
&=\pi\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}
$$

19

解:

$$
\begin{aligned}
L&=\int_1^3\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx=\int_1^3\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)^2}dx\\
&=\int_1^3\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)dx\\
&=\frac{1}{2}\left(2x^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^3\\
&=2\sqrt{3}-\frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

习题 6.1 A 类

1

(2) 解:

一阶常微分方程.

令 $y=ux$. 则 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$. 代入即

$ux^2\left(u+x\frac{du}{dx}\right)=x^2\left(1+u^2\right)$

即 $udu=\frac{1}{x}dx$ 。两边积分得 $\frac{1}{2}u^2=\ln|x|+C$.

即 $\frac{y^2}{2x^2}=\ln|x|+C$.

3

(1) 解:

令 $y=ux$. 则 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$. 代入即

$u+x\frac{du}{dx}=u+\frac{1}{\ln(1+u^2)}$.

即 $\ln\left(1+u^2\right)du=\frac{1}{x}dx$.

由于 $\int\ln\left(1+u^2\right)du=u\ln\left(1+u^2\right)-\int\left(2-\frac{2}{1+u^2}\right)du=u\ln\left(1+u^2\right)-2u+2\arctan u+C_1$.

两边积分得 $u\ln\left(1+u^2\right)-2u+2\arctan u=\ln x+C$.

故原方程通解为 $\frac{y}{x}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)-\frac{2y}{x}+2\arctan\frac{y}{x}-\ln x=C$.

(4) 解:

原微分方程即 $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

令 $y=ux$. 则 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$. 代入即

$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}+u$. 即 $udu=\frac{1}{x}dx$.

两边积分得 $\frac{1}{2}u^2=\ln|x|+C$.

即 $\frac{y^2}{2x^2}=\ln|x|+C$.

(7) 解:

原微分方程即 $\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=\frac{1}{y^2}$.

故 $x=e^{\int-\frac{1}{y}dy}\left(\int\frac{1}{y^2}e^{\int\frac{1}{y}dy}dy+C\right)=\frac{1}{y}(\ln|y|+C)$

故原方程通解为 $x=\frac{1}{y}(\ln|y|+C)$ （不写绝对值也对）

4

(1) 解:

原微分方程即 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{4-x^2}$. 分离变量即 $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{4-x^2}$.

两边积分得 $\ln|y|=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|+c_1$

即 $y^4=c\cdot\frac{x+2}{x-2}$ 　代入 $y|_{x=1}=2$ 得 $c=-\frac{16}{3}$

故初值问题解为 $y^4=\frac{16}{3}\cdot\frac{2+x}{2-x}$.

(3) 解:

原微分方程即 $\frac{dy}{dx}=-\frac{\cot y}{1+e^{-x}}$.

分离变量即 $tanydy=-\frac{1}{1+e^{-x}}dx$.

由于 $\int\tan ydy=\int-\frac{d(\cos y)}{\cos y}=-\ln|\cos y|+C_1$.

$\int-\frac{1}{1+e^{-x}}dx=\int-\frac{d(1+e^x)}{1+e^x}=-\ln(1+e^x)+C_2$.

故两边积分得 $\ln|\cos y|=\ln(1+e^x)+\tilde{c}$.

即 $\cos y=C(1+e^x)$. 代入 $y(0)=\frac{\pi}{4}$ 得 $C=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

原方程另有一解 $\cos y=0$ ，显然不符合初值条件!

故初值问题解为 $\cos y=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+e^x)$ 。