线性代数-欧式空间

- 欧式空间的定义
- 正交向量组
- Schmidt正交化过程
- 正交矩阵与正交变换
- 实对称矩阵正交对角化

7.1 欧式空间的定义

欧式空间的定义

定义(欧式空间). 设V是线性空间，若对于任意的$\alpha,\beta\in V$都有唯一的实数与之对应，记作$<\alpha,\beta>$(称为α与β的内积)，且$<\alpha,\beta>$满足

- $<\alpha,\beta>=<\beta,\alpha>$; 交换律
- $<k\alpha,\beta>=k<\alpha,\beta>$, $\forall k\in\mathbb{R}$; 线性性
- $<\alpha+\beta,\gamma>=<\alpha,\gamma>+<\beta,\gamma>$; 分配律
- $<\alpha,\alpha>\geq 0$且$<\alpha,\alpha>=0$当且仅当$\alpha=0_V$. 非负性

则称V是$\mathbb{R}$上的一个欧式空间.

例 1：设$V=\mathbb{R}^n$. 任给$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$，定义

$$<x,y>=x^Ty=x_1y_1+\cdots+x_ny_n.$$

由实数的性质容易验证，$\mathbb{R}^n$关于上述内积构成一个欧式空间.

欧式空间的定义

例 2：设$V=C[a,b]$．任给$f(x),g(x)\in C[a,b]$，定义

$$< f(x),g(x) > = \int_a^b f(x)g(x)dx\,.$$

由定积分的性质可以验证, $C[a,b]$关于上述内积构成一个欧式空间.

解：需要说明满足非负性．假设$< f,f > = \int_a^b f^2(x)dx = 0$.

- 若$f(x)\not\equiv \mathbf{0}$，则存在$x_0\in[a,b]$使得$f(x_0)\neq 0$．不失一般性，假设$f(x_0)>0$.
- 因为$f(x)$是连续函数，存在$\delta>0$使得$f(x)$在$[x_0-\delta,x_0+\delta]$上恒正.
- 由**最值定理**，$f^2(x)$在$x^*\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$处取最小值.

从而,

$$\int_a^b f^2(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)dx \geq f^2(x^*)\cdot 2\delta > 0.$$

这与假设矛盾.

欧式空间的性质

欧式空间的性质.

1. **内积是对称的.**

证明. $< \alpha, k\beta > =< k\beta, \alpha > = k < \beta, \alpha > = k < \alpha, \beta >$.

$$< \alpha, \beta + \gamma > = < \beta + \gamma, \alpha > =< \beta, \alpha >+< \gamma, \alpha > =< \alpha, \beta >+< \alpha, \gamma >. \quad ■$$

2. **对于任意的$\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$，$< \mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}, \boldsymbol{\alpha} > = \mathbf{0}$.**

证明. $< 0_V, \alpha > = < 0_V + 0_V, \alpha > =< 0_V, \alpha >+< 0_V, \alpha >$. 故$< 0_V, \alpha > = 0$. ■

3. **设$\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V}$. 若对于任意$\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$，有$< \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} > = \mathbf{0}$，则$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}$.**

证明. 根据假设, $< \alpha, \alpha > = 0$. 由非负性，$\alpha = 0_V$. ■

4. **对于任意的$\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}_j \in \boldsymbol{V}$以及$\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j \in \mathbb{R}$($\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{r}; \boldsymbol{j} = \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{s}$)**

$$< \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{\alpha}_i, \sum_{i=j}^{s} \boldsymbol{b}_j \boldsymbol{\beta}_j > = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{b}_j < \boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\beta}_j > .$$

证明. 反复运用线性性和分配律. ■

欧式空间的性质

定义(向量的长度). 设V是欧式空间. $\alpha \in V$的长度为

$$\|\alpha\| \triangleq \sqrt{<\alpha,\alpha>}.$$

长度为1的向量称为单位向量.

由内积的定义与性质可知:

- $\|\alpha\| \geq 0$且$\|\alpha\| = 0$当且仅当$\alpha = 0_V$.
- $\forall k \in \mathbb{R}, \|k\alpha\| = |k|\|\alpha\|$(为什么?).

说明. 任何$\alpha \in V$, $\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$是单位向量. 这个操作称为将$\alpha$单位化.

欧式空间的性质

定理(Cauthy-Schwarz不等式). **设$\boldsymbol{V}$是欧式空间. $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$,**

$$<\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}>^2 \ \leq \ <\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}><\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}>.$$

等号成立当且仅当$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$线性相关.

证明. 若α, β线性相关, 则要么$\alpha = 0_V$, 要么$\beta = k\alpha$. 无论哪种情况, 容易验证$<\alpha, \beta>^2 = \ <\alpha, \alpha><\beta, \beta>$.

现假设α, β线性无关. 则对$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\alpha + \beta \neq 0_V$. 从而

$$<\lambda\alpha + \beta, \lambda\alpha + \beta> \ > \ 0,$$

即$\lambda^2 <\alpha, \alpha> + 2 <\alpha, \beta> \lambda + <\beta, \beta> \ > \ 0.$

因$<\alpha, \alpha>$为正, 由二次三项式不变号知其判别式必小于零, 即

$$4 <\alpha, \beta>^2 - 4 <\alpha, \alpha><\beta, \beta> \ < \ 0.$$

从而定理得证. ■

欧式空间的性质

定理（Cauthy-Schwarz不等式）．**设$\boldsymbol{V}$是欧式空间．$\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$,**

$$< \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} >^2 \ \leq \ < \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} >< \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta} >.$$

等号成立当且仅当$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$线性相关.

- $\mathbb{R}^n$中的Cauthy-Schwarz不等式:

$$(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2).$$

- $C[a, b]$中的Cauthy-Schwarz不等式:

$$\left(\int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx \,.$$

欧式空间的性质

定理(Cauthy-Schwarz不等式). **设$\boldsymbol{V}$是欧式空间. $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$,**

$$<\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}>^2 \ \leq \ <\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}><\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}>.$$

等号成立当且仅当$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$线性相关.

说明. 当$\alpha, \beta \neq 0_V$,

$$-1 \leq \frac{<\alpha,\beta>}{\|\alpha\|\|\beta\|} \leq 1.$$

定义(向量的夹角). 设α, β是欧式空间V中的两个非零向量. 角度

$$\theta = \arccos\frac{<\alpha,\beta>}{\|\alpha\|\|\beta\|} \ (0 \leq \theta \leq \pi)$$

称为α与β之间的夹角.

例: $\alpha = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$与$\beta = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$之间的夹角为$\frac{\pi}{4}$.

7.2 正交向量组

正交向量组

定义(正交向量). 设V是欧式空间，$\alpha,\beta \in V$. 若$<\alpha,\beta>=0$，则称α与β正交.

说明.

- 若$\alpha,\beta \neq 0$，则$<\alpha,\beta>=0 \Leftrightarrow \theta(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2}$. 这与平面几何中的定义一致.
- 若$\alpha=0_V$，则由内积的性质$<\alpha,\beta>=0, \forall \beta \in V$. 这表明零向量与任何向量都正交.

性质. **若$\boldsymbol{\alpha}$正交于$\boldsymbol{\beta_1},\dots,\boldsymbol{\beta_r}$中的任何向量，则$\boldsymbol{\alpha}$正交于$\boldsymbol{\beta_1},\dots,\boldsymbol{\beta_r}$的任意线性组合.**

证明. 由假设, $<\alpha,\beta_i>=0, i=1,\dots,r$. 则

$$<\alpha,\sum_{i=1}^{r} k_i\beta_i>=\sum_{i=1}^{r} k_i<\alpha,\beta_i>=0.$$

命题得证. ■

正交向量组

定义(正交向量组). 欧式空间V中的一组两两正交的非零向量称为V的一个正交组. 若正交组中的每个向量都是单位向量，则称该正交组为标准正交组.

例 1: $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$是$\mathbb{R}^3$中的一个标准正交组.

例 2: $1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\dots,\cos nx,\sin nx$是$C[0,2\pi]$的一个正交组.

定理. **正交向量组必线性无关.**

证明. 假设$\alpha_1,\dots,\alpha_r,i=1,\dots,r$是一个正交组. 令

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=\mathbf{0}.$$

两边和α_j作内积:

$$0=<\alpha_j,\mathbf{0}>=<\alpha_j,\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i>=\sum_{i=1}^{r}k_i<\alpha_j,\alpha_i>=k_j<\alpha_j,\alpha_j>.$$

因$\alpha_j\neq\mathbf{0}$, $k_j=0$. ■

正交向量组

定义(标准正交基). 若$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$是n维欧式空间V中的一个正交组，则称$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$是V的一个正交基. 若正交基中的每个向量都是单位向量，则称该基为标准正交基.

问题：标准正交基有何用处?

问题：如何求标准正交基?

正交向量组

问题：标准正交基有何用处?

1. 标准正交基将内积转化为$\mathbb{R}^n$中的标准内积.

设$\alpha_1,\dots,\alpha_n$是n维欧式空间V中的标准正交基. 则向量$\beta,\gamma\in V$可由$\alpha_1,\dots,\alpha_n$唯一线性表示：

$$\beta = x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n,\quad \gamma = y_1\alpha_1+\cdots+y_n\alpha_n$$

$$<\beta,\gamma> = <\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i,\sum_{j=1}^n y_j\alpha_j> = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_j <\alpha_i,\alpha_j>.$$

因为$<\alpha_i,\alpha_j> = \begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$,

$$<\beta,\gamma> = \sum_{k=1}^n x_ky_k = x^Ty.$$

其中$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$和$y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$分别为$\beta$和$\gamma$在$\alpha_1,\dots,\alpha_n$下的坐标.

正交向量组

问题：标准正交基有何用处?

2. 标准正交基下的坐标可由内积表达.

设$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$是n维欧式空间V中的标准正交基. 令

$$\beta = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n.$$

两边用α_i作内积:

$$<\alpha_i,\beta> = <\alpha_i,\sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_j> = \sum_{j=1}^{n} x_j <\alpha_i,\alpha_j> = x_i.$$

故

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} <\alpha_i,\beta> \alpha_i\,.$$

在$\boldsymbol{\alpha_i}$-轴上分量大小

坐标轴

正交向量组

练习.

(a) 证明$\alpha_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$是$\mathbb{R}^2$的标准正交基.

(b) 求$\beta=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$在$\alpha_1,\alpha_2$下的坐标.

7.3 Schmidt正交化过程

Schmidt正交化过程

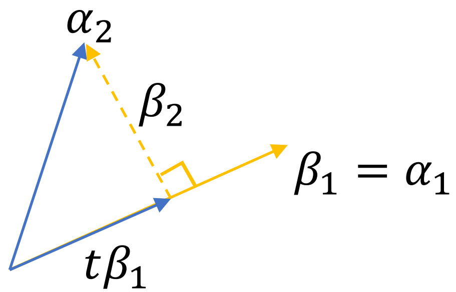
问题：如何求标准正交基?

Schmidt正交化过程

定理(Schmidt正交化过程). 设$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$是n维欧式空间V中的线性无关的向量组. 则存在V中的正交组$\beta_1,\ldots,\beta_m$使得

$$\beta_k\text{是}\alpha_1,\ldots,\alpha_k\text{的线性组合}$$

$k=1,2,\ldots,m.$



证明.

- $m=2$的情况. 令

$$\begin{cases}\beta_1 = \alpha_1\\ \beta_2 = \alpha_2 - \boldsymbol{t\beta_1}\end{cases}$$

$\boldsymbol{\alpha_2}$在$\boldsymbol{\beta_1}$方向上的分量

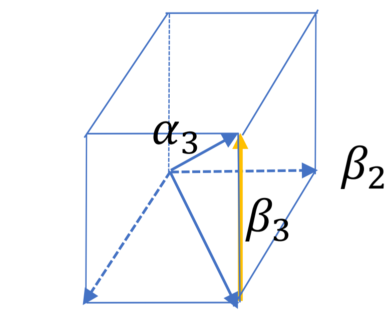
因为$<\beta_1,\beta_2> = 0$,

$$t=\frac{<\alpha_2,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}.$$

故$\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_2-\frac{<\alpha_2,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1$即为所求.

Schmidt正交化过程

证明(续).



- $m=3$的情况.

$$\beta_1=\alpha_1.$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{<\alpha_2,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1.$$

$$\beta_3=\alpha_3-(\alpha_3\text{在由}\beta_1\text{与}\beta_2\text{张成的平面上的分量})$$
$$=\alpha_3-(\boldsymbol{x_1\beta_1+x_2\beta_2}).$$

由$<\beta_3,\beta_i>=0, i=1,2$可求得$x_1,x_2$:

$$0=<\beta_3,\beta_1>=<\alpha_3-x_1\beta_1-x_2\beta_2,\beta_1>$$
$$=<\alpha_3,\beta_1>\ -\ x_1<\beta_1,\beta_1>.$$

$$\boldsymbol{<\beta_1,\beta_2>=0}$$

故 $\quad x_1=\dfrac{<\alpha_3,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}.$

同理，$0=<\beta_3,\beta_2>\Rightarrow x_2=\dfrac{<\alpha_3,\beta_2>}{<\beta_2,\beta_2>}.$

Schmidt正交化过程

证明(续).

- $m=3$的情况.

$$\beta_1=\alpha_1.$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{<\alpha_2,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1.$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{<\alpha_3,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1-\frac{<\alpha_3,\beta_2>}{<\beta_2,\beta_2>}\beta_2.$$

- $m\geq 4$的情况. 对m用数学归纳法可得

$$\beta_1=\alpha_1.$$

$$\beta_k=\alpha_k-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{<\alpha_k,\beta_j>}{<\beta_j,\beta_j>}\beta_j,k=2,\dots,m.$$

定理得证. ■

Schmidt正交化过程

定理(Schmidt正交化过程). 设$\alpha_1,\ldots,\alpha_m$是n维欧式空间V中的线性无关的向量组. 则存在V中的正交组$\beta_1,\ldots,\beta_m$使得

$$\beta_k\text{是}\alpha_1,\ldots,\alpha_k\text{的线性组合}$$

$k=1,2,\ldots,m.$

问题: 如何求标准正交基?

- 将n个线性无关的向量$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$正交化可得正交基$\beta_1,\ldots,\beta_n$.
- 再将每个β_i单位化可得标准正交基.

Schmidt正交化过程

例：将$a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}$正交化.

解：由Schmidt正交化过程,

$$b_1=a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

$$b_2=a_2-\frac{<a_2,b_1>}{<b_1,b_1>}b_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\frac{6}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$$b_3=a_3-\frac{<a_3,b_1>}{<b_1,b_1>}b_1-\frac{<a_3,b_2>}{<b_2,b_2>}b_2$$

$$=\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}-\frac{14}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{8}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Schmidt正交化过程

练习. $f_1(x)=1, f_2(x)=x, f_3(x)=x^2$是$C[0,1]$中线性无关的向量. 将$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$正交化.

Schmidt正交化过程

定理(QR分解). **任意n阶可逆实矩阵A可写成$A=QR$，其中Q为n阶正交矩阵，R为n阶可逆上三角矩阵.**

证明. 记A的列向量为$\alpha_1,\dots,\alpha_n$. 因A可逆，$\alpha_1,\dots,\alpha_n$在$\mathbb{R}^n$中线性无关.

由Schmidt正交化过程,

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1\\
\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{<\alpha_2,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1\\
&\vdots\\
\beta_n &= \alpha_n - \frac{<\alpha_n,\beta_1>}{<\beta_1,\beta_1>}\beta_1 - \cdots - \frac{<\alpha_n,\beta_{n-1}>}{<\beta_{n-1},\beta_{n-1}>}\beta_{n-1}
\end{aligned}$$

将$\beta_i(i=1,\dots,n)$单位化：$\widehat{\beta_i} \triangleq \frac{\beta_i}{\|\beta_i\|}$.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= r_{11}\widehat{\beta_1}\\
\alpha_2 &= r_{12}\widehat{\beta_1} + r_{22}\widehat{\beta_2}\\
&\vdots\\
\alpha_n &= r_{1n}\widehat{\beta_1} + r_{2n}\widehat{\beta_2} + \cdots + r_{nn}\widehat{\beta_n}
\end{aligned}$$

$$r_{ii} = \|\beta_i\| \neq 0$$

从而$A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=\left(\widehat{\beta_1},\widehat{\beta_2},\dots,\widehat{\beta_n}\right)R$，其中$R=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn}\end{pmatrix}$为可逆上三角矩阵.

因$\widehat{\beta_1},\widehat{\beta_2},\dots,\widehat{\beta_n}$为标准正交基，$Q=(\widehat{\beta_1},\widehat{\beta_2},\dots,\widehat{\beta_n})$为正交阵. ■

7.4 正交矩阵与正交变换

正交矩阵与正交变换

定义(正交矩阵). 若n阶方阵A满足$A^TA = AA^T = E_n$，即$A^{-1} = A^T$，则称A为正交矩阵.

等价定义. 对n阶方阵A按列分块$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$,

则 A为正交矩阵 $\Leftrightarrow A^TA = E_n$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} (a_1, a_2, \dots, a_n) = E_n$$

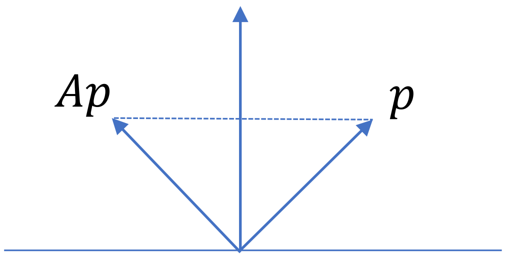
$$\Leftrightarrow a_i^T a_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$\Leftrightarrow a_1, a_2, \dots, a_n$是$\mathbb{R}^n$的标准正交基.

正交矩阵与正交变换

例 1：若$R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$为正交矩阵.（$|R_\theta|=1$）

例 2：$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$为正交矩阵.（$|A|=-1$，这是一个镜面反射变换.）



正交矩阵与正交变换

定义(正交变换). 设T是欧氏空间V中的线性变换. 若对于任意$\alpha \in V$, 有$\|T\alpha\| = \|\alpha\|$, 则称T为正交变换.

定理(正交变换的等价刻画). 下列命题等价:

(1) T为正交变换.

(2) 对$\forall \alpha, \beta \in V$, $< T\alpha, T\beta > = < \alpha, \beta >$.

(3) 若$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$是$V$的标准正交基, 则$T\varepsilon_1, \ldots, T\varepsilon_n$是$V$的标准正交基.

(4) 变换T在标准正交基下的矩阵为正交矩阵.

正交矩阵与正交变换

定理(正交变换的等价刻画). 下列命题等价：

(1) T为正交变换.

(2) 对$\forall \alpha,\beta\in V$，$<T\alpha,T\beta>=<\alpha,\beta>$.

(3) 若$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$是$V$的标准正交基，则$T\varepsilon_1,\ldots,T\varepsilon_n$是$V$的标准正交基.

(4) 变换T在标准正交基下的矩阵为正交矩阵.

证明. (1) $\Longrightarrow$ (2). 因T为正交变换，对任意$\alpha,\beta\in V$有

$$\|T\alpha\|=\|\alpha\|,\quad \|T\beta\|=\|\beta\|,\quad \|T(\alpha+\beta)\|=\|\alpha+\beta\|.$$

从而

$$\begin{aligned}0&=\|T(\alpha+\beta)\|^2-\|\alpha+\beta\|^2=\|T\alpha+T\beta\|^2-\|\alpha+\beta\|^2\\&=<T\alpha+T\beta,T\alpha+T\beta>-<\alpha+\beta,\alpha+\beta>\\&=\|T\alpha\|^2+\|T\beta\|^2+2<T\alpha,T\beta>-(\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2+2<\alpha,\beta>)\\&=2(<T\alpha,T\beta>-<\alpha,\beta>),\end{aligned}$$

即$<T\alpha,T\beta>=<\alpha,\beta>$.

正交矩阵与正交变换

定理(正交变换的等价刻画). 下列命题等价：

(1) T为正交变换.

（2） 对$\forall \alpha, \beta \in V$，$< T\alpha, T\beta > = < \alpha, \beta >$.

（3） 若$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$是$V$的标准正交基，则$T\varepsilon_1, \dots, T\varepsilon_n$是$V$的标准正交基.

（4） 变换T在标准正交基下的矩阵为正交矩阵.

证明(续). （2）$\Longrightarrow$（3）. 由假设

$$< T\varepsilon_i, T\varepsilon_j > = < \varepsilon_i, \varepsilon_j > = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

故$T\varepsilon_1, \dots, T\varepsilon_n$是$V$的标准正交基.

正交矩阵与正交变换

定理(正交变换的等价刻画). 下列命题等价:

(1) T为正交变换.

(2) 对$\forall \alpha,\beta \in V$，$< T\alpha, T\beta > = < \alpha,\beta >$.

(3) 若$\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$是$V$的标准正交基，则$T\varepsilon_1,\dots,T\varepsilon_n$是$V$的标准正交基.

(4) 变换T在标准正交基下的矩阵为正交矩阵.

证明(续). (3) $\Longrightarrow$ (4). 设T在标准正交基$\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$下的矩阵为

$$Q = (q_1,\dots,q_n),$$

其中$q_i = \begin{pmatrix} q_{1i} \\ \vdots \\ q_{ni} \end{pmatrix}$为$T\varepsilon_i$在$\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$下的坐标.

因为$\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$标准正交基，则

$$q_i^T q_j =< T\varepsilon_i, T\varepsilon_j > = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases},$$

故Q为正交矩阵.

正交矩阵与正交变换

定理(正交变换的等价刻画). 下列命题等价:

(1) T为正交变换.

(2) 对$\forall \alpha, \beta \in V$, $<T\alpha, T\beta> = <\alpha, \beta>$.

(3) 若$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$是$V$的标准正交基, 则$T\varepsilon_1, \ldots, T\varepsilon_n$是$V$的标准正交基.

(4) 变换T在标准正交基下的矩阵为正交矩阵.

证明(续). (4) $\Longrightarrow$ (1). 设T在标准正交基$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$下的矩阵为正交$Q$.

若$\alpha \in V$在$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$下的坐标为$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, 则$T\alpha$在$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$下的坐标为$Qx$.

因为$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$标准正交基, 则

$$\begin{aligned} \|T\alpha\|^2 &= <T\alpha, T\alpha> = (Qx)^T(Qx) \\ &= x^T(Q^TQ)x = x^Tx \\ &= <\alpha, \alpha> = \|\alpha\|^2. \end{aligned}$$

故T为正交变换. ■

正交矩阵与正交变换

思考：若线性变换T在某个基下的矩阵为正交矩阵，则T未必是正交变换．给出反例．

7.5 实对称阵正交对角化

实对称阵正交对角化

谱定理(Spectral Theorem). 设A为n阶实对称矩阵. 则存在n阶正交阵Q使得

$$Q^{-1}AQ = Q^{T}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中$\lambda_1, \dots, \lambda_n$为$A$的特征值.

实对称阵正交对角化

引理 1(实对称矩阵特征值必为实数). 设A为n阶实对称矩阵，λ是A的特征值. 则λ为实数.

证明. 设$\lambda \in \mathbb{C}$. 只需证明$\bar{\lambda} = \lambda$.

设$x \in \mathbb{C}^n$是A的属于λ的特征向量. 则

$$Ax = \lambda x \tag{1}$$

因为A是实矩阵，$\bar{A} = A$. (1)两边取共轭,

$$A\bar{x} = \bar{\lambda}\,\bar{x}. \tag{2}$$

(1)两边左乘$\bar{x}^T$: $$\bar{x}^T Ax = \lambda \bar{x}^T x. \tag{3}$$

(2)两边取转置: $$\bar{x}^T A = \bar{\lambda}\bar{x}^T \tag{4}$$

(4)两边右乘x: $$\bar{x}^T Ax = \bar{\lambda}\bar{x}^T x \tag{5}$$

比较(3)与(5)有 $(\lambda - \bar{\lambda})\bar{x}^T x = 0.$

实对称阵正交对角化

引理 1(实对称矩阵特征值必为实数). 设A为n阶实对称矩阵，λ是A的特征值. 则λ为实数.

证明(续).

$$(\lambda-\bar{\lambda})\bar{x}^T x=0$$

因$x \neq \mathbf{0}$,

$$\bar{x}^T x=(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i x_i=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2>0.$$

故$\lambda-\bar{\lambda}=0$，即$\lambda=\bar{\lambda}$. ■

实对称阵正交对角化

引理 2(属于不同特征值的特征向量正交). 设A为n阶实对称矩阵，p_1和p_2分别是A的属于λ_1和λ_2的特征向量. 若$\lambda_1 \neq \lambda_2$，则p_1与p_2正交.

证明. 由假设

$$Ap_1 = \lambda_1 p_1 \tag{1}$$

$$Ap_2 = \lambda_2 p_2 \tag{2}$$

(1)两边取转置:

$$\lambda_1 p_1^T = p_1^T A^T = p_1^T A. \tag{3}$$

(3)两边右乘p_2:

$$\lambda_1 (p_1^T p_2) = p_1^T A p_2$$

$$= \lambda_2 (p_1^T p_2). \quad (2)$$

故$(\lambda_1 - \lambda_2) p_1^T p_2 = 0.$

因$\lambda_1 \neq \lambda_2$，$p_1^T p_2 = 0.$ ■

实对称阵正交对角化

引理 3(几何重数等于代数重数). 设A为n阶实对称矩阵，λ_0是A的k重特征值. 则$(A-\lambda_0 E)x=0$的基础解系含有k个向量，即$\dim\left(V_{\lambda_0}\right)=k$.

证明. 从略. ■

实对称阵正交对角化

谱定理(Spectral Theorem). 设A为n阶实对称矩阵. 则存在n阶正交阵Q使得

$$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中$\lambda_1, \dots, \lambda_n$为$A$的特征值.

证明.

- 求A的特征值为$\lambda_1, \dots, \lambda_s$，重数分别为$t_1, \dots, t_s$（$t_1 + \cdots + t_s = n$）. 由引理 1，则$\lambda_i (1 \le i \le s)$为实数.
- 对任意$1 \le i \le s$，求$(A - \lambda_i E)x = 0$的基础解系. 由引理 3，基础解系含有t_i个向量$p_{i1}, \dots, p_{it_i}$. 将$p_{i1}, \dots, p_{it_i}$正交化得V_{λ_i}的标准正交基$\widehat{q_{i1}}, \dots, \widehat{q_{it_i}}$.
- 由引理 2，$\widehat{q_{11}}, \dots, \widehat{q_{1t_1}}, \dots, \widehat{q_{s1}}, \dots, \widehat{q_{st_s}}$是$A$的$n$个特征向量且构成$\mathbb{R}^n$的标准正交基. 从而正交矩阵$Q = (\widehat{q_{11}}, \dots, \widehat{q_{1t_1}}, \dots, \widehat{q_{s1}}, \dots, \widehat{q_{st_s}})$使得

$$Q^TAQ = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_s & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_s \end{pmatrix}.$$ ■

实对称阵正交对角化

例：将$A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$正交对角化.

解：$f_A(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda&-1&1\\-1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+2)(\lambda-1)^2.$

故A的特征值为$\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1.$

- $\lambda_1=-2$时，$A+2E=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\sim_r\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$

则基础解系为$p_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{单位化}}\widehat{q_1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$

实对称阵正交对角化

例：将$A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$正交对角化.

解(续)：$\lambda_2=\lambda_3=1$时, $A-E=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\sim_r\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

则基础解系为$p_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, p_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. 将$p_2,p_3$正交化:

$$q_2=p_2,\quad q_3=p_3-\frac{<p_3,q_2>}{<q_2,q_2>}q_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

再将q_2,q_3单位化: $\widehat{q_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \widehat{q_3}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

故正交矩阵$Q=(\widehat{q_1},\widehat{q_2},\widehat{q_3})=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&0&2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$使得

$$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

实对称阵正交对角化

练习:

$$将A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}正交对角化.$$

欧式空间总结

欧式空间总结

难点.

- Cauthy-Schwarz不等式.
- 正交变换的等价刻画.

重点.

- 欧式空间的判定和性质.
- 标准正交基的作用和求法(Schmidt正交化过程).
- 实对称阵正交对角化.

欧式空间总结

1. 设$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$是$n$维欧式空间$V$中的基. 若$\alpha, \beta \in V$满足

$$<\alpha, \varepsilon_i> = <\beta, \varepsilon_i>, i = 1, \ldots, n,$$ 证明$\alpha = \beta$.

2. 将$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$正交对角化.