

线性代数-线性方程组作业

黄申为

2022 年 10 月 21 日

1. 设 $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 求一个可逆矩阵 P , 使 PA 为行最简形矩阵.

2. (a) 在秩是 r 的矩阵中, 是否一定有行列式为 0 的 $r-1$ 阶子式? 是否一定有行列式为 0 的 r 阶子式? 请给出证明或举出反例.

(b) 求一个秩为 4 的方阵, 它的两个行向量是 $(1, 0, 1, 0, 0)$ 与 $(1, -1, 0, 0, 0)$.

3. 设有线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda - 1 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & \lambda + 1 \\ 0 & 0 & 2\lambda + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

问 λ 为何值时方程组有唯一解? 无解? 有无穷解? 并在有无穷多解时求其通解.

4. 写出一个以 $x = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为通解的齐次线性方程组.

5. 判断下列命题的真伪: 若 A, B 为同型矩阵且 $R(A) = R(B)$, 则 $A \sim_r B$.
若正确给出证明; 若不正确, 请举出反例.

6. 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵. 证明 A 总能经过有限次初等行变换化成行最简形矩阵(提示: 对 $m+n$ 作归纳).

7. (a) 设 A, B 是 n 阶方阵. 证明 $R(AB + A + B) \leq R(A) + R(B)$.

(b) 假设 $C = AB$, 其中 B 为方阵. 由秩的性质可知, 若 B 可逆, 则 $R(C) = R(A)$. 若 B 不可逆是否一定有 $R(C) < R(A)$? 请给出证明或者反例.

8. 设 A 为方阵. 用 A 的行列式给出一个齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解的充分必要条件, 并给出充要性的证明.

9. 设 A 是一个 3×4 矩阵, 且 $Ax = 0$ 的通解为 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, c 为任意实数.

(a) 求 A 的行最简形矩阵.

(b) 证明 $Ax = b$ 对任意的 b 都有解.

10. 陈述Graham-Pollak定理并简单解释在该定理证明中是如何使用线性方程组理论的.