

补充题参考解答 (第14周)

1. (1) 证明: 由右导数定义有 $f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

另一方面, 当 $0 < h < \delta$ 时 f 在 $[a, a+h]$ 连续 在 $(a, a+h)$ 可导

由 Lagrange 中值定理 $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a+\theta h) \quad \theta \in (0, 1)$

再由 $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ 之存在性 可得 $f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f'(a+\theta h)$

(注: "[]" 处写法并不严谨, 想想为什么, 并给出一个严谨写法!) $= \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ □

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$ 存在, 而 $f'_+(1), f'_-(1)$ 皆不存在

不矛盾, 因为这里的 f 在 $a=1$ 处并不连续, 并不满足(1)的条件.

2. (1) $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$

(2) 先对函数 $f(x) = \arctan x$ 求 $x=0$ 处的各阶导数

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow (1+x^2)f'(x) = 1$

两边同时求 $(n-1)$ 阶导数, 得:

(由 Leibniz 公式)

$(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2(n-1)x f^{(n-1)}(x) + (n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x) = 0$

代入 $x=0$ 得 $f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0) \quad (n=2, 3, \dots)$

最后由 $f(0)=0, f'(0)=1$ 可得

$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n \text{ 偶数} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} (n-1)! & n \text{ 奇数} \end{cases}$

从而 $\arctan x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2k+2})$



南开大学

Nankai University

$$(3) \quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } e^{\sin x} &= 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + o(\sin^3 x) \\ &= 1 + (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)) + \frac{1}{2} [x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)]^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} [x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)]^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \end{aligned}$$

3.

证明：一方面有 $f(x_0+h) - \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) = \frac{h^n}{n!} (f^{(n)}(x_0+\theta h) - f^{(n)}(x_0))$

另一方面有 $f(x_0+h) - \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} h^{n+1} + o(h^{n+1})$
(由 Peano 型余项 Taylor 公式)

联立得 $\theta \cdot \frac{f^{(n)}(x_0+\theta h) - f^{(n)}(x_0)}{\theta h} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n+1} + o(h)$

令 $h \rightarrow 0$ ，由于 $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$

我们可得 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta$ 存在且

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta \cdot f^{(n+1)}(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}$$



4. (1) \nearrow 个实根, 构造 $F(x) = \sin x - \frac{x}{8}$ 奇函数, 只需考虑 $(0, +\infty)$ 上零点个数

首先注意到 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时有 $F(x) = \sin x - \frac{x}{8} > \frac{2}{\pi}x - \frac{x}{8} > 0$

而 $f'(x) = \cos x - \frac{1}{8}$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 上非正

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 上 \downarrow

又注意到 $F(\frac{\pi}{2}) > 0$, $F(\frac{3\pi}{2}) < 0$ 故在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 上 $F(x)$ 有唯一零点.

而当 $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ 时, $F(x) < 0$ 点成立, 故无零点

当 $x \in (2\pi, 3\pi)$ 时 $F(2\pi) < 0$, $F(\frac{5\pi}{2}) > 0$, $F(3\pi) < 0$

故 F 在 $(2\pi, 3\pi)$ 上至少 2 个零点

而 $F'(x) = \sin x - \frac{1}{8}$, 考虑 F' 在 $(2\pi, 3\pi)$ 的符号

可得 F 在 $(2\pi, 2\pi + \arcsin \frac{1}{8})$ 上 \downarrow

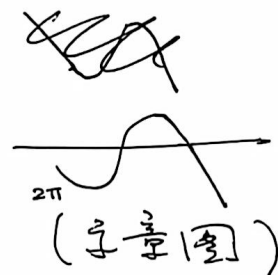
$(2\pi + \arcsin \frac{1}{8}, 3\pi - \arcsin \frac{1}{8})$ 上 \uparrow

$(3\pi - \arcsin \frac{1}{8}, 3\pi)$ 上 \downarrow

此后可 $F(x) < 0$ 点成立

因此 F 在 $(0, +\infty)$ 上 3 个零点

$\Rightarrow F$ 在 \mathbb{R} 上点计 7 个零点





南开大学

Nankai University

4. (2) $(x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}} < (x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$

构造 $F(x) = \frac{1}{x} \ln(\alpha^x + \beta^x)$ 验证证明

$F(x)$ 在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上单调递减即可 (只需求一阶导数)

考虑 $F'(x) = \frac{1}{x} \frac{\alpha^x \ln \alpha + \beta^x \ln \beta}{\alpha^x + \beta^x} - \frac{1}{x^2} \ln(\alpha^x + \beta^x) < 0$

$\Leftrightarrow \alpha^x \ln \alpha + \beta^x \ln \beta < (\alpha^x + \beta^x) \ln(\alpha^x + \beta^x) \quad (*)$

注意到 $\ln \alpha^x < \ln(\alpha^x + \beta^x)$, $\ln \beta^x < \ln(\alpha^x + \beta^x)$

故 (*) 在 $x > 0$ 上成立

(并且是严格递减)

由 $0 < \alpha < \beta$, 故有 $(x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}} < (x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ \square

5. (1) 左式等价于 $\ln\left(\frac{b}{a}\right) < \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}}$

考虑 $f(x) = \ln x + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

右式等价于 $\ln \frac{b}{a} > 2 \frac{b-a}{b+a} = \frac{2(\frac{b}{a}-1)}{\frac{b}{a}+1}$

考虑 $g(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$

直接求导看单调性即可.

5. (2) 归纳法：对于 $n=1$ 情形，结论是明显的

假设对于 $n \geq 1$ 情形已有 $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

下证 $n+1$ 情况成立，令 $y = \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i \right)^{n+1} - \prod_{i=1}^{n+1} x_i$

将 x_{n+1} 视为自变量，对 $y(x_{n+1})$ 求导可得

$$\begin{aligned} y'(x_{n+1}) &= (n+1) \cdot \frac{\left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i \right)^n}{n+1} - \prod_{i=1}^n x_i \\ &= \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i \right)^n - \prod_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

注意到 y 先 \searrow 后 \nearrow 有一个极值点

$$\tilde{x}_{n+1} = (n+1) \left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n+1} \right)$$

也是最大值点

$$\Rightarrow y(x_{n+1}) \geq y(\tilde{x}_{n+1}) \stackrel{\text{计算}}{=} \sum_{i=1}^n x_i - n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \geq 0$$

因此 $y \geq 0$ 点成立

(由归纳假设)

"=" 成立当且仅当 $\sum_{i=1}^n x_i = n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$

$$\text{且 } x_{n+1} = (n+1) \left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n+1} \right)$$

再由取等条件的归纳假设，此时有 $x_1 = \cdots = x_n$

进而可得 $x_{n+1} = x_i$
 $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

（综上所述证明了均值不等式！）





南开大学

Nankai University

6. (1) 解: 令 $x = \csc t = \frac{1}{\sin t} \quad t \in (0, \frac{\pi}{2})$

此时有 $\sqrt{x^2 - 1} = \cot t$

故 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{-\csc t \cdot \cot t \cdot dt}{\csc t \cdot \cot t} = -\int dt = -t + C$

代入 $t = \arcsin \frac{1}{x}$ 得 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\arcsin \frac{1}{x} + C$

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad a > 0 \quad |x| > a$

令 $x = a \sec t$ 其中 $t \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$

于是 $dx = a \sec t \cdot \tan t \, dt$

此时 $\sqrt{x^2 - a^2} = a \sqrt{\tan^2 t}$

$\begin{cases} a \tan t & t \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ -a \tan t & t \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$

$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \begin{cases} \int \frac{a \sec t \tan t}{a \tan t} dt = \int \sec t = \ln |\sec t + \tan t| + C_1 & t \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ \int \frac{a \sec t \tan t}{-a \tan t} dt = \int -\sec t = -\ln |\sec t + \tan t| + C_2 & t \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$

代入 $x = a \sec t$ 得

$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \begin{cases} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C & x > a \\ -\ln |x - \sqrt{x^2 - a^2}| + C' & x < -a \end{cases}$

又由于当 $x < -a$ 时有 $-\ln |x - \sqrt{x^2 - a^2}| = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| - \ln a^2$

故对所有 $|x| > a$ 有 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C \quad \square$

7. (1) $I_n = \int \tan^n x dx \quad n \in \mathbb{N}$

当 $n \geq 2$ 时, $I_n = \int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$

$$= \int \tan^{n-2} x \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx = \int \tan^{n-2} x d \tan x - I_{n-2}$$

$$= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}$$

故有递推式 $I_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}$

▷ 事实上 我们也可以进一步求出通项

由于 $I_1 = \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$, $I_0 = \int dx = x + C$

$$\Rightarrow I_n = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{i-1}}{n - (2i-1)} \tan^{n-(2i-1)} x + (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} I_{n-2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

$$= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{i-1}}{n - (2i-1)} \tan^{n-(2i-1)} x + \begin{cases} (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x + C & n \text{ 偶} \\ (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \ln |\cos x| + C & n \text{ 奇} \end{cases}$$

(2) $J_n = \int \sin^n x dx$

当 $n \geq 2$ 时 $J_n = \int \sin^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx$

$$= J_{n-2} - \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx$$

注意到 $\left(\frac{\sin^{n-1} x}{n-1} \right)' = \sin^{n-2} x \cos x$

故由分部积分公式可得 $J_n = J_{n-2} - \left(\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n-1} + \int \frac{\sin^{n-1} x}{n-1} dx \right)$

故得 $\Rightarrow J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2} - \frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x$



南开大学

Nankai University

8. (1) 解: 令 $t = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$ 则 $x = \frac{t^2+1}{t^2-1}$

$$\text{代入可得} \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} dx = \int \frac{-4t^2}{(t^2+1)(t^2-1)} dt$$

$$= -2 \int \left(\frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{t^2+1} \right) dt$$

$$= -\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| - 2 \arctan t + C$$

$$= -\ln \left| \frac{\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} - 1}{\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} + 1} \right| - 2 \arctan \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} + C$$

$$= \ln |x + \sqrt{x^2-4}| - 2 \arctan \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} + C$$

□

(2) 解: 令 $t = \sqrt[3]{x+1}$ 则 $x = t^3-1$

$$\text{原式} = \int \frac{(1-t^3)t^5}{t^6(1+t^2)} dt = 6 \int \frac{1-t^3}{(1+t^2)t} dt$$

$$= 6 \int \left(\frac{1}{t} - \frac{t-1}{t^2+1} - 1 \right) dt$$

$$= 6 \left[\ln |t| - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + \arctan t - t \right] + C$$

$$= 3 \ln \frac{\sqrt[3]{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} + 6 \arctan \sqrt[3]{x+1} - 6 \sqrt[3]{x+1} + C$$

□

(3) 解令 $x^4 = u$ $\begin{cases} x \geq 0 & \text{有 } x = u^{\frac{1}{4}} \\ x < 0 & \text{有 } x = -u^{\frac{1}{4}} \end{cases}$

先对 $x \geq 0$ 考虑 原式 $= \frac{1}{4} \int \frac{1}{4\sqrt[4]{1+u}} u^{-\frac{3}{4}} du = \frac{1}{4} \int \frac{1}{u\sqrt[4]{1+u}} du$

令 $t = \sqrt[4]{\frac{1+u}{u}}$ 则可得 原式 $= -\int \frac{t^2 dt}{t^4 - 1}$

$= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1}$

$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{1}{2} \arctan t + C$

$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + x}{\sqrt[4]{1+x^4} - x} \right| - \frac{1}{2} \arctan \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C$

当 $x < 0$ 时也可以求出 $\int \frac{1}{4\sqrt[4]{1+x^4}} dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + x}{\sqrt[4]{1+x^4} - x} \right| - \frac{1}{2} \arctan \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C'$

为使原函数在 0 处连续, 需有 $C' = -\frac{\pi}{2} + C$

请根据以上3例的观察, 尝试验证

对于 $\int R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$ 型积分
($m \geq 2, ad-bc \neq 0$)

可作变换 $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 使之化为有理函数积分

故一定可积!



南开大学

Nankai University

9. (1) $\forall \varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\text{有 } 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_{\frac{\pi-\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx + \int_0^{\frac{\pi-\varepsilon}{2}} \sin^n x dx$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \sin^n\left(\frac{\pi-\varepsilon}{2}\right)$$

令 $n \rightarrow \infty$ 得

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{再由 } \varepsilon \text{ 任意性}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0$$

□

(2)

$$\int_{n^2}^{n^2+n} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{n^2+n}} dx$$

$$\leq \int_{n^2}^{n^2+n} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\leq \int_{n^2}^{n^2+n} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= 2(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2})$$

$$= \frac{2n}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2}}$$

令 $n \rightarrow \infty$ 由两边夹定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{n^2}^{n^2+n} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} dx = 0$$

□

10. (1) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \quad (n \geq 2)$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx$$

$$= I_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx$$

由分部积分公式

$$I_{n-2} - \left[\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{n-1} x (-\sin x)}{n-1} dx$$

$$= I_{n-2} - \frac{1}{n-1} I_n$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

由于 $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$

故由上述递推公式得

$$I_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2} & n \text{ 偶} \\ \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{3} \cdot I_1 = \frac{(n-1)!!}{n!!} & n \text{ 奇} \end{cases}$$

(其中 $(2m)!! \triangleq 2m(2m-2) \cdots 4 \cdot 2$
 $(2m+1)!! \triangleq (2m+1)(2m-1) \cdots 3 \cdot 1$)

(2) 解: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

考虑 $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

恰为 Riemann 和, 令 $n \rightarrow \infty$ 得原式 $= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2$ \square

f 在 $[0, 1]$ 上