

补充题参考解答 (第4周)

1. (1) 证明: 由右导数定义有 $f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

另一方面, 当 $0 < h < s$ 时 f 在 $[a, a+h]$ 连续 在 $(a, a+h)$ 可导

由 Lagrange 中值定理 $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a+\theta h) \quad \theta \in (0, 1)$

再由 $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ 之存在性 可得 $f'_+(a) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0^+ \\ h \rightarrow 0^+}} \frac{f'(a+\theta h)}{h} = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$

(注: “ \lim ”处写法并不严谨, 想想为什么, 并给出一个严谨写法!)

(2) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x)$ 存在, 而 $f'_+(1)$, $f'_{-(1)}$ 都不存在

不矛盾, 因为这里 f 在 $x=1$ 处并不连续, 并不满足(1)的条件.

2. (1) $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$

(2) 先对函数 $f(x) = \arctan x$ 在 $x=0$ 处的各阶导数

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow (1+x^2) f'(x) = 1$$

两边同时求 $(n-1)$ 阶导数, 得:

(由 Leibniz 公式)

$$(1+x^2) f^{(n)}(x) + 2(n-1)x f^{(n-1)}(x) + (n-1)(n-2) f^{(n-2)}(x) = 0$$

代入 $x=0$ 得 $f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2) f^{(n-2)}(0) \quad (n=2, 3, \dots)$

由 $f^{(0)}(0) = 0$, $f'(0) = 1$ 等

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n \text{ 偶数} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} (n-1)! & n \text{ 奇数} \end{cases}$$

从而 $\arctan x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2k+2})$



$$(3) e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\text{从而 } e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + o(\sin^3 x)$$

$$= 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right) + \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right]^2$$

$$+ \frac{1}{6} \left[x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right]^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

3.

证明：一方面有 $f(x_0+h) - \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) = \frac{h^n}{n!} (f^{(n)}(x_0+\theta h) - f^{(n)}(x_0))$

另一方面有 $f(x_0+h) - \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} + o(h^{n+1})$
(由 Peano 型余项 Taylor 公式)

联立得 $\theta \cdot \frac{f^{(n)}(x_0+\theta h) - f^{(n)}(x_0)}{\theta h} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n+1} + o(h)$

令 $h \rightarrow 0$ ，由于 $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$

我们可得 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta$ 存在且

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta \cdot \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{h+1} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}$$

□

4. (1) \exists 个实根，构造 $F(x) = \sin x - \frac{x}{8}$ 奇函数， $x > 0$ 时
 $(0, +\infty)$ 上零点下凸

首先注意到 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时有 $F(x) = \sin x - \frac{x}{8}$

$$> \frac{2}{\pi}x - \frac{x}{8} > 0$$

而 $f'(x) = \cos x - \frac{1}{8}$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 上递增

$$\Rightarrow f'(x) \text{ 在 } (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \downarrow$$

又注意到 $F(\frac{\pi}{2}) > 0$, $F(\frac{3\pi}{2}) < 0$ 故在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 上 $F(x)$ 有唯一零点。

而当 $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ 时, $F(x) < 0$ 成立, 故无零点

当 $x \in (2\pi, 3\pi)$ 时 $F(2\pi) < 0$, $F(\frac{5\pi}{2}) > 0$, $F(3\pi) < 0$

故 F 在 $(2\pi, 3\pi)$ 至少有 1 个零点

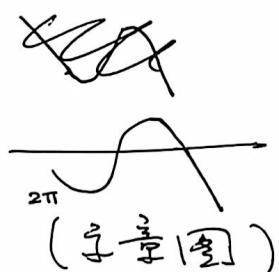
而 $F'(x) = \cos x - \frac{1}{8}$; 考虑 F' 在 $(2\pi, 3\pi)$ 的符号

由得 F 在 $(2\pi, 2\pi + \arcsin \frac{1}{8})$ ↓

$$(2\pi + \arcsin \frac{1}{8}, 3\pi - \arcsin \frac{1}{8}) \uparrow$$

$$(3\pi - \arcsin \frac{1}{8}, 3\pi) \downarrow$$

此 $\therefore F(x) < 0$ 成立



因此 F 在 $(0, +\infty)$ 上有 3 个零点

$\Rightarrow F$ 在 \mathbb{R} 上总计 7 个零点



④ 4.(2) $(x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}} < (x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$

构造 $F(x) = \frac{1}{x} \ln(\alpha^x + \beta^x)$ ②并证明

$F(x)$ 在 $\mathbb{R}_{>0}$ 上 单调递减即可 (只需求一阶导数)

考虑 $F'(x) = \frac{1}{x} \frac{\alpha^x \ln \alpha + \beta^x \ln \beta}{\alpha^x + \beta^x} - \frac{1}{x^2} \ln(\alpha^x + \beta^x) < 0$

$\Leftrightarrow \alpha^x \ln \alpha^x + \beta^x \ln \beta^x < (\alpha^x + \beta^x) \ln(\alpha^x + \beta^x)$. (*)

注意到 $\ln \alpha^x < \ln(\alpha^x + \beta^x)$, $\ln \beta^x < \ln(\alpha^x + \beta^x)$

故 (*) 在 $x > 0$ 上 成立

(并且是严格递减)

由 $0 < \alpha < \beta$, 故 有 $(x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}} < (x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$

□

5. (1) 左式 等价于 $\ln\left(\frac{b}{a}\right) < \sqrt{b} - \sqrt{a}$

考虑 $f(x) = \ln x + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

右式 等价于 $\ln\frac{b}{a} > 2 \frac{b-a}{b+a} = \frac{2\left(\frac{b}{a}-1\right)}{\frac{b}{a}+1}$

考虑 $g(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$

直接求导看单调性即可。

5. (2) 归纳法：对于 $n=1$ 情形，结论是明显的

假设对于 $n \geq 1$ 情形已有 $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

下证 $n+1$ 情形成立，令 $y = \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i \right)^{n+1} - \prod_{i=1}^n x_i$

将 x_{n+1} 视为自变量，对 $y(x_{n+1})$ 求导可得

$$\begin{aligned} y'(x_{n+1}) &= \frac{(n+1) \cdot \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i \right)^n - \prod_{i=1}^n x_i}{n+1} \\ &= \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i \right)^n - \prod_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

注意到 y 先 \searrow 后 \nearrow 有一个极值点

$$\tilde{x}_{n+1} = (n+1) \left(\sqrt[n+1]{\sum_{i=1}^n x_i} - \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{n+1} \right)$$

也是极值点

$$\Rightarrow y(x_{n+1}) \geq y(\tilde{x}_{n+1}) \xrightarrow{\text{由归假设}} \sum_{i=1}^n x_i - \sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^n x_i} \geq 0$$

(由归内
假设)

因此 $y \geq 0$ 立成立

$$"=" \text{ 成立 当且仅当 } \sum_{i=1}^n x_i = \sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

$$\text{且 } \tilde{x}_{n+1} = (n+1) \left(\sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^n x_i} - \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{n+1} \right)$$

再由取等条件的归纳假设，此时有 $x_1 = \cdots = x_n$

$$\text{进而可得 } x_{n+1} = x_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n+1\}$$

综上我们证明了均值不等式！

□



6. (1) 解：令 $x = \csc t = \frac{1}{\sin t}$ $t \in (0, \frac{\pi}{2})$

此時 有 $\sqrt{x^2-1} = \cot t$

$$\text{故 } \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{-\csc t \cdot \cot t dt}{\csc t \cdot \cot t} = -\int dt = -t + C$$

即 $t = \arcsin \frac{1}{x}$ 得 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\arcsin \frac{1}{x} + C$

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $a > 0$ $|x| > a$

$\sqrt{x^2-a^2} = a \sec t$ 其中 $t \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$

于是 $dx = a \sec t \cdot \tan t dt$

此時 $\sqrt{x^2-a^2} = a \sqrt{\tan^2 t}$

$$\begin{cases} a \tan t & t \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ -a \tan t & t \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \begin{cases} \int \frac{a \sec t \tan t}{a \tan t} dt = \int \sec t = \ln |\sec t + \tan t| + C_1, \\ t \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\text{由 } x = a \sec t \text{ 得 } \int \frac{a \sec t \tan t}{-a \tan t} dt = \int -\sec t = -\ln |\sec t + \tan t| + C_2, \quad t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \begin{cases} \ln |x + \sqrt{x^2-a^2}| + C, & x > a \\ -\ln |x - \sqrt{x^2-a^2}| + C', & x < -a \end{cases}$$

又由 $x < -a$ 有 $-\ln |x - \sqrt{x^2-a^2}| = \ln |x + \sqrt{x^2-a^2}| - \ln a^2$

故對所有 $|x| > a$ 有 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2-a^2}| + C \quad \square$

$$7. \quad (1) I_n = \int \tan^n x \, dx \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \text{当 } n \geq 2 \text{ 时}, \quad I_n &= \int \tan^n x \, dx = \int \tan^{n-2} x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx \\ &= \int \tan^{n-2} x \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx = \int \tan^{n-2} x \, d(\tan x) - I_{n-2} \\ &= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2} \end{aligned}$$

$$\text{故有递推式} \quad I_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}$$

▷ 事实上 我们也可以进一步求出通项

$$\text{由于 } I_1 = \int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C, \quad I_0 = \int dx = x + C$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_n &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{i-1}}{n-(2i-1)} \tan^{n-(2i-1)} x + (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} I_{n-2-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \\ &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{i-1}}{n-(2i-1)} \tan^{n-(2i-1)} x + \begin{cases} (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x + C & n \text{ 偶} \\ (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \ln |\cos x| + C & n \text{ 奇} \end{cases} \end{aligned}$$

$$(2) \quad J_n = \int \sin^n x \, dx$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时} \quad J_n = \int \sin^{n-2} x (\tan^2 x) \, dx$$

$$= J_{n-2} - \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx$$

$$\text{注意到 } \left(\frac{\sin^n x}{n-1} \right)' = \sin^{n-2} x \cos x$$

$$\left(\frac{1}{n-1} J_n \right)$$

$$\begin{aligned} \text{故由分部积分公式可得} \quad J_n &= J_{n-2} - \left(\frac{\sin^{n-2} x \cos x}{n-1} + \int \frac{\sin^n x}{n-1} \, dx \right) \\ \text{故得} \Rightarrow J_n &= \frac{n-1}{n} J_{n-2} - \frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x \end{aligned}$$



8. (1) 解: $t = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$ 此時 $x = \frac{t^2+1}{t^2-1}$

代入可得 $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} dx = \int \frac{-4t^2}{(t^2+1)(t^2-1)} dt$

$$= -2 \int \left(\frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{t^2+1} \right) dt$$

$$= -\ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - 2 \arctan t + C$$

$$= -\ln \left| \frac{\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} - 1}{\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} + 1} \right| - 2 \arctan \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} + C$$

$$= \ln \left| x + \sqrt{x^2-4} \right| - 2 \arctan \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} + C$$

□

(2) 解: 令 $t = \sqrt[3]{x+1}$ 此時 $x = t^6 - 1$

$$\text{原式} = \int \frac{(1-t^3)6t^5}{t^6(1+t^2)} dt = 6 \int \frac{1-t^3}{(1+t^2)t} dt$$

$$= 6 \int \left(\frac{1}{t} - \frac{t-1}{t^2+1} - 1 \right) dt$$

$$= 6 \left[\ln|t| - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + \arctan t \right] + C$$

$$= 3 \ln \frac{\sqrt[3]{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} + 6 \arctan \sqrt[6]{x+1} - 6 \sqrt[6]{x+1} + C$$

□

$$(3) \text{ 假令 } x^4 = u \quad \begin{cases} x \geq 0 & \text{有 } x = u^{\frac{1}{4}} \\ x < 0 & \text{有 } x = -u^{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

先对 $x \geq 0$ 考虑 原式 = $\frac{1}{4} \int \frac{1}{4\sqrt[4]{1+u}} u^{-\frac{3}{4}} du = \frac{1}{4} \int \frac{1}{u^{\frac{3}{4}}\sqrt[4]{1+u}} du$

$$\begin{aligned} \text{令 } t &= \sqrt[4]{1+u} \quad \text{代入可得原式} = -\int \frac{t^2 dt}{t^4 - 1} \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{1}{2} \arctan t + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + x}{\sqrt[4]{1+x^4} - x} \right| - \frac{1}{2} \arctan \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C \end{aligned}$$

当 $x < 0$ 时也可以求出 $\int \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + x}{\sqrt[4]{1+x^4} - x} \right| - \frac{1}{2} \arctan \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C$

为使原函数在 0 处连续，需有 $C' = -\frac{\pi}{2} + C$

请根据以上3例的观察，尝试验证

对于 $\int R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$ $\bar{+}$ 型积分
($m \geq 2, ad-bc \neq 0$)

可作变换 $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 使之化为有理函数积分
故一定可积！



9. (1) $\forall \varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$

有 $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_{\frac{\pi-\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx + \int_0^{\frac{\pi-\varepsilon}{2}} \sin^n x dx$
 $\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \sin^n\left(\frac{\pi-\varepsilon}{2}\right)$

$\nexists n \rightarrow \infty$ 使得 $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$ 再由 ε 任意性
 $\bar{\delta}$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0$ □

(2)

$$\int_{n^2}^{n^2+n} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{n^2+x}} dx \leq \int_{n^2}^{n^2+n} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} dx \leq \int_{n^2}^{n^2+n} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= 2(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2})$$

$$= \frac{2n}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2}}$$

$\nexists n \rightarrow \infty$ 由两边夹定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{n^2}^{n^2+n} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} dx = 1$$

□

$$10. \quad (1) \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \quad (n \geq 2)$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx \\ &= I_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{由分部积分公式} \quad &I_{n-2} - \left[\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{n-1} x (-\sin x)}{n-1} dx \\ &= I_{n-2} - \frac{1}{n-1} I_n \\ \Rightarrow \quad &I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

$$\text{由 } I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{故由上述递推式得} \quad I_n &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2} \quad n \text{ 偶数} \\ \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \frac{3}{2} \cdot I_1 = \frac{(n-1)!!}{n!!} \quad n \text{ 奇数} \end{array} \right. \\ (\text{其中}) \quad (2m)!! &\triangleq 2m(2m-2) \cdots 4 \cdot 2 \\ (2m+1)!! &\triangleq (2m+1)(2m-1) \cdots 3 \cdot 1 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \text{解: } \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

$$\text{考虑 } f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

恰为 Riemann 和, 令 $n \rightarrow \infty$ 似原式 $= \int_0^1 f(x) dx = f_1$ \square