高等数学
第一章：函数、极限与连续函数

张道平

南开大学数学科学学院 414

daopingzhang@nankai.edu.cn

5.1 连续函数概念

5.1 连续函数概念

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，称 $\Delta x = x - x_0$ 为自变量的增量 (或自变量的改变量)，称 $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ 或 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 为函数的增量 (或函数的改变量).

5.1 连续函数概念

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，称 $\Delta x = x - x_0$ 为自变量的增量 (或自变量的改变量)，称 $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ 或 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 为函数的增量 (或函数的改变量).

定义：设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，称 x_0 为 $f(x)$ 的连续点.

5.1 连续函数概念

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，称 $\Delta x=x-x_0$ 为自变量的增量 (或自变量的改变量)，称 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ 或 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 为函数的增量 (或函数的改变量).

定义：设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 称 x_0 为 $f(x)$ 的连续点.

由于 $\lim_{x\to x_0} x=x_0$, 因此 $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x)$. (说明了什么?)

$\epsilon-\delta$ 语言：$f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \forall\epsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时，就有 $|\Delta y| = |f(x)-f(x_0)|<\epsilon$. 因此，$f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是 $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$.

$\epsilon-\delta$ 语言：$f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \forall\epsilon>0,\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，就有 $|\Delta y|=|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$. 因此，$f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是 $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义中含有三个条件：(i) 极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在；(ii) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义；(iii) $f(x_0)=A=\lim_{x\to x_0} f(x)$.

当这三个条件中只要有一条不成立时，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，或称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点.

当这三个条件中只要有一条不成立时，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，或称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点.

定义：设 $f(x)$ 在点 x_0 的某左半邻域 $(x_0-\delta, x_0]$(或在点 x_0 的某右半邻域 $[x_0, x_0+\delta)$) 内有定义，如果 $f(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$(或 $f(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$), 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续 (或在点 x_0 处右连续).

定理：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续且右连续.

定理：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续且右连续.

例：确定常数 A 与 B, 使得函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{sin2x}{x}+A, x<0,\\ 3, \qquad\qquad x=0,\\ \dfrac{Bln(1+x)}{x}, x>0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续.

定义：如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内的每一点处都连续，则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续，如果 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续，且在左端点 a 处右连续，在右端点 b 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数全体组成的集合记为 $C[a, b]$.

定义：如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内的每一点处都连续，则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续，如果 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续，且在左端点 a 处右连续，在右端点 b 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数全体组成的集合记为 $C[a, b]$.

例：函数

$$f(x) = \begin{cases} xsin\frac{1}{x}, x \neq 0, \\ 0, \quad x = 0, \end{cases}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内是连续的.

5.2 间断点的分类

5.2 间断点的分类

定义：设点 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点.

(1) 如果 $f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 都存在，则称点 x_0 为第一类间断点.

(2) 如果 $f(x_0^-)$ 与 $f(x_0^+)$ 中至少有一个不存在，则称点 x_0 为第二类间断点，即不是第一类间断点的任何间断点，称为第二类间断点.

对于第一类间断点，又分为两种情况：
(i) 如果 $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$, 则称点 x_0 为跳跃间断点，称 $f(x_0^+) - f(x_0^-)$ 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的跃度.
(ii) 如果 $f(x_0^-) = f(x_0^+) = A$，则称点 x_0 为可去间断点，此时只要补充定义 $f(x_0) = A$ 或改变 $f(x_0)$ 的值，使它等于 A(即改变 $f(x)$ 在点 x_0 处的定义，变为 $f(x_0) = A$)，则 $f(x)$ 在点 x_0 连续. 可去间断点由此而得名.

对于第一类间断点，又分为两种情况：
(i) 如果 $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$, 则称点 x_0 为跳跃间断点，称 $f(x_0^+) - f(x_0^-)$ 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的跃度.
(ii) 如果 $f(x_0^-) = f(x_0^+) = A$，则称点 x_0 为可去间断点, 此时只要补充定义 $f(x_0) = A$ 或改变 $f(x_0)$ 的值，使它等于 A(即改变 $f(x)$ 在点 x_0 处的定义，变为 $f(x_0) = A$), 则 $f(x)$ 在点 x_0 连续. 可去间断点由此而得名.

例： $x = 0$ 是 $f(x) = \frac{sinx}{x}$ 和 $f(x) = sin\frac{1}{x}$ 的间断点.

对于第一类间断点，又分为两种情况：
(i) 如果 $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$, 则称点 x_0 为跳跃间断点，称 $f(x_0^+) - f(x_0^-)$ 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的跃度.
(ii) 如果 $f(x_0^-) = f(x_0^+) = A$，则称点 x_0 为可去间断点，此时只要补充定义 $f(x_0) = A$ 或改变 $f(x_0)$ 的值，使它等于 A(即改变 $f(x)$ 在点 x_0 处的定义，变为 $f(x_0) = A$), 则 $f(x)$ 在点 x_0 连续. 可去间断点由此而得名.

例：$x = 0$ 是 $f(x) = \frac{sinx}{x}$ 和 $f(x) = sin\frac{1}{x}$ 的间断点.

例：$x = \frac{\pi}{2}$ 是 $f(x) = tanx$ 的间断点. 通常称如此类型的间断点为无穷间断点. 此时，$x = \frac{\pi}{2}$ 是 $y = tanx$ 的图形的垂直渐近线.

5.3 连续函数的运算法则、初等函数的连续性

5.3 连续函数的运算法则、初等函数的连续性

定理：如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在点 x_0 连续，则它们的和、差、积、商 (分母不为零)：$f(x) \pm g(x)$，$f(x) \cdot g(x)$，$\frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0) \neq 0)$ 都在点 x_0 处连续.

5.3 连续函数的运算法则、初等函数的连续性

定理：如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在点 x_0 连续，则它们的和、差、积、商 (分母不为零)： $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0) \neq 0)$ 都在点 x_0 处连续.

定理：设函数 $y = f(u)$ 与函数 $u = \varphi(x)$ 可以构成复合函数 $y = f[\varphi(x)]$. 如果 $u = \varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，且 $f(u)$ 在对应点 $u_0 = \varphi(x_0)$ 处也连续，则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 连续，即

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)] = f[\varphi(\lim_{x \to x_0} x)] = f[\varphi(x_0)].$$

5.3 连续函数的运算法则、初等函数的连续性

定理：如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在点 x_0 连续，则它们的和、差、积、商 (分母不为零)：$f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0) \neq 0)$ 都在点 x_0 处连续.

定理：设函数 $y = f(u)$ 与函数 $u = \varphi(x)$ 可以构成复合函数 $y = f[\varphi(x)]$. 如果 $u = \varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，且 $f(u)$ 在对应点 $u_0 = \varphi(x_0)$ 处也连续，则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 连续，即

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)] = f[\varphi(\lim_{x \to x_0} x)] = f[\varphi(x_0)].$$

例：求 $\lim_{x \to 0} e^{\cos x}$.

定理：如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上严格单调增加 (或严格单调减少)，并且连续，则其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 存在，且 $f^{-1}(x)$ 在闭区间 $[f(a),f(b)]$ 上严格单调增加 ($f^{-1}(x)$ 在闭区间 $[f(b),f(a)]$ 上严格单调减少)，并且连续.

定理：如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上严格单调增加 (或严格单调减少)，并且连续，则其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 存在，且 $f^{-1}(x)$ 在闭区间 $[f(a),f(b)]$ 上严格单调增加 ($f^{-1}(x)$ 在闭区间 $[f(b),f(a)]$ 上严格单调减少)，并且连续.

例：反三角函数的连续性. 初等函数在其定义域中的任一区间内都是连续的.

定理：如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上严格单调增加 (或严格单调减少)，并且连续，则其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 存在，且 $f^{-1}(x)$ 在闭区间 $[f(a),f(b)]$ 上严格单调增加 ($f^{-1}(x)$ 在闭区间 $[f(b),f(a)]$ 上严格单调减少)，并且连续.

例：反三角函数的连续性. 初等函数在其定义域中的任一区间内都是连续的.

例：求 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+sinx}-1}{x}$.

定理：如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上严格单调增加 (或严格单调减少)，并且连续，则其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 存在，且 $f^{-1}(x)$ 在闭区间 $[f(a),f(b)]$ 上严格单调增加 ($f^{-1}(x)$ 在闭区间 $[f(b),f(a)]$ 上严格单调减少)，并且连续.

例：反三角函数的连续性. 初等函数在其定义域中的任一区间内都是连续的.

例：求 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+sinx}-1}{x}$.

例：求 $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}(a>0$ 且 $a\neq 1)$.

5.4 闭区间上连续函数的性质

5.4 闭区间上连续函数的性质

(零点定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，即 $f(a) \cdot f(b) < 0$，则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使 $f(\xi) = 0$.

5.4 闭区间上连续函数的性质

(零点定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，即 $f(a) \cdot f(b) < 0$，则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使 $f(\xi) = 0$.

例：试判断方程 $x^3 - 3x^2 - 9x + 1 = 0$ 的实根个数.

5.4 闭区间上连续函数的性质

(零点定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，即 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使 $f(\xi)=0$.

例：试判断方程 $x^3-3x^2-9x+1=0$ 的实根个数.

(介值定理 I) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$, c 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一个实数. 则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f(\xi)=c(a<\xi<b)$.

5.4 闭区间上连续函数的性质

(零点定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，即 $f(a)\cdot f(b) < 0$，则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使 $f(\xi) = 0$.

例：试判断方程 $x^3 - 3x^2 - 9x + 1 = 0$ 的实根个数.

(介值定理 I) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) \neq f(b)$, c 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一个实数. 则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f(\xi) = c(a < \xi < b)$.

(有界性定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，即 $\exists M$, 使得 $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b]$.

(最值定理) 在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 一定能取到它的最大值和最小值.

(最值定理) 在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 一定能取到它的最大值和最小值.

(介值定理 II) 在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值 μ，即至少存在一点 $\xi \in [a, b]$，使得 $f(\xi) = \mu$.

(最值定理) 在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 一定能取到它的最大值和最小值.

(介值定理 II) 在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值 μ，即至少存在一点 $\xi \in [a, b]$，使得 $f(\xi) = \mu$.

例：设函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续. 如果 $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ 且 $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内有最大值 M.

(一致连续性) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 内有定义. 如果对于任意给定的正数 $\epsilon > 0$，不论它多么小，总存在 $\delta > 0$，使得对于区间 I 上的任意两点 x_1, x_2，当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，就有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \epsilon$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

(一致连续性) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 内有定义. 如果对于任意给定的正数 $\epsilon > 0$，不论它多么小，总存在 $\delta > 0$，使得对于区间 I 上的任意两点 x_1, x_2，当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，就有 $|f(x_1) - f(x_2)| \le \epsilon$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

例：试证函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在闭区间 $[a, 1](0 < a < 1)$ 上一致连续，但在 $(0, 1]$ 上不是一致连续的.

(一致连续性) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 内有定义. 如果对于任意给定的正数 $\epsilon > 0$，不论它多么小，总存在 $\delta > 0$，使得对于区间 I 上的任意两点 x_1, x_2，当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，就有 $|f(x_1) - f(x_2)| \le \epsilon$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

例：试证函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在闭区间 $[a, 1] (0 < a < 1)$ 上一致连续，但在 $(0, 1]$ 上不是一致连续的.

(康托定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上一致连续.

(一致连续性) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 内有定义. 如果对于任意给定的正数 $\epsilon > 0$，不论它多么小，总存在 $\delta > 0$，使得对于区间 I 上的任意两点 x_1, x_2，当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，就有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \epsilon$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

例：试证函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在闭区间 $[a, 1](0 < a < 1)$ 上一致连续，但在 $(0, 1]$ 上不是一致连续的.

(康托定理) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上一致连续.

例：试证函数 $f(x) = arctanx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致连续.

练习：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续. 试证对任何正数 α 和 β, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta) f(\xi)$.

练习：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续. 试证对任何正数 α 和 β, 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得
$\alpha f(a)+\beta f(b)=(\alpha+\beta)f(\xi)$.

练习：设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且
$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to b^-} f(x)=B$. 又存在 $x_1 \in (a,b)$，使得 $f(x_1)\geq B$. 试证 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内取得最大值.