线性代数-向量的线性相关性

- 向量组的线性表示
- 向量组的线性相关性
- 向量组的秩
- 线性方程组解的结构

4.1 向量组的线性表示

向量组的线性表示

定义(n维向量). 由n个有次序的数$a_1, a_2, \dots, a_n$所组成的数组称为n维向量. 这n个数称为该向量的分量，a_i称为第i分量.

行向量

列向量

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

说明. 通常将向量写成列向量.

向量组的线性表示

定义(向量组). 若干个同维向量组成集合称为向量组.

例：给定矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

- A的n个m维列向量$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$称为$A$的列向量组，其中$\beta_i=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$.
- A的m个n维行向量$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$称为$A$的行向量组，其中$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in})$.

反之，一个有n个m维列向量$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$的向量组对应矩阵$(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$.

向量组 $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 矩阵

向量组的线性表示

定义(线性组合). 给定向量$a_1, \ldots, a_m$以及实数$k_1, \ldots, k_m$，表达式

$$k_1 a_1 + \cdots + k_m a_m$$

称为$a_1, \ldots, a_m$的线性组合. $k_1, \ldots, k_m$称为线性组合的系数.

定义(线性表示). 给定向量$a_1, \ldots, a_m$以及向量b，若存在实数$k_1, \ldots, k_m$使得

$$b = k_1 a_1 + \cdots + k_m a_m$$

则称b由$a_1, \ldots, a_m$线性表示.

例： $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. 则 $b = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} a_1 - 2a_2$.

定理(线性表示的判定). 设有向量组$a_1, \ldots, a_m$. 则

$$\text{向量}b\text{由}a_1, \ldots, a_m\text{线性表示} \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b\text{有解} \quad \Leftrightarrow \quad R(A) = R(A, b),$$

其中$A = (a_1, \ldots, a_m)$.

证明. 矩阵乘法的列图片. ■

向量组的线性表示

定义(向量组的线性表示). 给定向量$a_1, \dots, a_m$以及$b_1, \dots, b_n$，若每个b_j都能由$a_1, \dots, a_m$线性表示，则称向量组$b_1, \dots, b_n$能由向量组$a_1, \dots, a_m$线性表示.

若向量组$a_1, \dots, a_m$与向量组$b_1, \dots, b_n$能够相互表示，则称这两个向量组等价.

线性表示的矩阵描述. 设向量组$b_1, \dots, b_n$能由向量组$a_1, \dots, a_m$线性表示. 令$A = (a_1, \dots, a_m)$, $B = (b_1, \dots, b_n)$. 根据定义,

$$\begin{cases} b_1 = k_{11}a_1 + k_{21}a_2 + \cdots + k_{m1}a_m \\ b_2 = k_{12}a_1 + k_{22}a_2 + \cdots + k_{m2}a_m. \\ \qquad\qquad \vdots \\ b_n = k_{1n}a_1 + k_{2n}a_2 + \cdots + k_{mn}a_m \end{cases}$$

令$k_i = \begin{pmatrix} k_{1i} \\ k_{2i} \\ \vdots \\ k_{mi} \end{pmatrix}, 1 \le i \le n$. 则

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_n) = (Ak_1, Ak_2, \dots, Ak_n) = AK,$$

其中$K = (k_1, k_2, \dots, k_n) = \left(k_{ij}\right)_{m\times n}$.

向量组的线性表示

定理(向量组的线性表示的判定). 给定向量组$a_1,\dots,a_m$以及$b_1,\dots,b_n$. 令$A=(a_1,\dots,a_m), B=(b_1,\dots,b_n)$. 则向量组$b_1,\dots,b_n$能够由向量组$a_1,\dots,a_m$线性表示当且仅当$R(A)=R(A,B)$.

证明. 向量组$b_1,\dots,b_n$能够由向量组$a_1,\dots,a_m$线性表示

$\Updownarrow$ 线性表示的矩阵描述

存在$m\times n$矩阵K使得$B=AK$

$\Updownarrow$

矩阵方程$AX=B$有解

$\Updownarrow$ 矩阵方程定理

$R(A)=R(A,B)$. ■

向量组的线性表示

推论(向量组等价的判定). 给定向量组$a_1, \dots, a_m$以及$b_1, \dots, b_n$. 令$A = (a_1, \dots, a_m), B = (b_1, \dots, b_n)$. 向量组$a_1, \dots, a_m$与向量组$b_1, \dots, b_n$等价当且仅当$R(A) = R(A, B) = R(B)$.

证明. $a_1, \dots, a_m$与$b_1, \dots, b_n$等价 $\Leftrightarrow$ $a_1, \dots, a_m$与$b_1, \dots, b_n$能相互线性表示

$$\Leftrightarrow R(A) = R(A, B) \text{ 且 } R(B) = R(A, B)$$

$$\Leftrightarrow R(A) = R(A, B) = R(B).$$ ■

推论(向量组的线性表示秩的关系). 给定向量组$a_1, \dots, a_m$以及$b_1, \dots, b_n$. 令$A = (a_1, \dots, a_m), B = (b_1, \dots, b_n)$. 若向量组$b_1, \dots, b_n$能够由向量组$a_1, \dots, a_m$线性表示，则$R(B) \le R(A)$.

证明. 由**向量组线性表示判定定理**，$R(A) = R(A, B) \ge R(B)$. ■

向量组的线性表示

矩阵方法：使用矩阵的语言表述问题并通过矩阵的运算解决问题.

- 线性方程组的求解等价于通过初等行变换化增广矩阵为行最简形矩阵.
- 向量组的线性表示等价于矩阵方程解的存在性，从而可以用矩阵的秩的相等关系来刻画.
- 未完待续……

线性变换的矩阵描述

二次型的矩阵描述

向量组的线性表示

例 1：设$a_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix}$; $b_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, $b_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}$, $b_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$.
证明a_1,a_2与b_1,b_2,b_3等价.

解：令$A=(a_1,a_2)$，$B=(b_1,b_2,b_3)$. 只需证明$R(A)=R(A,B)=R(B)$.

$$(A,B)=\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\-1&1&0&1&-1\\1&1&1&0&2\\1&3&1&2&0\end{pmatrix}\sim_r\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\0&2&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

- 从而$R(A)=R(A,B)=2$且$R(B)\le 2$.
- 又B有一个2阶非零子式，故$R(B)\ge 2$.

所以，$R(B)=2$.

向量组的线性表示

例 2：设A,B为$m\times n$矩阵且$A\sim_c B$．证明A的列向量组与B的列向量组等价．

解：由$\sim_c$的对称性，只需证若B由A经1次初等列变换而得到，则B的列向量组可以由A的列向量组线性表示．设$A=(a_1,\dots,a_n)$，$B=(b_1,\dots,b_n)$．

- $A\xrightarrow{c_i\leftrightarrow c_j}B$．则

$$\begin{cases} b_1=1a_1+\cdots+0a_i+\cdots+0a_j+\cdots+0a_n \\ \qquad\vdots \\ b_i=0a_1+\cdots+0a_i+\cdots+1a_j+\cdots+0a_n \\ \qquad\vdots \\ b_j=0a_1+\cdots+1a_i+\cdots+0a_j+\cdots+0a_n \\ \qquad\vdots \\ b_n=0a_1+\cdots+0a_i+\cdots+0a_j+\cdots+1a_n \end{cases}$$

$$故(b_1,\dots,b_n)=(a_1,\dots,a_n)\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i行 \\ \\ \leftarrow j行 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ i列 & j列 \end{array}$$

$\boldsymbol{E(ij)}$

向量组的线性表示

例 2：设A, B为$m \times n$矩阵且$A \sim_c B$. 证明A的列向量组与B的列向量组等价.

解(续)：

- $A \xrightarrow{c_i \times k} B$. 则$B = AE(i(k))$.
- $A \xrightarrow{c_i + kc_j} B$. 则$B = AE(ji(k))$. (表示的系数矩阵不是$E(ij(k))$!)

向量组的线性表示

例 3：n维向量组$a_1, a_2, \dots, a_n$对应矩阵$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. 证明：$e_1, e_2, \dots, e_n$可由$a_1, a_2, \dots, a_n$线性表示的充要条件为$R(A) = n$.

证明. $e_1, e_2, \dots, e_n$可由$a_1, a_2, \dots, a_n$线性表示 $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, E_n)$.

- 显然, $R(A, E_n) \le n$.
- 由**秩的性质 7**，$R(A, E_n) \ge R(E_n) = n$.

  所以，$R(A, E_n) = n$.

命题得证. ■

说明. 这个例题回答了我们之前提出的关于一般矩阵”可逆”条件的问题.

4.2 向量组的线性相关性

向量组的线性相关性

定义(线性相关性). 给定向量$a_1,\dots,a_m$, 若存在不全为0的实数$k_1,\dots,k_m$使得

$$k_1a_1+\cdots+k_ma_m=0,$$

则称$a_1,\dots,a_m$线性相关; 否则称$a_1,\dots,a_m$线性无关.

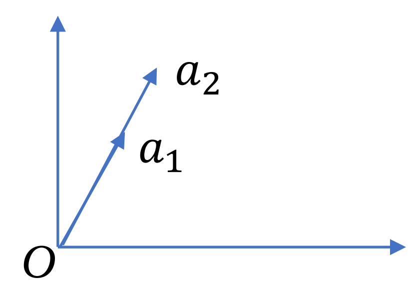
例: $a_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $a_3=\begin{pmatrix}-3/2\\5/2\end{pmatrix}$线性相关: $\frac{1}{2}a_1-2a_2-a_3=0$.

理解.

- 定义中是“不全为0”, 而不是“全不为0”!
- 线性无关通常使用逆否命题:

$$a_1,\dots,a_m\text{无关} \Leftrightarrow k_1a_1+\cdots+k_ma_m=0\Rightarrow k_1=\cdots=k_m=0.$$

- 线性相关的几何解释
  - $m=1$ $\quad$ a_1线性相关 $\Leftrightarrow$ a_1为零向量
  - $m=2$ $\quad$ a_1,a_2线性相关 $\Leftrightarrow$ a_1,a_2共线(成比例)
  - $m=3$ $\quad$ a_1,a_2,a_3线性相关 $\Leftrightarrow$ a_1,a_2,a_3共面



定义

线性相关性等价定义. **向量$\boldsymbol{a_1, a_2 \dots, a_m}$线性相关当且仅当某个$\boldsymbol{a_i}$是其余$\boldsymbol{m-1}$个向量的线性组合.**

证明. **必要性.**

设$a_1, a_2 \dots, a_m$线性相关.

- 则存在不全为0的实数$k_1, k_2 \dots, k_m$使得$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_m a_m = 0$.
- 不妨假设$k_1 \neq 0$，从而$k_1 a_1 = -k_2 a_2 - \cdots - k_m a_m$.
- 因为$k_1 \neq 0$，两边同除k_1可得$a_1 = -\frac{k_2}{k_1} a_2 - \cdots - \frac{k_m}{k_1} a_m$.

定义

线性相关性等价定义. **向量$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \dots, \boldsymbol{a_m}$线性相关当且仅当某个$\boldsymbol{a_i}$是其余$\boldsymbol{m-1}$个向量的线性组合.**

证明(续). **充分性.**

不妨假设a_1是其余$m-1$个向量的线性组合.

- 则存在实数$k_2, \dots, k_m$使得$a_1 = k_2 a_2 + \cdots + k_m a_m$.
- 故$1a_1 - k_2 a_2 - \cdots - k_m a_m = 0$.
- 因为$1, -k_2, \dots, -k_m$不全为0, $a_1, a_2, \dots, a_m$线性相关. ■

向量组的线性相关性

定理(线性相关性的判定). 给定向量$a_1,\ldots,a_m$，令$A=(a_1,\ldots,a_m)$. 则

$$a_1,\ldots,a_m\text{线性相关} \Leftrightarrow R(A)<m.$$

证明.

$$\begin{aligned} a_1,\ldots,a_m\text{线性相关} &\Leftrightarrow \text{存在不全0的实数}x_1,\ldots,x_m \\ &\quad\ \ \text{使得}x_1a_1+\cdots+x_ma_m=0 \\ &\Leftrightarrow \text{齐次线性方程组}Ax=0\text{有非零解} \\ &\Leftrightarrow R(A)<m. \end{aligned}$$

定义

列图片

■

例 1: 讨论$e_1,\ldots,e_n$的线性相关性.

解: 令$E_n=(e_1,\ldots,e_n)$. 因为$|E_n|=1\neq 0$，$R(E_n)=n$. 故$e_1,\ldots,e_n$线性无关.

思考: 如何使用定义证明$e_1,\ldots,e_n$线性无关?

向量组的线性相关性

例 2：已知向量a_1,a_2,a_3线性无关．设

$$\begin{cases} b_1 = a_1 + a_2 \\ b_2 = a_2 + a_3 \\ b_3 = a_3 + a_1 \end{cases}$$

证明b_1,b_2,b_3线性无关.

证法 1：定义.

$$x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3 = 0 \Leftrightarrow x_1(a_1 + a_2) + x_2(a_2 + a_3) + x_3(a_3 + a_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_3)a_1 + (x_1 + x_2)a_2 + (x_2 + x_3)a_3 = 0$$

a_1,a_2,a_3线性无关

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0. \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

■

向量组的线性相关性

例 2：已知向量a_1,a_2,a_3线性无关．设

$$\begin{cases} b_1 = a_1 + a_2 \\ b_2 = a_2 + a_3 \\ b_3 = a_3 + a_1 \end{cases}$$

证明b_1,b_2,b_3线性无关.

证法 2：转化为齐次线性方程组是否有非零解的讨论.

令$A = (a_1,a_2,a_3), B = (b_1,b_2,b_3)$. 则

$$B = AK, \text{其中} K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3 = 0 \iff Bx = 0$$

$$\iff AKx = 0 \iff A(Kx) = 0$$

因为a_1,a_2,a_3线性无关，$R(A) = 3$．从而齐次线性方程组$Ay = 0$只有零解.

$$\iff Kx = 0$$

$\boldsymbol{R(K) = 3}$ $\qquad \iff x = 0.$ ■

向量组的线性相关性

例 2：已知向量a_1,a_2,a_3线性无关．设

$$\begin{cases} b_1 = a_1 + a_2 \\ b_2 = a_2 + a_3 \\ b_3 = a_3 + a_1 \end{cases}$$

证明b_1,b_2,b_3线性无关.

证法 3：秩的性质.

令$A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3)$. 则

$$B = AK, 其中K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

则 $$\begin{aligned} R(B) &= R(AK) \\ &= R(A) \\ &= 3 \end{aligned}$$

***K*可逆**

线性相关判定定理

从而b_1,b_2,b_3线性无关. ■

向量组的线性相关性

练习：已知向量a_1, a_2, a_3线性无关．判定向量b_1, b_2, b_3的线性相关性.

- $\begin{cases} b_1 = a_1 + a_2 \\ b_2 = 2a_2 + 3a_3 \\ b_3 = 3a_1 + 5a_3 \end{cases}$

- $\begin{cases} b_1 = a_1 - a_2 \\ b_2 = 2a_2 + a_3 \\ b_3 = a_1 + a_2 + a_3 \end{cases}$

线性相关性的性质

性质 1：**若$\boldsymbol{a_1,\dots,a_m}$线性相关，则$\boldsymbol{a_1,\dots,a_m,a_{m+1}}$也线性相关．反之，若$\boldsymbol{a_1,\dots,a_m,a_{m+1}}$线性无关，则$\boldsymbol{a_1,\dots,a_m}$线性无关.**

证明．令$A=(a_1,\dots,a_m)$，$B=(a_1,\dots,a_m,a_{m+1})$．则$R(B)\le R(A)+1$.

若$a_1,\dots,a_m$线性相关，**由线性相关性判定定理**，$R(A)<m$.

从而$R(B)\le R(A)+1<m+1$.

由**线性相关性判定定理**，$a_1,\dots,a_m,a_{m+1}$线性相关. ■

记忆．部分相关，则整体相关；反之，整体无关，则部分无关.

线性相关性的性质

性质 2：**设$\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_m$为$\boldsymbol{n}$维向量．若$\boldsymbol{m}>\boldsymbol{n}$，则$\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_m$线性相关.**

证明．$A=(a_1,\ldots,a_m)$为$n\times m$矩阵．从而

$$R(A)\leq n<m.$$

由**线性相关性判定定理**，$a_1,\ldots,a_m$线性相关. ■

记忆．个数大于维数必相关.

特别地，**$\boldsymbol{n}+\mathbf{1}$个$\boldsymbol{n}$维向量必线性相关.**

线性相关性的性质

性质 3：**若$\boldsymbol{a_1,\dots,a_m}$线性无关，$\boldsymbol{a_1,\dots,a_m,b}$线性相关．则$\boldsymbol{b}$必能由$\boldsymbol{a_1,\dots,a_m}$唯一线性表示.**

证明．令$A=(a_1,\dots,a_m)$，$B=(a_1,\dots,a_m,b)$.

- 因$a_1,\dots,a_m$线性无关，**由线性相关性判定定理**，$R(A)=m$.
- 因$a_1,\dots,a_m,b$线性相关, **由线性相关性判定定理**，$R(B)<m+1$.

  从而，$m=R(A)\le R(B)<m+1$．故$R(B)=m=R(A)$.

  因此，$Ax=b$有唯一解，即b能由$a_1,\dots,a_m$唯一线性表示. ■

记忆．无关变相关，表示必唯一.

说明．以上三个性质均可用定义证明(动手尝试).

线性相关性的性质

例：设a_1, a_2, a_3线性相关, 设a_1, a_2, a_4线性无关. 证明:

- a_3能由a_1, a_2线性表示.
- a_4不能由a_1, a_2, a_3线性表示.

证明. 因a_1, a_2, a_4线性无关，由**性质 1**，a_1, a_2线性无关.

由**性质 3**，a_3能由a_1, a_2(唯一)线性表示.

假设a_4能由a_1, a_2, a_3线性表示.

因a_3能由a_1, a_2线性表示，从而a_4能由a_2, a_3线性表示，这与a_1, a_2, a_4线性无关矛盾.

向量组的秩

向量组的秩

定义(最大无关组和秩). 若能在向量组A中选出r个向量$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$满足

- $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$线性无关;
- A中任何$r+1$个向量(如果A中有$r+1$个向量的话)线性相关;

则称$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$是$A$的一个最大无关组. 数$r$称为$A$的秩, 记为$R_A$.

规定只含零向量的向量组的秩为0.

例 1: $A=\left\{\begin{pmatrix}k\\k\end{pmatrix}: k=0,1,\dots\right\}$的最大无关组为

$$\left\{\begin{pmatrix}k\\k\end{pmatrix}\right\}(k\neq 0)\text{ 且 }R_A=1.$$

例 2: $A=\left\{\begin{pmatrix}k\\k+1\end{pmatrix}: k=0,1,\dots\right\}$的最大无关组为

$$\left\{\begin{pmatrix}k\\k+1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\ell\\\ell+1\end{pmatrix}\right\}(k\neq \ell)\text{ 且 }R_A=2.$$

向量组的秩

定义(最大无关组和秩). 若能在向量组A中选出r个向量$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$满足

- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$线性无关;
- A中任何$r+1$个向量(如果A中有$r+1$个向量的话)线性相关;

则称$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$是$A$的一个最大无关组. 数$r$称为$A$的秩, 记为$R_A$.

规定只含零向量的向量组的秩为0.

例 3: $A = \mathbb{R}^n$的一个最大无关组为

$$e_1, e_2, \dots, e_n \text{且} R_A = n.$$

例 4: 若$A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$线性无关, 则$A$的最大无关组为

$$A\text{本身且} R_A = n.$$

向量组的秩

定理(最大无关组的等价定义). 若$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$是向量组$A$中的向量且满足

- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$线性无关;
- A中的任何向量都能由$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$线性表示;

则$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$是$A$的一个最大无关组.

证明. 只需证明A的任何$r+1$个向量$\beta_1, \dots, \beta_{r+1}$线性相关即可.

由假设，每个向量$\beta_i\,(1 \le i \le r+1)$都能由$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$线性表示. 从而

$$R(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r+1}) \le R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = r.$$ 向量组线性表示的性质

$$\xRightarrow{\text{线性相关性判定定理}} \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r+1}\text{线性相关.}$$ ■

说明.

- 定理中满足条件的$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$称为$A$的极大无关组.
- 显然最大无关组一定是极大无关组(为什么?).
- 定理的结论证明了极大无关组一定是最大无关组.

向量组的秩

例：设$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$的全体解向量组成的向量组为$S$，求$R_S$.

- 解:系数矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 得$\begin{cases} x_1 = 3x_3 - 4x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 \end{cases}$.

ξ_1 ξ_2

- 令$x_3 = c_1, x_4 = c_2$, 得通解$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- 故$S = \{c_1\xi_1 + c_2\xi_2 | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$.
- 又ξ_1, ξ_2线性无关, 故ξ_1, ξ_2为S的最大无关组. 从而$R_S = 2$.

练习: 求$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$的解集的秩.

向量组的秩

定理(向量组的秩=矩阵的秩). 设$A=(a_{ij})$为$m\times n$矩阵. 则A的秩等于其行向量组的秩，也等于其列向量组的秩.

证明. 假设$R(A)=r$. 令D_r为A的一个r阶非零子式且不妨设D_r取到了A的前r行和前r列. 设$A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$. 下证$a_1,\dots,a_r$为$a_1,a_2,\dots,a_n$的最大无关组.

- 因为D_r仍然是矩阵$(a_1,a_2,\dots,a_r)$的子式，$R(a_1,a_2,\dots,a_r)\geq r$. 从而$R(a_1,a_2,\dots,a_r)=r$. 由**线性相关性判定定理**，$a_1,\dots,a_r$线性无关.
- 任取A的第s列a_s($s>r$)，则矩阵$(a_1,a_2,\dots,a_r,a_s)$的所有$r+1$阶子式都是A的$r+1$阶子式，故$R(a_1,a_2,\dots,a_r,a_s)\leq r<r+1$. 由**线性相关性判定定理**，$a_1,a_2,\dots,a_r,a_s$线性相关.

由**最大无关组的等价定义**，$a_1,\dots,a_r$为$a_1,a_2,\dots,a_n$的最大无关组. ■

向量组的秩

定理(向量组的秩=矩阵的秩). 设$A=(a_{ij})$为$m\times n$矩阵. 则A的秩等于其行向量组的秩，也等于其列向量组的秩.

推论(行秩=列秩). 任何有限矩阵的行秩等于列秩. ■

说明. $R(a_1,a_2,\dots,a_n)$有两种解读:

- 矩阵$A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$的秩，即A的最高阶非零子式的阶数.
- 向量组$a_1,a_2,\dots,a_n$的秩，即最大无关组所含向量个数.

向量组的秩

向量组$a_1, a_2, \dots, a_n$最大无关组的求法.

- 对$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$作初等行变换化为行最简形矩阵$B$.
- 因$Ax = 0$与$Bx = 0$同解，A的列向量之间的线性关系与B的列向量之间的线性关系相同.
- B的每个非零行首非零元所在列是A列向量组的最大无关组，其余列由最大无关组线性表示的系数能够从B的系数得到.

例：求$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$列向量组的最大无关组并将其余列用最大无关组线性表示.

解：$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

故A的第1, 2, 4列为最大无关组且

$$a_3 = -a_1 - a_2, a_5 = 4a_1 + 3a_2 - 3a_4.$$

线性方程组解的结构

齐次线性方程组解的结构

解的性质 1：若ξ_1,ξ_2是$Ax=0$的解，则$\xi_1+\xi_2$也是$Ax=0$的解.

证明. $A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=0+0=0.$ ■

解的性质 2：若ξ是$Ax=0$的解，则$k\xi$也是$Ax=0$的解.

证明. $A(k\xi)=k(A\xi)=k0=0.$ ■

齐次线性方程组解的结构

定义(基础解系). $Ax=0$的解集的最大无关组称为$Ax=0$的基础解系.

定理(基础解系的作用). 令S是$Ax=0$的解集且$\xi_1,\ldots,\xi_t$是$Ax=0$的基础解系. 则

$$S=\{k_1\xi_1+\cdots+k_t\xi_t|k_1,\ldots,k_t\in\mathbb{R}\}.$$

证明.

- 因为$\xi_1,\ldots,\xi_t$是基础解系，$S\subseteq\{k_1\xi_1+\cdots+k_t\xi_t|k_1,\ldots,k_t\in\mathbb{R}\}$.
- 由齐次线性方程组解的性质，$\{k_1\xi_1+\cdots+k_t\xi_t|k_1,\ldots,k_t\in\mathbb{R}\}\subseteq S$. ■

说明. $Ax=0$的解集是基础解系的所有线性组合.

齐次线性方程组解的结构

基础解系的求法．$A_{m\times n}x=0.$

- 设$R(A)=r$且A的前r列线性无关．则A的行最简形矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 其对应的线性方程组为$\begin{cases} x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n \\ \qquad\vdots \\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n \end{cases}.$ (*)

齐次线性方程组解的结构

基础解系的求法. $A_{m\times n}x=0$.

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n \\ \qquad\vdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n \end{cases}$$

方法 1：通解法.

取$x_{r+1},\dots,x_n$为自由未知量并令$x_{r+1}=c_1,\dots,x_n=c_{n-r}$. 则方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\xi_1} + \underbrace{\cdots}_{\cdots\cdots} + c_{n-r} \underbrace{\begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\xi_{n-r}}.$$

因为$\xi_1,\dots\xi_{n-r}$线性无关(为什么?),

$$\xi_1,\dots\xi_{n-r}\text{是}Ax=0\text{的基础解系.}$$

齐次线性方程组解的结构

基础解系的求法. $A_{m\times n}x=0$.

$$\begin{cases} x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n \\ \vdots \\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n \end{cases}$$

方法 2：直接法.

取$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, 得$n-r$个线性无关的解向量$\xi_1,\dots,\xi_{n-r}$.

齐次线性方程组解的结构

例：求 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 7x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ 的基础解系与通解.

解:

- 系数矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/7 & -3/7 \\ 0 & 1 & -5/7 & -4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 得$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_4 \\ x_2 = \frac{5}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 \end{cases}$.
- 令$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 得基础解系$\xi_1 = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- 故通解为$\{c_1\xi_1 + c_2\xi_2 | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$.

练习: 求$nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + x_n = 0$的基础解系.

齐次线性方程组解的结构

定理(齐次线性方程组解集的秩). 设$m \times n$矩阵A的秩为r. 则$Ax = 0$的解集的秩为$n - r$.

推论(通过线性方程组的解判定秩的相等关系) 若$Ax = 0$与$Bx = 0$有相同的变量个数且同解，则$R(A) = R(B)$.

齐次线性方程组解的结构

例 1：设$A_{m\times n}B_{n\times \ell}=O$. 证明$R(A)+R(B)\le n$.

证明. 对B按列分块有$B=(b_1,b_2,\dots,b_\ell)$. 则

$$A(b_1,b_2,\dots,b_\ell)=(0,0,\dots,0),$$

即$Ab_i=0, 1\le i\le \ell$. 这表明B的所有ℓ列均为$Ax=0$的解.

根据**齐次线性方程组解集的秩的定理**,

$$R(B)=R(b_1,b_2,\dots,b_\ell)\le n-R(A).$$

从而$R(A)+R(B)\le n$. ∎

齐次线性方程组解的结构

例 2：设A为任何实矩阵．证明$R(A^TA)=R(A)$.

证明．根据**推论**，只需证明$(A^TA)x=0$与$Ax=0$同解.

显然，$Ax=0$的解是$(A^TA)x=0$的解.

现假设x_0是$(A^TA)x=0$的解，下证x_0是$Ax=0$的解.

在$(A^TA)x_0=0$两边同时左乘x_0^T：

$$x_0^T(A^TA)x_0=0,$$

即$(Ax_0)^T(Ax_0)=0$.

因A为实矩阵，$Ax_0=0$. ■

非齐次线性方程组解的结构

解的性质 1：若η_1, η_2是$Ax = b$的解，则$\eta_1 - \eta_2$是$Ax = 0$的解.

证明. $A(\eta_1 - \eta_2) = A\eta_1 - A\eta_2 = b - b = 0.$ ■

解的性质 2：若η是$Ax = b$的解且ξ是$Ax = 0$的解，则$\eta + \xi$也是$Ax = b$的解.

证明. $A(\xi + \eta) = A\xi + A\eta = 0 + b = b.$ ■

非齐次线性方程组解的结构

定理(非齐次线性方程组解的结构). 设$A_{m\times n}$的秩为r，η^*是$Ax=b$的解且$\xi_1,\dots,\xi_{n-r}$是$Ax=0$的基础解系. 则$Ax=b$的解集为

$$S=\{\eta^*+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}|k_1,\dots,k_{n-r}\in\mathbb{R}\}.$$

证明. 设η是$Ax=b$的任一解. 由**解的性质 1**，$\eta-\eta^*$是$Ax=0$的解，从而$\eta-\eta^*$是$\xi_1,\dots,\xi_{n-r}$的线性组合，即$S\subseteq\{\eta^*+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}|k_1,\dots,k_{n-r}\in\mathbb{R}\}$.

反之，由**解的性质**，$\eta^*+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$是$Ax=b$的解. 故$\{\eta^*+k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}|k_1,\dots,k_{n-r}\in\mathbb{R}\}\subseteq S$. ■

记忆. 特解 + 对应齐次线性方程组的通解.

非齐次线性方程组解的结构

例 1：求 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 15 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 22 \end{cases}$ 的通解.

解:

- 增广矩阵$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 15 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 7 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 得$\begin{cases} x_1 = -x_3 + 2x_4 + x_5 - 1 \\ x_2 = -x_3 - 3x_4 - 3x_5 + 8 \end{cases}$.

- 令$x_3 = x_4 = x_5 = 0$, 得特解$\eta^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

非齐次线性方程组解的结构

例 1：求 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 15 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 22 \end{cases}$ 的通解.

解(续)：

- $\begin{cases} x_1 = -x_3 + 2x_4 + x_5 - 1 \\ x_2 = -x_3 - 3x_4 - 3x_5 + 8 \end{cases}.$
- 对应齐次线性方程组为? $\begin{cases} x_1 = -x_3 + 2x_4 + x_5 \\ x_2 = -x_3 - 3x_4 - 3x_5 \end{cases}$
- 令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- 故通解为 $\{\eta^* + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3 | c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$.

非齐次线性方程组解的结构

例 2：已知η_1,η_2,η_3是三元非齐次线性方程组$Ax=b$的解，$R(A)=1$且

$$\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3+\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

求$Ax=b$的通解.

解：首先求$Ax=b$的一个特解.

$$\eta_1+\eta_2+\eta_3=\frac{1}{2}[(\eta_1+\eta_2)+(\eta_2+\eta_3)+(\eta_3+\eta_1)]=\begin{pmatrix}3/2\\1\\1/2\end{pmatrix}.$$

故$\eta_1=\begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}1/2\\0\\-1/2\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}1/2\\1\\1/2\end{pmatrix}$.

再次求$Ax=0$的基础解系.

因为$R(A)=1$，基础解系含有2个向量. 由**解的性质 1**，

$$\eta_3-\eta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3-\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

是$Ax=0$的解. 而这2个向量线性无关，故$\eta_3-\eta_1,\eta_3-\eta_2$是$Ax=0$的基础解系.

向量组总结

向量组总结

难点.

- 线性相关和线性无关的定义：

给定向量$a_1, \dots, a_m$，若存在不全为0的实数$k_1, \dots, k_m$使得

$$k_1 a_1 + \cdots + k_m a_m = 0,$$

则称b由$a_1, \dots, a_m$线性相关；**否则称它为线性无关**.

- 最大无关组与极大无关组的区别.
- **秩定理(Rank Theorem)**：矩阵的行秩等于列秩.

重点.

- **向量组$\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n$能够由向量组$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$线性表示**

$$\Updownarrow$$

存在$\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$矩阵$\boldsymbol{K}$使得$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{AK}$

- 熟练使用定义和性质证明向量之间的线性相关性.
- 初等行变换求向量组的最大无关组和秩.
- 根据线性方程组解的结构写出线性方程组的通解.

向量组总结

1. 设A为一个有限向量组．证明A的任何两个极大无关组所包含的向量个数相等.
2. 设$a_1, a_2, \dots, a_m$线性相关且$a_1 \neq 0$．证明存在某个向量$a_k\,(2 \le k \le m)$使得a_k能由$a_1, \dots, a_{k-1}$线性表示.
3. 已知$a_1, a_2, \dots, a_m$线性无关且β不能由$a_1, a_2, \dots, a_m$线性表示．证明$a_1, a_2, \dots, a_m, \beta$线性无关.
4. 求$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$列向量组的最大无关组并将其余列向量用最大无关组线性表示.
5. 设矩阵$A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$且a_1, a_2, a_4线性无关，$a_1 = 2a_2 - a_3$，向量$b = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$，求线性方程组$Ax = b$的通解.