第三章

功和能

§1. 功

- 功是力对距离的积累效果。

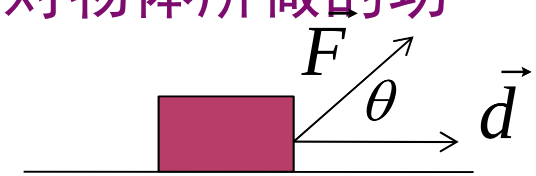
一、恒力作功

力$\vec{F}$作用于物体上，如果$\vec{F}$与位移$\vec{d}$同向，则$\vec{F}$对物体所做的功为：

$$A = Fd$$

- 如果$\vec{F}$与$\vec{d}$不同方向，夹角为θ，那么$\vec{F}$对物体所做的功为：

$$A = Fd\cos\theta$$



- 也可写作： $A = \vec{F}\cdot\vec{d}$
- 定义：力对物体所做的功为力沿位移方向的分量与位移的乘积。或功是力与位移的标积。

说明:

1）功是标量，没有方向但有正负

- $\theta < 90^\circ$　功为正
- $\theta = 90^\circ$　功为0
- $\theta > 90^\circ$　功为负

2）功的单位：

SI中，　牛顿· 米=焦耳（J）

CGS中，　达因 ·厘米=尔格（erg）

3) 功可看做力的分量与位移的乘积，也可看做是位移沿力的方向的分量与力的乘积。

即 $$A = (F\cos\theta)d = F(d\cos\theta)$$

4）提到功，必须指明是哪个力所作的功。

5）这里的位移有时需要看做作用点的位移（例如通过动滑轮拉一个物体）。

二、变力所作的功

- 当$\vec{F}$不恒定，即$\vec{F}$是位置的函数时，即

$$\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$$

- 可将轨道分成很多小段，每个小段内，$\vec{F}(\vec{r})$可近似看做恒力，每个小段可看做直线。

- 则

$$\Delta A_i = F_i \left|\Delta \vec{r}_i\right| \cos\theta_i$$

$$dA = F\left|d\vec{r}\right|\cos\theta$$

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\left|d\vec{r}\right| = ds$$

$$dA = F ds \cos\theta$$

$$A = \int_{a(L)}^{b} F\cos\theta ds$$

$$A = \int_{a(L)}^{b} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

在直角坐标系中：

$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}$$

$$d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$$

$$dA=F_xdx+F_ydy+F_zdz$$

$$A=\int_{a(\mathrm{L})}^{b}F_xdx+F_ydy+F_zdz$$

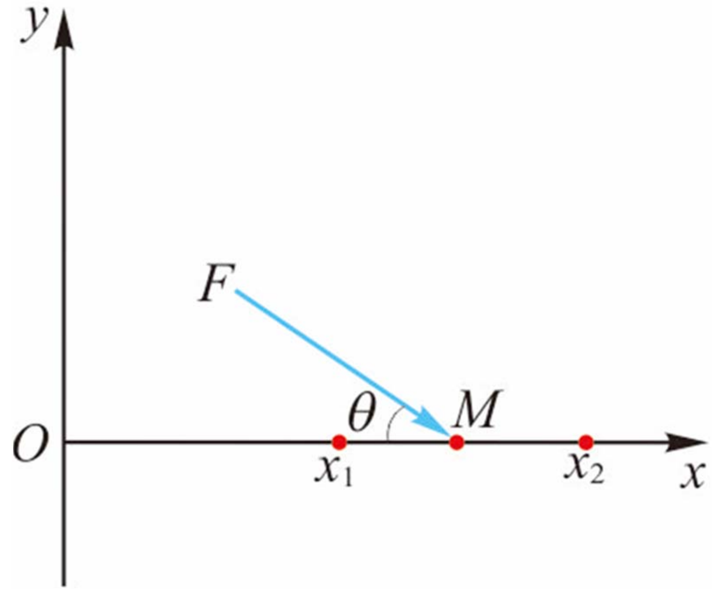
在自然坐标系中：

若F为恒力，质点直线运动

$$A=\int_{a(\mathrm{L})}^{b}F\cos\theta ds=Fs\cos\theta$$

南開大學 Nankai University

质点M 在力F 作用下沿坐标轴Ox 运动,力F 的大小和方向角θ 随x 变化的规律分别为F = 6x ,cosθ=0.7-0.02x ,其中F 的单位为N , x 、y 的单位为m.试求质点从x_1=10m处运动到x_2=20m处的过程中,力F所做的功.



已知：F＝6x；cosθ＝0.70－0.02x

求：质点从x_1＝10m到x_2＝20m过程中F所作的功

已知：F＝6x；cosθ＝0.70－0.02x

求：质点从x_1＝10m到x_2＝20m过程中F所作的功

解：

$$dA = F\cos\theta dx = 6x\left(0.70 - 0.02x\right)dx$$

积分得：

$$A = \int_{x_1}^{x_2} 6x(0.70 - 0.02x)dx$$

$$= \int_{10}^{20} 4.2xdx - \int_{10}^{20} 0.12x^2 dx$$

$$= 350(J)$$

南開大學 Nankai University

二、合力作功

- 质点受几个力的作用

F＝F1＋F2＋……+Fn

所作的功为：

$$A=\int_{r_1}^{r_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots\ldots+\vec{F}_n)\bullet d\vec{r}$$

$$=\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}_1\bullet d\vec{r}+\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}_2\bullet d\vec{r}+\ldots\ldots+\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}_n\bullet d\vec{r}$$

$$=A_1+A_2+\ldots\ldots+A_n$$

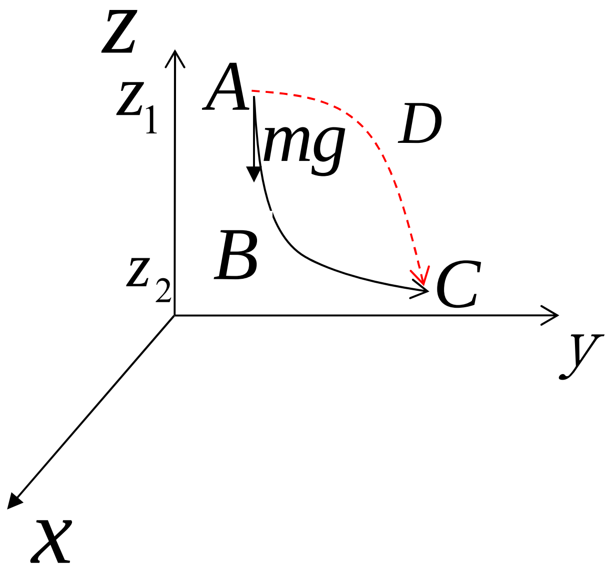
力对质点所作的总功等于这些力分别对质点作功的代数和

力对质点所作的总功等于这些力的合力对质点所作的功

§2. 几种常见力的功

一、重力所作的功

- 在地球表面附近，重力可看做恒定力，大小 $F_G = mg$ 方向垂直向下
- 在直角坐标系下：



$$F_x = 0; \quad F_y = 0; \quad F_z = -mg$$

$$A = \int_{z_1}^{z_2} \vec{F}_G \cdot d\vec{r} = \int_{z_1}^{z_2} F_z dz = \int_{z_1}^{z_2} -mgdz = mg\left(z_1 - z_2\right)$$

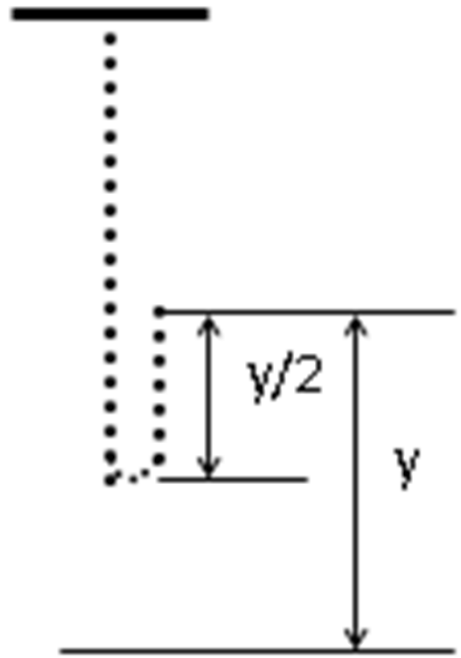
由此可见，重力所作的功只与起点和终点的位置有关，而与路径无关。

即:

$$W(A \to B \to C) = W(A \to D \to C)$$

例题（重点）

一条长L，质量M的均匀柔绳，A端挂在天花板上，自然下垂，将B端沿铅直方向提高到与A端同高处。求该过程中重力所作的功。



例题（重点）

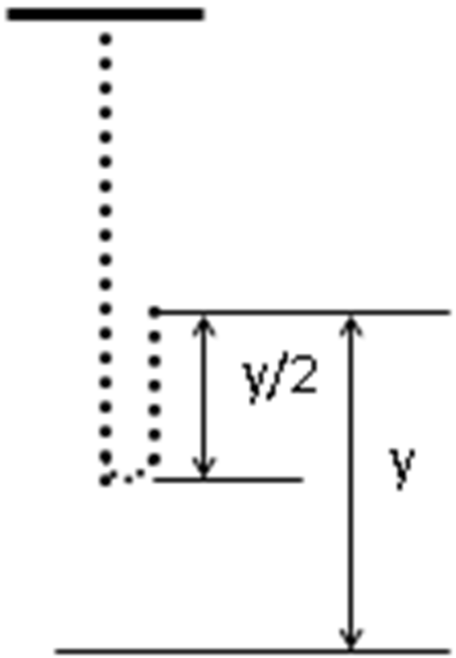
一条长L，质量M的均匀柔绳，A端挂在天花板上，自然下垂，将B端沿铅直方向提高到与A端同高处。求该过程中重力所作的功。

解：提升高度y时，提的链长y/2

提起部分受的重力 $\frac{M}{L}\frac{y}{2}g$

dy上的元功为：　$dA = -\frac{1}{2}\frac{M}{L}gydy$

$$A = \int_0^L dA = \int_0^L -\frac{1}{2}\frac{M}{L}gydy = -\frac{1}{4}MgL$$



二、万有引力所作的功

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

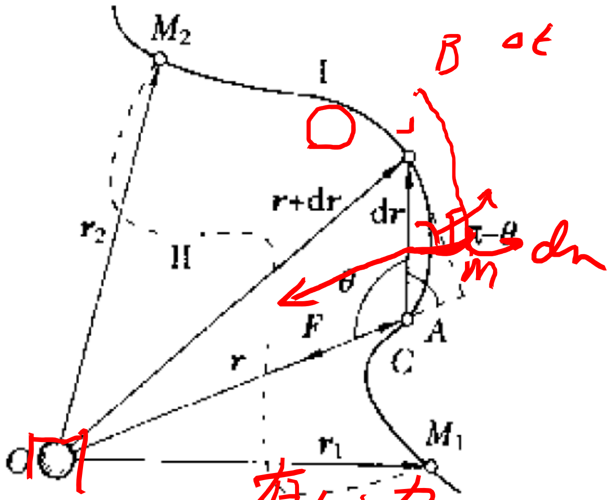
$$A = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= |\vec{F}|\underbrace{|d\vec{r}|\cos(\theta)}_{-dr}$$

$$|d\vec{r}|\cos(\pi-\theta) = dr$$

$$A = \int_{r_1}^{r_2} -F\,dr = -\int_{r_1}^{r_2} G\frac{Mm}{r^2}\,dr$$

$$A = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$



有心力

极坐标

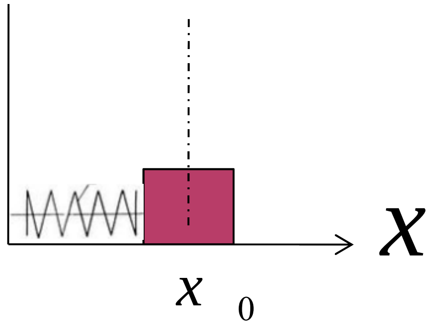
$$\vec{r} = r\vec{r}_0$$

$$F \perp \vec{\theta}_0$$

$$dA = -F\,d\vec{r}$$

三、弹性力做功

- 对于弹簧$F = -k(x - x_0)$（沿弹簧所在直线为x轴，指向拉长反向）



- x_0为自然长度时物体的位置，若以此为置为坐标原点，则有

$$F = -kx\text{——胡克定律}$$

$$k\text{——倔强系数（或劲度系数）}$$

- 元功为：$dA = F_x dx = -kxdx$
- 从x_1到x_2做的功为：$A = \int_{x_1}^{x_2} -kxdx = -\frac{1}{2}kx^2 \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$

例题

非胡克定律的弹簧：$f=-kx-ax^3$，其中k、a均为常数。

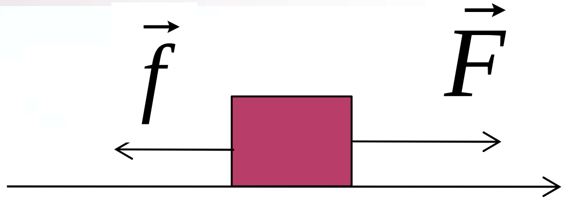
求：从x_1到原长过程中，弹性力做的功。

$$A=\int_{x_1}^{0}(-kx-ax^3)dx$$

$$=\frac{1}{2}kx_1{}^2+\frac{1}{4}ax_1{}^4$$

四、摩擦力所作的功

- 若物体滑动$\Delta\vec{r}$,则摩擦力做功为：

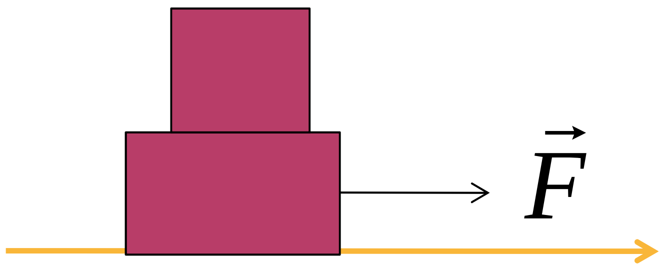


$$\Delta A_f = \vec{f}\cdot\Delta\vec{r} = f\Delta r\cos\pi = -f\Delta r$$

向相反方向运动$\Delta\vec{r}$：

$$\Delta A_f{}' = \vec{f}\cdot\Delta\vec{r} = f\Delta r\cos\pi = -f\Delta r$$

- 闭合曲线一次往返f 做功：$-2f\Delta r \neq 0$
- 说明：
- 1）摩擦力是耗散力
- 2）摩擦力可以做正功
- 3）静摩擦力也可做功



补充例题

例1：准静态地提起一条长L，质量M的均匀柔绳，需要作多少功？

补充例题

例1：准静态地提起一条长L，质量M的均匀柔绳，需要作多少功？

解：单位长度绳的质量：M/L，

x长度的绳子质量 $\frac{M}{L}x$

$$F = mg = \frac{M}{L}xg$$

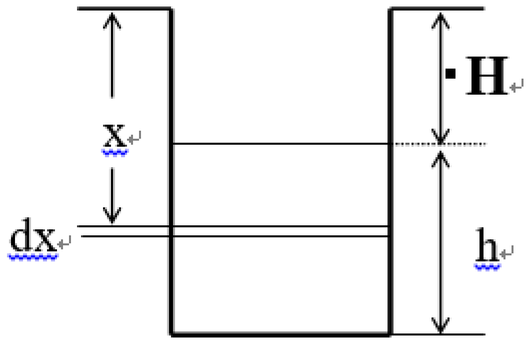
$$A = \int_0^x F dx = \int_0^x \frac{M}{L} gx dx = \frac{1}{2}\frac{M}{L}gx^2$$

南開大學 Nankai University

例2（重点）

蓄水池面积S，水深h，水面距地面H。

求：抽出水需要作多少功?

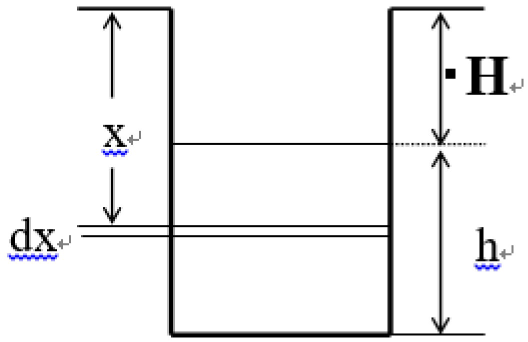


例2（重点）

蓄水池面积S，水深h，水面距地面H。

求：抽出水需要作多少功？

解：离地面x处，深dx的一层水的质量$dm=\rho Sdx$，将dm水提到路面所需作的功：



$$dA = dm\,g\,x = \rho Sgxdx$$

$$A=\int_H^{H+h}\rho Sgxdx=\frac{1}{2}\rho Sgx^2\Big|_H^{H+h}$$

例3

风力F作用于向北运动的船，风力方向变化的规律是：$\theta = BS$，其中S为位移，B为常数，θ为F与S间的夹角。如果运动中，风的方向自南变到东，

求：风力作的功。

解：元功：dA＝Fdscosθ；　其中 θ＝BS

积分限：风向由南变到东，则θ由0变到π/2；S由0变到π/2B

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2B}} FdS\cos\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2B}} F\cos(BS)d(BS)\frac{1}{B}$$

$$=\frac{F}{B}\sin(BS)\Big|_0^{\frac{\pi}{2B}}$$

$$=\frac{F}{B}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{F}{B}$$

小结：

$$A = Fs\cos\theta$$

例1：F变；　例2：S变；　例3：θ变

§3. 功率

- 设做功者在 t 到 $t+\Delta t$ 时间内，完成的功为 ΔA，则这段时间内的平均功率为：

$$\bar{P}=\frac{\Delta A}{\Delta t}$$

在 $\Delta t\to 0$ 时，瞬时功率：

$$P=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{dA}{dt}=\frac{\vec{F}\cdot d\,\vec{r}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}=Fv\cos\theta$$

由 $P=\frac{dA}{dt}$ 得到：$dA=Pdt$

- ∴ t_1 到 t_2 这段时间内 做功为：

$$A=\int_{t_1}^{t_2}Pdt=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\vec{v}dt$$

- 功率是标量，SI中，焦耳/秒=瓦（W）
- 在工程上：
  - 1千瓦=1000瓦特
  - 1hp(英 马力)=746w
  - 1ps（德法 马力）=736w

§4. 动能定理

- 从力学的范围讲:

① 具有速度的物体可以对其他物体做功，挥动的铁锤可以打桩，水流可以推进水轮机等，因为它们具有一种和速度相联系的能量，叫**动能**。

② 具有位置优势的物体，如拉伸了的弹簧，高处的水流下时可以产生动能而做功。因为它们具有一种和物体间相对位置相联系的能量——**势能**.

- **动能和势能统称机械能**

- 首先讨论动能

➢ 外力对物体做功，物体的速度发生变化，与速度相联系的动能也发生了变化。即动能的变化是由外力引起的。

一、质点动能定理

在笛卡尔提出动量守恒定理后42年，德国数学家、哲学家莱布尼兹（Leibniz，1646~1716）提出了“活力”概念及“活力”守恒定理。和笛卡尔一样，莱布尼兹也相信宇宙中运动的总量必须保持不变，不过和笛卡尔不同，他认为应该用mv^2表示这个量，而不是mv。

莱布尼兹与笛卡尔关于mv^2和mv之争，在历史上曾经历相当长时间的混乱，一百多年后，人们逐渐明白，这是两种不同的守恒规律，莱布尼兹的“活力”守恒应归结为机械能守恒。

由牛顿第二定律：

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

等式两边同时标乘dr，则：

$$\vec{F}\bullet d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\bullet d\vec{r} = m\frac{d\vec{r}}{dt}\bullet d\vec{v} = m\vec{v}d\vec{v}$$

等式两边同时积分得：

$$A = \int_{r_1}^{r_2}\vec{F}\bullet d\vec{r} = \int_{v_1}^{v_2} m\vec{v}\bullet d\vec{v} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \qquad E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

力对质点作的功＝质点动能的增量——动能定理

注意：

1．动能是标量，是能量的一种表现形式。

2．动能定理说明了作功与动能的关系。

即：合力作正功时（A>0），质点动能增加；【加速】

合力作负功时（A<0），质点动能减少。【减速】

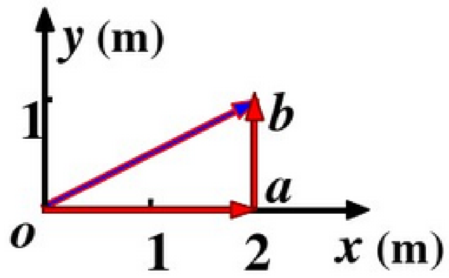
3．方程左边的结果取决于F的具体函数形式，与力对质点的作用过程相关。功是过程量

方程右边与过程无关，只由始末运动状态确定。动能是状态量。

例: 如图,作用于一质点的力 $\vec{F}$ 随质点位置的变化为:

$$\vec{F}=2y\vec{i}+4x^2\vec{j}\ (N)$$

求其沿oab和ob所作功。



解:

$$A_{oab}=\int_{oab}(F_x dx+F_y dy)=\int_{oab}(2ydx+4x^2dy)$$

$$=\int_{oa}2ydx+\int_{ab}4x^2dy=\int_0^1 16dy=16\ \ J$$

$$A_{ob}=\int_{ob}(2ydx+4x^2dy)\qquad \text{利用 } y=x/2$$

$$=\int_0^2 xdx+\int_0^2 2x^2dx=7.3\ \ J$$

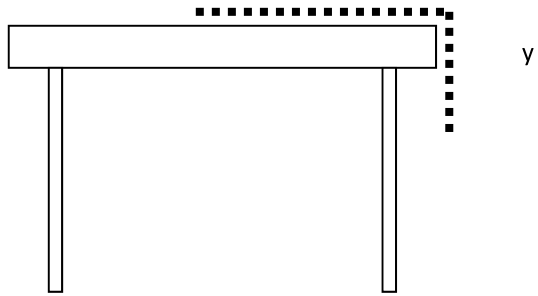
做功与路径有关!

例题（重点）

长为L的匀质链条，一部分在水平桌面上，另一部分自然下垂。链条与水平面间静摩擦因数为μ_0，滑动摩擦因数为μ.

求：1）满足什么条件时，链条开始滑动？

2）若下垂部分长度为b时，链条开始滑动，当链条末端刚刚离开桌面时的速度是多少？



解：1）最大拉力：　$\rho b_0 g$

摩擦力：$\mu_0\rho(L-b_0)g$

$$\rho b_0 g = \mu 0\rho(L-b_0)g$$

$$b_0 = \frac{\mu_0}{1+\mu_0}L$$

2)重力和摩擦力做的功分别为：

$$A_g = \int_b^L \rho g y dy = \frac{1}{2}\rho g(L^2 - b^2)$$

$$A_f = -\int_b^L \mu\rho g(L-y)dy = \frac{1}{2}\mu\rho g(L-b)^2$$

根据动能定理：

$$\frac{1}{2}\rho g(L^2-b^2) - \frac{1}{2}\mu\rho g(L-b)^2 = \frac{1}{2}\rho L v^2 - 0$$

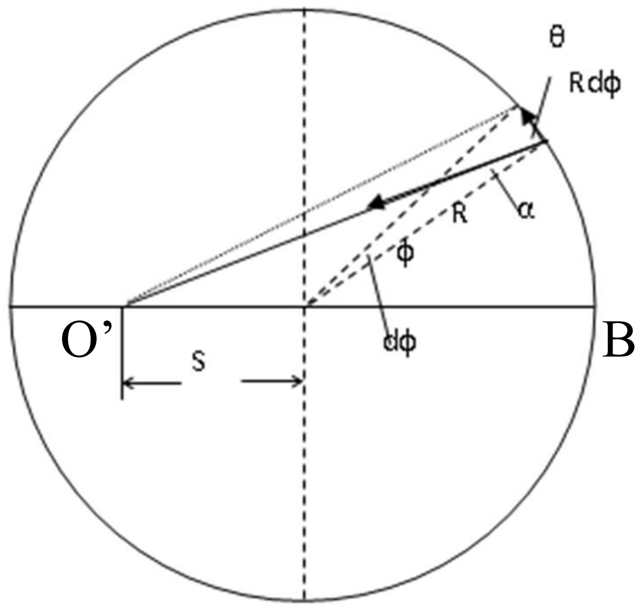
$$v = \sqrt{\frac{g}{L}(L^2-b^2) - \frac{\mu g}{L}(L-b)^2}$$

南開大學 Nankai University

例题

水平面内有一半径为R的圆，在圆内离圆心O距离为S处有一质量M很大，可视为固定的力心O’，力心对单位质量的有心引力为μr，r为力心至质量为m的质点Q位矢的大小，质点Q被限制在圆周上运动。

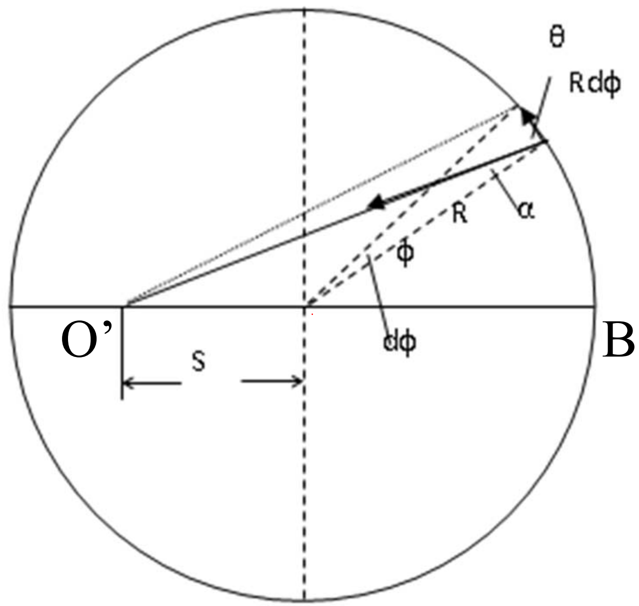
求：质点Q从B点由静止出发，有心力r所做的功。质点通过第二象限所经历的时间。



解：（1）

$$dA = \mathrm{Fdrcos}\theta = FRd\varphi\sin\alpha$$

由正弦定理：$\dfrac{\sin\alpha}{S} = \dfrac{\sin(\pi-\varphi)}{r} = \dfrac{\sin\varphi}{r}$



$$\therefore \sin\alpha = \frac{S}{r}\sin\varphi$$

$$dA = m\mu rRd\varphi\frac{S}{r}\sin\varphi = m\mu RS\sin\varphi d\varphi$$

$$A = \int_0^{\varphi} m\mu RS\sin\varphi d\varphi$$

$$= -m\mu RS\cos\varphi\Big|_0^{\varphi}$$

$$= m\mu RS(1-\cos\varphi)$$

（2）

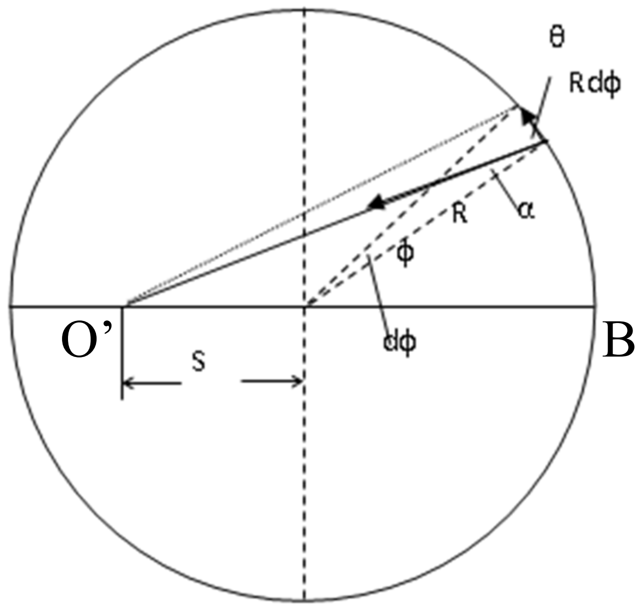
如果采用极坐标，有心力只有r分量，

没有θ分量，

F=-mμr

$$A = \int \vec{F} \bullet d\vec{r} = -\int_{R+S}^{r} m\mu r dr$$

$$= \frac{1}{2} m\mu[(R+S)^2 - r^2]$$



如果将余弦定理带入，两个结果一样。

$$r^2 = S^2 + R^2 + 2RS\cos\varphi$$

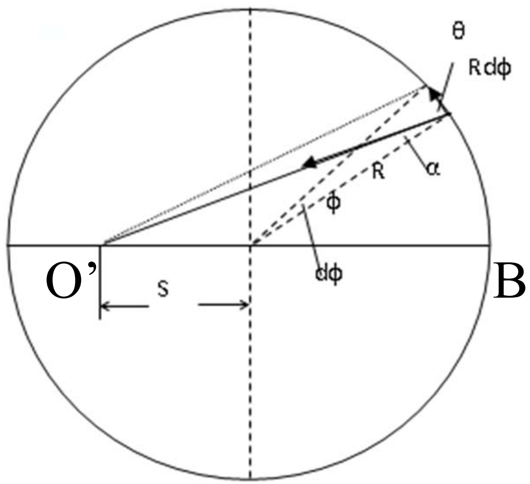
$$\cos\varphi = \frac{1}{2RS}(r^2 - S^2 - R^2)$$

$$A = m\mu RS(1-\cos\phi)$$

$$\mathrm{m}\mu RS(1-\cos\varphi) = \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2\mu S}{R}(1-\cos\varphi)} = 2\sqrt{\frac{\mu S}{R}}\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$dt = \frac{d\varphi}{2\sqrt{\frac{\mu S}{R}}\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{\mu S}}\frac{d\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$



两边同时积分，通过第二象限是φ由$\frac{\pi}{2}$变到π

$$\mathrm{t}_2 - t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{\mu S}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{R}{\mu S}}\ln\tan\frac{\varphi}{4}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 0.88\sqrt{\frac{R}{\mu S}}$$

二、质点系动能定理

- 在前面的内容中，我们讨论的是单个质点的运动。在这一部分，我们要讨论由许多质点构成的体系的运动定律。这种问题，常称为质点系问题，或多体问题。

➢ 内力与外力

内力：系统内质点间的相互作用力。

外力：系统外的物体对系统内质点的作用力。

内力与外力的划分没有严格界线，根据研究对象而定。

➢ 质点系动能定理

由n个质点组成的系统中，第i个质点所受的力：$F_i＝F_{i内}＋F_{i外}$

$F_{i内}$：内力，质点组内质点与质点之间的相互作用力。

$F_{i外}$：外力，质点组外的力对质点组内的质点的作用力。

对第i个质点应用动能定理：

$$A_i=\int(F_{i内}+F_{i内})\bullet dr=\frac{1}{2}m_iv_{i2}^2-\frac{1}{2}m_iv_{i1}^2$$

对n个质点求和得：

$$A=\sum A_i=\sum\int\vec{F}_{i内}\bullet d\vec{r}+\sum\int\vec{F}_{i外}\bullet d\vec{r}=\sum E_{Ki2}-\sum E_{Ki1}$$

质点系的动能定理：

$$\sum A_{i内}+\sum A_{i外}=\sum E_{ki2}-\sum E_{ki1}$$

$$E_k(t)-E_k(t_0)=A_{外}+A_{内}$$

作用于质点系的所有外力所作之功与所有内力所作之功的总和等于质点系动能的增量。

注意：

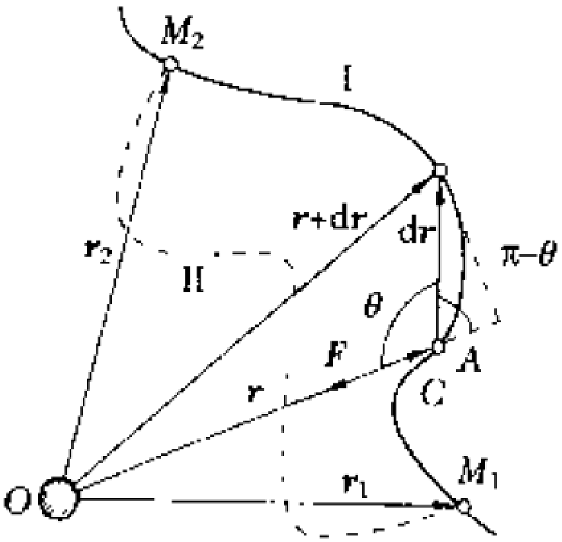
内力总是成对出现的，按照牛顿第三定律，这一对力的矢量和为0，***但这一对力所作的功的和不一定为0。***

功是标量，其和为代数和。

§5. 势能

万有引力做功：

两个质量分别为 M和m的质点，
其中质点M静止在坐标系原点，
m经过任一路径由a运动b, 万有引
力做功为：



$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$dA = \vec{F}\bullet d\vec{r} = F\cos\theta\left|d\vec{r}\right|$$

$$dr = \left|d\vec{r}\right|\cos(\pi-\theta) = -\left|d\vec{r}\right|\cos\theta$$

$$dA = -G\frac{Mm}{r^2}dr$$

$$A = \int_{r_1(L)}^{r_2} -G\frac{Mm}{r^2}dr = GMm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

特点：万有引力做功仅与位置有关，与路径无关！

一、保守力与非保守力

力所作的功仅由质点的始末位置决定，与路径无关，这种力称为保守力。

- 保守力：
  - 重力
  - 弹簧的弹性力
  - 万有引力
  - 库伦力
- 非保守力：
  - 摩擦力

拉着箱子走不同路径时，摩擦力作功不相同。

在一定空间内每一处的保守力的大小和方向都确定，这个空间就称为保守力场。

二、势能

- 具有位置优势的物体，如拉伸了的弹簧，高处的水流下时可以产生动能而做功。因为它们具有一种和物体间相对位置相联系的能量——势能。
- 蕴藏在保守力场中的、与位置有关的能量称之为势能（位能）。

- 在保守力场中，质点的始末位置一定，力作的功便确定。
- 根据动能定理，作功的结果是使质点的动能发生变化。这说明在保守场中，两点之间的能量不同，而且这一能量只与位置有关。当质点的位置改变时，这一能量便释放出来，转变成质点的动能。——这就是保守场的势能。

三、势能大小的确定

选空间上的一点M_0为势能0点；由空间上M点到势能0点M_0过程中，保守力所作功的大小为该点的势能。

$$E_p = \int_M^{M_0} \vec{F}_{保} \bullet d\vec{r}$$

注意：势能的大小由相对位置决定，没有绝对大小；势能0点的选取是任意的。

对于弹簧的弹性势能，势能0点通常选弹簧的原长。

➢ 重力势能

选地面为势能0点，距地面高h处的势能为：

$$E_p = \int_h^0 (-mg)dz = mgh$$

其中负号表示重力mg的方向与z轴的方向相反。

➢ 弹性势能

选弹簧的原长位置为坐标原点，原长位置为势能0点，弹簧由原点拉至x处的势能：

$$E_p = \int_x^0 (-kx)dx = \frac{1}{2}kx^2$$

➢ 万有引力势能

选无穷远处为万有引力势能零点，质点在万有引力场中任意位置的势能：

$$E_p = \int_r^{\infty} \left(-G \frac{mM}{r^2} \right) dr = -G \frac{mM}{r}$$

南開大學 Nankai University

注意

- 因为弹性势能与x^2成正比，（$x+\triangle x$）^{2}与$x^2+\triangle x^2$不同，弹簧的势能0点要选原长位置时，才有这么简捷的表达式。而重力势能与x成正比，重力势能0点的选择可以是任意的。
- 当保守力作正功时，质点动能增加，势能减少；【势能→动能】
- 当保守力作负功时，质点动能减少，势能增加；【动能→势能】

- 设 E_{p1}、E_{p2} 分别保守物体系中物体在初位置1和终位置2的势能，则势能可由下式定义：

$$A(1-2)=-(E_{p2}-E_{p1})=-\Delta E_P$$

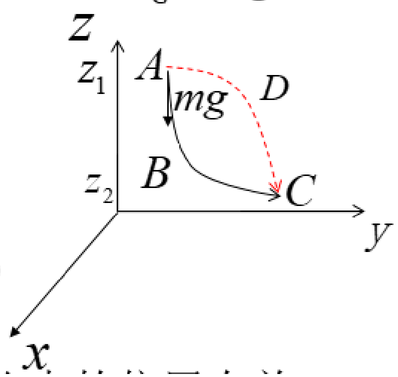
- 保守力所做的功=势能的减少（增量的负值）。
- 这里的减少是广义的，保守变化量的负值，当保守力作负功时，势能是增加的。

一、重力所作的功

- 在地球表面附近，重力可看做恒定力，大小 $F_G=mg$ 方向垂直向下
- 在直角坐标系下：

$$F_x=0;\quad F_y=0;\quad F_z=-mg$$

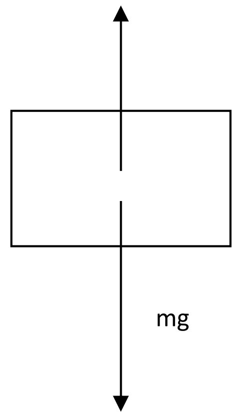
$$A=\int_{z_1}^{z_2}\vec{F}_G\cdot d\vec{r}=\int_{z_1}^{z_2}F_z dz=\int_{z_1}^{z_2}-mgdz=mg(z_1-z_2)$$



例题

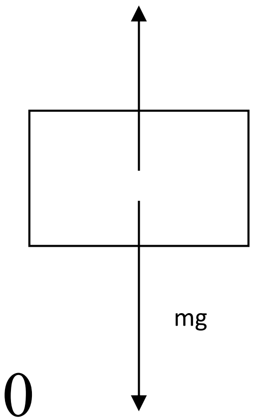
物体质量m，弹簧的劲度系数为k，自弹簧原长，无初速度加上物体.

求：弹簧的最大压缩量y_{max}。



例题

物体质量m，弹簧的劲度系数为k，自弹簧原长，无初速度加上物体.



求：弹簧的最大压缩量y_{max}。

解：重力和弹簧的弹性力都是保守力。

初：动能＝0；重力势能＝mgy_{max}，弹性势能＝0

末：动能＝0；重力势能＝0，弹性势能＝$1/2\ ky_{max}^2$

重力势能转换成弹性势能

$$mgy_{max} = 1/2\ ky_{max}^2$$

$$y_{max} = 2mg/k$$

在整个运动过程中，重力势能减小，动能增加，弹性势能增加；当N＝mg时，物体受力为0，但这时物体具有动能，所以要继续压缩弹簧，直到动能为0，这时N>mg，物体在N的作用下往回运动，直到所有的弹性势能转换成重力势能才停下来（动能为0）。物体在力的平衡点处（N＝mg）上下振动。

◆关于势能强调几点：

① 势能——物体系的势能（∵势能是相对位置）如物体和地球；

② 势能是一个相对值，只有选定参考点，规定势能为零，才能谈势能的具体数值；

③ 保守力作正功，势能减少，保守力作负功，势能增加；

④ 势能的单位与动能、功的单位相同；

⑤ 某一点势能等于物体从该点运动到参考点过程中保守力作的功。

四、势能曲线与平衡稳定态

- 由保守力可以求出势能函数；同样如果知道势能函数也可以求出保守力：

一维情况：

设保守力F沿x轴方向，如物体在F的作用下，作一微小的位移 Δx，则保守力做功为：

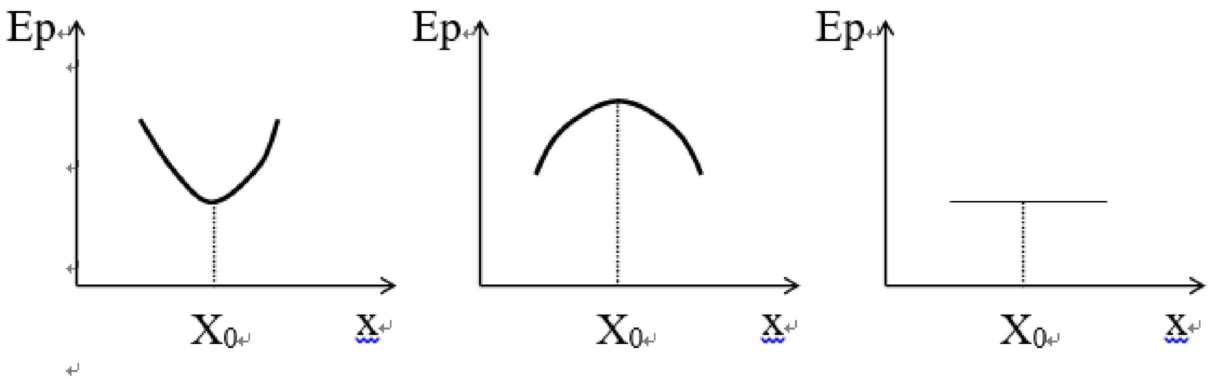
$$F\Delta x = -\Delta E_p$$

$$F = -\frac{\Delta E_p}{\Delta x}$$

当$\Delta x \to 0$：$F = -\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta E_p}{\Delta x} = -\frac{dE_p}{dx}$

由此可得： $$F_x = -\frac{dE_p(x)}{dx}$$

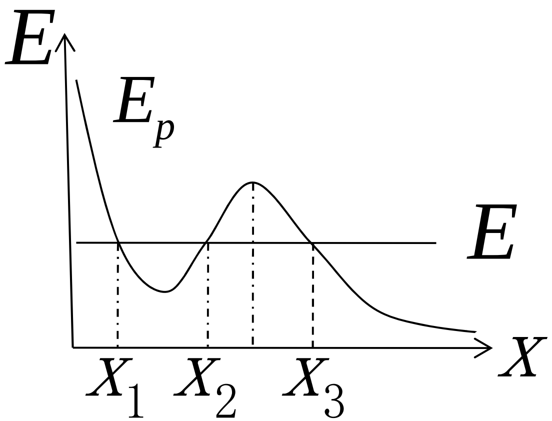
质点在平衡位置处：Fx＝0，则dE/dx ＝0



稳定平衡	不稳定平衡	随遇平衡
dE/dx ＝0	dE/dx ＝0	dE/dx ＝0
$\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$	$\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$	$\frac{d^2E_p}{dx^2} = 0$

- 势能曲线：

——物体势能随位置变化的曲线。



$$E = E_k + E_p$$

由势能曲线得到的信息：

1）质点运动范围：$x_1 \leftrightarrow x_2 \quad x_3 \rightarrow \infty$

2）极小值点是稳定平衡点；

极大值点是不稳定平衡点。$F_x = -\dfrac{dE_p}{dx}$

三维情况：

$$\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = -\Delta E_p$$

$$\Delta r \to 0: \ \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p$$

$$\therefore F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dE_p$$

$$\therefore dE_p = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

- 而另一方面微分计算：

$$E_p = E_p(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$$

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} d\mathrm{x} + \frac{\partial E_p}{\partial y} d\mathrm{y} + \frac{\partial E_p}{\partial z} d\mathrm{z}$$

比较两式得：
$$F_x=\frac{-\partial E_p}{\partial x},\ F_y=\frac{-\partial E_p}{\partial y},\ F_z=\frac{-\partial E_p}{\partial z}$$

$$\vec{F}=\frac{-\partial E_p}{\partial x}\vec{i}+\frac{-\partial E_p}{\partial y}\vec{j}+\frac{-\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{F}=-\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)E_p$$

即 $\vec{F}=-gradE_p$ 或 $\vec{F}=-\nabla E_p$

- 其中 $\mathrm{grad}=\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)$ —梯度Nabla
- 也就是说：保守力等于势能梯度的负值。
- 这一点在电磁学中也是非常有用的。

§6. 机械能守恒定律

- 在保守力场中，质点由M1点运动到M2点保守力所作的功就是这两点之间的势能差：

$$A = Ep_1 - Ep_2$$

- 根据动能定理，保守力作功的结果是使质点的动能发生变化：

$$A = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

由此可得：
$$\frac{1}{2}mv_1^2 + E_{p1} = \frac{1}{2}mv_2^2 + E_{p2}$$

- 此式说明，在只有保守力作用时，质点的动能和势能可以互相转换，但动能和势能之和保守不变。

- 在没有外力和耗散力做功的情况下，一个具有保守力的物体系的动能和势能之和是恒定的，动能和势能可以相互转换。
- 另外，没有耗散力，只有保守力的物体系称为保守系统。
- 没有外力做功的保守系统称为封闭的保守系统。

机械能守恒定律也可表述为：

封闭的保守系统的机械能守恒。

- 在有非保守力存在时，机械能就不守恒了。末状态与初状态机械能之差，就是非保守力作的功。

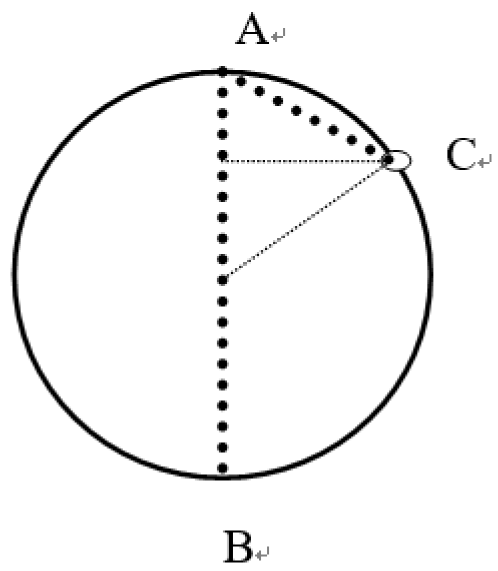
$$(E_{k2}+E_{p2})-(E_{k1}+E_{p1})=A_{非}$$

以上结论对质点组也依然适用。

例题

物体M悬于弹簧上，弹簧的弹性系数为k，弹簧的原长与圆环的半径相等。不计摩擦力。

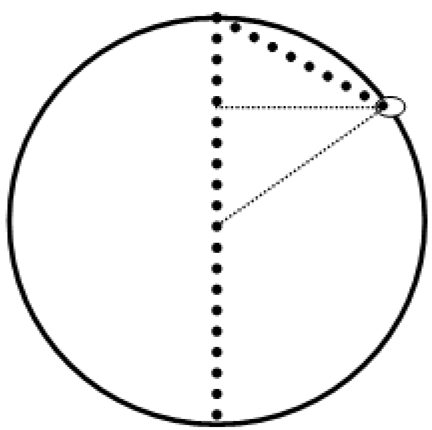
求：物体自弹簧的原长无初速度的沿圆环滑至最低点B时所获得的动能。



例题

物体M悬于弹簧上，弹簧的弹性系数为k，弹簧的原长与圆环的半径相等。不计摩擦力。

求：物体自弹簧的原长无初速度的沿圆环滑至最低点B时所获得的动能。



解：

$$t_0: \quad E_{k0}=0; \quad E_{p弹0}=0; \quad E_{p重0}=mgR\left(1+\cos 60^0\right)$$

$$t: \quad E_k=\frac{1}{2}mv^2; \quad E_{p弹}=\frac{1}{2}kR^2; \quad E_{p重}=0$$

$$E_t-E_{t0}=A_{非保}=0$$

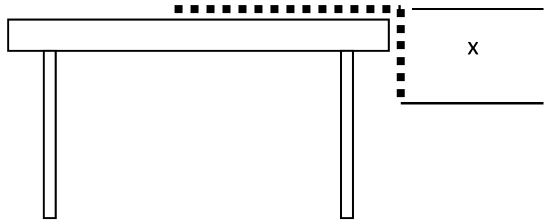
$$E_k+E_{p弹}+E_{p重}=E_{k0}+E_{p弹0}+E_{p重0}$$

$$E_k=\frac{3}{2}mgR-\frac{1}{2}kR^2$$

例题

光滑的桌面上一质量为M，长为L的匀质链条，有极小一段被推出桌子边缘。

求：链条刚刚离开桌面时的速度。



解：链条所受的力F是个变力：F＝m(x)g

$$m(x)=\frac{M}{L}x$$

根据牛顿第二定律：

$$\frac{M}{L}xg=M\frac{dv}{dt}=M\frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx}=Mv\frac{dv}{dx}$$

$$\int_0^L \frac{M}{L}gxdx=\int_0^v Mvdv$$

$$\frac{M}{2L}gL^2=\frac{1}{2}Mv^2$$

$$v=\sqrt{gL}$$

§6. 能量守恒定律

- 能量除了机械能以外还有很多种形式，如热能，化学能，电能，核能等等。能量不能消失，也不能创造，只能从一种形式转换成另一种形式。
- 质量可以转换成能量——质能关系式：$E=mc^2$
- 在核裂变时，裂变前后的质量不相等，有一部分质量转换成能量。

作业: p.136 3.6 3.11 3.17 3.19 3.22

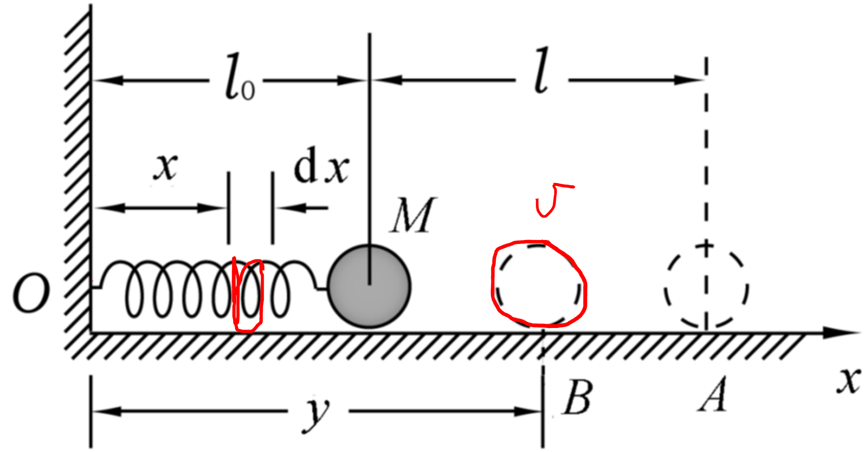
补充例题一

一弹簧的质量为m，原长为l_0，劲度系数为k．其一端固定，另一端系一质量为M 的小球，置于光滑的水平桌面上，弹簧的伸长是均匀的．如图所示，现将小球拉至A点，然后无初速地突然释放小球，试求小球经过位置B时的速度v．

$$v_x = \frac{x}{y} v$$

球

$$\frac{1}{2} M v^2$$



$$\int_0^y \frac{1}{2} \left(\overset{dm}{\frac{dx}{y} m}\right) \left(\frac{x}{y} v\right)^2 = \frac{1}{6} m v^2$$

初：$\frac{1}{2}kl^2$

$\parallel$

末：弹动：$\frac{1}{6}mv^2$

~~小球动~~ $\frac{1}{2}Mv^2$

~~弹~~：$\frac{1}{2}k(y-l_0)^2$

$$\frac{1}{2}kl^2 = \frac{1}{6}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}k(y-l_0)^2$$

弹：x处 速度 $v_x = \frac{x}{y} v$

弹：$x \to x+dx$ 动能：$\frac{1}{2}(dm)v_x^2$

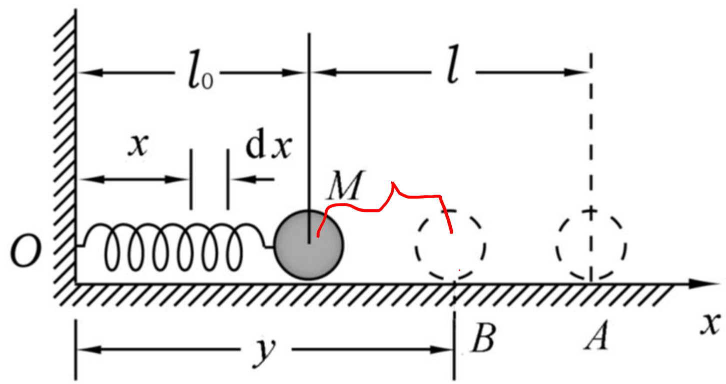
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m}{y}dx\right)\left(\frac{x}{y}v\right)^2 = \underline{\frac{mv^2}{2y^3}x^2dx} \qquad \int_0^y = \frac{1}{6}mv^2$$

弹、总动能

$$E_{km} = \int_0^y \frac{mv^2}{2y^3}x^2dx = \frac{1}{6}mv^2$$

弹、B处(y)势能

$$\frac{1}{2}k(y-l_0)^2$$



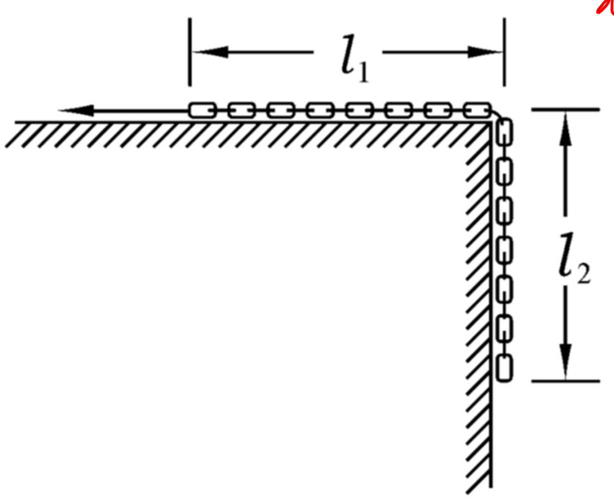
小球B处动能 $\frac{1}{2}Mv^2$

$$\frac{1}{6}mv^2+\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}k(y-l_0)^2=\frac{1}{2}kl^2$$

$$v=\sqrt{\frac{3k[l^2-(y-l_0)^2]}{3M+m}}$$

补充例题二

均质链条的一端被外力牵住，在水平桌面上的部分呈长度为l_1 的直线，长度为l_2 的另一部分自然下垂．设桌面与链条的摩擦因数为μ，链条的线密度为λ．撤去外力后，链条开始滑动．求链条在桌面移动距离为x 时的速度．



$x \to x+dx$

$$f = -\mu\lambda(l_1-x)g$$

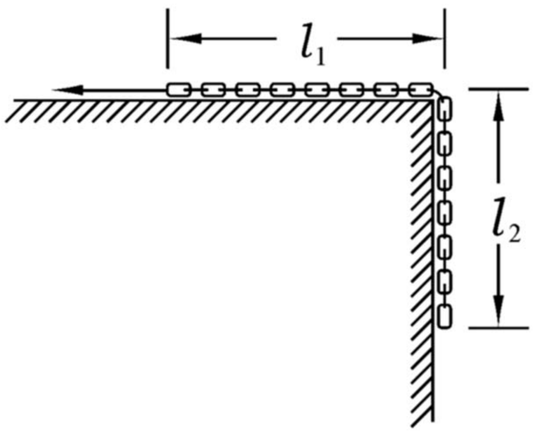
$$G = \lambda(l_2+x)g$$

$$G+f = \lambda(l_1+l_2)a$$

$$\lambda(l_2+x)g - \mu\lambda(l_1-x)g = \lambda(l_1+l_2)a$$

牛顿定律求解？

动能定理求解？



下降：$x \to x+dx$

重：$(l_2+x)\lambda g$

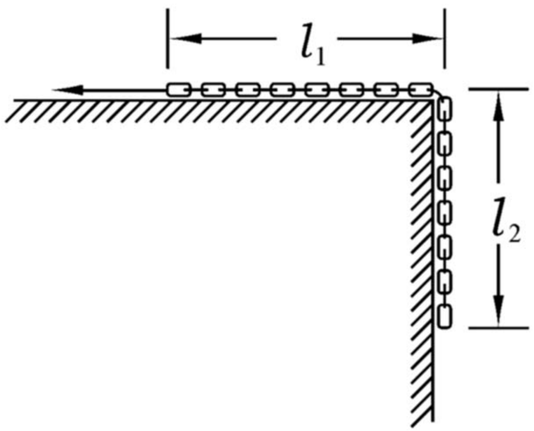
摩：$\mu(l_1-x)\lambda g$

$$(l_2+x)\lambda g+\mu(l_1-x)\lambda g=\lambda(l_1+l_2)a$$

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\,dv/dx$$

$$\int_0^v v\,dv=\int_0^x dx\,a$$

$$v=\sqrt{\frac{g}{l_1+l_2}}\left[(1+\mu)x^2+2(l_2+\mu l_1)x\right]^{1/2}$$



$x \to x + dx$

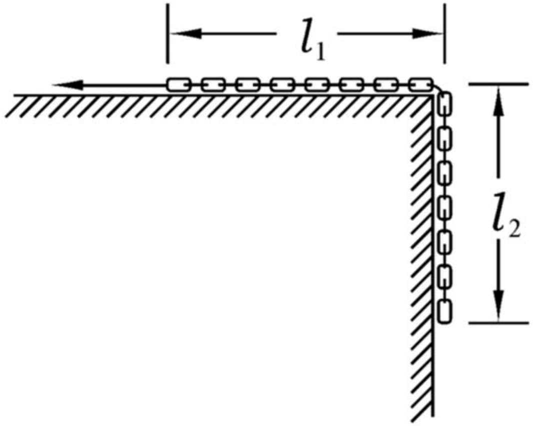
重: $\underline{mgh} = \lambda(l_2+x)g\,dx$

摩: $-\mu N S$: $-\mu(l_1-x)g\,dx$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \underline{\frac{1}{2}\lambda(l_1+l_2)v^2}$$

$$\int_0^x \lambda(l_2+x)g\,dx - \int_0^x \mu(l_1-x)g\,dx = \frac{1}{2}\lambda(l_1+l_2)v^2$$

v



$x \to x + dx$，速度 v

重功：$\lambda(l_2 + x) g\, dx$

摩功：$\mu\lambda(l_1 - x) g\, dx$

动能：$\frac{1}{2}\lambda(l_1 + l_2) v^2$

$$\int_0^x \lambda(l_2 + x) g\, dx - \int_0^x \mu\lambda(l_1 - x) g\, dx = \frac{1}{2}\lambda(l_1 + l_2) v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{l_1 + l_2}}\left[(1+\mu)x^2 + 2(l_2 - \mu l_1)x\right]^{1/2}$$