

高等数学

第三章：微分学基本定理及其应用

张道平

南开大学数学科学学院 414

daopingzhang@nankai.edu.cn

2. 洛必达 (L'Hospital) 法则

2.1 $\frac{0}{0}$ 型不定式

洛必达法则 I：设函数 $f(x), g(x)$ 满足下列条件：

(1) 在点 x_0 的某去心邻域内可导，且 $g'(x) \neq 0$ ；

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ；

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或 } \infty)$ ，

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或 } \infty)$.

2. 洛必达 (L'Hospital) 法则

2.1 $\frac{0}{0}$ 型不定式

洛必达法则 I：设函数 $f(x), g(x)$ 满足下列条件：

(1) 在点 x_0 的某去心邻域内可导，且 $g'(x) \neq 0$ ；

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ；

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或 } \infty)$ ，

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或 } \infty)$.

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$.

2. 洛必达 (L'Hospital) 法则

2.1 $\frac{0}{0}$ 型不定式

洛必达法则 I：设函数 $f(x), g(x)$ 满足下列条件：

(1) 在点 x_0 的某去心邻域内可导，且 $g'(x) \neq 0$ ；

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ；

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或 } \infty)$ ，

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或 } \infty)$.

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$.

例：求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

2. 洛必达 (L'Hospital) 法则

2.1 $\frac{0}{0}$ 型不定式

洛必达法则 I：设函数 $f(x), g(x)$ 满足下列条件：

(1) 在点 x_0 的某去心邻域内可导，且 $g'(x) \neq 0$ ；

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ；

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或 } \infty)$ ，

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或 } \infty)$.

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$.

例：求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

例：求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin^2 x}$.

2. 洛必达 (L'Hospital) 法则

2.1 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式

2. 洛必达 (L'Hospital) 法则

2.1 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式

洛必达法则 II: 设函数 $f(x), g(x)$ 满足下列条件:

(1) 在点 x_0 的某去心邻域内可导, 且 $g'(x) \neq 0$;

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$;

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (或 ∞), 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$
(或 ∞).

2. 洛必达 (L'Hospital) 法则

2.1 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式

洛必达法则 II: 设函数 $f(x), g(x)$ 满足下列条件:

(1) 在点 x_0 的某去心邻域内可导, 且 $g'(x) \neq 0$;

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$;

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或 } \infty)$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或 } \infty).$$

注: 如果 $f(x), g(x)$ 满足下列条件:

(1) 在 $|x| > x_0$ 时可导, 且 $g'(x) \neq 0$;

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$;

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或 } \infty)$, 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A(\text{或 } \infty).$$

2. 洛必达 (L'Hospital) 法则

例：求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n}$ (n 为正整数).

2. 洛必达 (L'Hospital) 法则

例：求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n}$ (n 为正整数).

2.3 其他类型的不定式

2. 洛必达 (L'Hospital) 法则

例：求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n}$ (n 为正整数).

2.3 其他类型的不定式

例：求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)$, $a \neq 0$.

2. 洛必达 (L'Hospital) 法则

例：求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n}$ (n 为正整数).

2.3 其他类型的不定式

例：求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)$, $a \neq 0$.

例：求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x - \frac{1}{x})$.

2. 洛必达 (L'Hospital) 法则

例：求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n}$ (n 为正整数).

2.3 其他类型的不定式

例：求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)$, $a \neq 0$.

例：求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x - \frac{1}{x})$.

例：求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$.

2. 洛必达 (L'Hospital) 法则

例：求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n}$ (n 为正整数).

2.3 其他类型的不定式

例：求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)$, $a \neq 0$.

例：求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x - \frac{1}{x})$.

例：求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$.

例：设 a_1, a_2, \dots, a_n 为 n 个正常数，求
 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$.

2. 洛必达 (L'Hospital) 法则

例：求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \tan \frac{1}{n})^{n^2}$ (n 为自然数).

2. 洛必达 (L'Hospital) 法则

例：求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \tan \frac{1}{n})^{n^2}$ (n 为自然数).

练习：求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1})$ ($a > 0$).

2. 洛必达 (L'Hospital) 法则

例：求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \tan \frac{1}{n})^{n^2}$ (n 为自然数).

练习：求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1})$ ($a > 0$).

练习：求 $\lim_{x \rightarrow \infty} [x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})]$.

2. 洛必达 (L'Hospital) 法则

例：求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \tan \frac{1}{n})^{n^2}$ (n 为自然数).

练习：求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1})$ ($a > 0$).

练习：求 $\lim_{x \rightarrow \infty} [x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})]$.

练习：设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$,
 $f'(0) = 4$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}$.