



# 南開大學 作業紙

系别\_\_\_\_\_ 班级\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 第\_\_\_\_\_页

## 高等數學補充題(第5周)

1. 求以下函數的漸近線方程

$$(1) \quad y = 2x + \arctan x + 1$$

$$(2) \quad y = \frac{(1+x)^2}{4(1-x)}$$

2. 求不定积分

$$(1) \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 2 \cos x} dx$$

$$(2) \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$$

3. 求极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} x^x$$

$$(3) \text{求合適常數 } a, b \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + 4x - 1} - ax - b) = 0$$

4. 求以下不定积分

$$(1) \int_0^{1/n^2} \sqrt{e^x - 1} dx \quad (2) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx \quad (3) I_n = \int_0^1 (1-x^n)^n dx \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

5. 求极限

$$(1) \text{設 } f \text{ 過綴, } \text{求} \lim_{x \rightarrow 0} \int_{x^3}^{x^2} \frac{f(t)}{t^2} dt$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{1}{n^2 + x^2} + \frac{1}{n^2 + 2^2 x^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + h^2 x^2} \right)$$

6. (本题可以考虑分段估计的方法)

(1) 设  $f$  在  $[a, b]$  非减连续, 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_a^b f^n(x) dx \right]^{\frac{1}{n}} = \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}$

(2) 设  $f \in C([0, 1])$  求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 f^n(x) dx = f(1)$

7. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积,

(1) 若  $\int_a^b f(x) dx \neq 0$ , 证明:  $\exists \xi \in (a, b)$  s.t.  $\int_a^{\xi} f(x) dx = \int_{\xi}^b f(x) dx$

(2) 若无(1)条件, 结论是否成立?

8.  $0 < a < b$ ,  $f \in C([a, b])$  且  $\int_a^b f(x) dx = 0$

求证:  $\exists \xi \in (a, b)$  s.t.  $\int_a^{\xi} f(x) dx = \xi f(\xi)$

9. 定积分应用题

(1) 求半径为  $r$  的球面面积

(2) 求椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 1$ ) 与  $x$  轴围成的椭球面面积

(3) 求心脏线  $r = a(1 + \cos \theta)$   $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $a > 0$  的周长.

10. 设  $f$  在  $[0, 1]$  上连续可微, 定义数列:

$$\varepsilon_n = \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \varepsilon_n$

(Hint: Taylor 公式,  
Riemann 和的定义)