高等数学
第五章：定积分及其应用

张道平

南开大学数学科学学院 414

daopingzhang@nankai.edu.cn

2.1 变上限积分及其导数

2.1 变上限积分及其导数

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，那么对于任意取定的 $x \in [a,b]$, 函数 $f(x)$ 在 $[a,x]$ 上也连续，积分 $\int_a^x f(t)dt$ 是一个确定的值. 这样我们得到了一个积分上限 x 的函数 $\Psi(x) = \int_a^x f(t)dt$, 这个函数称为变上限积分.

2.1 变上限积分及其导数

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，那么对于任意取定的 $x\in[a,b]$, 函数 $f(x)$ 在 $[a,x]$ 上也连续，积分 $\int_a^x f(t)dt$ 是一个确定的值. 这样我们得到了一个积分上限 x 的函数 $\Psi(x)=\int_a^x f(t)dt$, 这个函数称为变上限积分.

连续函数的原函数存在定理：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则变上限积分 $\Psi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导，且

$$\Psi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)\quad(a\leq x\leq b).$$

2.1 变上限积分及其导数

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，那么对于任意取定的 $x \in [a,b]$，函数 $f(x)$ 在 $[a,x]$ 上也连续，积分 $\int_a^x f(t)dt$ 是一个确定的值．这样我们得到了一个积分上限 x 的函数 $\Psi(x)=\int_a^x f(t)dt$，这个函数称为变上限积分．

连续函数的原函数存在定理：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则变上限积分 $\Psi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导，且

$$\Psi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \quad (a \le x \le b).$$

对变上限求导等于被积函数在上限的值．

例：设 $x \geq 0$ 时 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^{x^2} f(t)dt = x^2 + x^3$，试求 $f(2)$.

例：设 $x \geq 0$ 时 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^{x^2} f(t)dt = x^2 + x^3$，试求 $f(2)$.

例：设 $f(x) = \int_x^{x+1} t(t-2)(t-4)dt(x \geq 0)$, 试求 $f(x)$ 的极值点.

例：设 $x \geq 0$ 时 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^{x^2} f(t)dt = x^2 + x^3$，试求 $f(2)$.

例：设 $f(x) = \int_x^{x+1} t(t-2)(t-4)dt(x \geq 0)$, 试求 $f(x)$ 的极值点.

例：求 $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x cost^2 dt}{x}$.

2. 微积分基本公式

例：设 $x \geq 0$ 时 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^{x^2} f(t)dt = x^2 + x^3$，试求 $f(2)$.

例：设 $f(x) = \int_x^{x+1} t(t-2)(t-4)dt (x \geq 0)$，试求 $f(x)$ 的极值点.

例：求 $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x cost^2 dt}{x}$.

例：求 $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x [\int_0^{u^2} arctan(1+t)dt] du}{(1-cosx)ln(1+x)}$.

例：设 $x \geq 0$ 时 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^{x^2} f(t)dt = x^2 + x^3$，试求 $f(2)$.

例：设 $f(x) = \int_x^{x+1} t(t-2)(t-4)dt(x \geq 0)$, 试求 $f(x)$ 的极值点.

例：求 $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x cost^2 dt}{x}$.

例：求 $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x [\int_0^{u^2} arctan(1+t)dt] du}{(1-cosx)ln(1+x)}$.

2.2 牛顿-莱布尼茨公式

例：设 $x \geq 0$ 时 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^{x^2} f(t)dt = x^2 + x^3$，试求 $f(2)$.

例：设 $f(x) = \int_x^{x+1} t(t-2)(t-4)dt(x \geq 0)$, 试求 $f(x)$ 的极值点.

例：求 $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x cost^2 dt}{x}$.

例：求 $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x [\int_0^{u^2} arctan(1+t)dt]du}{(1-cosx)ln(1+x)}$.

2.2 牛顿-莱布尼茨公式

微积分基本公式：如果 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数，则有 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

2. 微积分基本公式

例：求积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - sin2x} dx$.

例： 求积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - sin2x} dx$.

例： 求 $\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+p} \frac{sinx}{x} dx, p > 0$， n 为正整数.

例：求积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - sin2x}dx$.

例：求 $\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+p} \frac{sinx}{x}dx, p > 0$，$n$ 为正整数.

例：(积分中值定理的改进) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，证明在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a), a < \xi < b$.

例：求积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-sin2x}dx$.

例：求 $\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+p} \frac{sinx}{x}dx, p>0$，$n$ 为正整数.

例：(积分中值定理的改进) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，证明在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a), a<\xi<b$.

例：设实数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 满足 $\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$，试证方程 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ 在 (0,1) 间至少有一实根.

例：利用定积分定义求极限 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})$.

例：利用定积分定义求极限 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})$.

无穷限积分，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$.

例：利用定积分定义求极限 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})$.

无穷限积分，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$.

练习：设 $x\geq -1$, 求 $\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt$.

例：利用定积分定义求极限
$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})$.

无穷限积分，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$.

练习：设 $x\geq -1$，求 $\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt$.

练习：证明 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx$，并用此结果求积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+sinx}dx$，其中 $f(x)\in C[-a,a]$，$a>0$.

例：利用定积分定义求极限 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})$.

无穷限积分，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$.

练习：设 $x\geq -1$，求 $\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt$.

练习：证明 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx$，并用此结果求积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+sinx}dx$，其中 $f(x)\in C[-a,a]$，$a>0$.

练习：$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

练习：设 a_i, b_i 为任意实数 $(i = 1, 2, \cdots, n)$，试证有如下不等式成立 $(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2$.

练习：设 a_i, b_i 为任意实数 $(i = 1, 2, \cdots, n)$，试证有如下不等式成立 $\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2$.

练习：若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且恒取正值，试证

$$\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b \frac{1}{f^2(x)}dx \ge (b-a)^2.$$