第六次作业 参考答案

11.6 - 11.12

习题 3.1 A 类

1

解:

注意到 $y'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\Delta x^2}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$ 不存在.

所以 $y=1-\sqrt[3]{x^2}$ 在 $x=0$ 不可导，即不符合在 $(-1,1)$ 内可导。

故不满足 Rolle 定理条件。

3

解:

由于 $F(x)=(x-1)^2f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，$(1,2)$ 内可导，且 $F(1)=F(2)=0$.

由 Rolle 定理，故 $\exists\eta\in(1,2)$, 使 $F'(\eta)=0$.

又 $F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2f'(x)$. 故 $F'(1)=0$ 。

由于 $F'(x)$ 在 $[1,\eta]$ 上连续，$(1,\eta)$ 内可导. 且 $F'(1)=F'(\eta)=0$,

由 Rolle 定理, 故 $\exists\xi\in(1,\eta)\subseteq(1,2)$ ，使 $F''(\xi)=0$ 。

6

解:

由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在 $[1,2]$ 上连续，$(1,2)$ 内可导. 且 $g(x)\neq 0,\forall x\in[1,2]$.

则 $\exists\xi=\frac{14}{9}\in(1,2)$ ，使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{3}{2}\xi=\frac{7}{3}=\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)}$,

即验证了柯西中值定理的正确性。

9

解:

设 $g(x)=xf(x)$. 由于 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 有连续的导数. 故 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导.

由 Lagrange 中值定理知 $\exists\xi\in(a,b)$. 使 $g'(\xi)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}$. 即 $\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$.

13

解:

由于 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，设 $M=\max_{0\leq x\leq 2}f(x),m=\min_{0\leq x\leq 2}f(x)$.

故有 $3m \leqslant f(0)+f(1)+f(2) \leqslant 3M$. 即 $m \leqslant 1 \leqslant M$.

先证 $\exists \eta \in [0,2]$ ，使 $f(\eta)=1$. $\quad (*)$

(1) 若 $m=1$ 或 $M=1$，则 $(*)$ 式显然成立;

(2) 若 $m<1<M$，由于 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，由介值定理 $\exists \eta \in [0,2]$，使 $f(n)=1$.

由于 $f(x)$ 在 $[\eta,3]$ 上连续，在 $(\eta,3)$ 内可导，且 $f(\eta)=f(3)=1$.

由 Rolle 定理知必存在 $\xi \in (\eta,3) \subseteq (0,3)$ ，使 $f'(\xi)=0$ 。

习题 3.2 A 类

1

（7）解:

由洛必达法则,

$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^2\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0^+}(-x\cos x)=0.$

2

(4) 解:

由洛必达法则,

$\lim_{x\to0^+}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$

(5) 解:

$$\text{首先}\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=e^{\lim_{x\to0^+}\tan x\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$\text{而}\lim_{x\to0^+}\tan x\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\lim_{x\to0^+}\tan x\ln x=-\lim_{x\to0^+}x\ln x=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

由洛必达法则

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}x=0.$$

故 $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=1.$

3

解:

由洛必达法则，令 $t=\frac{1}{x^2}$，则

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{50}}{e^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{50t^{49}}{e^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{50\times49t^{48}}{e^t}=\cdots=\lim_{t\to+\infty}\frac{50!}{e^t}$$
$$=0$$

4

解:

由洛必达法则,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x - x\arctan x}{e^x + x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{x\arctan x}{e^x+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1} - \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{e^x+1} = 1.$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x - x\arctan x}{e^x + x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+x} - \lim_{x\to-\infty}\frac{x\arctan x}{e^x+x} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{\pi}{2}}{e^x+1} = \frac{\pi}{2}$$

则 $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x - x\arctan x}{e^x+x} \neq \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x - x\arctan x}{e^x+x}$, 故极限不存在.