

线性代数—线性空间与线性变换作业

黄申为

2022 年 3 月 25 日

1. 判断下列集合和相应的运算是否构成线性空间.

(a) $R^3 \setminus \{(0, 0, a)^T : a \in R\}$ 关于向量的加法与数乘.

(b) n 阶对称矩阵的全体关于矩阵的加法和数乘.

2. 设 V 是线性空间, $\alpha, \beta \in V$. 定义

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta),$$

其中 $-\beta$ 表示 β 的负元. 证明: $k(\alpha - \beta) = k\alpha - k\beta$ 以及 $(k - \ell)\alpha = k\alpha - \ell\alpha$.

3. 证明线性空间 $P[x]_n$ 中, 向量组 $1, x, \dots, x^n$ 与向量组 $1, x - a, \dots, (x - a)^n$ 等价, 其中 $a \in R$ 且 $a \neq 0$.

4. 给出下列线性空间的一组基并确定其维数.

(a) 2 阶对称阵关于矩阵的加法和数乘.

(b) 2 阶反对称阵关于矩阵的加法和数乘.

5. 证明 $-1 + x, 1 - x^2, -2 + 2x + x^2, x^3$ 是 $P[x]_3$ 中的一组基, 并给出 $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in P[x]_3$ 在这组基下的坐标.

6. 在 R^4 中取两个基 e_1, e_2, e_3, e_4 与 $\alpha_1 = (2, 1, -1, 1)^T, \alpha_2 = (0, 3, 1, 0)^T, \alpha_3 = (5, 3, 2, 1)^T, \alpha_4 = (6, 6, 1, 3)^T$.

(a) 求由前一个基到后一个基的过渡矩阵.

(b) 求在两个基中有相同坐标的向量.

7. 设 V 是一个 n 维线性空间, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 V 的一个基. 解释 $L(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 是什么?

8. 考虑二阶对称矩阵的全体关于矩阵的加法和数乘构成一个线性空间 V .

在 V 中取一个基 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 现在

V 中定义如下变换 $T: T(A) = P^T A P$, 其中 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) 证明 T 是 V 中的线性变换.

(b) 求 T 在基 A_1, A_2, A_3 下的矩阵.

9. 设 T 是 n 维线性空间 V 中的线性变换且 T 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的

矩阵是 A . 证明: 若 $\alpha \in V$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标为 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

则 $T\alpha$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标为 Ax .

10. 苏轼的诗句”横看成岭侧成峰”描述的是线性代数中的哪个定理?