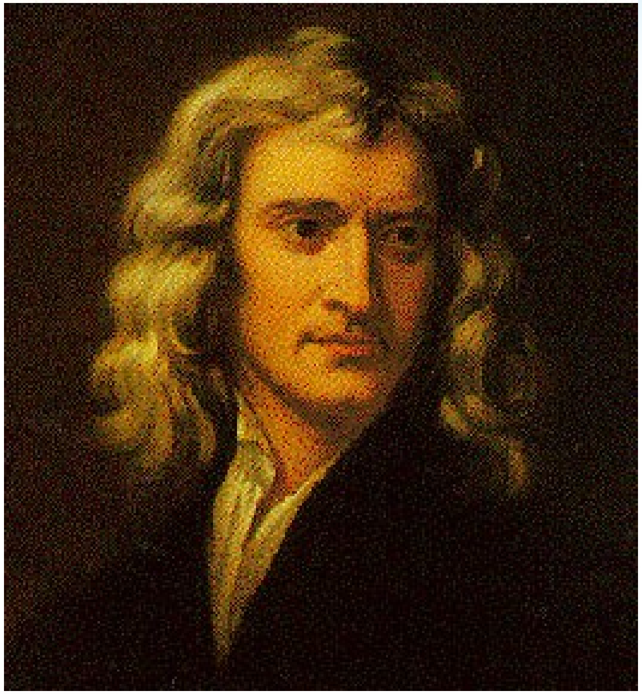
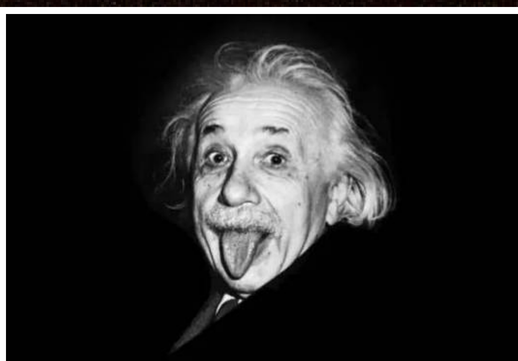
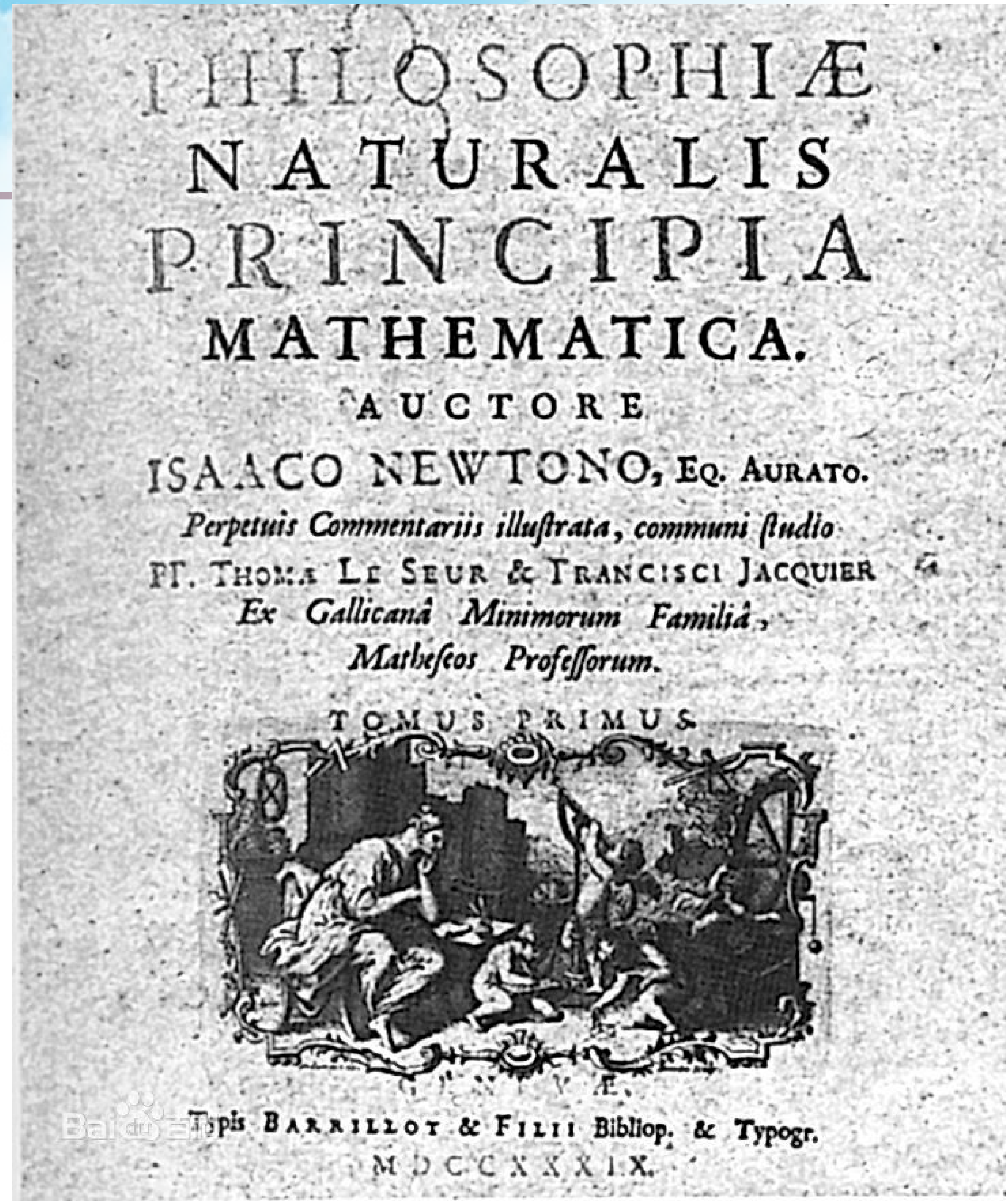
第二章

质点动力学







PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.
AUCTORE
ISAACO NEWTONO, EQ. AURATO.
Perpetuis Commentariis illuſtrata, communi ſtudio
PP. THOMÆ LE SEUR & FRANCISCI JACQUIER
Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ,
Matheſeos Profeſſorum.
TOMUS PRIMUS.
GENEVÆ,
Typis BARRILLOT & FILII Bibliop. & Typogr.
MDCCXXXIX.

《自然哲学的数学原理》

§1. 牛顿三定律

牛顿第一定律：

一个物体，如果不受其他物体作用（或所受合力为零），则它将保持静止或作匀速直线运动。

牛顿第一定律的意义：

一定存在这样的参考系，在该系中，所有不受力的物体都保持自己的速度不变。这类参考系，称为惯性参考系，或称惯性系。

即：惯性定律断言，惯性系一定存在。

牛顿第二定律：

运动的改变与所加的动力成正比，并发生在所加的力的那个直线方向上。

一、力与加速度的关系：

力：几种定义：

1、力是一个物体对另一个物体的作用；

2、力是使物体获得加速度的原因；

3、其他物体使某一物体的运动状态发生变化的作用，叫做其他物体施于该物体的作用力，简称力。

实验证明：同一物体，加速度的大小与力的大小成正比，方向相同。

即 $\vec{a} \propto \vec{F}$

二、质量与加速度的关系

- 同一物体，力与加速度的比值一定，不同物体的，这种比值不同。这种比值正好反映物体运动状态改变的难易程度，即反映了惯性的大小。

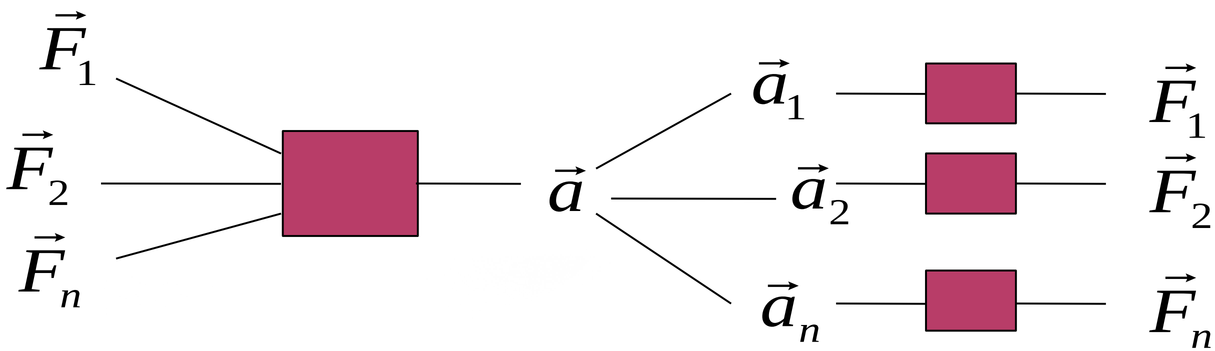
✓为了描述惯性，引入惯性质量的概念：

- 质量：质量是物体惯性的量度。常用m表示。质量是物体具有物质的多少。单位：Kg
- 实验证明：
  - 同一作用力作用于不同质量的物体所获得加速度的大小与质量成反比。

$$a \propto \frac{1}{m}$$

三、力的独立作用原理

- 实验证明：n个力同时作用的效果等于它们单独作用效果的总和。—— 力的独立作用原理。
- 有 $\vec{F}_i \to \vec{a}_i \quad \sum \vec{F}_i \to \sum \vec{a}_i$



- 合力：如n个力$\overrightarrow{F_i}$同时作用在一个物体上，物体获得的加速度等于某一个力$\vec{F}$单独作用时产生的加速度，则$\vec{F}$叫做几个力$\overrightarrow{F_i}$的合力。

  实验证明，$\vec{F}$与$\overrightarrow{F_i}$满足矢量合成规律。

第二定律的数学表述为：

$$\vec{F} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\sum F_i = ma$$

$$\sum \vec{F}_i = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\sum F_{ix} = m\frac{dv_x}{dt} = m\frac{dx^2}{dt^2}$$

$$\sum F_{iy} = m\frac{dv_y}{dt} = m\frac{dy^2}{dt^2}$$

$$\sum F_{iz} = m\frac{dv_z}{dt} = m\frac{dz^2}{dt^2}$$

牛顿第三定律：

每一个作用总是有一个相等的反作用和它对抗；或者说，两物体彼此之间的相互作用永远大小相等，方向相反。

$$\vec{F}_{A-B} = -\vec{F}_{B-A}$$

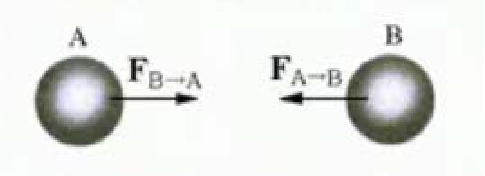


图 2.4 作用力与反作用力

应用该定律时注意：

1、二力作用于两个物体，不能抵消。
2、如两个物体作为一个整体研究，二力为一对内力，对整体的加速度没有贡献。
3、物体加速度由外力产生，和它作用于别的物体的力无关。
4、二力性质相同。
5、无论运动状态如何，定律都成立。

§2. 力学单位制和量纲

一、单位制

单位制： 由选定的一组基本单位和由定义方程式与比例因数确定的导出单位而组成的一系列完整的单位体制。

对于关系式 $\vec{a}=k\dfrac{\sum\vec{F}}{m}$ 来说，我们必须恰当选择力、质量、加速度的单位，才能使k=1。实际上，我们可以任选其中两个量的单位，第三者的单位由前两个量的单位来规定。

在国际单位制中，规定m的单位为千克，长度为米，时间为秒，即a的单位为 m/s^2 。

规定使1千克质量的物体产生1 m/s^2 的加速度的力为一单位的力，此单位为牛顿（牛），用N表示。

在CGS制中，质量为克，长度为厘米，时间为秒，规定使1克质量的物体产生1 cm/s^2 的加速度就是一单位的力，单位为达因。

1千克=1000克　　1米=100厘米　1牛顿=10^5达因

我国规定完全使用国际单位制 —— SI

SI制：七个基本单位：长度m，时间s，质量kg，热力学温度（Kelvin温度）K，电流单位A，光强度单位cd（坎德拉），物质量mol

- 米：光在真空中（1/299 792 458）s时间间隔内所经过路径的长度
- 秒：铯-133原子基态的两个超精细能级之间跃迁所对应的辐射的9 192 631 770个周期的持续时间
- 安培：在真空中，截面积可忽略的两根相距1 m的无限长平行圆直导线内通以等量恒定电流时，若导线间相互作用力在每米长度上为2×10^{-7} N，则每根导线中的电流为1 A。
- 开尔文：水三相点热力学温度的1/273.16。
- 摩尔：是一系统的物质的量，该系统中所包含的基本单元（原子、分子、离子、电子及其他粒子，或这些粒子的特定组合）数与0.012 kg碳-12的原子数目相等。
- 坎德拉：是一光源在给定方向上的发光强度，该光源发出频率为540×10^{12} Hz的单色辐射，且在此方向上的辐射强度为（1/683）瓦特/球面度。

1Kg=?

一个直径和高度同约为39毫米的铂铱合金圆柱体定义，即“国际千克原器”，外号为“大K”。“大K”原器保存在巴黎西郊一间地下储藏室内。

2019年5月20日开始“千克”定义：将以量子力学中的普朗克常数为基准，其原理是将移动质量1千克物体所需机械力换算成可用普朗克常数表达的电磁力，再通过质能转换公式算出质量。

二、量纲

任何一种单位制，都是首先选定几个**基本量**，其他物理量都可以通过已知的物理关系与基本量联系起来，这些物理量叫**导出量**。

如SI、CGS单位制中，都规定基本量为L、M、T为基本量，其他物理量都可以导出。

如：$[v]=\dfrac{[\Delta x]}{[\Delta t]}=LT^{-1}$

$$[a]=\frac{[\Delta v]}{[\Delta t]}=LT^{-2}$$

$$[F]=[m][a]=MLT^{-2}$$

$$[\phi]=\frac{[s]}{[R]}=L^{0}$$

$$[\omega]=\frac{[\Delta\phi]}{[\Delta t]}=T^{-1}$$

M, L, T的方次叫**量纲**；以上表达式叫**量纲公式**。

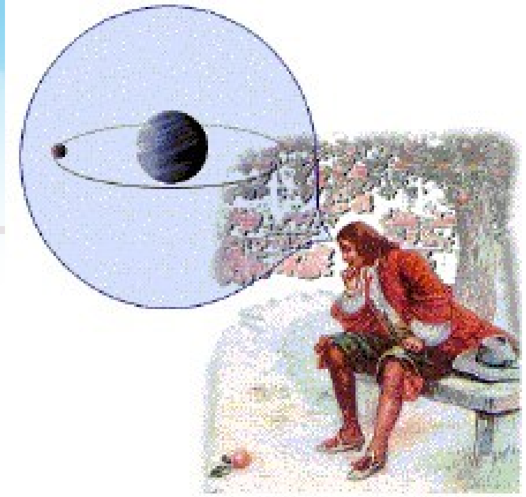
量纲公式的作用：

表明导出量与基本量的关系、单位换算、验证公式、探求规律。

§3. 力的种类

- 找到了动力学基本方程之后，关于运动的定律已经有了。物理学的另一个主要任务就是要研究力，即根据给定物体和它周围环境的性质来计算作用在该物体上的力，并寻找各种不同类型的力的统一。如果弄清楚自然界中的最基本的力，我们在原则上就能解释自然界中各式各样的运动现象。这里，我们先来简单介绍一些常见的力。

一、万有引力与重力



万有引力大小：$F = G\dfrac{M_1 M_2}{R^2}$

其中M_1和M_2为两质点的质量，R为两质点间的距离，G为比例常数，称为引力常数。

G=6.67E-11 $m^3kg^{-1}s^{-2}$

万有引力是所有物体之间都存在的引力。对于日常物品，万有引力的作用非常小，以至于感受不到。

天体之间万有引力的作用就非常明显了。

海潮的涨落就是月亮和太阳的万有引力作用形成的。

在地球表面物体所受到的重力mg就是万有引力。

$$g = G\frac{M}{R^2} \qquad g \approx 9.8\,ms^{-2}$$

其中M是地球的质量，R是地球的半径。

SI中，质量的单位是千克，重力是力，单位为牛顿。

表 2.1 不同纬度处重力加速度 g 的值

纬　度	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$g/(m\cdot s^2)$	9.780	9.782	9.786	9.793	9.802	9.811	9.819	9.826	9.831	9.832

二、弹性力

- 物体受到外力作用会发生形变。物体要恢复原来的形状，便产生了弹性力。
- 弹性力的方向一般是恢复形变的方向。
- 物体相互接触时所产生的相互作用力，实质就是弹性力。只是大多数物体的形变非常小，不被人们察觉。
- 最典型的弹性作用力是弹簧的弹性力。

胡克定律

$$F = -kx$$

三、摩擦力

（1）干摩擦

静摩擦 $f_s \le \mu_s N$

动摩擦 $f_k = \mu_k N$

摩擦的起因相当复杂。
主要与接触面的局部形变和表面的分子引力有关。

（2）湿摩擦力

速度较小时 $\vec{F}=-\eta\vec{v}$

速度较大时 $\vec{F}=-\eta\vec{v}^{2}$

通常湿摩擦比干摩擦要小得多，且不存在静摩擦力。

动力学求解的问题

质点动力学问题的求解关键是力。牛顿运动定律指出，力使质点获得加速度。而质点在各个瞬时的加速度（附以适当的初始条件）则完全确定了质点的运动情况，这是我们在质点运动学中研究过的问题。这样，力对质点运动情况的影响是通过加速度表现出来的。因此，加速度这个物理量起着很重要的“桥梁”作用，它将牛顿运动定律与质点运动学结合起来，而牛顿运动定律与质点运动学知识相结合，就提供了解决各种各样质点动力学问题的原则依据。

➢ 变力问题的处理方法（重点）

- 力随时间变化：F＝f（t）

在直角坐标系下，以x方向为例，由牛顿第二定律：

$$m\frac{dv_x}{dt} = f(t)$$

且：$t=t_0$ 时，$v_x=v_0$；$x=x_0$

则：

$$dv_x = \frac{1}{m} f(t)dt$$

直接积分得：

$$v_x = \int dv_x = \int \frac{1}{m} f(t)dt$$

$$= v(t) + c$$

由速度求积分可得到运动学方程：

$$x = \int v_x dt = x(t) + c_2$$

例题

飞机着陆时受到的阻力为F＝－ct，（c为常数）

且t＝0时，$v = v_0$。

求：飞机着陆过程中的速度。

例题

飞机着陆时受到的阻力为F＝－ct，（c为常数）

且t＝0时，$v=v_0$。

求：飞机着陆过程中的速度。

解：根据牛顿第二定律：－ct＝m dv / dt

$$v=\int dv=\int -\frac{c}{m}tdt$$

$$=-\frac{c}{2m}t^2+c_1$$

当t＝0时，$v=v_0$，代入得：$v_0=c_1$

$$v=v_0-\frac{c}{2m}t^2$$

• 力随速度变化：F＝f（v）

直角坐标系中，x方向f（v）＝m dv／dt

经过移项可得： $dt = m\dfrac{dv}{f(v)}$

等式两边同时积分得：$t - t_0 = \int dt = \int \dfrac{m}{f(v)}dv = m\int \dfrac{1}{f(v)}dv$

具体给出f（v）的函数试就可进行积分运算。

例题：（重点）

质量为m的小球，从距水平面高h处以速度v_0沿水平方向被抛入粘性流体中。小球受到阻力f＝－cv （c为常数）而减速，求：小球的运动速度及运动学方程。

例题：（重点）

质量为m的小球，从距水平面高h处以速度v_0沿水平方向被抛入粘性流体中。小球受到阻力f＝－cv （c为常数）而减速，求：小球的运动速度及运动学方程。

解：选取坐标系，令t=0时，x=0,y=-h, $v_{x_0}=v_0$， $v_{y_0}=0$

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt}=-cv_x \\ m\dfrac{dv_y}{dt}=mg-cv_y \end{cases}$$

移项变换：

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{v_x}=-\dfrac{c}{m}dt \\ \dfrac{dv_y}{g-\dfrac{c}{m}v_y}=dt \end{cases}$$

积分得：

$$\begin{cases} \ln v_x\Big|_{v_0}^{v_x}=-\dfrac{c}{m}t\Big|_0^t \\ -\dfrac{m}{c}\ln\left(g-\dfrac{c}{m}v_y\right)\Big|_0^{v_y}=t\Big|_0^t \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v_0 e^{-nt} \\ v_y = \dfrac{g}{n}\left(1 - e^{-nt}\right) \end{cases}$$

其中： $n = \dfrac{c}{m}$

$$\begin{cases} dx = v_0 e^{-nt} dt \\ dy = \dfrac{g}{n}\left(1 - e^{-nt}\right) dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{v_0}{n}\left(1 - e^{-nt}\right) \\ y = -h + \dfrac{g}{n} t - \dfrac{g}{n^2}\left(1 - e^{-nt}\right) \end{cases}$$

- 力随位移变化：F＝f（x）

直角坐标系中，x方向：

$$f(x)=m\frac{dv}{dt}=m\frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx}=mv\frac{dv}{dx}$$

经过移项可得： $f(x)dx=mvdv$

等式两边同时积分得：

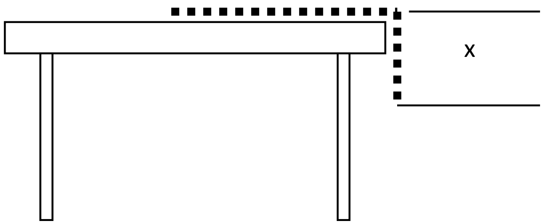
$$\int f(x)dx=\int mvdv=\frac{1}{2}m(v^2-v_0{}^2)$$

南開大學 Nankai University

例题：（重点）

光滑的桌面上一质量为M，长为L的匀质链条，有极小一段被推出桌子边缘。

求：链条刚刚离开桌面时的速度。



解：链条所受的力F是个变力：F＝m(x)g

$$m(x)=\frac{M}{L}x$$

根据牛顿第二定律：

$$\frac{M}{L}xg=M\frac{dv}{dt}=M\frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx}=Mv\frac{dv}{dx}$$

$$\int_0^L\frac{M}{L}gxdx=\int_0^v Mvdv$$

$$\frac{M}{2L}gL^2=\frac{1}{2}Mv^2$$

$$v=\sqrt{gL}$$

§4. 非惯性参照系与惯性力

一、力学的相对性原理

- 一切惯性系在力学上都是等价的。
- 在任何惯性系中，力学定律具有相同的形式。
- 以上两种描述意义是相同的，这称为力学相对性原理。

这里所说的“一切惯性系在力学上都是等价的”，并不是说人们在不同的惯性系中所看到的现象都一样，比如在火车上的自由落体运动，站台上的观察者看，物体做的是平抛运动。“一切惯性系在力学上都是等价的”这句话的意义是，不同惯性系中的动力学规律（如牛顿的三个定律）都一样，从而都能正确的解释所看到的现象。

二、时间和空间的绝对性

- 当考虑两个坐标系之间的变换时，不随之而变得量称为绝对量。
- 考虑两个相互运动的参考系K和K’，牛顿认为：

$$\begin{cases}\Delta t = t_2 - t_1 = t_2' - t_1' = \Delta t' \\ |\Delta\vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = |\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1| = |\Delta\vec{r}'|\end{cases}$$

即时间间隔和空间间隔不随坐标系的选取而改变。特别地，若选取两坐标系的基矢：

$$\vec{i} = \vec{i}', \quad \vec{j} = \vec{j}', \quad \vec{k} = \vec{k}'$$

则有 $\begin{cases}\Delta t = \Delta t' \\ \Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}'\end{cases}$ 这称为时间和空间的绝对性

三、伽利略变换

$$\begin{cases} t = t' + t_0 \\ \vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0 \end{cases}$$

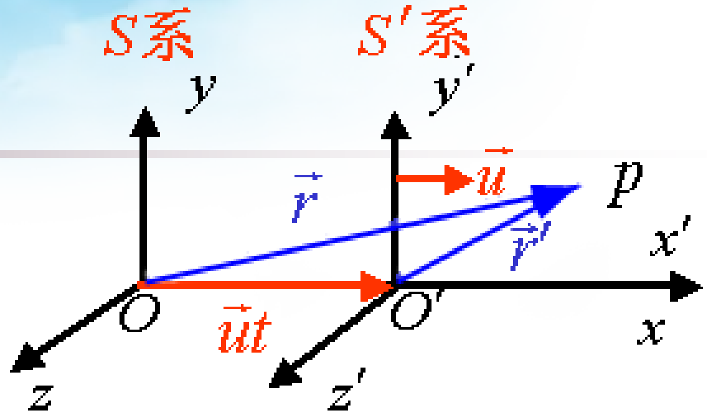


图 7-1

- 设 t_0=0，且当 t_0时刻，两坐标系的原点重合，K’系相对于K系以速度 $\vec{u}$ 匀速运动, 即

$$\vec{r}_0 = \vec{u}t$$

于是：

$$\begin{cases} t' = t \\ \vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t \end{cases}$$

➢ 伽利略变换：
$$\begin{cases} t' = t \\ \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{u}t \end{cases}$$

分量形式：
$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

由于：
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{v}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt'} = \vec{v} - \vec{u}$$
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \vec{a}\,' = \frac{d\vec{v}\,'}{dt'} = \vec{a}$$

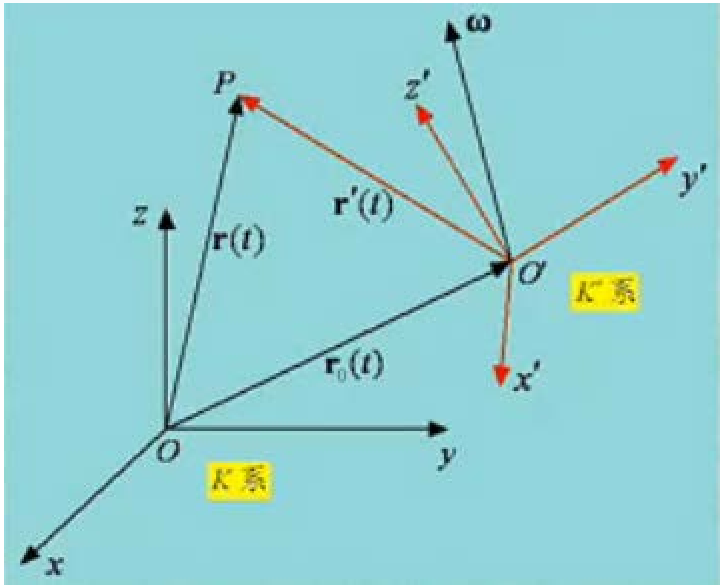
可得：
$$\begin{cases} \vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{u} \\ \vec{a}\,' = \vec{a} \end{cases}$$

➢ 伽利略变换：

- 结论：两个相互作匀速直线运动的参考系具有相同的加速度。这就导致如果牛顿运动定律在K系中成立，则在K’系中也成立的结论。

四、相对运动

- 通常，把相对观察者静止的参考系称为定参考系或静参考系，把相对观察者运动的参考系称为动参考系；

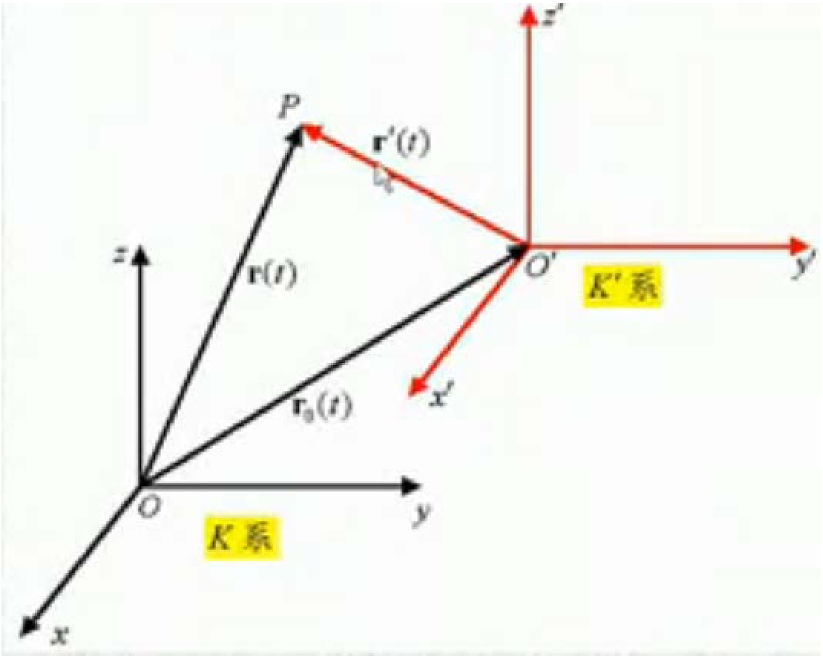


- 把物体相对于动参考系的运动称为相对运动（相应的有相对速度和相对加速度）；
- 物体相对静参考系的运动称为绝对运动（相应的有绝对速度和绝对加速度）；
- 动参考系相对静参考系的运动称为牵连运动（相应有牵连速度和牵连加速度）

4.1 动参考系作任意方式的平动

- 注意：平动不一定是直线运动！

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0(t)+\vec{r}\,'(t)$$



对静参考系K：

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt},\qquad \vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

$$\vec{v}_0(t)=\frac{d\vec{r}_0(t)}{dt},\qquad \vec{a}_0(t)=\frac{d\vec{v}_0(t)}{dt}=\frac{d^2\vec{r}_0(t)}{dt^2}$$

对动参考系K’：

$$\vec{v}\,'(t)=\frac{d\vec{r}\,'(t)}{dt},\qquad \vec{a}\,'(t)=\frac{d\vec{v}\,'(t)}{dt}=\frac{d^2\vec{r}\,'(t)}{dt^2}$$

于是，我们有： $\vec{v}(t)=\vec{v}_0(t)+\vec{v}\,'(t)$

在K系中物体的运动满足牛顿定律：$\vec{F}=m\vec{a}$

因 $\vec{a}\neq\vec{a}'$，在K’系看来物体的运动不满足牛顿定律，

即 $\vec{F}\neq m\vec{a}'$ 。

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0(t)+\vec{r}'(t)$$

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0(t)+\vec{v}'(t),\qquad \vec{v}_0(t):\quad \text{牵连速度}$$

$$\vec{a}(t)=\vec{a}_0(t)+\vec{a}'(t),\qquad \vec{a}_0(t):\quad \text{牵连加速度}$$

$$\vec{F}=m\vec{a}=m\vec{a}_0+m\vec{a}'$$

$$\vec{F}-m\vec{a}_0=m\vec{a}'$$

这就是说，在非惯性系里，有：$\vec{F}+\vec{f}_i=m\vec{a}'$

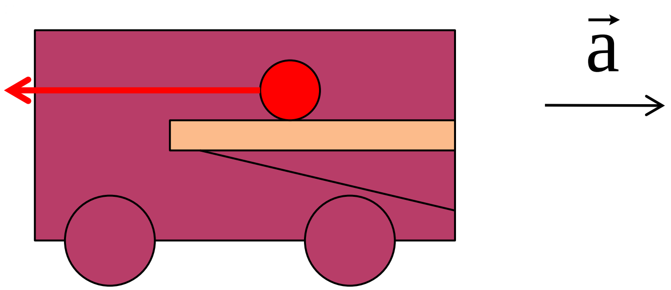
其中虚拟力：$\vec{f}_i=m\vec{a}'-\vec{F}=-m\vec{a}_0$

称为平移惯性力，简称惯性力。

- 实验一：

车厢内一光滑平板上放一小球，车厢静止或匀速直线运动时，小球都保持静止状态，当车厢有加速度$\vec{a}$时，以地球为参照系，小球仍静止，若以车厢为参照系，发现小球有一加速度$-\vec{a}$，而其所受合力为零，虽然牛顿第二定律不成立，人们习惯用牛顿第二定律分析受力问题，于是设想小球必然受到一向后的力：

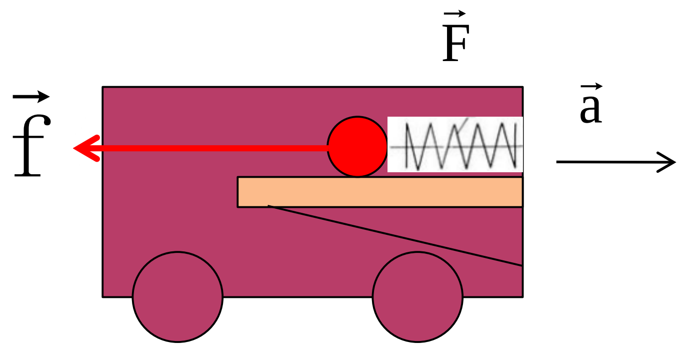
$$\vec{f} = -m\vec{a}$$



- **实验二：**

以地球为参照系，小球加速度$\vec{a}$，且弹簧施力为$\vec{F}$，牛顿定律成立。如以车厢为参照系，发现小球受一力$\vec{F} = m\vec{a}$，但小球在车厢内静止不动，于是假想小球还受到另一大小相等，方向相反的作用力。

$$\vec{f} + \vec{F} = 0$$



即 $\vec{f} = -\vec{F} = -m\vec{a}$ ，这样才符合牛顿定律。

注意：

1）惯性力是一假想力，不是由物体相互作用产生的，其没有反作用力。

2）如果非惯性系的加速度为 $\vec{a}$ ，则当对非惯性系内所有物体都附加一个惯性力 $-m_i\vec{a}$ ，即可在非惯性系中直接应用牛顿定律。

3）注意：实际受力+惯性力

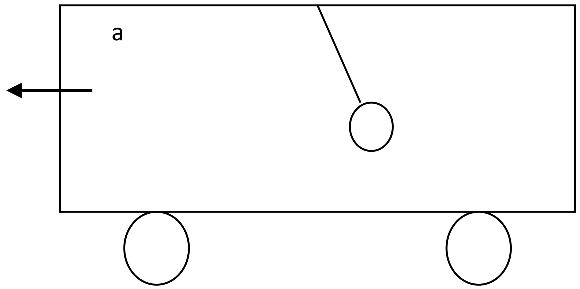
4）参照系始终统一

5）得到的运动描述是相对于非惯性系的。

例题

有一个小球通过一根细线挂在车顶，当车静止时小球铅直向下，当车以加速度a开动时与铅垂线夹角θ。

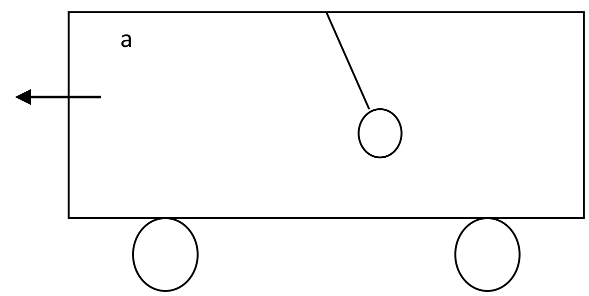
求：加速度与θ之间的关系。



例题

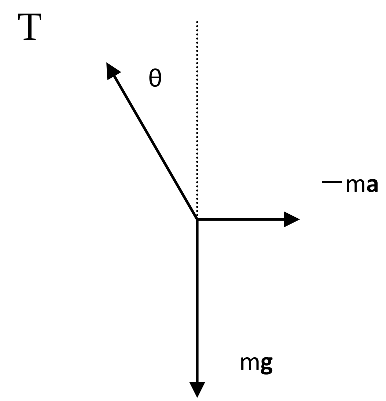
有一个小球通过一根细线挂在车顶，当车静止时小球铅直向下，当车以加速度a开动时与铅垂线夹角 θ 。

求：加速度与 θ 之间的关系。



解：在车上观察，小车静止。
由于车有加速度a，

则小球受惯性力f惯＝－ma。



取直角坐标系o－xy

x: $ma - T\sin\theta = 0$

y: $T\cos\theta - mg = 0$

∴ $a = -g\,\mathrm{tg}\theta$

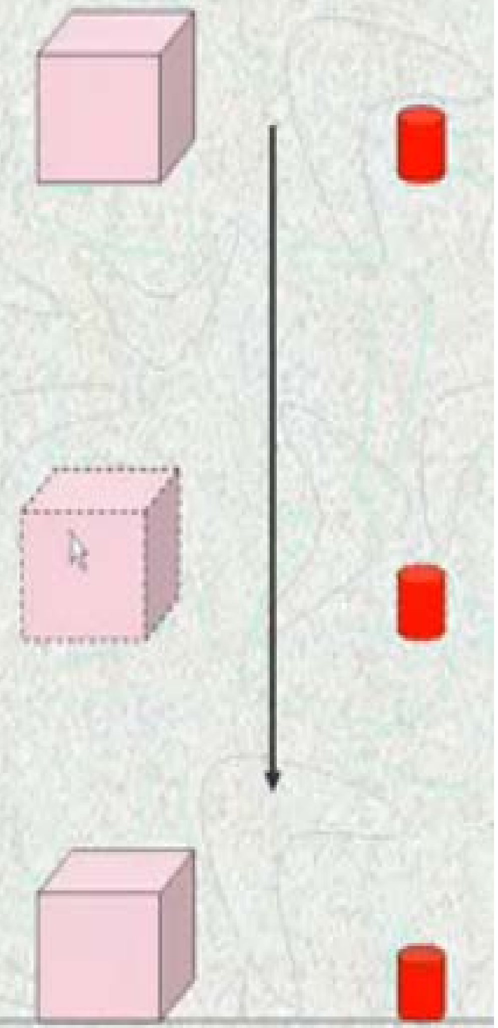
➢ 等效原理

- 如果电梯在自重场中自由下落，电梯内自由漂浮于空中的物体，好像出于无重力场的 太空中一样。爱因斯坦指出，电梯向下的落体加速度恰好抵消了该处的重力场，电梯内的观察者无法判定电梯是静止于太空中还是在重力场中自由下落。
- 上述概念就是等效原理，它是由爱因斯坦提出的著名假设。它告诉我们，究竟是均匀重力加速度g还是参考系的加速度a_0=−g，这在局部范围内是无法加以区分的。一般情况下，要说出给定的力中有多少是重力，有多少是惯性力是不可能的。

Principle of equivalence

(1907年末)我当时正 坐在专利局的椅子上，突然我有了一个想法，"如果一个人自由下落，他就不会感觉到自身的重量了。"我被震惊了。

——爱因斯坦



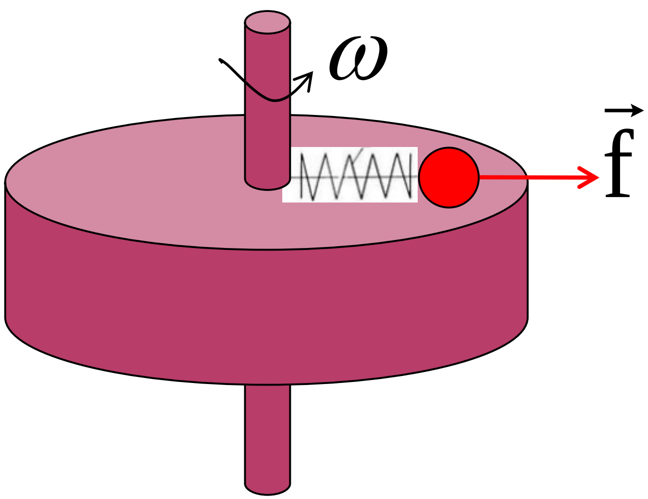
4.2 匀速转动参照系中的惯性力——惯性离心力

- 以地球为参照系，小球匀速转动，$\vec{F} = mr\omega^2\vec{n}_0$ 以圆盘为参照系，则小球静止，但受一弹力 $\vec{F}$，不满足牛顿定律。

- 如假想一个力 $\vec{f}$，

使 $\vec{f} + \vec{F} = 0$，则牛顿定律成立。

即 $\vec{f} = -\vec{F} = -mr\omega^2\vec{n}_0$



- 此为惯性力，但因其方向背离圆心，故称“惯性离心力”。
- 实际上：　　$\vec{f} = -m\vec{a}_n = -m\vec{a}$

- 如果圆盘有一角加速度 $\vec{\beta}$ ，在惯性力应有两个：

$$\vec{f}_1 = -m\vec{a}_n , \vec{f}_2 = -m\vec{a}_t$$

- $\vec{f}_2$ 的大小可表示为：$f_2 = mr\beta$

§5. 牛顿力学的局限性

- 实用范围：
  - ✓宏观物体（由大量原子组成的物体，且速度远小于光速）

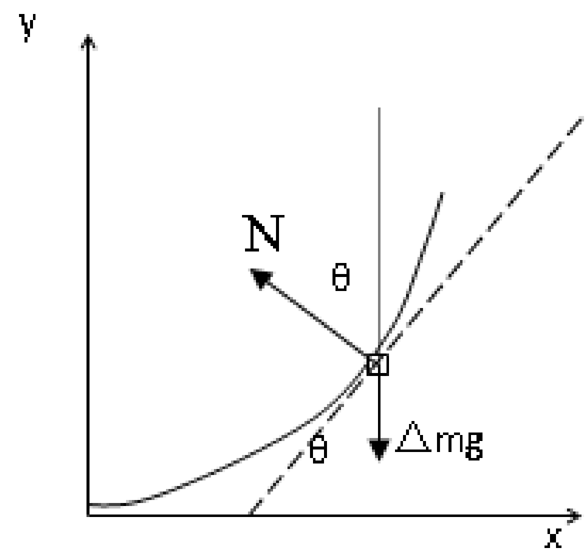
- 牛顿力学认为：
  - ✓时间、空间、质量都是绝对的，不因测量状态而变化。在理论上，可以设计出各种仪器，可以精确测量质点的位置及运动速度（因各量是连续的）。

- 相对论认为：
  - ✓在两个相对光速运动的参照系下，测量的时间、空间、质量不同。相对速率越大，差异越大。只有在相对速率远小于光速时，才可近似等同。
- 量子力学认为：
  - ✓物体（特别是微观粒子）的坐标和速度不能同时测准，而且其能量是一系列的分立的值——能级。

典型例题

例题（非质点问题的处理方法）

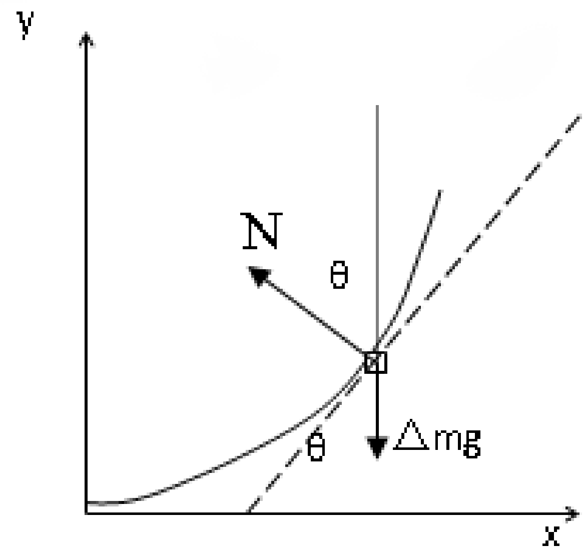
试证明在圆柱形容器内，以匀角速度ω绕中心轴作匀速旋转的流体表面为旋转抛物面。



证明：这是一个典型的非质点问题。

处理非质点问题的方法：

在流体表面取一小的体元△m，
这一微小的体元可以看成质点。
分析小体元受力：



重力mg：垂直向下；

支持力N：液体的其它部分对小体元作用力的合力。

选坐标系：以容器中心与液面的焦点为原点，

选直角坐标系0xy，如图

x方向：N sin θ ＝△mx ω ^{2}　　（向心加速度an＝x ω ^{2}）

y方向：N cos θ ＝△mg

两式相除得：tan　θ ＝x ω ^{2}/g，运用导数的基本性质：tan　θ ＝dy/dx ，可得：

$$dy = \frac{x\omega^2}{g} dx$$

等式两边同时积分，y：0→y；x：0→x

$$\int_0^y dy = \frac{\omega^2}{g} \int_0^x x dx$$

得：$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2$$ 典型的抛物线方程。

典型例题

例题（变质量，变力问题）

长为L质量为M的均匀柔绳，盘绕在光滑的水平面上，从静止开始，以恒定加速度a竖直向上提绳，当提起的高度为ℓ时，作用在绳端力的大小是多少？当以恒定速度v竖直向上提绳，当提起的高度为ℓ时，作用在绳端力的大小又是多少？

解：随着绳子不断提升，被提起绳段的质量不断增大，是典型的变质量问题。这时牛顿第二定律应写成：

$$F = \frac{d(mv)}{dt}$$

这是牛顿第二定律最正根的写法。m和v都是变量，根据导数的运算法则：

$$\frac{d(mv)}{dt} = \frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt}$$

被提起绳段的质量为：m＝（M/L）y

被提起绳段受力为：F（提绳的力）；mg（重力）

根据牛顿第二定律：

$$F - mg = \frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt}$$

将m的表示式代入得：

$$F - \frac{M}{L}yg = \frac{d(\frac{M}{L}y)}{dt}v + \frac{M}{L}y\frac{dv}{dt}$$

整理：dy/dt＝v；　dv/dt＝a

$$F - \frac{M}{L}yg = \frac{M}{L}v^2 + \frac{M}{L}ya$$

移项：

$$F = \frac{M}{L}(yg + v^2 + ya)$$

上式中，v是未知量，由于加速度是常量：

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt}=v\frac{dv}{dy}=a$$

$$\therefore vdv=ady$$

$$\therefore \frac{1}{2}v^2=ay+c$$

当y＝0时，v＝0，得到 c＝0，∴ $v^2=2ay$

$$F=\frac{M}{L}(yg+2ay+ya)=\frac{M}{L}y(g+3a)$$

若以恒定速度v向上提，a＝0，v为常量，则：

$$F=\frac{M}{L}(yg+v^2+ya) \Longrightarrow F=\frac{M}{L}(yg+v^2)$$

南開大學 Nankai University

作业: P.90: 2.6, 2.12, 2.13, 2.15, 2.21

4.2 动参考系作任意方式的运动（有转动）

（补充内容）

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0(t)+\vec{r}\,'(t)$$

P点在K系的坐标：

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

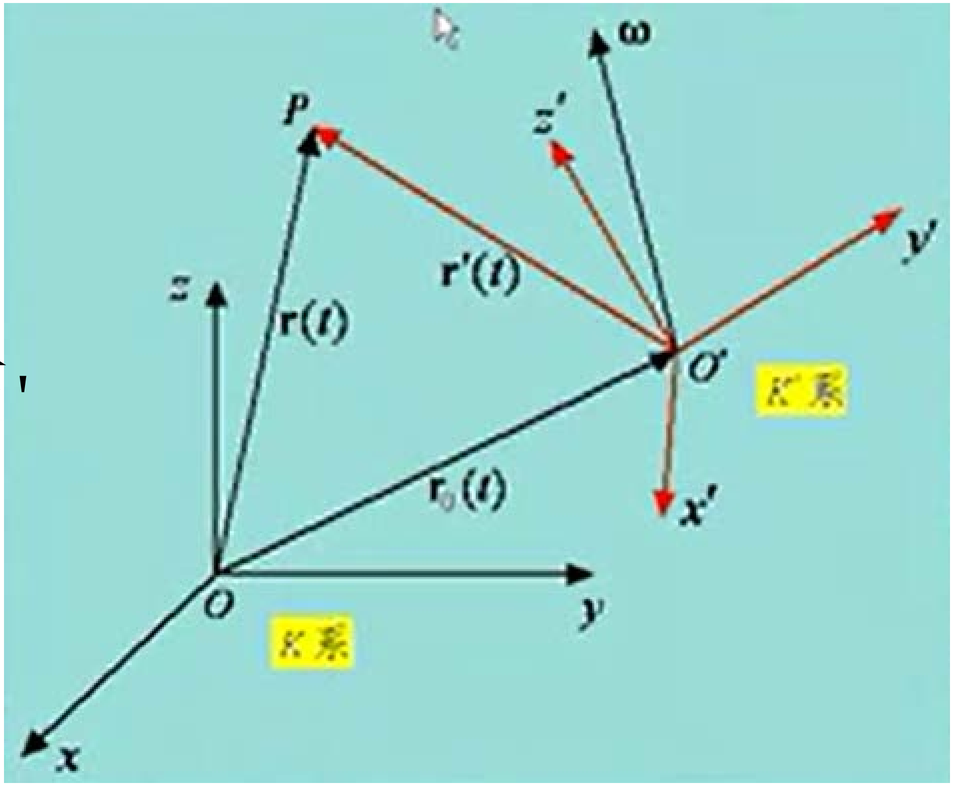
P点在K’系的坐标：

$$\vec{r}\,'(t)=x'(t)\vec{i}\,'+y'(t)\vec{j}\,'+z'(t)\vec{k}\,'$$

O’点在K系的坐标，速度和加速度：

$$\vec{r}_0(t)=x_0(t)\vec{i}+y_0(t)\vec{j}+z_0(t)\vec{k}$$

$$\vec{v}_0(t)=\frac{d\vec{r}_0(t)}{dt} \qquad \vec{a}_0(t)=\frac{d\vec{v}_0(t)}{dt}=\frac{d^2\vec{r}_0(t)}{dt^2}$$



定义

在静参考系K中对时间的微商成为**绝对微商**，符号：$\dfrac{D}{Dt}$

在动参考系K'中对时间的微商成为**相对微商**，符号：$\dfrac{d}{dt}$

它们之间差别表现在对坐标系的坐标基矢作用时不同

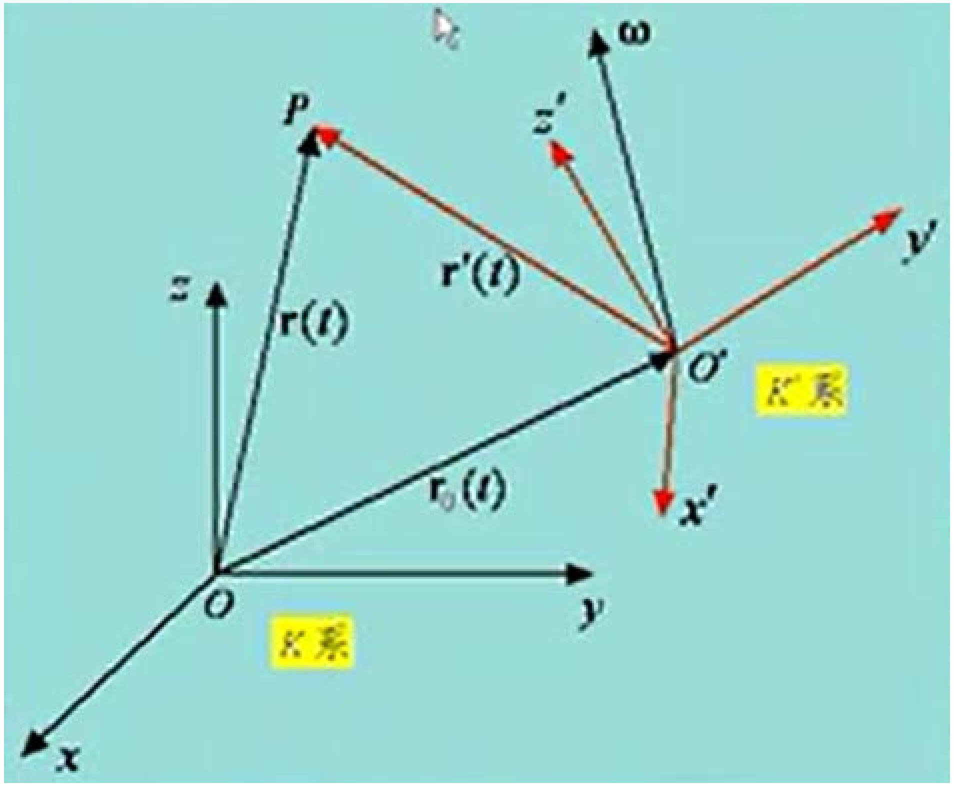
绝对微商视 $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ 为变量，视 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 为常量；

相对微商视 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 为变量，视 $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ 为常量；

除此之外，对坐标值（它们是标量）作用时 $\dfrac{D}{Dt}$ 与 $\dfrac{d}{dt}$ 完全相同。

K系：$\vec{v}=\frac{D\vec{r}}{Dt}$　　$\vec{a}=\frac{D\vec{v}}{Dt}$

K’系：$\vec{v}'=\frac{d\vec{r}'}{dt}$　　$\vec{a}'=\frac{d\vec{v}'}{dt}$



$$\frac{D\vec{i}'}{Dt}=\vec{\omega}\times\vec{i}'$$

$$\frac{D\vec{j}'}{Dt}=\vec{\omega}\times\vec{j}'$$

$$\frac{D\vec{k}'}{Dt}=\vec{\omega}\times\vec{k}'$$

矢量：$$\vec{b}'=b_x'\vec{i}'+b_y'\vec{j}'+b_z'\vec{k}'$$

$$\frac{D\vec{b}'}{Dt}=\frac{D}{Dt}\left(b_x'\vec{i}'+b_y'\vec{j}'+b_z'\vec{k}'\right)$$

$$=\frac{Db_x'}{Dt}\vec{i}'+\frac{Db_y'}{Dt}\vec{j}'+\frac{Db_z'}{Dt}\vec{k}'$$

$$+b_x'\frac{D\vec{i}'}{Dt}+b_y'\frac{D\vec{j}'}{Dt}+b_z'\frac{D\vec{k}'}{Dt}$$

$$=\frac{db_x'}{dt}\vec{i}'+\frac{db_y'}{dt}\vec{j}'+\frac{db_z'}{dt}\vec{k}'$$

$$+b_x'\vec{\varpi}\times\vec{i}'+b_y'\vec{\varpi}\times\vec{j}'+b_z'\vec{\varpi}\times\vec{k}'$$

$$=\frac{d}{dt}\left(b_x'\vec{i}'+b_y'\vec{j}'+b_z'\vec{k}'\right)+\vec{\varpi}\times\left(b_x'\vec{i}'+b_y'\vec{j}'+b_z'\vec{k}'\right)$$

$$\frac{D\vec{b}'}{Dt}=\frac{d\vec{b}'}{dt}+\vec{\varpi}\times\vec{b}'$$

$$\frac{D\vec{v}'}{Dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\frac{D\vec{r}'}{Dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0$$

$$\frac{D\vec{r}}{Dt} = \frac{D\vec{r}'}{Dt} + \frac{D\vec{r}_0}{Dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}_0$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}_0$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{D\vec{v}'}{Dt} + \frac{D\vec{\omega}}{Dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{D\vec{r}'}{Dt} + \frac{D\vec{v}_0}{Dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{D\vec{\omega}}{Dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right) + \vec{a}_0$$

$$= \vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{D\vec{\omega}}{Dt} \times \vec{r}' + \vec{a}_0$$

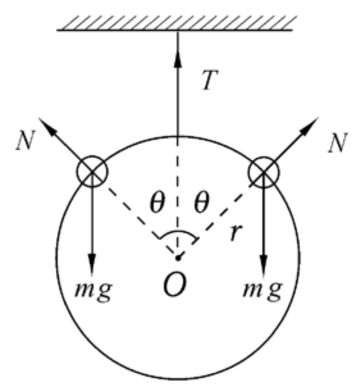
相对加速度　向心加速度　科里奥利加速度　转动加速度　牵连加速度

补充例题一

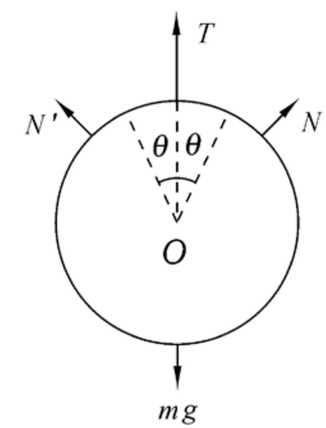
以初速度v_0从地面竖直向上抛出一质量为m的小球，小球除受重力外，还受一个大小为αmv^2的黏滞阻力（α 为常数，v为小球运动的速度大小），当小球回到地面时，它的速度大小为多少？

补充例题二

一质量为M 的圆环用线悬挂着，将两个质量均为m 的有孔小珠套在此环上，且可以在环上作无摩擦地滑动，如图（a）所示．今同时将两个小珠从环的顶部释放，并沿相反方向自由滑下．证明：当m ≥ 3 / 2 M 时，大环将升起，并求大环开始上升时两小珠的夹角值．



(a)



(b)