

如果做题有困难的话可以看下一页的推荐做题顺序

第3页有做题提示, 如果解题有困难推荐先看提示, 尝试之后再参考答案

系别 _____ 班级 _____ 姓名 _____ 第 _____ 页

1. 已知 $y(x) = \cos(1-x)$, 且 $y(0)=0$, 则 $\int_0^1 y(x) dx =$ _____.

2. 已知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导, $f(1)=0$, 且满足
$$x(x+1)f'(x) - (x+1)f(x) + \int_1^x f(t)dt = x-1.$$

则 $\int_1^2 f(x)dx - 3f(2) + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x \frac{\sin(t-1)^2}{t-1} dt}{f(x)} =$ _____.

3. 设 $x = 2 \int_0^t e^{-s^2} ds$, $y = \int_0^t \sin(t-s)^2 ds$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\sqrt{\pi}} =$ _____.

4. $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+e^x)(1+x)} =$ _____.

5. 已知 $f'(x) \int_0^2 f(x)dx = 8$, 且 $f(0)=0, f(x) > 0$, 则 $f(x) =$ _____.

6. $xy' = y(\ln y - \ln x)$ 的通解为 _____.

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y^2}$ 的通解为 _____.

8. $M = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\tan x}{1+x^4} + x^8 \right) dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x + \ln(x + \sqrt{x^2+1})) dx$,
 $P = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan^4 x + e^x \cos x - e^{-x} \cos x) dx$. 问 M, N, P 的大小顺序.

9. 计算 $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^4 \arctan x}{x^2+1} dx$.

10. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 证明: $\exists \xi \in (0,1)$, 使 $\int_0^\xi f(t)dt = (1-\xi)f(\xi)$,
又若设 $f(x) > 0$, 且单调减少, 则满足等式的 ξ 是唯一的.

做题顺序推荐：

6789 1234 10

其中 67 为求解微分方程/其余题目为定积分的求解与应用

题目提示（按推荐做题顺序）见下一页

6: 尝试做 $\frac{y}{x}$ 变量替换

7: 将 x 视为 y 的函数

8: 奇函数定积分性质

9: $x^4 = x^4 - 1 + 1$

1: 牛顿莱布尼茨公式, 以及分部积分技巧 $\int_0^1 y(x)dx = xy(x)|_0^1 - \int_0^1 xy'(x)dx$

2: 两端求导+求解关于 $f'(x)$ 的微分方程+洛必达

3: 对 $t-s$ 做变量替换

4: 对 $-x$ 做变量替换

5: 求 $f'(x)$ 的积分

10: 罗尔中值定理与反证法