线性代数–线性方程组作业解答

黄申为

2022 年 3 月 24 日

1. 设 $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 求一个可逆矩阵 P, 使 PA 为行最简形矩阵.

Solution.

$$\begin{aligned}
(A, I) &= \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{r_1 \times -\frac{1}{5}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3/5 & -15 & -1/5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{r_2 - 2r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3/5 & -15 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 & 7/5 & 2/5 & 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{r_2 \times 5}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3/5 & -1/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\
&\overset{r_1 + \frac{3}{5} r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

故 A 的行最简形矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ 且使得 PA 为行最简的可逆阵 $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

2. (a) 在秩是 r 的矩阵中, 是否一定有行列式为 0 的 $r-1$ 阶子式? 是否一定有行列式为 0 的 r 阶子式? 请给出证明或举出反例.

   (b) 求一个秩为 4 的方阵, 它的两个行向量是 $(1, 0, 1, 0, 0)$ 与 $(1, -1, 0, 0, 0)$.

Solution.

(a) 两个问题的答案都是可能有也可能没有. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 且有 1 阶字式为 0; 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 但没有 1 阶字式为 0. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 且有 2 阶子式为 0; 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 但没有 2 阶字式为 0. 例子不唯一.

(b) 答案不唯一. 考虑矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

对这个矩阵作一次初等行变换 $r_2 - r_1$ 就得到一个有 4 个非零行的行阶梯形矩阵, 因此该矩阵秩为 4.

3. **设有线性方程组**

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & 2\lambda+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

问 λ 为何值时方程组有唯一解? 无解? 有无穷解? 并在有无穷多解时求其通解.

Solution. 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & 2\lambda+1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $B = (A, b)$. 注意到 $R(A) \leq R(B) \leq 3$, 故方程组有唯一解 $\Leftrightarrow R(A) = 3 \Leftrightarrow |A| \neq 0$. 计算可得 $|A| = (\lambda-2)(2\lambda+1)$, 故当 $\lambda \neq 2$ 且 $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ 时, 方程组有唯一解.

- 当 $\lambda = -\frac{1}{2}$ 时,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

从而 $R(A) = 2$ 且 $R(B) = 3$, 故方程组无解.

- 当 $\lambda=2$ 时,

$$
\begin{aligned}
B=&\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&0&3&3\\0&0&5&5\end{pmatrix}\\
&\overset{r_3-\frac{5}{3}r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&0&3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\
&\overset{r_2\times\frac{1}{3}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\
&\overset{r_1+2r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&0&3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

从而 $R(A)=R(B)=2<3$, 方程组有无穷多个解. 取 $x_2=c$ 为自由未知量, x_1,x_3 为非自由未知量, 可得方程组的解为

$$
\begin{cases}
x_1 = 3 - c\\
x_2 = 0 + c\\
x_3 = 1
\end{cases}
$$

因此

$$
\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},
$$

其中 c 为任意实数.

4. **写出一个以** $x=c_1\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2\\4\\0\\1\end{pmatrix}$ **为通解的齐次线性方程组.**

Solution. 由已知条件有,

$$
\begin{cases}
x_1 = 2c_1 - 2c_2\\
x_2 = -3c_1 + 4c_2\\
x_3 = c_1 +\\
x_4 = + c_2.
\end{cases}
$$

因此, 以此为通解的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -3x_3 + 4x_4. \end{cases}$$

5. **判断下列命题的真伪: 若 A, B 为同型矩阵且 $R(A) = R(B)$, 则 $A \overset{r}{\sim} B$. 若正确给出证明; 若不正确, 请举出反例.**

Solution. 该命题不正确. 考虑以下反例:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

则 $R(A) = R(B) = 1$, 但不存在可逆矩阵 P 使得 $PA = B$, 故 A 与 B 不是行等价的.

6. **设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵. 证明 A 总能经过有限次初等行变换化成行阶梯形矩阵 (提示: 对 $m + n$ 作归纳).**

Solution. 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$. 对 $m + n$ 作归纳.

基本情况. $m = 1$ 或者 $n = 1$. 当 $m = 1$, $A = (a_{11}, a_{12,}, \ldots, a_{1n})$ 已经是行阶梯形矩阵. 当 $n = 1$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$. 若 $A = 0$, 则 A 已经是行阶梯形矩阵; 否则一定有某个 $a_{j1} \neq 0$, 此时通过交换第 1 行与第 j 行, 可以将这个非零元调换至 a_{11} 的位置, 再将第 1 行的适当的倍数加到后面的每一行便可得行阶梯形矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{j1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

归纳假设. 现在假设 $m, n \geq 2$ 并且对所有满足 $m' + n' < m + n$ 的 $m' \times n'$ 矩阵命题都成立.

归纳步. 我们考察 A 的第 1 列元素. 若第 1 列的某个元素 $a_{i1} \neq 0$, 则通过交换第 1 行与第 i 行, 可将 a_{i1} 调换至 a_{11} 的位置, 为了叙述方便仍把调换后的矩阵记为 $A = (a_{ij})$, 此时有 $a_{11} \neq 0$. 随后作初等行变换 $r_j - \frac{a_{j1}}{a_{11}} r_1$ $(2 \leq j \leq m)$, 可将 A 变为如下的矩阵:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}.$$

注意到

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

是一个 $(m-1) \times (n-1)$ 的矩阵. 由归纳假设, A' 可以经过有限次初等行变换化成一个行阶梯形矩阵 $\tilde{A}'$. 注意到对 A' 所作的每一次初等行变换都是 A 的一个不改变其第 1 行和第 1 列的初等行变换, 因此对 A 作这些初等行变换可将 A 化成行阶梯形矩阵

$$\left(\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{A}' \\ 0 & \end{array}\right).$$

所以下面我们假设对所有 $1 \leq i \leq m$, $a_{i1} = 0$. 令

$$A' = \begin{pmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

则 A' 是一个 $m \times (n-1)$ 矩阵. 由归纳假设, A' 可以经过有限次初等行变换化成一个行阶梯形矩阵 $\tilde{A}'$. 这些对 A' 所作的初等行变换也是 A 的不该变第 1 列的初等行变换. 因此对 A 作相同的初等行变换可将 A 化成行阶梯形矩阵

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ 0 & \\ \vdots & \tilde{A}' \\ 0 & \end{array}\right).$$

由归纳法原理, 定理得证. □

7. (a) 设 A, B 是 n 阶方阵. 证明 $R(AB+A+B) \leq R(A)+R(B)$.

   (b) 假设 $C = AB$, 其中 B 为方阵. 由秩的性质可知, 若 B 可逆, 则 $R(C) = R(A)$. 若 B 不可逆是否一定有 $R(C) < R(A)$? 请给出证明或者反例.

Solution.

(a) 由秩的不等式有,

$$\begin{aligned} R(AB+A+B) =& R(A(B+E)+B) \\ \leq& R(A(B+E)) + R(B) \\ \leq& R(A)+R(B). \end{aligned}$$

(b) 答案是不一定. $R(C)$ 可能等于 $R(A)$ 也可能小于 $R(A)$.

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 则 $C = AB = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 10 & 11 & 0 \end{pmatrix}$ 满足 $R(C) = R(A)$.

• $A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 则 $C = AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$ 满足 $R(C) < R(A)$.

8. 设 A 为方阵. 用 A 的行列式给出一个齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解的充分必要条件, 并给出充要性的证明.

Solution. $Ax = 0$ 有非零解的充分必要条件是 $|A| = 0$. 这是因为 $Ax = 0$ 有非零解的充分必要条件是 $R(A) < n$, 而 $R(A) < n$ 当且仅当 $|A| = 0$.

9. 设 A 是一个 3×4 矩阵, 且 $Ax = 0$ 的通解为 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, c 为任意实数.

   (a) 求 A 的行最简形矩阵.

   (b) 证明 $Ax = b$ 对任意的 b 都有解.

Solution.

(a) 由已知条件有,

$$\begin{cases} x_1 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ x_4 & & & = & 0. \end{cases}$$

所以 A 的行最简形矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) 由 (a) 可知, $R(A) = 3$. 对任何 b, 有 $3 = R(A) \leq R(A, b) \leq 3$, 从而 $R(A) = R(A, b) = 3$. 根据线性方程组解的判定定理可知 $Ax = b$ 有唯一解.

10. **陈述 Graham-Pollak 定理并简单解释在该定理证明中是如何使用线性方程组理论的.**

Solution. Graham-Pollak 定理: 任何 K_n 的分解中至少需要 $n-1$ 个完全二部图. 该定理证明使用反证法, 在分解所需二部图个数小于 $n-1$ 的假定下, 构造了一个齐次线性方程组, 并由方程组个数小于变量个数推出该方程组有非零解, 从而推出一个矛盾.