第6章 刚体动力学

	质点	刚体（定轴转动）
运动方程	$\vec{F}=m\vec{a}$	$\vec{M}=J_z\vec{\beta}$
作功	$dA=\vec{F}\bullet d\vec{r}$	$dA=M_z(F)d\theta$
动能定理	$A=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$	$A=\frac{1}{2}J_z\omega_2^2-\frac{1}{2}J_z\omega_1^2$
动量定理	$\vec{P}=m\vec{v}$	$L_z=J_z\omega$
	$\int_{t_0}^{t}Fdt=(mv)_{t_1}-(mv)_{t_0}$	$\int_{t_0}^{t_1}M_z dt=(J_z\omega)_{t_1}-(J_z\omega)_{t_0}$

转动惯量定义： $J=\sum\Delta m_i r_i^2$

力矩定义 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$

动量矩定义为： $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$

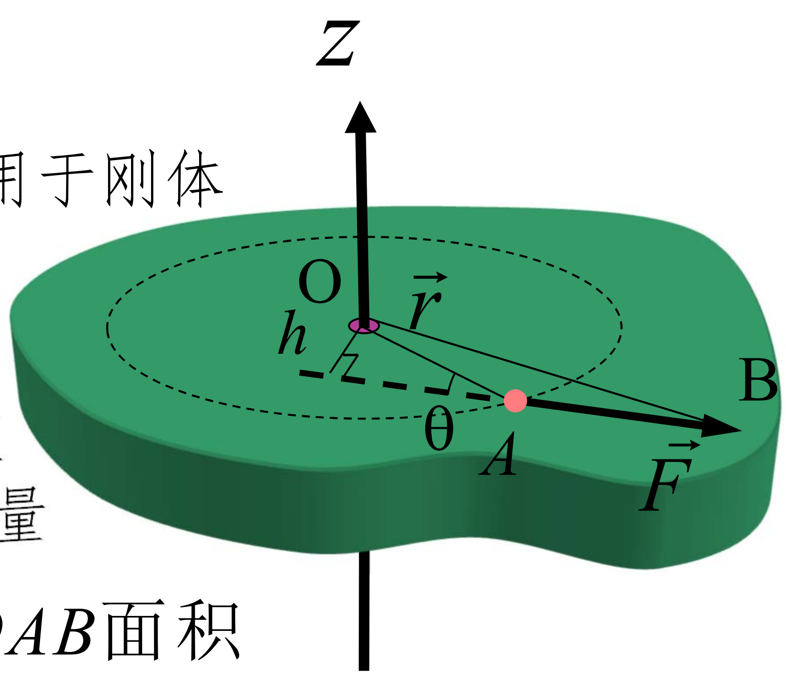
§6.1 力矩 刚体绕定轴转动微分方程

一. 力矩

- 力 ⟹ 改变质点的运动状态 ⟹ 质点获得加速度
- ？ ⟹ 改变刚体的转动状态 ⟹ 刚体获得角加速度

力 F 对z 轴的力矩

➢ 在与Z轴垂直的平面内，有力F作用于刚体



力对转轴的力矩M_z:

力F的大小与O点到力F作用线间垂直距离h（力臂）的乘积，可视为代数量

$$M_z(F) = \pm Fh = \pm Fr\sin\theta = \pm 2\Delta OAB\text{面积}$$

力矩的正负：右手螺旋法则，从Z轴正端往下看，力使刚体逆时针转动取正

➢ 不在与Z轴垂直的平面内，有力F作用于刚体

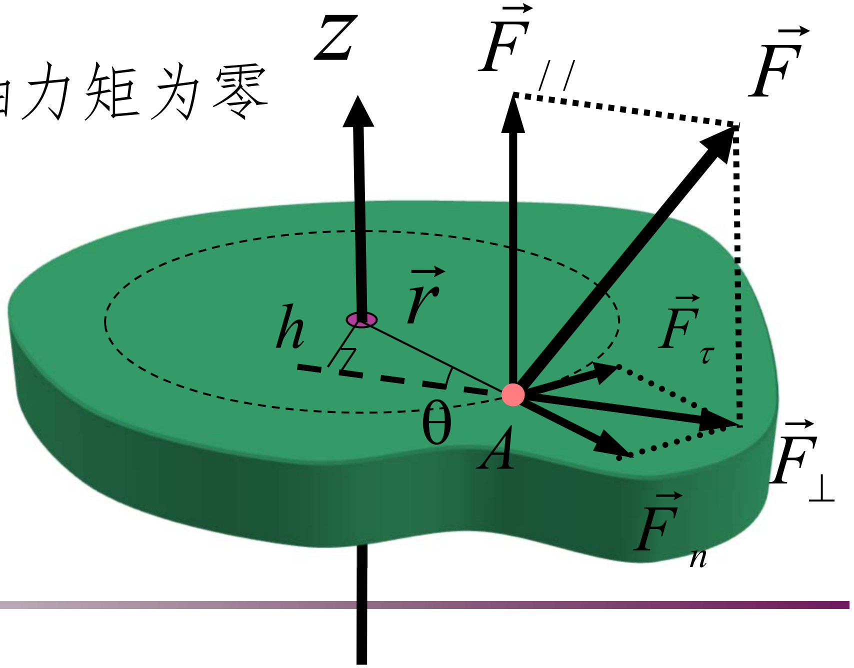
力 F 对z 轴的力矩

$$M_z(F)=F_\perp h=F_\tau r$$

$\vec{F}_{//}$不能改变Z轴转动状态，对Z轴力矩为零

- 力矩取决于力的大小、方向和作用点

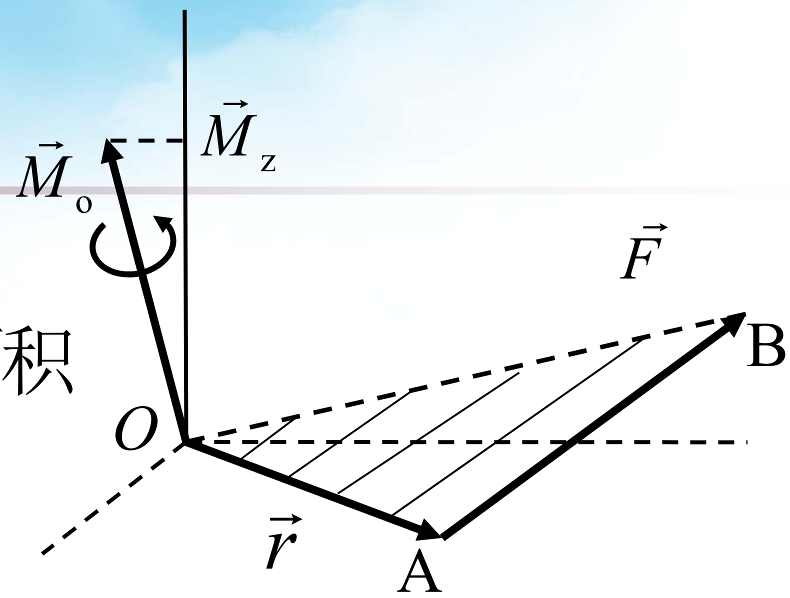
- 在刚体的定轴转动中，力矩只有两个指向



讨论

(1) 力对点的力矩

$$\vec{M}_O=\vec{r}\times\vec{F}=Fr\sin\alpha=2\Delta OAB\text{面积}$$

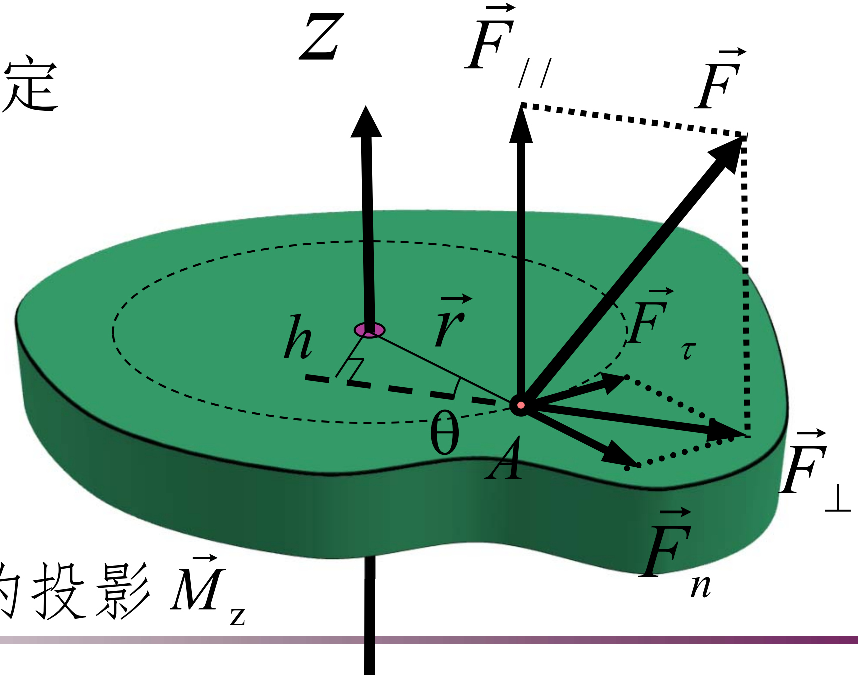


(2) 力对定轴力矩的矢量形式

$$\vec{M}_Z=\vec{r}\times\vec{F}_{\perp}$$

力矩的方向由右螺旋法则确定

(3) 力对任意点的力矩，在通过该点的任一轴上的投影，等于该力对该轴的力矩

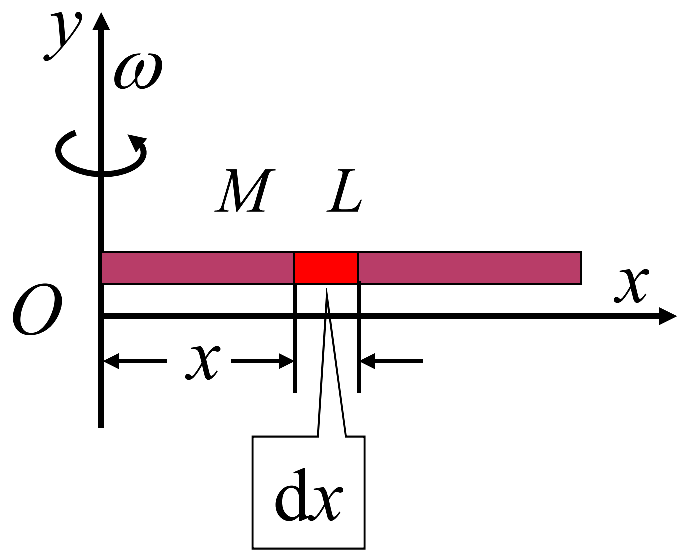


力F对Z轴的力矩：$\vec{M}_o$ 在Z轴的投影 $\vec{M}_z$

例

已知棒长 L ,质量 M ，在摩擦系数为 μ 的桌面转动 (如图)

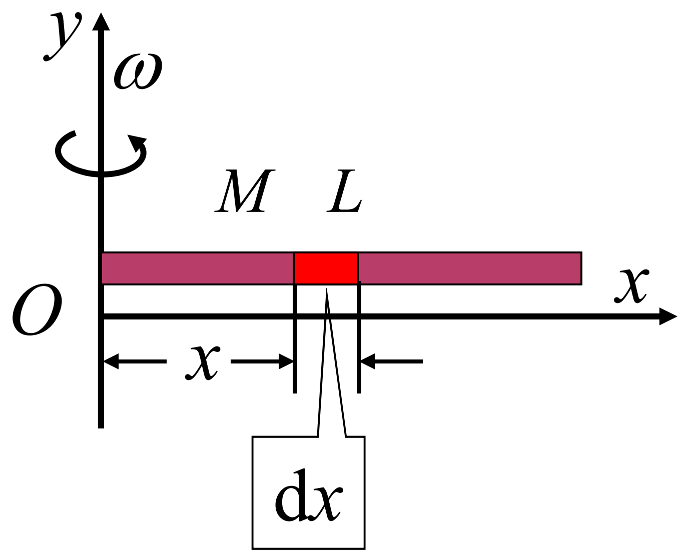
求 摩擦力对y轴的力矩



例

已知棒长 L ,质量 M ，在摩擦系数为 μ 的桌面转动 (如图)

求 摩擦力对y轴的力矩



解

$$\mathrm{d}m=\frac{M}{L}\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}f=\mu\mathrm{d}m\cdot g$$

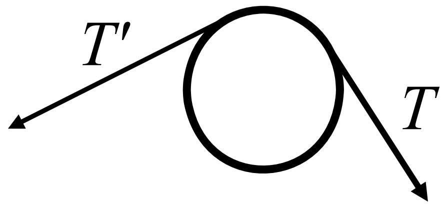
根据力矩 $$\mathrm{d}M'=-\mu\frac{M}{L}\cdot gx\mathrm{d}x$$

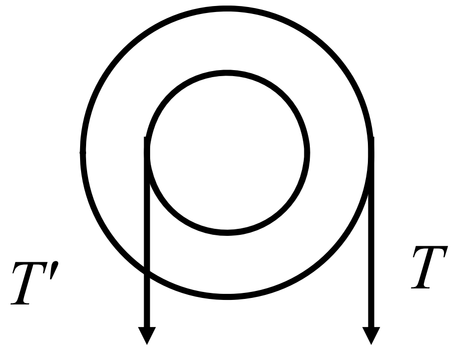
$$M'=\int_0^L-\mu\frac{M}{L}\cdot gx\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mu MgL$$

● 在定轴转动中，力矩可用代数值进行计算

➢ 半径R与力T垂直，垂直于纸面向里取正

例如





$$\sum M_i = TR - T'R$$

$$\sum M_i = TR - T'r$$

二. 刚体对定轴的转动定律

实验证明 $\begin{cases} \text{当 } M \text{ 为零时，则刚体保持静止或匀速转动} \\ \text{当存在 } M \text{ 时，} \beta \text{ 与 } M \text{ 成正比，而与 } J \text{ 成反比} \end{cases}$

$M \propto J\beta \quad \Rightarrow \quad M = kJ\beta$ 　在国际单位中 $k = 1$

刚体的转动定律 $\boxed{M_z = J\beta} \Leftarrow$ F=ma?

M_z：作用在刚体上所有的外力对定轴 z 轴的力矩的代数和

J：刚体对 z 轴的转动惯量

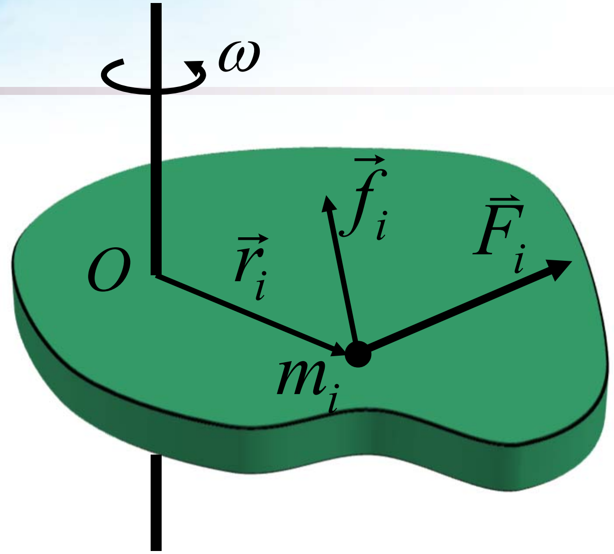
讨论

(1) M 正比于 β，力矩越大，刚体的 β 越大

(2) 力矩相同，若转动惯量不同，产生的角加速度不同

(3) 与牛顿定律比较： $M \to F, J \to m, \beta \to a$

- 理论推证



取一质量元 $\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i \vec{a}_i$

$\Downarrow$

切线方向 $F_{i\tau} + f_{i\tau} = m_i a_{i\tau}$

对固定轴的力矩 $F_{i\tau} r_i + f_{i\tau} r_i = m_i a_{i\tau} r_i = m_i r_i^2 \beta$

对所有质元

$$\underbrace{\sum F_{i\tau} r_i}_{\text{合外力矩 } M} + \underbrace{\sum f_{i\tau} r_i}_{\text{合内力矩 } = 0} = (\underbrace{\sum m_i r_i^2}_{\text{刚体的转动惯量 } J})\beta$$

三. 转动惯量

定义式 $J=\sum \Delta m_i r_i^2$ 质量不连续分布

$J=\int_V r^2 \mathrm{d}m$ 质量连续分布

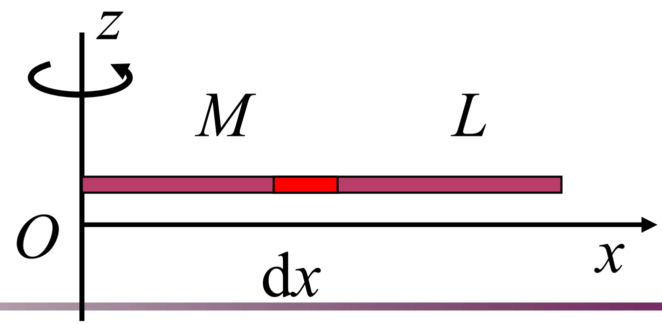
- 计算转动惯量的三个要素:(1)总质量M (2)质量分布 (3)转轴的位置

(1) J 与刚体的总质量有关

例如两根等长的细木棒和细铁棒绕端点轴转动惯量

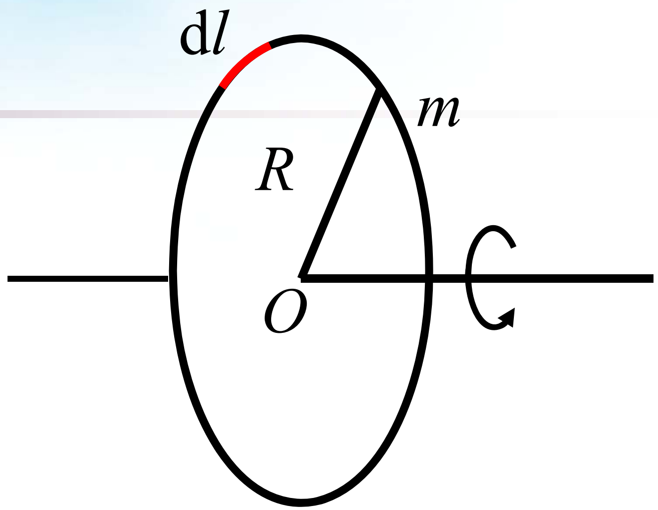
$$J=\int_0^L x^2 \lambda \mathrm{d}x=\int_0^L x^2 \frac{M}{L}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}ML^2$$

$$J_{铁}>J_{木}$$



(2) J 与质量分布有关

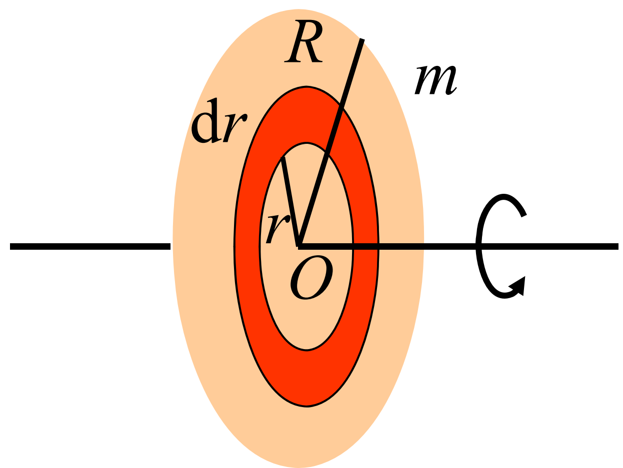
例如圆环绕中心轴旋转的转动惯量



$$J=\int_V R^2\mathrm{d}m=\int_0^{2\pi R}R^2\lambda\mathrm{d}l$$

$$=R^2\lambda\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l=2\pi R^3\frac{m}{2\pi R}=mR^2$$

例如圆盘绕中心轴旋转的转动惯量

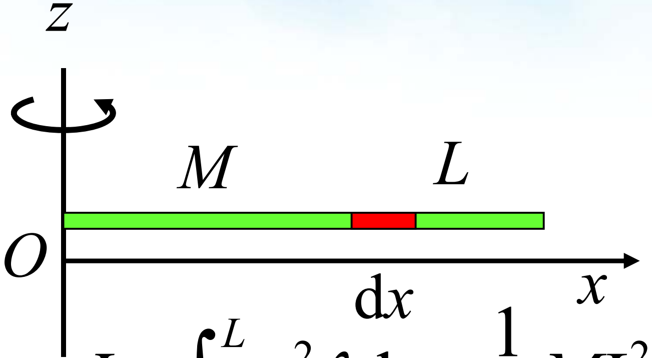


$$\mathrm{d}s=2\pi r\mathrm{d}r$$

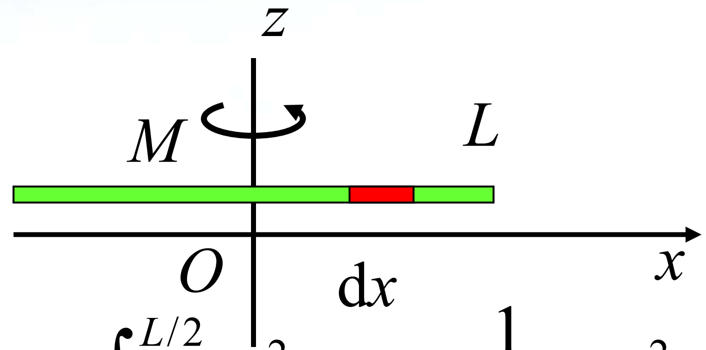
$$\mathrm{d}m=\sigma\mathrm{d}s=\frac{m}{\pi R^2}2\pi r\mathrm{d}r=\frac{2mr}{R^2}\mathrm{d}r$$

$$J=\int_V r^2\mathrm{d}m=\int_0^R\frac{2m}{R^2}r^3\mathrm{d}r=\frac{m}{2}R^2$$

(3) J 与转轴的位置有关



$$J=\int_0^L x^2\lambda \mathrm{d}x=\frac{1}{3}ML^2$$



$$J=\int_{-L/2}^{L/2} x^2\lambda \mathrm{d}x=\frac{1}{12}ML^2$$

四. 平行轴定理及垂直轴定理

1. 平行轴定理 $J_{z'}=J_z+ML^2$

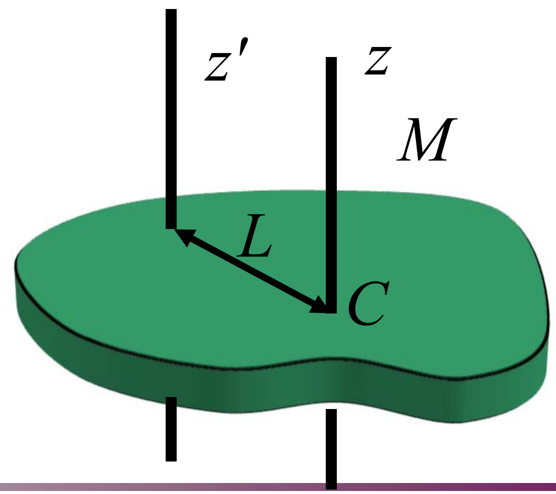
:刚体绕任意轴的转动惯量

:刚体绕通过质心的轴

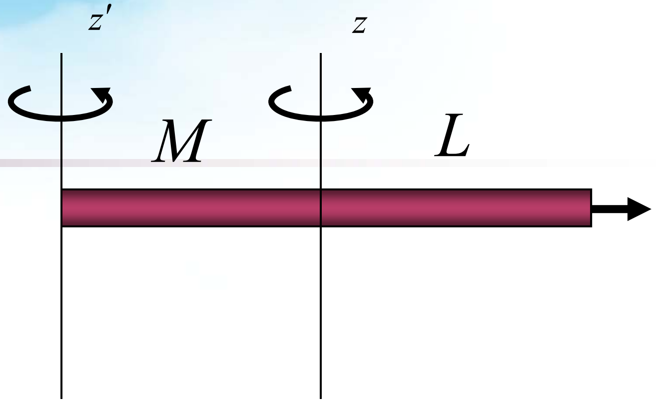
J_z

:两轴间垂直距离

L



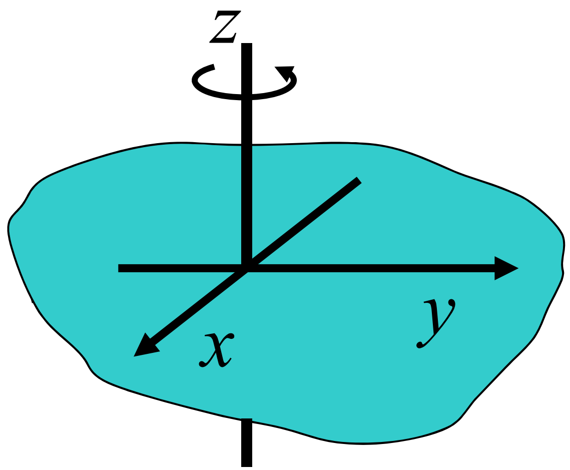
例 均匀细棒的转动惯量



$$J'_Z = J_Z + M\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

$J_z = 1/12ML^2$

2. (薄板)垂直轴定理



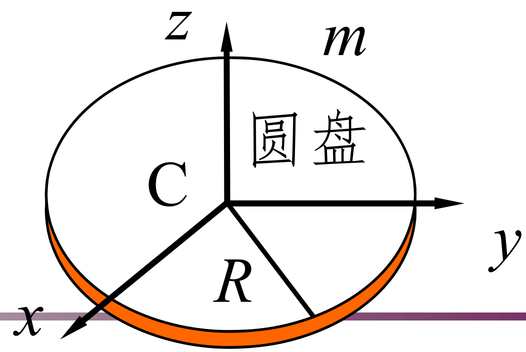
$$J_z = J_x + J_y$$

x,y轴在薄板内；

z 轴垂直薄板。

例如求对圆盘的一条直径的转动惯量

已知 $J_z = \frac{1}{2}mR^2$



$$\left.\begin{aligned} J_z &= J_x + J_y \\ J_x &= J_y \end{aligned}\right\} J_x = J_y = \frac{1}{4}mR^2$$

- 用积分法求刚体的转动惯量：

①首先分割出质元，这一步要充分利用对称性，

要求分割到dm上各点到轴线距离相等！

②引入密度 ρ

a) 如刚体是线性的：

b) 刚体是平板的：

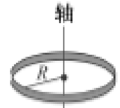
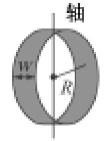
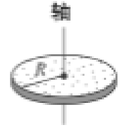
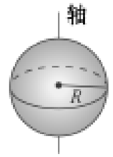
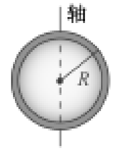
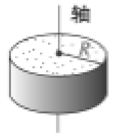
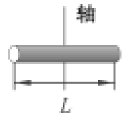
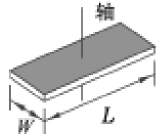
c) 刚体是三维的：

③积分，注意上、下限选取正确。

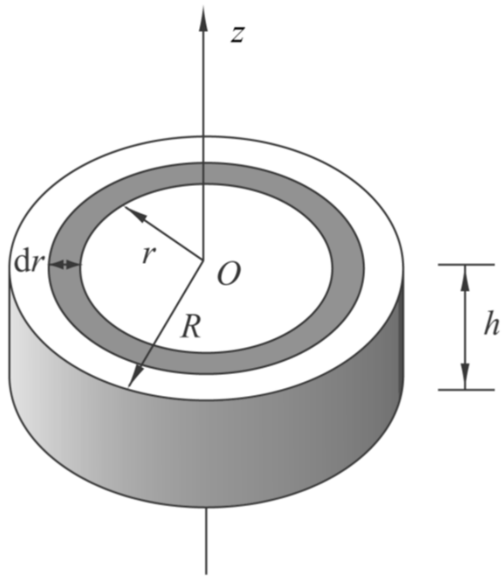
④用 ρ 代替 m

看课本P200表6.1

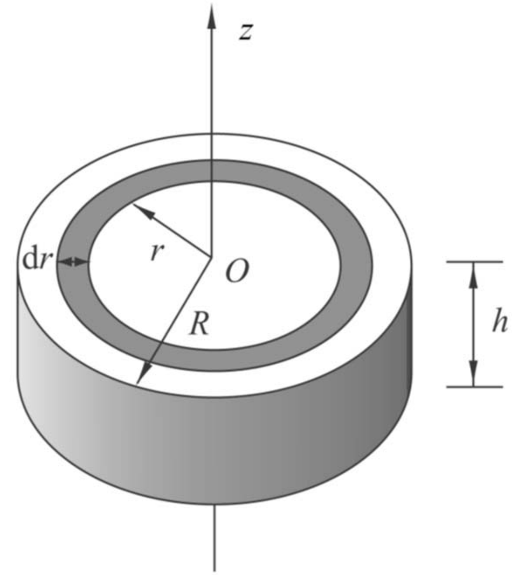
表 6.1 几种常用刚体的转动惯量

刚 体	转 轴	转动惯量	图
均质圆环 （质量为 M，半径为 R）	通过圆环中心与环面垂直	MR^2	
均质圆柱壳 （质量为 M，半径为 R 宽度为 W）	沿直径方向通过柱壳中心	$\frac{1}{2}MR^2+\frac{1}{12}MW^2$	
均质圆盘 （质量为 M，半径为 R）	通过圆盘中心与盘面垂直	$\frac{1}{2}MR^2$	
均质球体 （质量为 M，半径为 R）	沿直径	$\frac{2}{5}MR^2$	
均质球壳 （质量为 M，半径为 R）	沿直径	$\frac{2}{3}MR^2$	
均质圆柱体 （质量为 M，半径为 R）	沿几何轴	$\frac{1}{2}MR^2$	
均质细杆 （质量为 M，长为 L）	通过中心与杆垂直	$\frac{1}{12}ML^2$	
均质长方形板 （质量为 M，长为 L， 宽为 W）	通过中心与板面垂直	$\frac{1}{12}M(L^2+W^2)$	

求：质量为M，半径为R，高h的圆柱对过圆心且与盘面垂直转轴的转动惯量。



求：质量为M，半径为R，高h的圆柱对过圆心且与盘面垂直转轴的转动惯量。



解：取半径为r，宽dr的薄圆环，高h。

该圆环的质量为：dm＝ρ2π r h dr，其中 ρ 是圆盘的密度：

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 h}$$

该圆环上各个点到转轴的距离都是r，

∴圆环的转动惯量为：$dJ = r^2 dm$

整个圆柱的转动惯量就是dJ从0到R积分：

$$J=\int_V r^2 dm=\int_0^R r^2\rho 2\pi rhdr=2\pi\rho h\int_0^R r^3 dr$$

$$=2\pi\rho h\frac{1}{4}r^4\Big|_0^R=\frac{1}{2}\pi\frac{M}{\pi R^2 h}hR^4=\frac{1}{2}MR^2$$

如果是空心圆柱，则积分限从R1积到R2

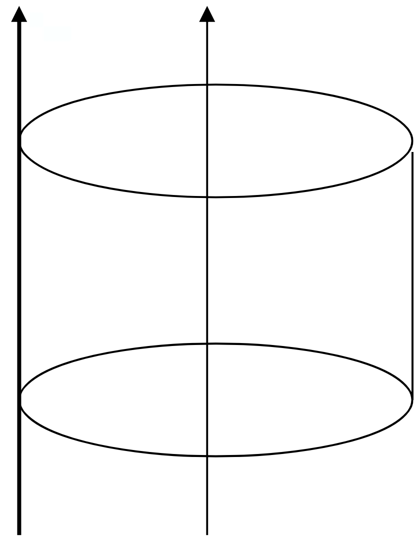
：

$$J=\int_V r^2 dm=\int_{R_1}^{R_2} r^2\rho 2\pi rhdr=2\pi\rho h\int_{R_1}^{R_2} r^3 dr$$

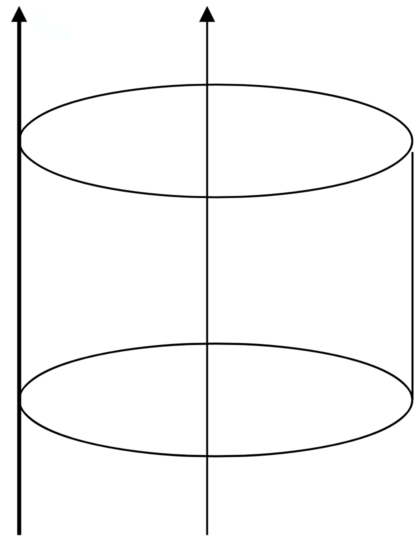
这时的密度应为： $\rho=\dfrac{M}{\pi(R_2^2-R_1^2)h}$

$$J=2\pi\rho h\frac{1}{4}r^4\Big|_{R_1}^{R_2}=\frac{1}{2}\pi\frac{M}{\pi(R_2^2-R_1^2)h}h(R_2^4-R_1^4)=\frac{1}{2}M(R_2^2+R_1^2)$$

例：过圆柱边缘与圆柱中心轴平行的轴的转动惯量。



例：过圆柱边缘与圆柱中心轴平行的轴的转动惯量。



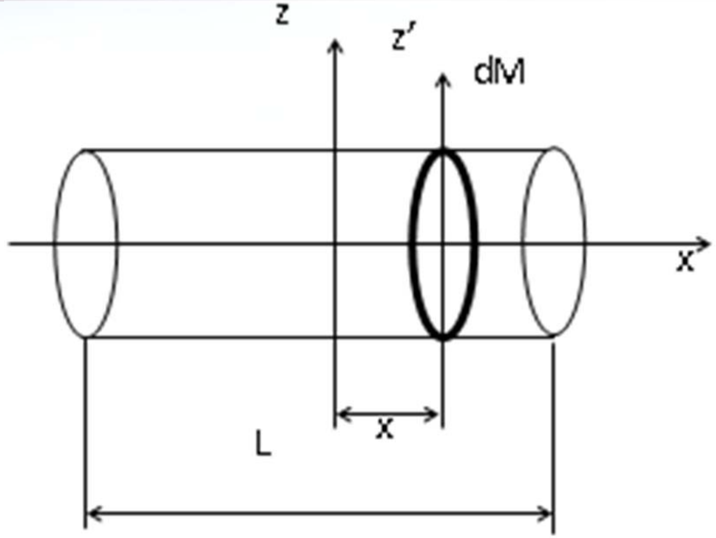
圆柱对其中心轴的转动惯量为：$1/2\ MR^2$

两轴之间的距离为R，根据平行轴定理：

$$I = I_c + md^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

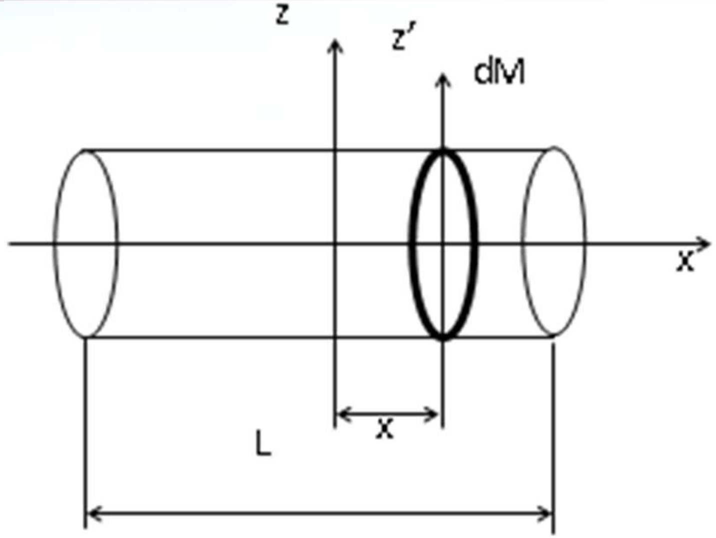
补充例题：（重点）

半径为R，长为L，质量为M的实心圆柱体对中心直径Z的转动惯量。



补充例题：（重点）

半径为R，长为L，质量为M的实心圆柱体对中心直径Z的转动惯量。



解：从圆柱上切下一个薄圆片dM，它对x轴的转动惯量为：

$$dJ_x = \tfrac{1}{2}\, dMR^2$$

用垂直轴定理，得出它对z'轴的转动惯量为：

$dJz' = \tfrac{1}{4} dMR^2$　其中$dM = M/Ldx$

用平行轴定理，得出它对z轴的转动惯量为：

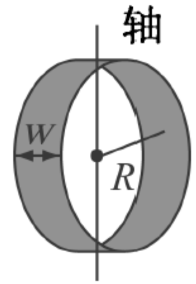
$$dJ_z = \frac{1}{4} dMR^2 + dMx^2$$

从－½L到＋½L积分得：

$$J = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{1}{4} R^2 \frac{M}{L} dx + \frac{M}{L} x^2 dx\right) = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$$

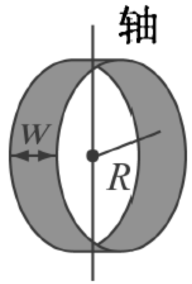
例：书P200，第二项，均质圆柱壳J_z

均质圆柱壳 （质量为 M，半径为 R 宽度为 W）	沿直径方向通过柱壳中心	$\frac{1}{2}MR^2+\frac{1}{12}MW^2$	



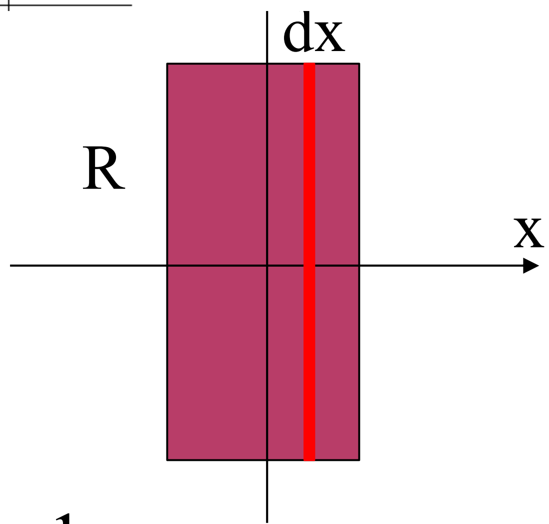
例：书P200，第二项，均质圆柱壳J_z

均质圆柱壳（质量为 M，半径为 R 宽度为 W）	沿直径方向通过柱壳中心	$\frac{1}{2}MR^2+\frac{1}{12}MW^2$	



$dJ_x = dMR^2$

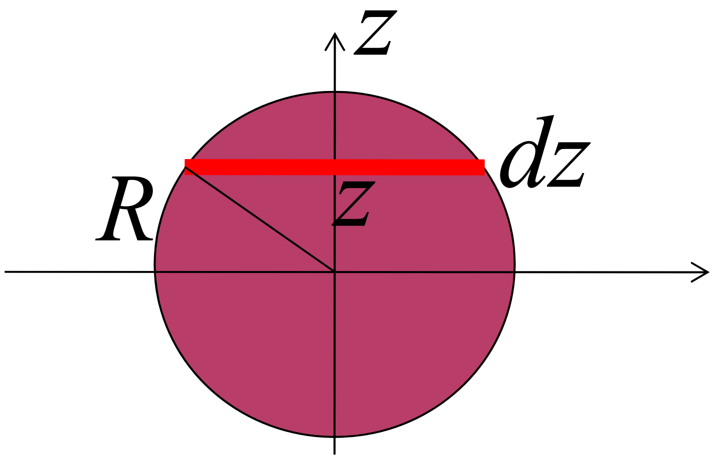
$dJz' = 1/2dMR^2$　其中$dM = M/wdx$

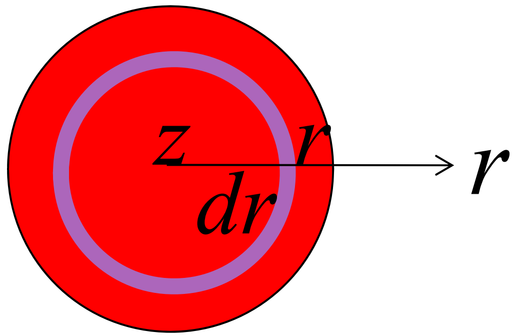


$$dJ_z = \frac{1}{2}dMR^2 + dMx^2$$

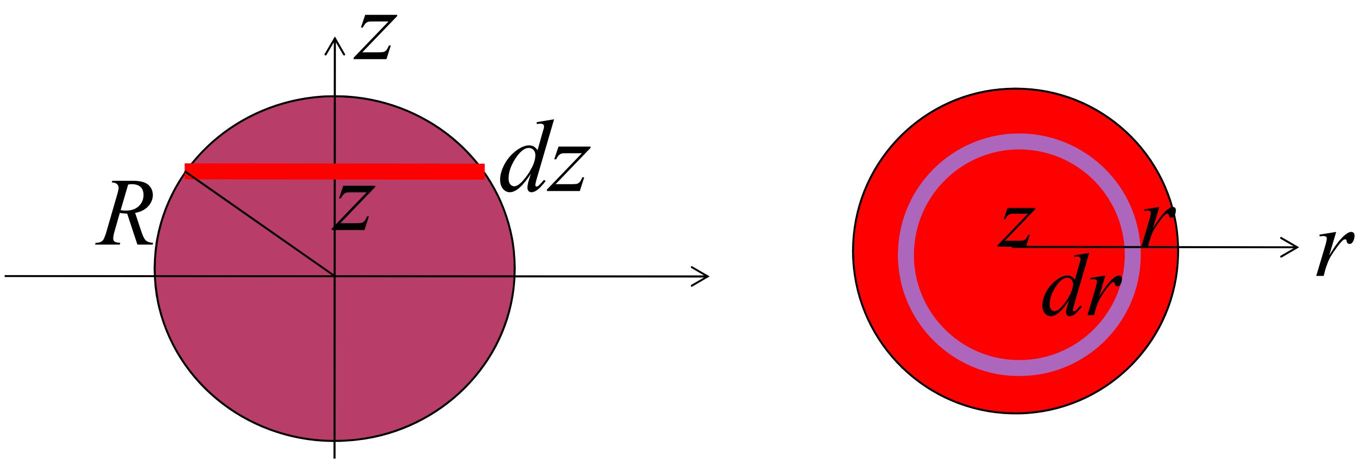
$$J_z = \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}\left(\frac{1}{2}\frac{M}{w}R^2dx + \frac{M}{w}x^2dx\right) = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}Mw^2$$

例：半径为R，质量为m的均匀球体，求其对任一直径轴线的转动惯量。





例：半径为R，质量为m的均匀球体，求其对任一直径轴线的转动惯量。



解：首先分割质元，用垂直z轴的平面切片，切片厚度为dz，其半径为： $\sqrt{R^2 - z^2}$

$$dm = \rho\pi(R^2 - z^2)dz$$

圆盘：

$$dJ_z = \frac{1}{2}dm(R^2 - z^2)$$

$$\therefore J_z = \frac{1}{2}\pi\rho\int_{-R}^{R}(R^2 - z^2)^2 dz$$

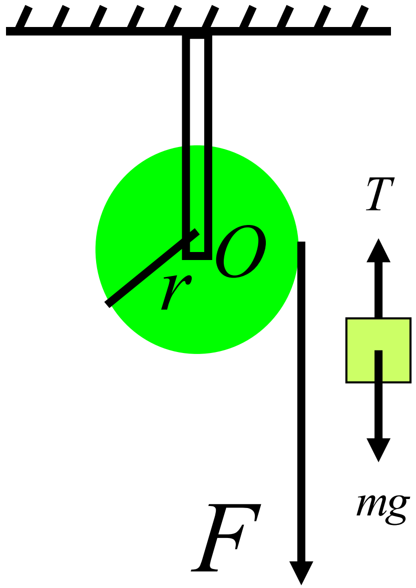
$$= \frac{8}{15}\pi\rho R^5$$

$$而 m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$$

$$\therefore J = \frac{2}{5}mR^2$$

五. 转动定律的应用举例

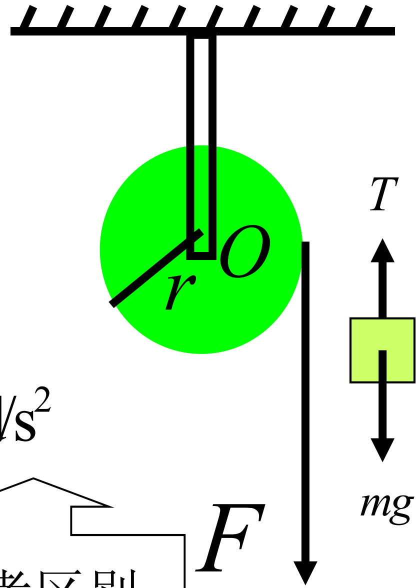
例 一轻绳绕在半径 r =20 cm 的飞轮边缘，在绳端施以F=98 N的拉力，飞轮的转动惯量 J=0.5 kg·m^2，飞轮与转轴间的摩擦不计，(见图)



求 (1) 飞轮的角加速度

(2) 如以重量P =98 N的物体挂在绳端，试计算飞轮的角加速

例 一轻绳绕在半径 r =20 cm 的飞轮边缘，在绳端施以F=98 N 的拉力，飞轮的转动惯量 J=0.5 kg·m^2，飞轮与转轴间的摩擦不计，(见图)



求 (1) 飞轮的角加速度

(2) 如以重量P =98 N的物体挂在绳端，试计算飞轮的角加速

解 (1) $Fr = J\beta$

$$\beta = \frac{Fr}{J} = \frac{98\times 0.2}{0.5} = 39.2\ \text{rad/s}^2$$

(2)
$$\left.\begin{aligned} mg - T &= ma \\ Tr &= J\beta \\ a &= r\beta \end{aligned}\right\}$$

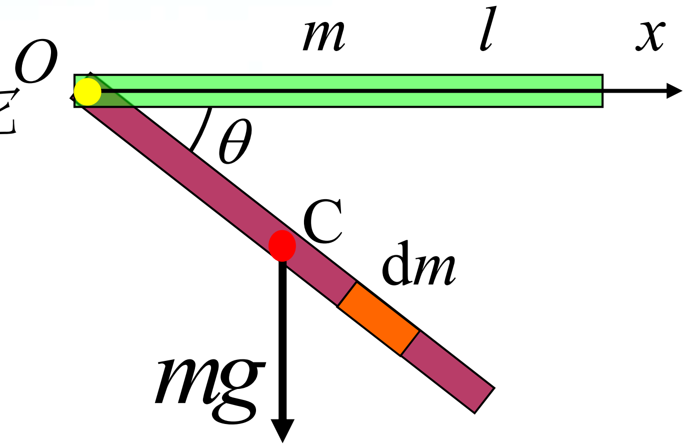
$$\beta = \frac{mgr}{J + mr^2} = \frac{98\times 0.2}{0.5 + 10\times 0.2^2} = 21.8\ \text{rad/s}^2$$

两者区别

例

一根长为 l，质量为 m 的均匀细直棒，可绕轴 O 在竖直平面内转动，初始时它在水平位置

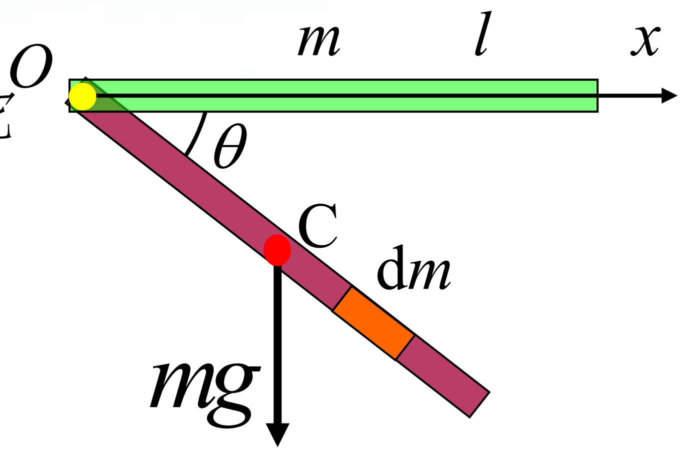
求 它由此下摆 θ 角时的 ω



例

一根长为 l，质量为 m 的均匀细直棒，可绕轴 O 在竖直平面内转动，初始时它在水平位置

求 它由此下摆 θ 角时的 ω



解 取一质元

水平方向上：

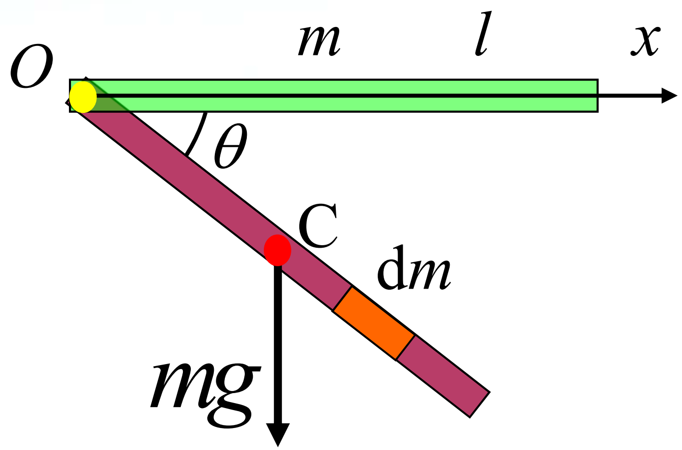
$$M=\int x\mathrm{d}m\cdot g=g\int x\mathrm{d}m$$

$$M=mgx_C \Longleftarrow \boxed{\int x\,\mathrm{d}m = m x_C}$$ 质心定理

重力对整个棒的合力矩等于重力全部 集中于质心所产生的力矩

南开大学 Nankai University

θ角时：



$$M=\frac{1}{2}mgl\cos\theta$$

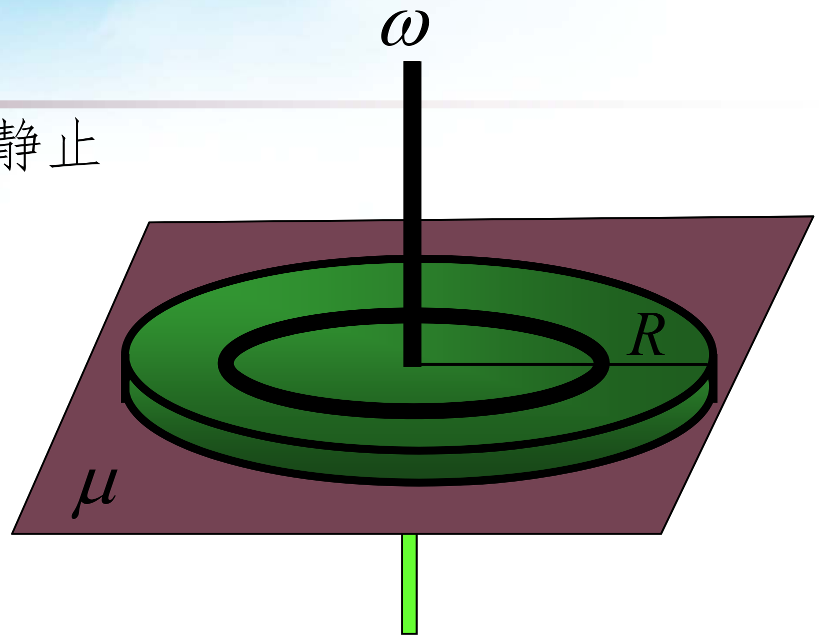
$$\beta=\frac{M}{J}=\frac{1}{2}mgl\cos\theta\frac{3}{ml^2}=\frac{3g\cos\theta}{2l}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\int_0^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega=\int_0^{\theta}\frac{3g\cos\theta}{2l}\mathrm{d}\theta \Longrightarrow \omega=\sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$$

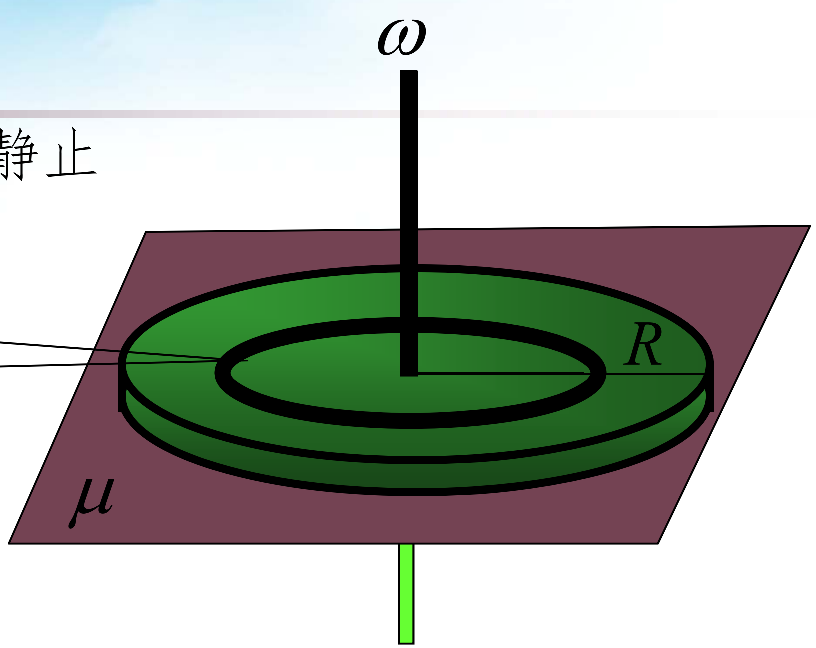
例

圆盘以 ω_0 在桌面上转动,受摩擦力而静止

求 到圆盘静止所需时间



例



圆盘以 ω_0 在桌面上转动,受摩擦力而静止

求 到圆盘静止所需时间

解 取一质元

$$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}s = \sigma \cdot 2\pi r \mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}M = -r\mathrm{d}f = -r \cdot \mu g \mathrm{d}m$$

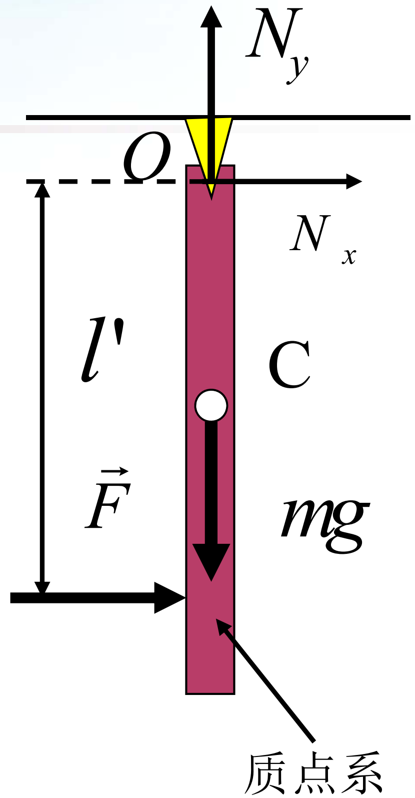
摩擦力矩 $M = \int_0^R \mathrm{d}M = -\frac{2}{3}\mu m g R$

由转动定律 $M = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \Rightarrow -\frac{2}{3}\mu m g R = \frac{1}{2}mR^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$

$$\int_0^t \mathrm{d}t = -\int_{\omega_0}^0 \frac{3R}{4\mu g}\mathrm{d}\omega \Rightarrow t = \frac{3R\omega_0}{4\mu g}$$

例

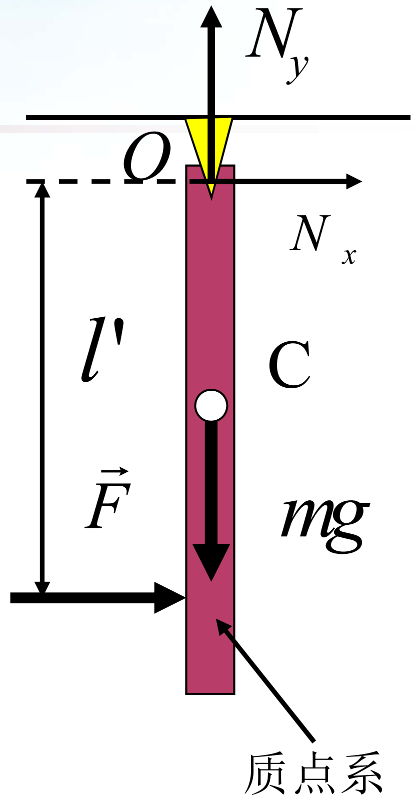
一个刚体系统，如图所示，已知，转动惯量 $J=\frac{1}{3}ml^2$，现有一水平力作用于距轴为 l' 处求 轴对棒的作用力（也称轴反力）。



例

一个刚体系统，如图所示，已知，转动惯量 $J=\frac{1}{3}ml^2$，现有一水平力作用于距轴为 l' 处

求 轴对棒的作用力（也称轴反力）。



解 设轴对棒的作用力为 N $\Longrightarrow$ N_x, N_y

由转动定律 $$Fl' = J\beta$$

由质心运动定理
$$\begin{cases} F + N_x = ma_{cx} = m\frac{l}{2}\beta \\ N_y - mg = ma_{cy} = m\frac{l}{2}\omega^2 = 0 \end{cases}$$

打击中心

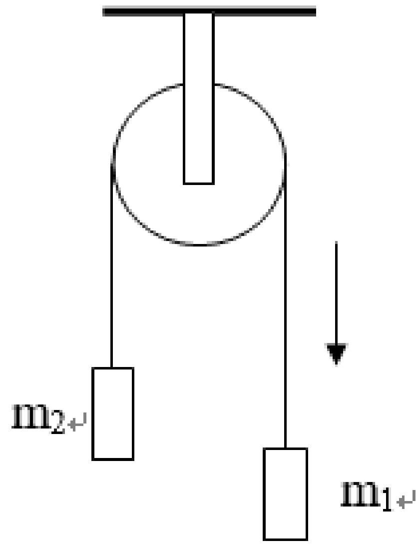
$$\begin{cases} N_x = \frac{ml}{2}\frac{Fl'}{J} - F = F(\frac{3l'}{2l} - 1) \Longrightarrow l' = \frac{2}{3}l \Longrightarrow N_x = 0 \\ N_y = mg \end{cases}$$

质心运动定理与转动定律联用

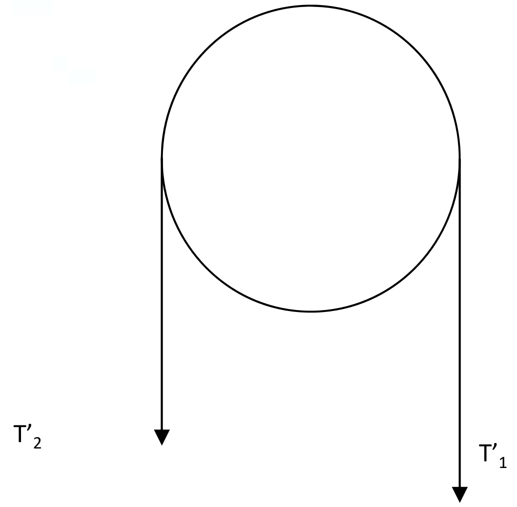
书中例题6.3 (P201)

已知：滑轮半径为R，质量为M，绳子不可伸缩的轻绳，绳子与滑轮间无滑动，轴处无摩擦，两个悬挂物的质量分别为m1，m2。

求：两重物的加速度，滑轮的角加速度，绳中的张力。



解：用隔离物体法分析力，并列出动力学方程。



圆盘：

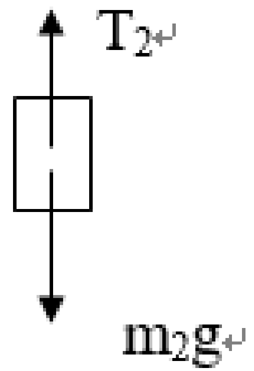
圆盘的转动惯量：$J=1/2MR^2$

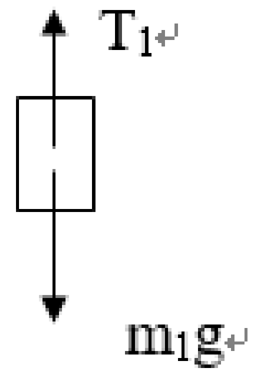
T’1的力矩：R T’1
T’2的力矩：R T’2
圆盘的角加速度：β；β的方向与RT’1方向相同：

$$R T'1 - R T'2 = J\beta$$

m_1:　　$m_1 g - T_1 = m_1 a$

m_2:　　$T_2 - m_2 g = m_2 a$





$T1 = T'1$ ；　$T2 = T'2$

∵绳子与滑轮间无滑动

∴$a = \beta R$ ——牵连关系

解方程得：

$$\beta = \frac{1}{R}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} g$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} g$$

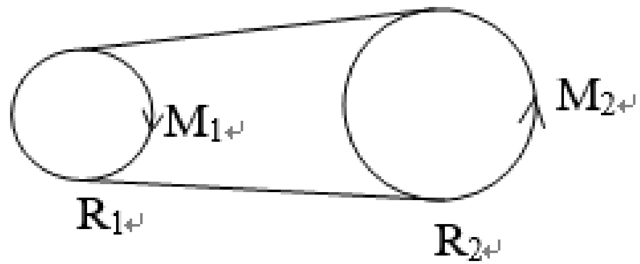
$$T_1 = \frac{2m_1m_2 + \frac{1}{2}Mm_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} g \qquad T_2 = \frac{2m_1m_2 + \frac{1}{2}Mm_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} g$$

中学见过这类问题很多，但滑轮都是轻滑轮，不考虑滑轮的质量，M=0，将其代入上面的方程得：

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \qquad T_1 = T_2 = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2} g$$

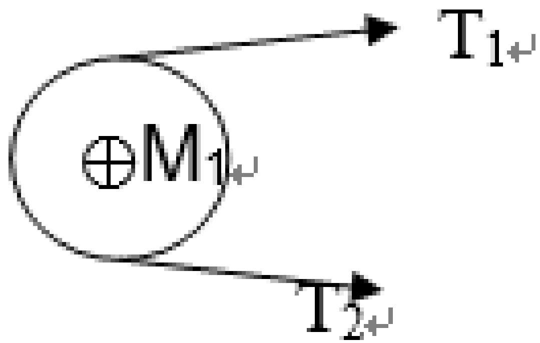
书中例题6.4（P202）

已知：两个皮带轮半径分别为R1，R2，质量分别为m1，m2，分别绕固定轴O1，O2转动，用皮带相连，轮1作用力矩M1，轮2有负载力矩M2，皮带与轮无滑动，轴处无摩擦。



求：轮1的角加速度。

解：隔离物体法分析力：



轮1：

受作用力矩M1，（正方向）

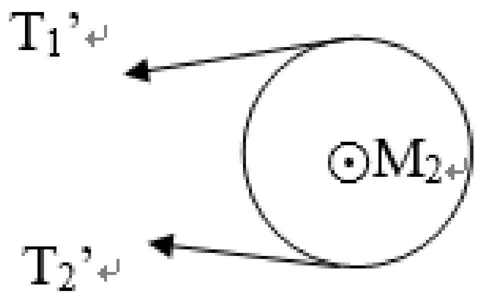
皮带的力矩R_1T_1和R_1T_2

轮的转动惯量$J_1=1/2m_1R_1^2$

$$M_1+T_1R_1-T_2R_1=J_1\beta_1=\frac{1}{2}m_1R_1^2\beta_1$$

轮2：

受作用力矩M2，



皮带的力矩T_1' R_2和T_2' R_2

轮的转动惯量$J_2 = 1/2 m_2 R_2^2$

$$-M_2 + T_2' R_2 - T_1' R_2 = J_2 \beta_2 = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 \beta_2$$

M定为正方向后，力矩的方向与M一致则为“正”反之为“负”。两个轮是牵连在一起运动的，所以存在着牵连关系。皮带与轮没有相对滑动，则：

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \qquad \beta_1 R_1 = \beta_2 R_2$$

不计皮带质量，∴$T_1 = T_1'$， $T_2 = T_2'$；

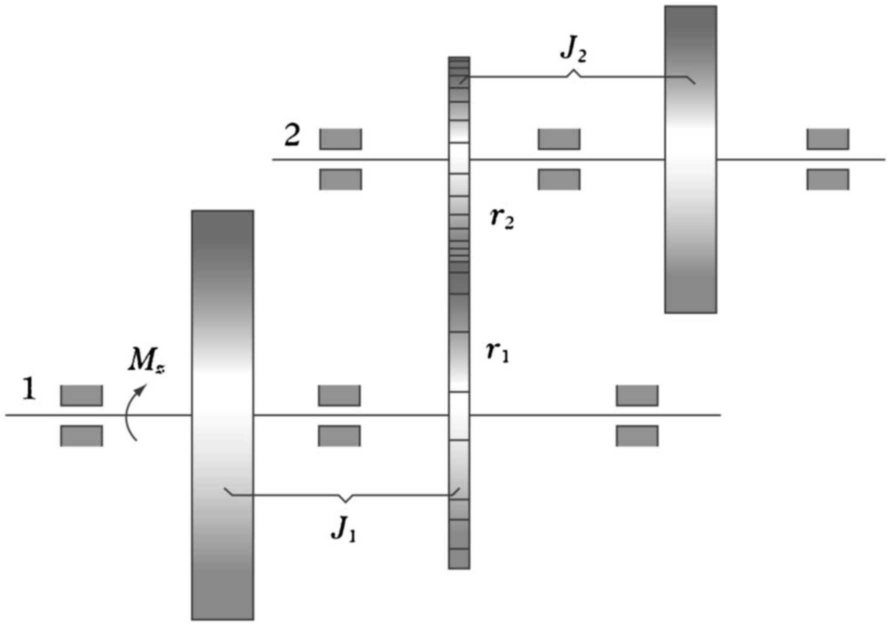
解方程得：

$$\beta_1 = \frac{2(R_2 M_1 - R_1 M_2)}{(m_1 + m_2) R_1^2 R_2}$$

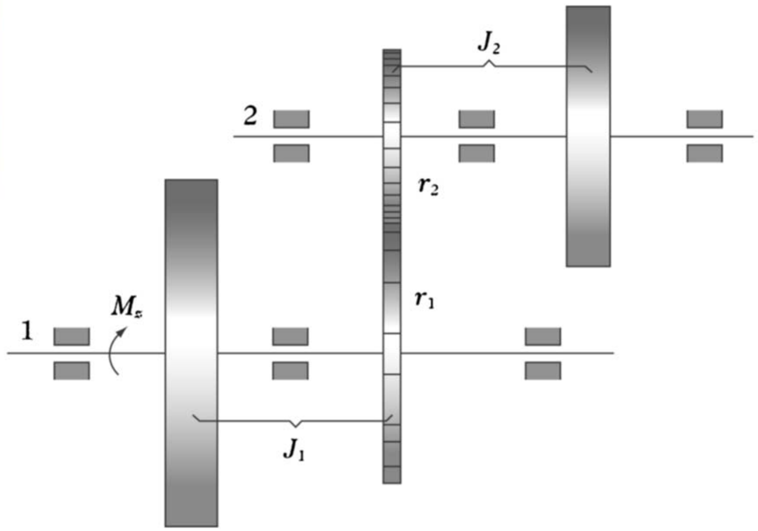
书中例题6.5（P203）

已知：飞轮齿轮1绕转轴1的转动惯量J_1＝98.0kgm^2，飞轮齿轮2绕转轴2的转动惯量J_2=78.4kgm^2，两齿轮咬合传动，齿数比Z_1：Z_2＝3：2，r_1＝10cm，轴1从静止在10s匀加速到1500 r/min,

求：加在轴1上的力矩M和齿轮间的相互作用力Q。



解：飞轮1受到的力矩：M_z 和 r_1Q，角加速度：β1



动力学方程： $M_z - Qr_1 = J_1\beta_1$

飞轮2受到的力矩： $Q'r_2$，角加速度：β_2

$$Q'r_2 = J_2\beta_2$$

牵连关系： $\beta_1 r_1 = \beta_2 r_2$；$r_1/r_2 = Z_1/Z_2$

Nankai University

$$M=\left[J_1+\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 J_2\right]\beta_1$$

解方程得：

$$Q=\frac{J_2}{J_1}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2\beta_1$$

将具体数值代入：

$$\beta_1=\left(\frac{1500}{60}\right)\times 2\pi\times\frac{1}{10}=5\pi(s^{-2})$$

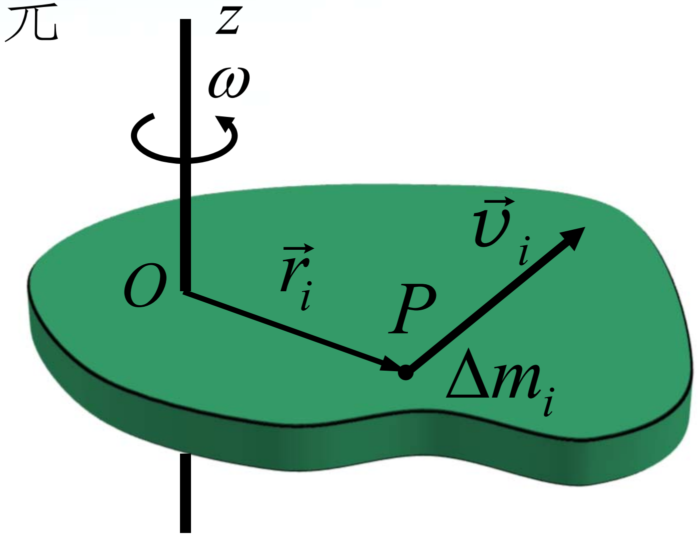
$$M=\left(98.0+78.4\times\frac{9}{4}\right)\times 5\pi=4.31\times 10^3(N\cdot m)$$

$$Q=\left(\frac{78.4}{0.1}\right)\times\left(\frac{9}{4}\right)\times 5\pi=27.7\times 10^3(N)$$

§ 6.2 绕定轴转动刚体的动能 动能定理

一. 转动动能　　设系统包括有 N 个质量元

$$\begin{cases} \Delta m_1, \Delta m_2, \ldots\ldots, \Delta m_i, \ldots\ldots, \Delta m_N \\ \vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots\ldots \vec{r}_i, \ldots\ldots \vec{r}_N \\ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots\ldots, \vec{v}_i, \ldots\ldots \vec{v}_N \end{cases}$$



取 Δm_i ,其动能为

$$E_{ki} = \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2 \omega^2$$

各质量元速度不同，
但角速度相同

刚体的总动能

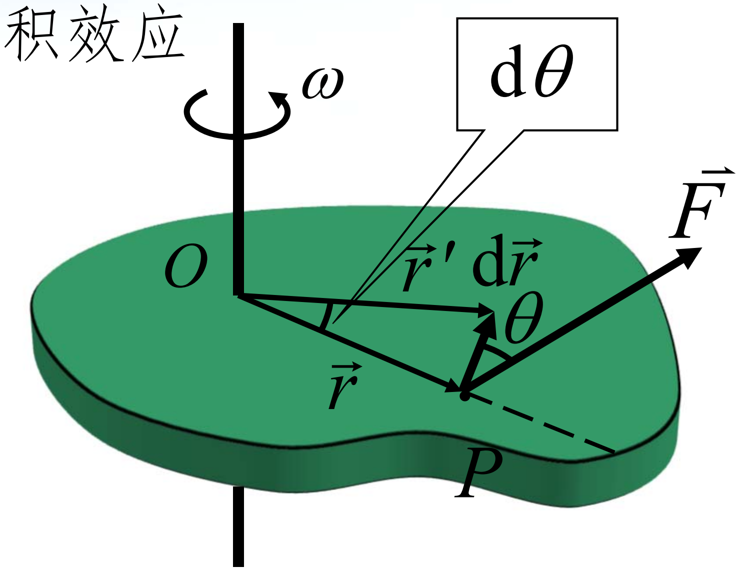
$$E_k = \sum E_{ki} = \sum \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum \Delta m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$$

结论　绕定轴转动刚体的动能等于刚体对转轴的转动惯量与其角速度平方乘积的一半

二. 力矩的功

力的累积过程——力矩的空间累积效应

- 功的定义



$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = F\cos\theta \mathrm{d}s$$

$$= F\cos\theta r \mathrm{d}\theta$$

$$= F_\tau r \mathrm{d}\theta$$

$$= M\,\mathrm{d}\theta$$

$$M_z(F) = F_\perp h = F_\tau r$$

力矩作功的微分形式

- 对一有限过程

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta \text{（积分形式）} \xrightarrow{\text{若 } M = C} A = M(\theta_2 - \theta_1)$$

讨论

(1) 合力矩的功 $A=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sum_i M_i \mathrm{d}\theta=\sum_i\int_{\theta_1}^{\theta_2} M_i \mathrm{d}\theta=\sum_i A_i$

(2) 力矩的功就是力的功。

(3) 内力矩作功之和为零。

三. 转动动能定理 —— 力矩功的效果

$$\mathrm{d}A = M\mathrm{d}\theta = (J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t})\mathrm{d}\theta = J\omega\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\frac{1}{2}J\omega^2)$$

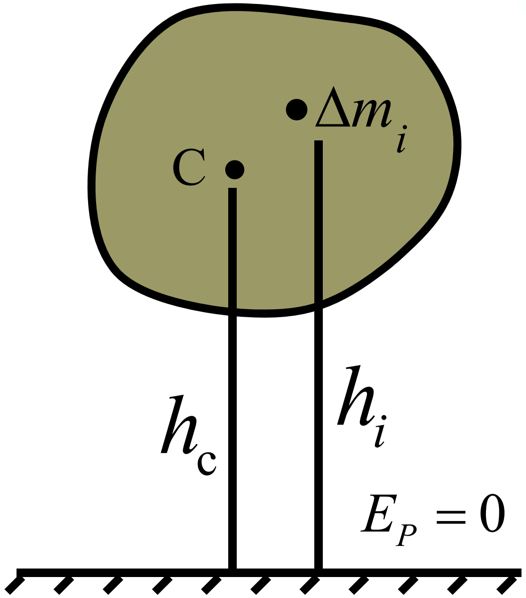
对于一有限过程

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}A=\int_{\omega_1}^{\omega_2}\mathrm{d}(\frac{1}{2}J\omega^2)=\frac{1}{2}J{\omega_2}^2-\frac{1}{2}J{\omega_1}^2=\Delta E_k$$

绕定轴转动刚体在任一过程中动能的增量，等于在该过程中作用在刚体上所有外力所作功的总和。这就是绕定轴转动刚体的——动能定理

- 刚体的机械能 $E = E_K + E_P$

刚体重力势能 $E_p = \sum \Delta m_i g h_i$



$$= mg\frac{\sum \Delta m_i h_i}{m} = mgh_C$$

质心的势能

刚体的机械能 $$\boxed{E = \frac{1}{2}J\omega^2 + mgh_C}$$

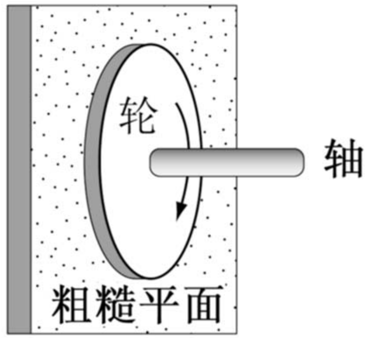
- 定轴转动中只有保守力作功的刚体，刚体的机械能守恒

$$\boxed{\frac{1}{2}J\omega^2 + mgh_C = \mathrm{C}}$$

对于包括刚体的系统，只有保守力作功，功能原理和机械能守恒定律仍成立

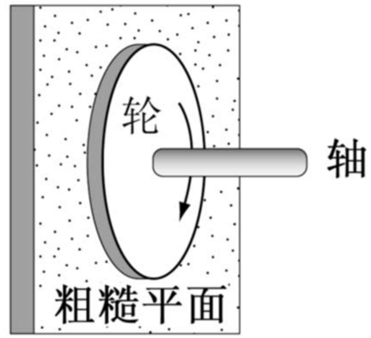
书中习题6.13（p227）（重点）

以力F将一块粗糙平面均匀压在轮上，平面与轮之间的滑动摩擦系数为μ，轮为匀质圆盘，半径为R，质量为M，轴处摩擦力不计，轮的初角速度为ω_0，问：轮转过多少度时即停止转动。



书中习题6.13（p227）（重点）

以力F将一块粗糙平面均匀压在轮上，平面与轮之间的滑动摩擦系数为μ，轮为匀质圆盘，半径为R，质量为M，轴处摩擦力不计，轮的初角速度为ω_0，问：轮转过多少度时即停止转动。



解：盘面单位面积上的压力为：

$$\frac{F}{\pi R^2}$$

以轮的轴心为圆心，半径为r，宽度dr的环所受的压力为：

$$dF = \frac{F}{\pi R^2} \bullet 2\pi r \bullet dr$$

环所受的摩擦力为：

$$df = \mu dF = \mu \frac{F}{\pi R^2} \bullet 2\pi r \bullet dr$$

对转轴的力矩为：

$$dM = rdf = \mu \frac{F}{R^2} 2r^2 dr$$

整个圆盘所受摩擦力矩为： $$M = \int_0^R 2\mu \frac{F}{R^2} r^2 dr = \frac{2}{3}\mu FR$$

由转动能定理：

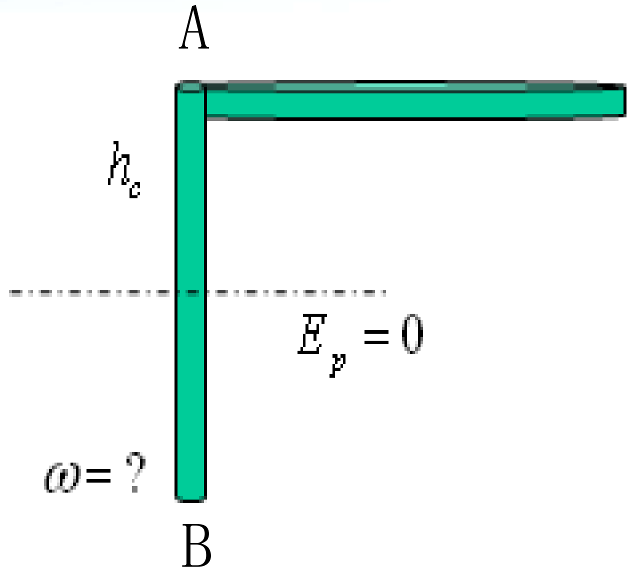
$$M\varphi = \frac{1}{2} J\omega_0^2$$

$$\varphi = \frac{3mR\omega_0^2}{8\mu F}$$

书中例题6.7(p.209)

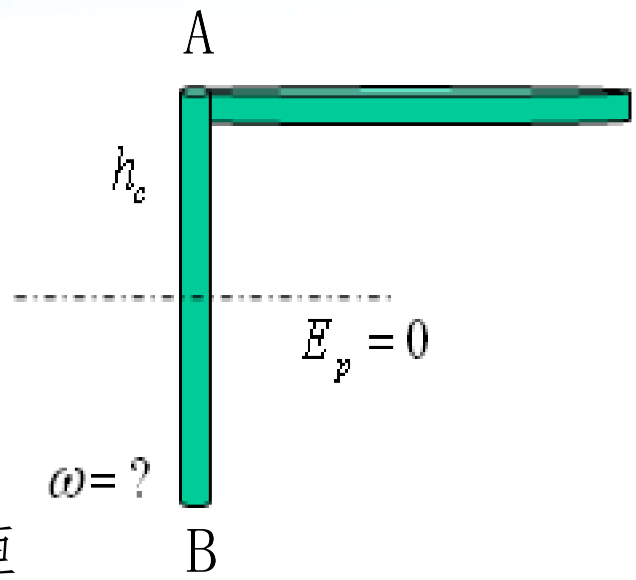
一长为l，质量为m的匀质细杆AB，挂于A处，轴处无摩擦，初始时杆铅直静止。

求：使杆由铅值位置刚好转至水平位置所需要的最小初角速度。



书中例题6.7(p.209)

一长为l，质量为m的匀质细杆AB，挂于A处，轴处无摩擦，初始时杆铅直静止。
求：使杆由铅值位置刚好转至水平位置所需要的最小初角速度。



解：轴处无摩擦，系统的机械能守恒。

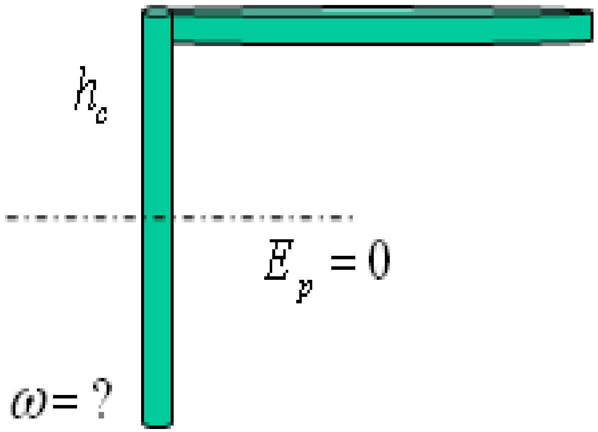
	动能	势能
初：	$1/2\ J_z\omega_0^2$	0
终：	0	mgl/2

动能转换成势能：

$$\frac{1}{2} J_z\omega_0^2 = mgl/2$$

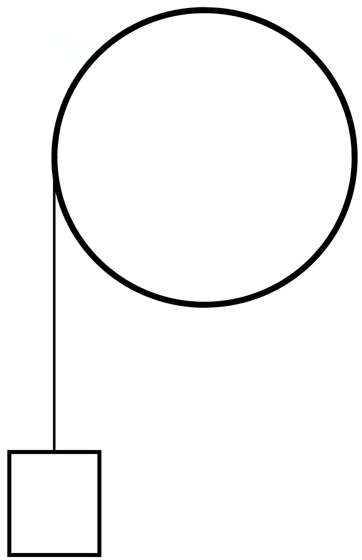
$$J_z = \frac{1}{3}ml^2$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$



书中例题6.8(p.209)

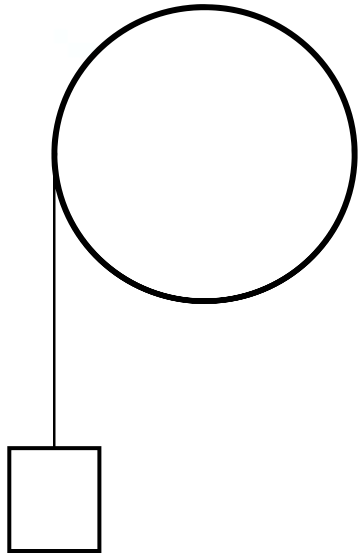
圆盘滑轮质量M，半径R，绕轻绳，绳的另一端系一质量m的物体，轴无摩擦，开始时系统静止。
求：物体下降s时，滑轮的角速度和角加速度。



书中例题6.8(p.209)

圆盘滑轮质量M，半径R，绕轻绳，绳的另一端系一质量m的物体，轴无摩擦，开始时系统静止。

求：物体下降s时，滑轮的角速度和角加速度。



解：轴无摩擦，系统机械能守恒

	m动能	m势能	M动能
初：	0	mgs	0
终：	$1/2\ mv^2$	0	$1/2\ J_z\omega^2$

牵连关系：$v=\omega R$，$J_z=1/2\ MR^2$

$mgs = 1/2\ mv^2 + 1/2\ J_z\omega^2 = 1/2\ mR^2\omega^2 + 1/4MR^2\omega^2$

$$\omega = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{mgs}{2m+M}}$$

求角加速度：

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{R}\sqrt{\frac{mgs}{2m+M}}\right) = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{mg}{2m+M}}\frac{d}{dt}\sqrt{s}$$

$$= \frac{2}{R}\sqrt{\frac{mg}{2m+M}}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{s}}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{mg}{2m+M}}\frac{1}{\sqrt{s}}\omega R$$

其中 $ds/dt = v = \omega R$，并将ω值代入得：

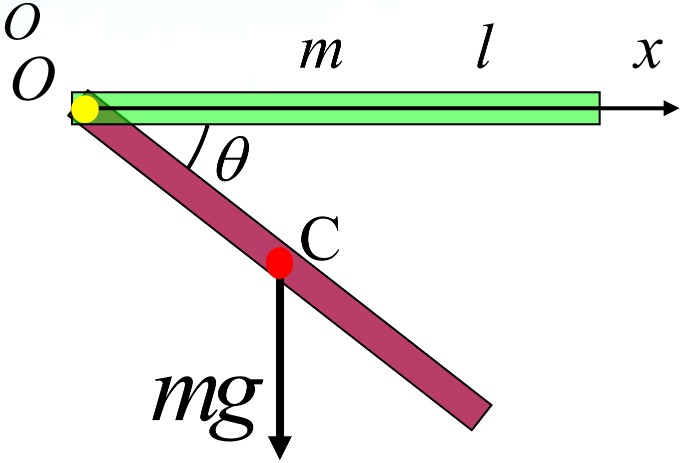
$$\beta = \sqrt{\frac{mg}{2m+M}}\frac{2}{R}\sqrt{\frac{mgs}{2m+M}}\frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{2mg}{R(2m+M)}$$

例

一根长为 l，质量为 m 的均匀细直棒，可绕轴 O 在竖直平面内转动，初始时它在水平位置

求 它由此下摆 θ 角时的 ω

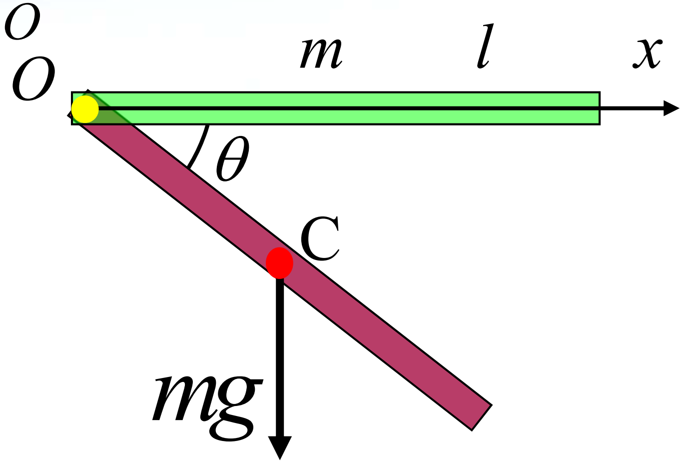
此题也可用机械能守恒定律方便求解



例

一根长为 l，质量为 m 的均匀细直棒，可绕轴 O 在竖直平面内转动，初始时它在水平位置

求 它由此下摆 θ 角时的 ω



解

$$M = \frac{1}{2} mgl\cos\theta$$

由动能定理

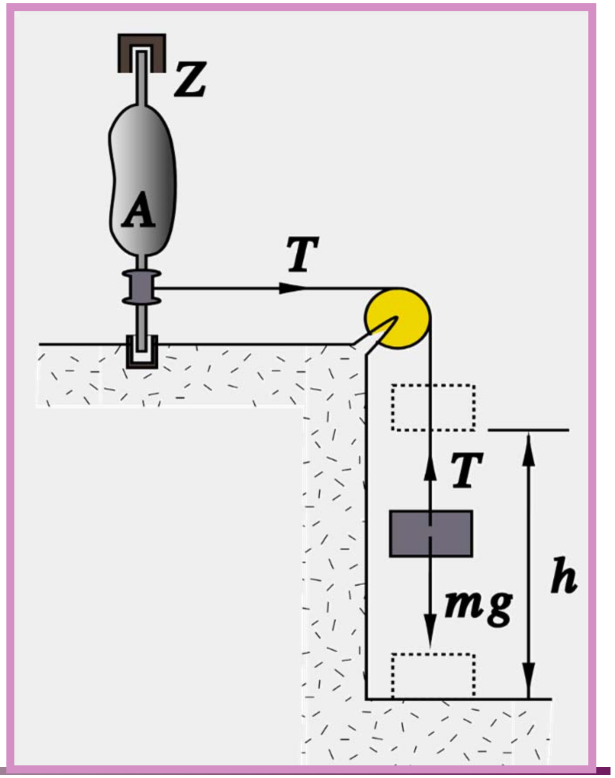
$$A = \int_0^\theta M \mathrm{d}\theta = \int_0^\theta \frac{l}{2} mg\cos\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{lmg}{2}\sin\theta - 0 = \frac{1}{2} J\omega^2 - 0 \qquad J = \frac{1}{3} ml^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{3g\sin\theta}{l} \Rightarrow \omega = \left(\frac{3g\sin\theta}{l}\right)^{1/2}$$

例

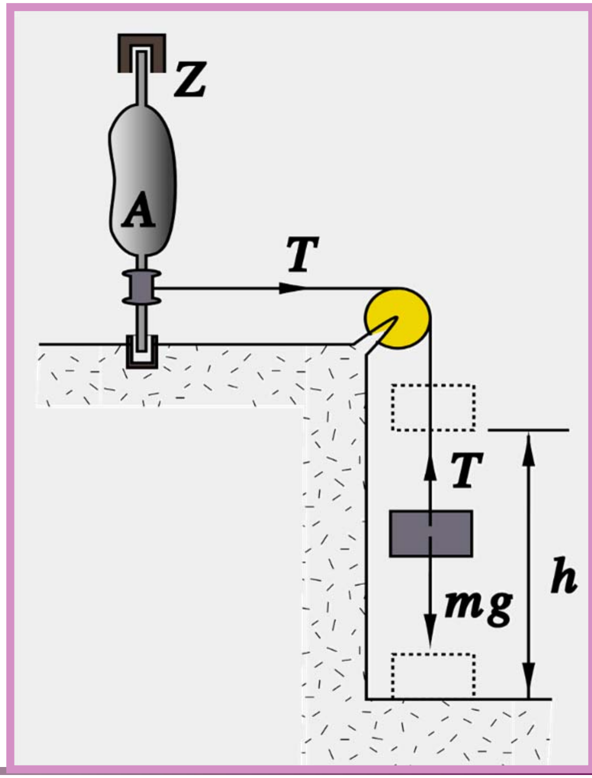
图示装置可用来测量物体的转动惯量。待测物体A装在转动架上，转轴Z上装一半径为r的轻鼓轮，绳的一端缠绕在鼓轮上，另一端绕过定滑轮悬挂一质量为 m 的重物。重物下落时，由绳带动被测物体 A 绕 Z 轴转动。今测得重物由静止下落一段距离 h，所用时间为t，



求 物体A对Z轴的转动惯量Jz。设绳子不可伸缩，绳子、各轮质量及轮轴处的摩擦力矩忽略不计。

例

图示装置可用来测量物体的转动惯量。待测物体A装在转动架上，转轴Z上装一半径为r的轻鼓轮，绳的一端缠绕在鼓轮上，另一端绕过定滑轮悬挂一质量为m的重物。重物下落时，由绳带动被测物体A绕Z轴转动。今测得重物由静止下落一段距离h，所用时间为t，



求 物体A对Z轴的转动惯量J_z。设绳子不可伸缩，绳子、各轮质量及轮轴处的摩擦力矩忽略不计。

解 分析（机械能）：$E_{P1}=0 \quad E_{k1}=0$

$$E_{P2}=-mgh$$

$$E_{k2}=mv^2/2+J_Z\omega^2/2$$

$$=v^2(mr^2+J_Z)/(2r^2)$$

机械能守恒 $-mgh+\upsilon^2(mr^2+J_Z)/(2r^2)=0$

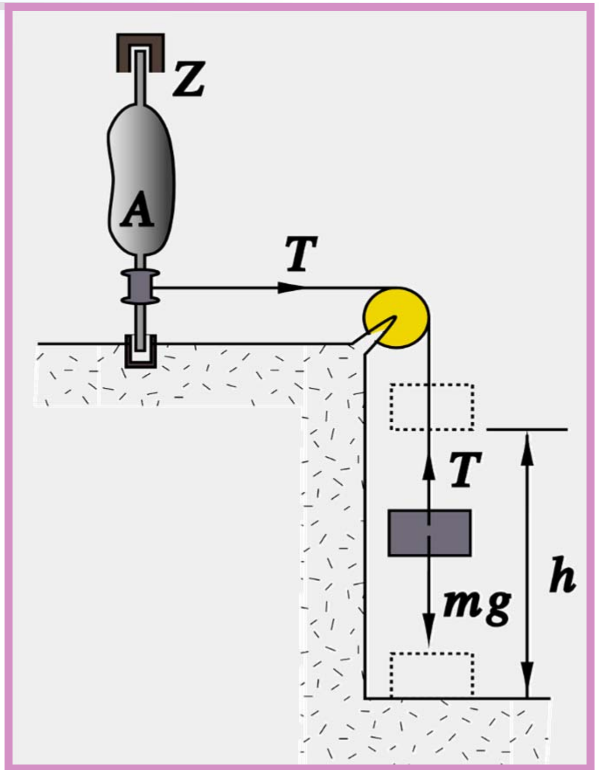
$$mgh=\frac{\upsilon^2}{2r^2}(mr^2+J_Z)$$

$$mg\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=2\upsilon\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2r^2}(mr^2+J_Z)$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\upsilon,\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}=a$$

$$a=\frac{mgr^2}{mr^2+J_Z}=\text{常量}$$

$$h=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\frac{mgr^2}{mr^2+J_Z}t^2 \Longrightarrow J_Z=mr^2(\frac{gt^2}{2h}-1)$$



若滑轮质量不可忽略呢？

§6.3 动量矩和动量矩守恒定律

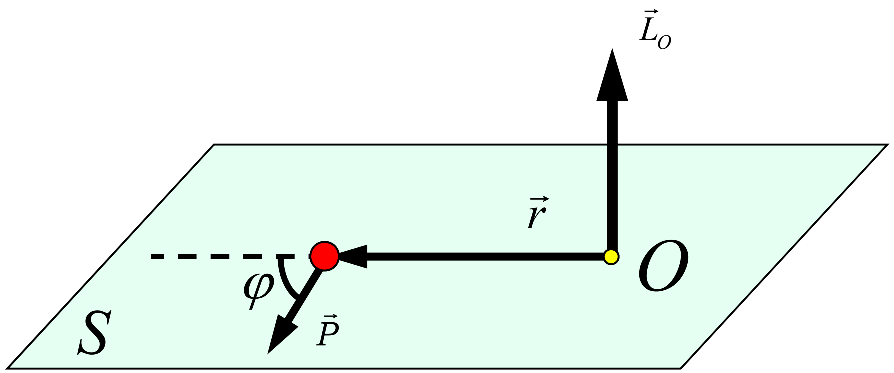
一. 质点动量矩 (角动量)定理和动量矩守恒定律

1. 质点的动量矩(对O点)

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

其大小

$$L_O = rp\sin\phi = mrv\sin\phi$$



惯性参照系

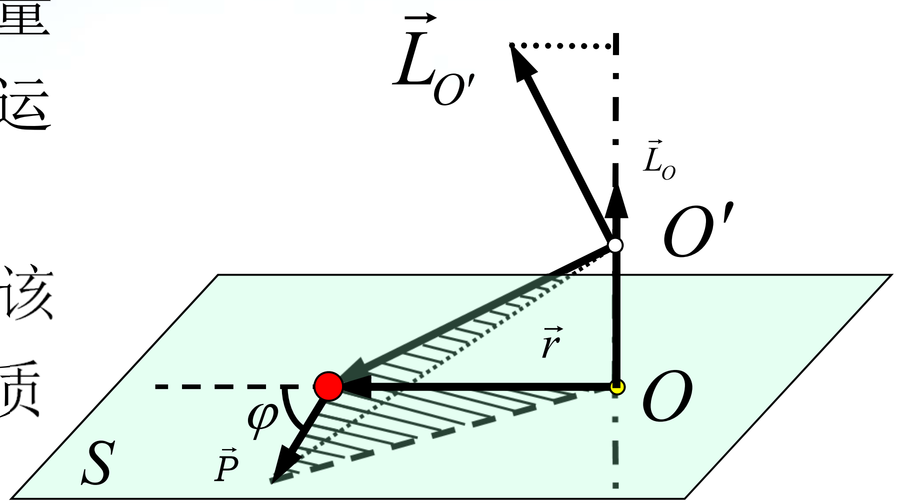
特例：质点作圆周运动 $L = rp = mrv$

说明

(1) 质点的动量矩与质点的动量及位矢(取决于固定点的选择)有关

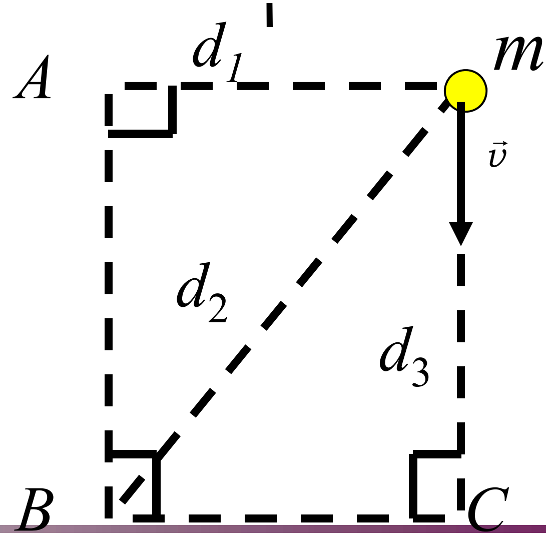
(2) 当质点作平面运动时，质点对运动平面内某参考点O 的动量矩也称为质点对过O 垂直于运动平面的轴的动量矩

(3) 质点对某点的动量矩,在通过该点的任意轴上的投影就等于质点对该轴的动量矩



例 一质点m，速度为v，如图所示，A、B、C 分别为三个参考点,此时m 相对三个点的距离分别为d_1、d_2、d_3

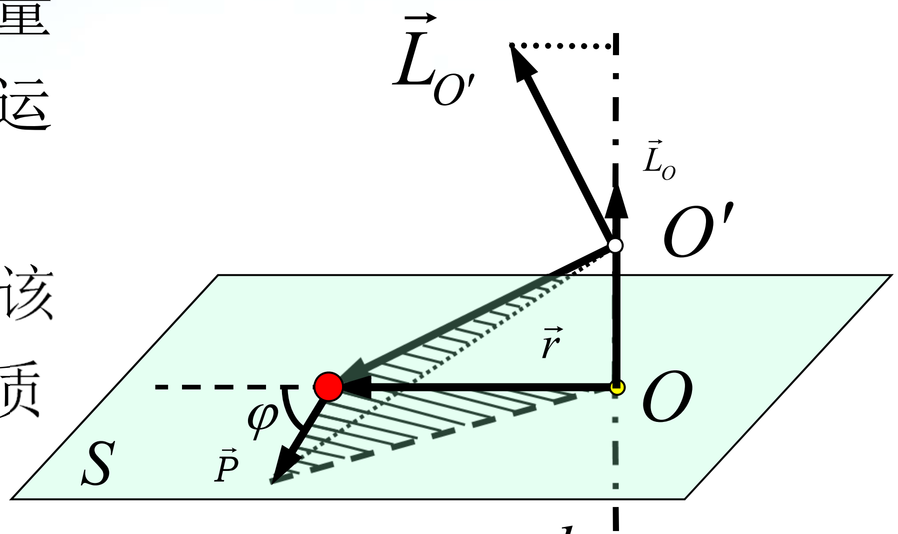
求 此时刻质点对三个参考点的动量矩



南開大學 Nankai University

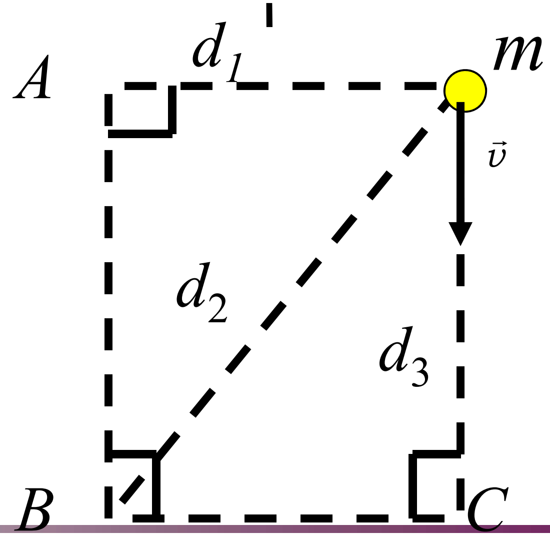
(2) 当质点作平面运动时，质点对运动平面内某参考点O 的动量矩也称为质点对过O 垂直于运动平面的轴的动量矩

(3) 质点对某点的动量矩,在通过该点的任意轴上的投影就等于质点对该轴的动量矩



例　一质点m，速度为υ，如图所示，A、B、C 分别为三个参考点,此时m 相对三个点的距离分别为d_1、d_2、d_3

求　此时刻质点对三个参考点的动量矩



解　$L_A = d_1 m\upsilon$　$L_B = d_1 m\upsilon$　$L_C = 0$

2. 质点的动量矩定理

$$\boxed{\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}} \qquad \boxed{\vec{v} \times m\vec{v} = 0}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times m\vec{v}$$

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow \vec{M}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{L}$$ (质点动量矩定理的微分形式)

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} \cdot \mathrm{d}t = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$ (质点动量矩定理的积分形式)

质点所受合力矩的冲量矩等于质点的动量矩的增量

- 说明

(1) 冲量矩是质点动量矩变化的原因

(2) 质点动量矩的变化是力矩对时间的积累结果

3. 质点动量矩守恒定律

若 $\vec{M}=0$，则 $\vec{L}=$常矢量 ——质点动量矩守恒定律

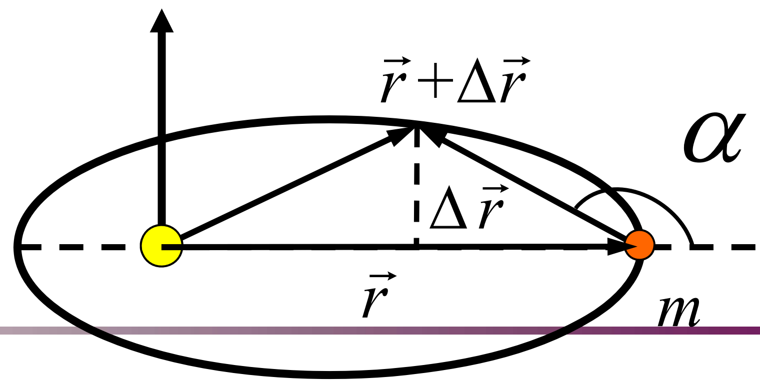
讨论

(1) 动量矩守恒定律是物理学的基本定律之一，它不仅适用于宏观体系，也适用于微观体系，且在高速低速范围均适用

(2) 通常对有心力：$\vec{F}$ 过O点,M=0,动量矩守恒

例如 由动量矩守恒定律可导出行星运动的开普勒第二定律

行星对太阳的位矢在相等的时间内扫过相等的面积



3. 质点动量矩守恒定律

若 $\vec{M}=0$，则 $\vec{L}=$常矢量 ——质点动量矩守恒定律

✦ 讨论

(1) 动量矩守恒定律是物理学的基本定律之一，它不仅适用于宏观体系，也适用于微观体系，且在高速低速范围均适用

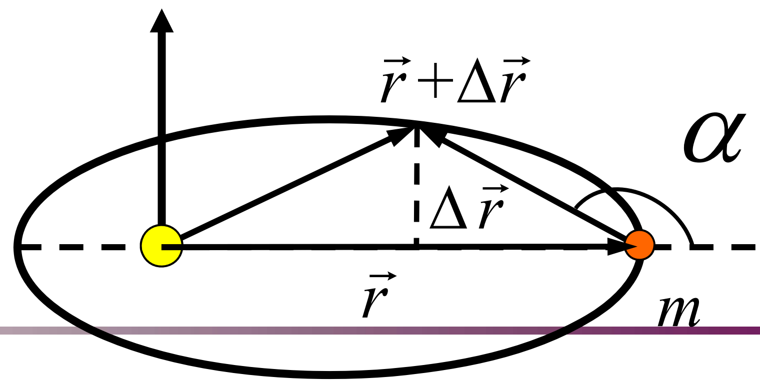
(2) 通常对有心力：$\vec{F}$ 过O点,M=0,动量矩守恒

例如 由动量矩守恒定律可导出行星运动的开普勒第二定律

行星对太阳的位矢在相等的时间内扫过相等的面积

$$L = m\upsilon r\sin\alpha = m\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}r\sin\alpha$$

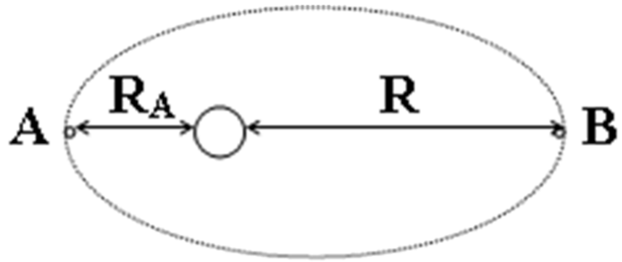
$$=2m\frac{\frac{1}{2}|\Delta\vec{r}|r\sin(\alpha)}{\Delta t}=2m\frac{\frac{1}{2}|\Delta\vec{r}|r\sin(\pi\text{-}\alpha)}{\Delta t}=2m\frac{\Delta S}{\Delta t}$$



例题

人造卫星在椭圆轨道上运行，地球中心可看作固定点，近地点离地面的距离为439km，远地点离地面的距离为2384km，近地点速度为8.12km/s，地球半径为6370km。

求：卫星在远地点的速度v_B＝？

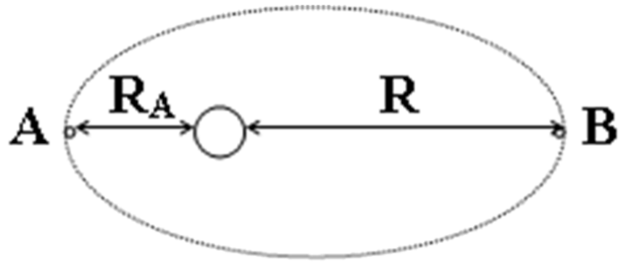


例题

人造卫星在椭圆轨道上运行，地球中心可看作固定点，近地点离地面的距离为439km，远地点离地面的距离为2384km，近地点速度为8.12km/s，地球半径为6370km。

求：卫星在远地点的速度v_B＝？

解：以卫星为研究对象，
卫星受地球引力作用，该力
指向地球中心，对地球中心而言
，
该力的力矩为0，卫星对地球中心的动量矩保持不变。



∴ $$mv_A R_A = mv_B R_B$$

$$v_B = v_A R_A / R_B$$

$R_A = 439+6370 = 6809$ (km)

$R_B = 2384+6370 = 8754$ (km)

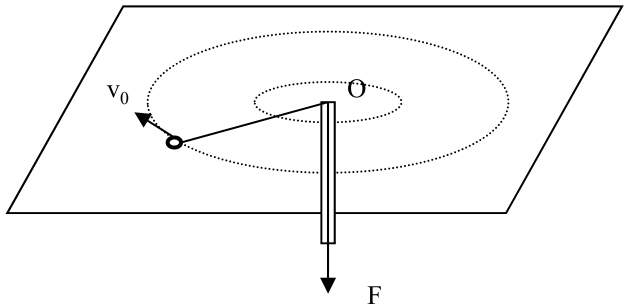
代入数值得： $v_B = 6.32$ (km/s)

由此题看到，卫星在近地点速度快（8.12km/s），远地点速度慢（6.32 km/s），两点处的动量不同，但动量矩相同。

例题6.12（P.215）（重点）

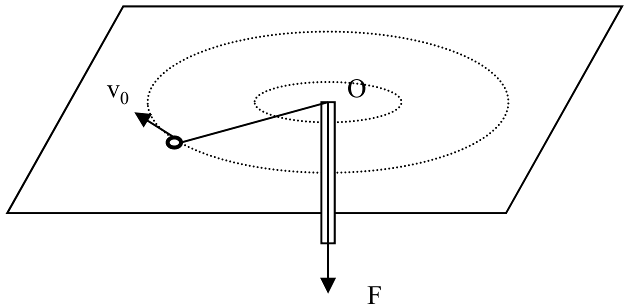
质量为m的小球系在绳子的一端，绳穿过一铅直套管，使小球限制在一光滑水平面上运动。先使小球以速度v0绕管心作半径为r0的圆周运动，然后向下拉绳，使小球轨迹最后成为半径为r的圆。

试求：小球距管心r时速度v的大小，绳从r0缩短到r过程中，力F所作的功。



例题6.12（P.215）（重点）

质量为m的小球系在绳子的一端，绳穿过一铅直套管，使小球限制在一光滑水平面上运动。先使小球以速度v0绕管心作半径为r0的圆周运动，然后向下拉绳，使小球轨迹最后成为半径为r的圆。



试求：小球距管心r时速度v的大小，绳从r0缩短到r过程中，力F所作的功。

解：绳子对小球的作用力始终通过圆心O，为有心力，该力对O点产生的力矩为0，因此，在整个过程中，质点的动量矩守恒。

$$mv_0r_0 = mvr$$

$\therefore$ $$v = v_0 r_0 / r$$

随着半径减小，质点的速度增加，动能增加。动能增加的原因是力F对小球作了功。

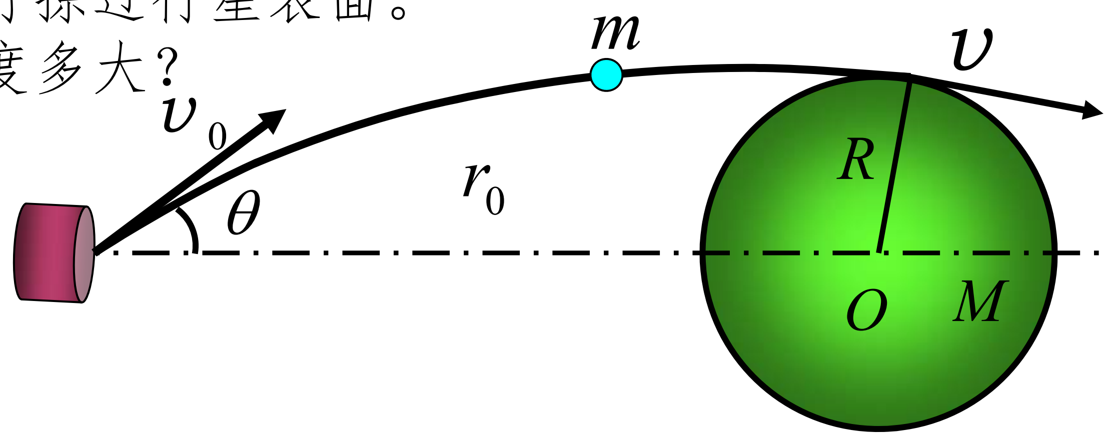
由于系统没有耗散力，作功的结果是使动能增加。

$$A = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - 1\right]$$

例

发射一宇宙飞船去考察一 质量为 M 、半径为 R 的行星，当飞船静止于空间距行星中心 $4R$ 时，以速度 v_0 发射一质量为 m 的仪器。要使该仪器恰好掠过行星表面。

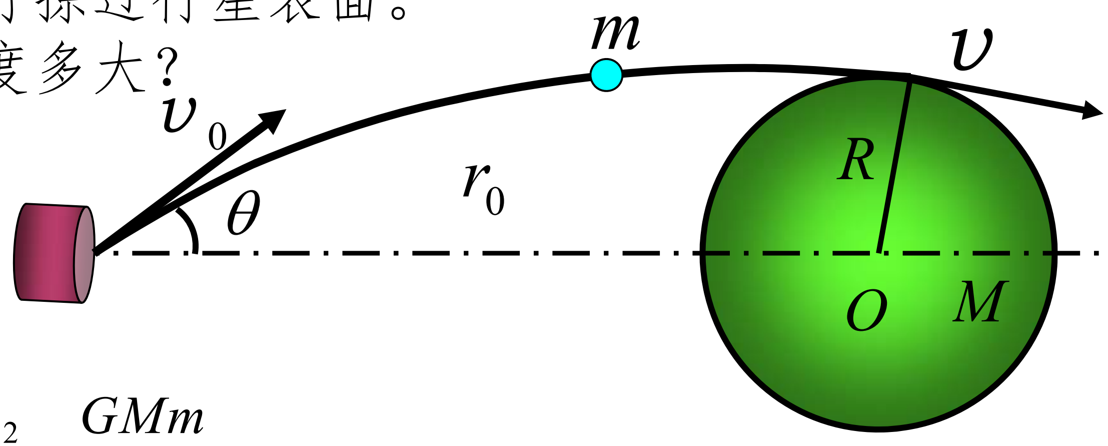
求 θ 角及着陆滑行的初速度多大？



例

发射一宇宙飞船去考察一 质量为 M 、半径为 R 的行星，当飞船静止于空间距行星中心 $4R$ 时，以速度 υ_0 发射一质量为 m 的仪器。要使该仪器恰好掠过行星表面。

求 θ 角及着陆滑行的初速度多大？



解 引力场（有心力）

系统的机械能守恒

质点的动量矩守恒

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{GMm}{R} \\ m\upsilon_0 r_0 \sin\theta = m\upsilon R \end{cases} \Rightarrow \upsilon = \frac{\upsilon_0 r_0 \sin\theta}{R} = 4\upsilon_0 \sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{1}{4}\left(1+\frac{3GM}{2R\upsilon_0^2}\right)^{1/2} \qquad \upsilon = \upsilon_0\left(1+\frac{3GM}{2R\upsilon_0^2}\right)^{1/2}$$

二. 质点系的动量矩定理和动量矩守恒定律

1. 质点系的动量矩

质点系对参考点O的动量矩就是质点系所有质点对同一参考点的动量矩的矢量和

$$\vec{L}_O=\sum_i\vec{L}_{O\,i}=\sum_i\left(\vec{r}_i\times m_i\vec{\upsilon}_i\right)$$

记质点系质心C的位置矢量为 $\vec{r}_C$，速度为 $\vec{\upsilon}_C$。对第i个质点，设其相对于质心的位置矢量为 $\vec{r}'_i$ ，速度为 $\vec{\upsilon}'_i$ ，则

$$\vec{r}_i=\vec{r}_C+\vec{r}'_i \qquad \vec{\upsilon}_i=\vec{\upsilon}_C+\vec{\upsilon}'_i$$

$$\vec{L}_O=\sum\left[\left(\vec{r}_C+\vec{r}'_i\right)\times m_i\vec{\upsilon}_i\right]$$

$$=\vec{r}_C\times\sum m_i\vec{\upsilon}_i+\sum\vec{r}'_i\times m_i\left(\vec{\upsilon}_C+\vec{\upsilon}'_i\right)$$

质心运动定理

$$= \vec{r}_C \times M\vec{\upsilon}_C + \sum m_i \vec{r}'_i \times \vec{\upsilon}_C + \sum (\vec{r}'_i \times m_i \vec{\upsilon}'_i)$$

$$= \vec{r}_C \times M\vec{\upsilon}_C + \sum (\vec{r}'_i \times m_i \vec{\upsilon}'_i)$$

$$\vec{L}_O = \vec{r}_C \times M\vec{\upsilon}_C + \sum (\vec{r}'_i \times m_i \vec{\upsilon}'_i)$$

说明

(1) 质点系的动量矩(角动量)可分为两项

第一项：只包含系统的总质量、质心的位矢和质心的速度

——轨道角动量

第二项：是质点系各质点相对于质心的角动量的矢量和

——自旋角动量

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{轨道} + \vec{L}_{自旋}$$

$$\vec{L}_{轨道} = \vec{r}_C \times M\vec{\upsilon}_C \qquad \vec{L}_{自旋} = \sum (\vec{r}'_i \times m_i \vec{\upsilon}'_i)$$

(2) 质点系的轨道角动量等于质点系的全部质量集中于质心处的一个质点对于参考点的角动量。它反映了整个质点系绕参考点的旋转运动

(3) 质点系的自旋角动量是以质心为参考点的角动量。与质心运动无关。它只代表系统的内禀性质

2. 质点系的动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_{外} \Longrightarrow \vec{M}_{外}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{L}$$

微分形式

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{外}\,\mathrm{d}t = \int_{\vec{L}_1}^{\vec{L}_2} \mathrm{d}\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \Delta\vec{L}$$

积分形式

质点系所受合外力矩的冲量矩等于质点系动量矩的增量

说明 质点系的内力矩不能改变质点系的动量矩

南開大學 Nankai University

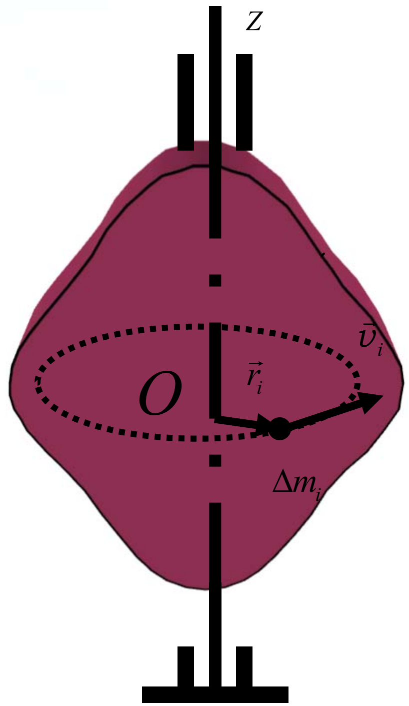
3. 质点系动量矩守恒定律

对质点系 $\vec{M}_{外}=0 \Longrightarrow \Delta\vec{L}=0$ $\vec{L}$ 为常矢量

如果作用在质点系合外力矩沿某轴的投影为零,则沿此轴动量矩守恒,如 $M_z=0 \Longrightarrow L_Z=$常量

三. 刚体定轴转动的动量矩定理和动量矩守恒定律

1. 刚体定轴转动的动量矩



刚体上任一质点对 Z 轴的动量矩都具有相同的方向

$$L_Z = \sum_i \Delta m_i \upsilon_i r_i = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \omega = J_Z \omega$$

$$L_Z = J_Z \omega$$ (所有质元的动量矩之和)

2. 刚体定轴转动的动量矩定理

由转动定律 $M_z = J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \Rightarrow M_z\mathrm{d}t = J\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(J\omega)$ 动量矩定理微分形式

$$\int_{t_1}^{t_2} M_z\,\mathrm{d}t = \int_{\omega_1}^{\omega_2}\mathrm{d}(J\omega) = J\omega_2 - J\omega_1$$（动量矩定理积分形式）

定轴转动刚体所受合外力矩的冲量矩等于其动量矩的增量

3. 刚体定轴转动的动量矩守恒定律

对定轴转动刚体

$M_z = 0 \Longrightarrow \Delta L = 0$ $J\omega$ 为常量

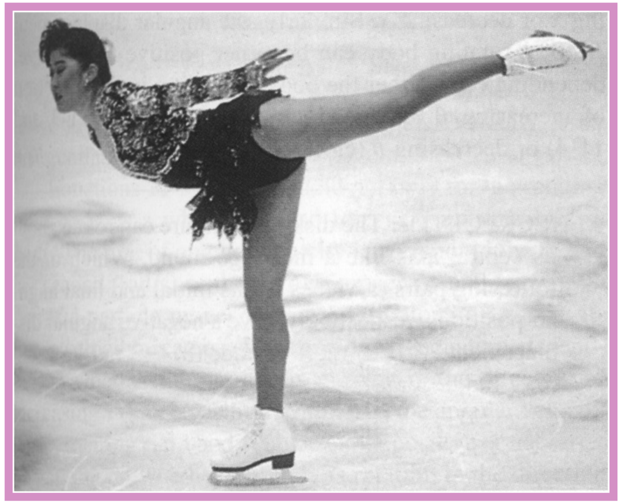
说明

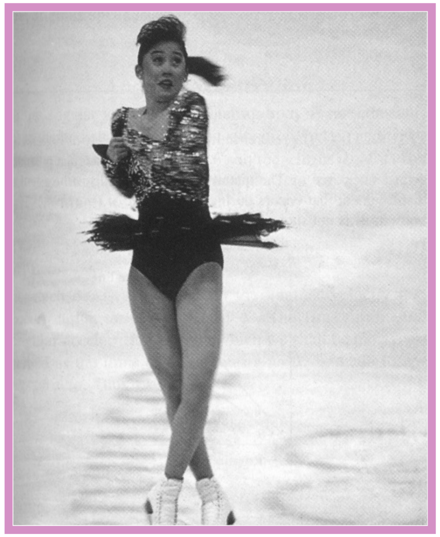
(1) 变形体绕某轴转动时，若其上各点(质元)转动的角速度相同，则变形体对该轴的动量矩

$$\sum m_k r_k^2 \omega = J(t)\omega$$

当变形体所受合外力矩为零时，变形体的动量矩也守恒

$J(t)\,\omega$ 为常量 $\Longrightarrow J(t)\nearrow \ \omega \searrow \quad J(t) \searrow \ \omega \nearrow$





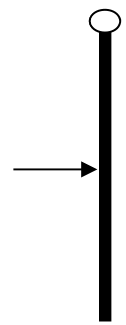
如：花样滑冰　跳水 芭蕾舞
等

书中例题6.13(p.217)

长l，质量M，铅直悬挂，初始处于静止状态，

杆的中心受一冲量I作用，方向与杆垂直。

求冲量作用结束时，杆的角速度。

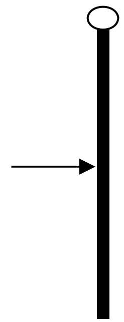


书中例题6.13(p.217)

长l，质量M，铅直悬挂，初始处于静止状态，

杆的中心受一冲量I作用，方向与杆垂直。

求冲量作用结束时，杆的角速度。



解：根据动量矩定理： $$J_z\omega - 0 = \int_{\tau} M_z dt$$

$$J_z\omega = \int_{\tau} F\frac{l}{2}dt = \frac{l}{2}I$$

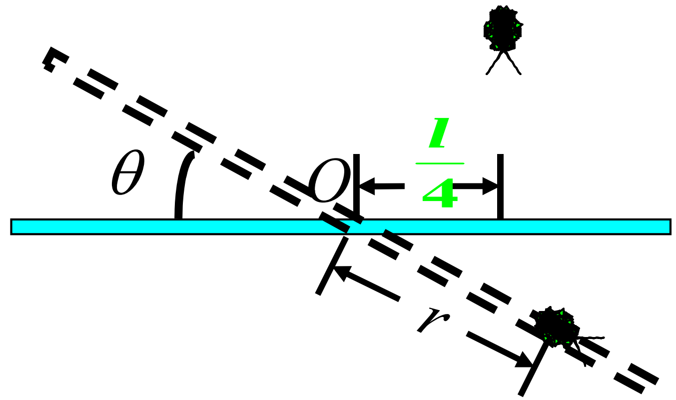
$$J_z = \frac{1}{3}Ml^2$$

$$\omega = \frac{3I}{2Ml}$$

例

一长为 l 的匀质细杆，可绕通过中心的固定水平轴在铅垂面内自由转动，开始时杆静止于水平位置。一质量与杆相同的昆虫以速度 v_0 垂直落到距点 O $l/4$ 处的杆上，昆虫落下后立即向杆的端点爬行，如图所示。若要使杆以匀角速度转动

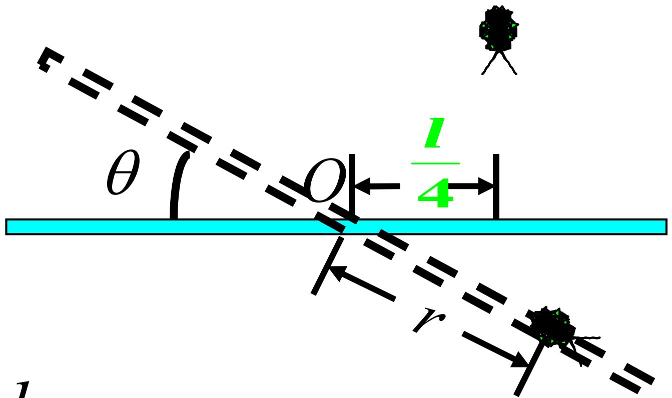
求 昆虫沿杆爬行的速度。



例

一长为 l 的匀质细杆，可绕通过中心的固定水平轴在铅垂面内自由转动，开始时杆静止于水平位置。一质量与杆相同的昆虫以速度 v_0 垂直落到距点 O $l/4$ 处的杆上，昆虫落下后立即向杆的端点爬行，如图所示。若要使杆以匀角速度转动

求 昆虫沿杆爬行的速度。



解 昆虫落到杆上的过程为完全非弹性碰撞,对于昆虫和杆构成的系统，合外力矩为零，动量矩守恒

$$mv_0\frac{l}{4}=\left(\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{4}\right)^2\right)\omega$$

$$\omega=\frac{12}{7}\frac{v_0}{l}$$

转动定律 $M_z = \dfrac{\mathrm{d}(J_z\omega)}{\mathrm{d}t}$

使杆以匀角速度转动 $\Longrightarrow$ $M_z = \omega\dfrac{\mathrm{d}J_z}{\mathrm{d}t}$

其中 $M_Z = mgr\cos\theta$ $J_z = (\dfrac{1}{12}ml^2 + mr^2)$

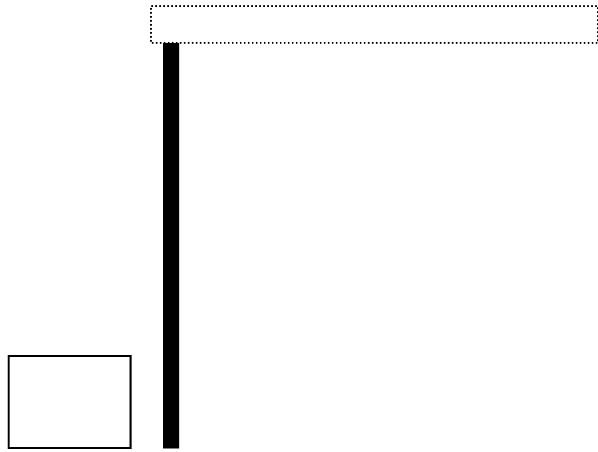
代入得 $mgr\cos\theta = 2m\omega r\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{g\cos\theta}{2\omega} = \frac{g}{2\omega}\cos\omega t = \frac{7l g}{24\upsilon_0}\cos(\frac{12}{7l}\upsilon_0 t)$$

书中例题6.16(P.221)（重点）

长为L，质量为M的均匀杆，一端悬挂，由水平位置无初速度地下落，在铅直位置与质量为m的物体A做完全非弹性碰撞，碰后，物体A沿摩擦系数为μ的水平面滑动。

求：物体A滑动的距离。



书中例题6.16(P.221)（重点）

长为L，质量为M的均匀杆，一端悬挂，由水平位置无初速度地下落，在铅直位置与质量为m的物体A做完全非弹性碰撞，碰后，物体A沿摩擦系数为μ的水平面滑动。

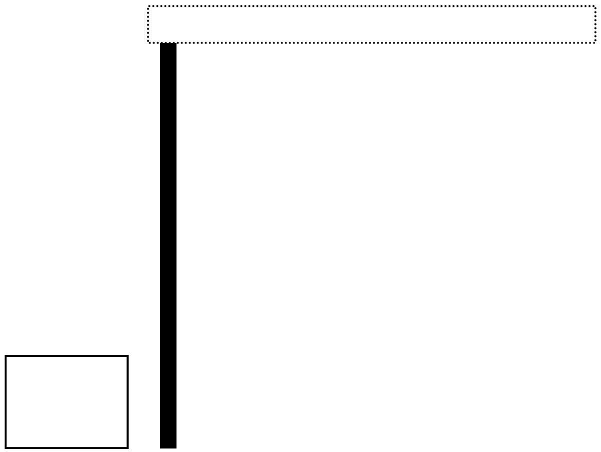
求：物体A滑动的距离。

解：整个过程分为三个阶段：

1、杆由水平位置绕端点的轴转动：机械能守恒

2、与A作完全非弹性碰撞：动量矩守恒

3、A滑动：动能被摩擦力耗散掉。



第一阶段：机械能守恒

	动能	势能
初：	0	Mg L/2
终：	$1/2J_z\omega^2$	0

$1/2J_z\omega^2=Mg\,L/2$　　其中$J_z=1/3ML^2$

$\therefore\ \omega^2=3g/L$

第二阶段：动量矩守恒

初：$J_z\omega$ ；终：$J_z\omega'+mL^2\omega'$

$\therefore\ J_z\omega=J_z\omega'+mL^2\omega'$

代入Jz和ω值得：

$$\frac{1}{3}ML^2\sqrt{\frac{3g}{L}}=\frac{1}{3}ML^2\omega'+mL^2\omega'$$

$$\omega'=\frac{M\sqrt{\frac{3g}{L}}}{M+3m}$$

第三阶段，动能定理

A的速度：ω’L；摩擦力mgμ

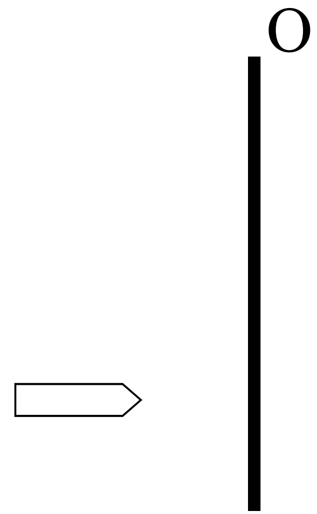
$$\frac{1}{2}m(l\omega')^2=mg\mu s \qquad s=\frac{3LM^2}{2\mu(M+3m)^2}$$

书中习题6.22（p228）（重点）

一均质细杆，长L=1m，可绕通过一端的水平光滑的轴O在铅垂面内自由转动，开始时杆静止于铅直位置。一子弹沿水平方向以v=10m/s的速度射入杆，射入点距离O点的距离为3L/4，子弹的质量为杆质量的1/9。

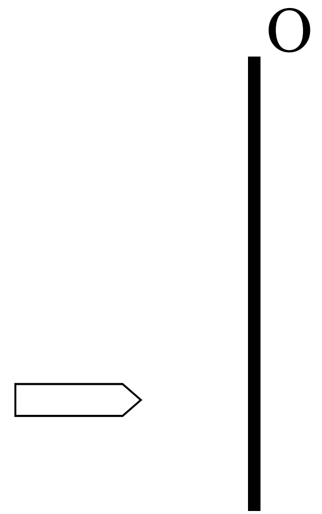
试求：(1) 子弹与杆共同运动的角速度

(2) 杆的最大摆角 θ



书中习题6.22（p228）（重点）

一均质细杆，长L=1m，可绕通过一端的水平光滑的轴O在铅垂面内自由转动，开始时杆静止于铅直位置。一子弹沿水平方向以v=10m/s的速度射入杆，射入点距离O点的距离为3L/4，子弹的质量为杆质量的1/9。



试求：(1) 子弹与杆共同运动的角速度

(2) 杆的最大摆角 θ

解：两个阶段

1. 碰撞：动量矩守恒

2. 转动：机械能守恒

射入前，子弹的动量矩 $\vec{l}\times m\vec{v}=\frac{3}{4}L\frac{1}{9}Mv$

射入过程动量矩守恒

$$\frac{3}{4}L\frac{1}{9}Mv=\left[\frac{1}{9}M\left(\frac{3}{4}L\right)^2+\frac{1}{3}ML^2\right]\omega$$

$$\omega=\frac{4v}{19L}=2.1(rad/s)$$

入射后，子弹与杆共同摆动，机械能守恒

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{9}M\left(\frac{3}{4}L\right)^2+\frac{1}{3}ML^2\right]\omega^2=\left[\frac{1}{9}Mg\frac{3}{4}L+Mg\frac{L}{2}\right](1-\cos\theta)$$

$$\cos\theta=1-\frac{2v^2}{133Lg}=0.8466$$

$$\theta=32.16^0$$

南開大學 Nankai University

四. 进动

高速自转的陀螺在陀螺重力对支点O的力矩作用下发生进动

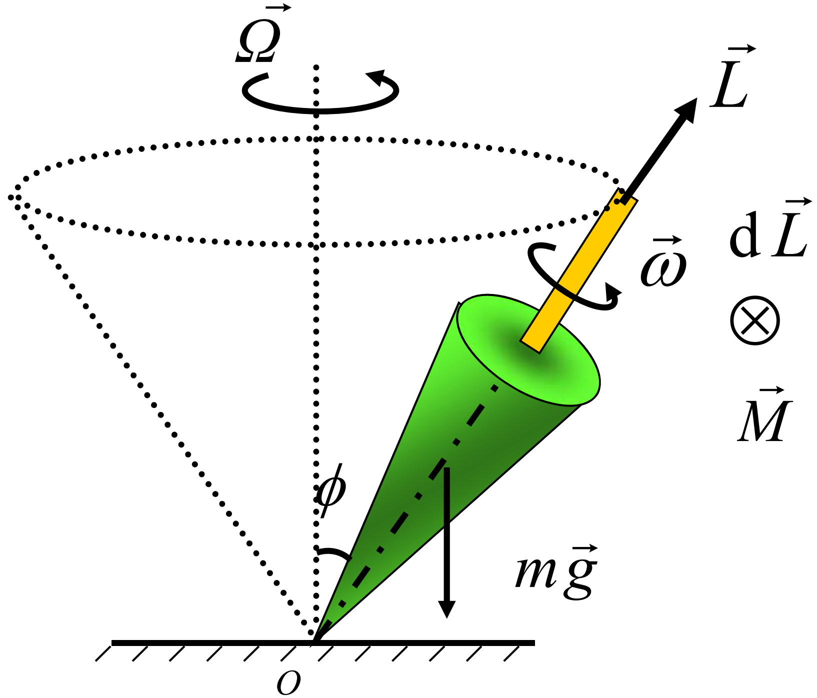
陀螺的动量矩近似为

$$\vec{L} = J\vec{\omega}$$

动量矩定理

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow \mathrm{d}\vec{L} = \vec{M}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}\vec{L} \,//\, \vec{M}$$



当 $\vec{M} \perp \vec{L}$ 时

则 $\vec{L}$ 只改变方向，不改变大小(进动)

四. 进动

高速自转的陀螺在陀螺重力对支点O 的力矩作用下发生进动

陀螺的动量矩近似为

$$\vec{L} = J\vec{\omega}$$

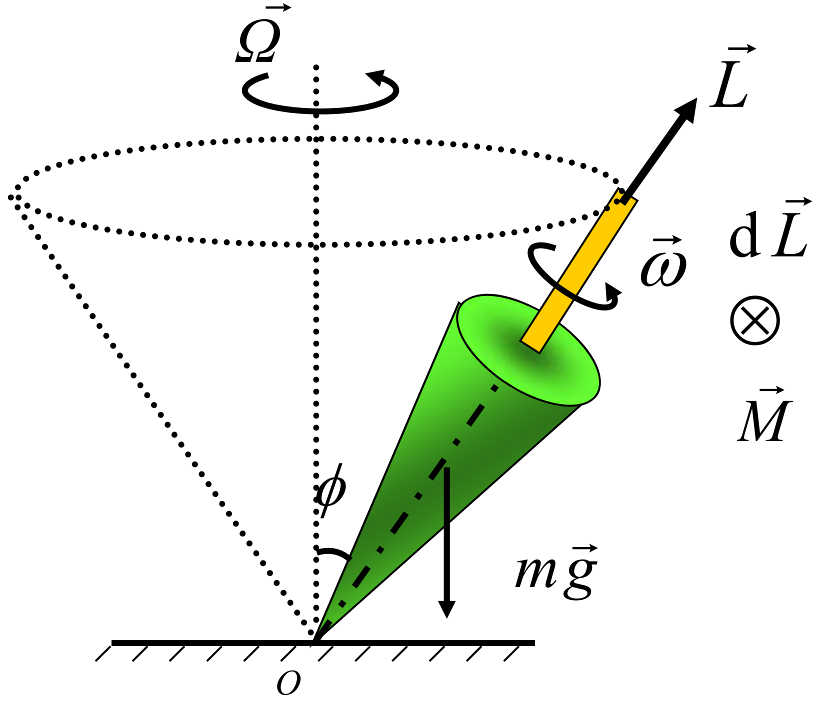
动量矩定理

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow \mathrm{d}\vec{L} = \vec{M}\mathrm{d}t$$

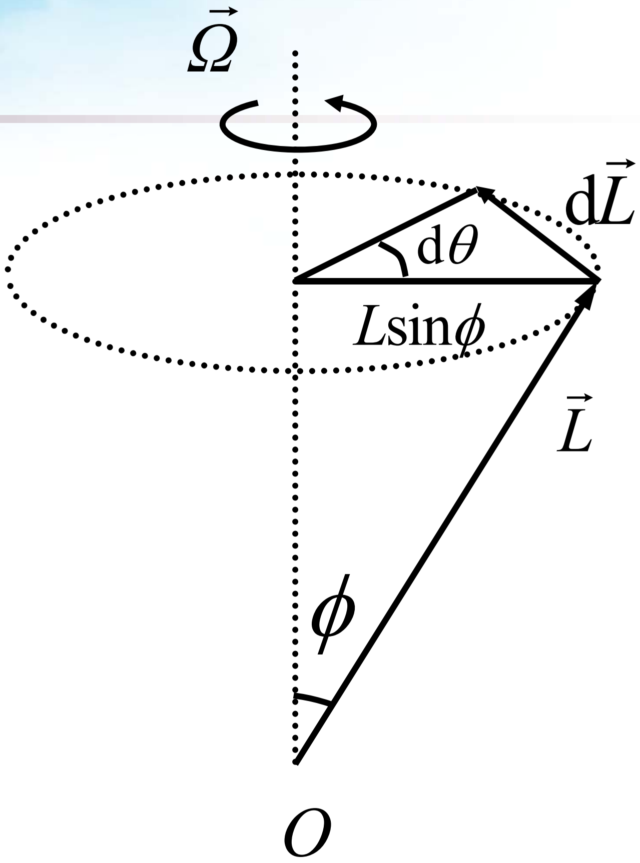
$$\mathrm{d}\vec{L} \,/\!/\, \vec{M}$$

当 $\vec{M} \perp \vec{L}$ 时

则 $\vec{L}$ 只改变方向，不改变大小(进动)



- 进动角速度Ω



动量矩定理 $\vec{M} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

而且 $\left|\mathrm{d}\vec{L}\right| = \left|\vec{L}\right| \sin\phi \mathrm{d}\theta$

$$\left|\vec{M}\right| = \frac{\left|\mathrm{d}\vec{L}\right|}{\mathrm{d}t} = \left|\vec{L}\right| \sin\phi \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \left|\vec{L}\right| \sin\phi \cdot \Omega$$

所以

$$\Omega = \frac{\left|\vec{M}\right|}{\left|\vec{L}\right| \sin\phi} = \frac{\left|\vec{M}\right|}{J\omega \sin\phi} \propto \frac{1}{\omega} \Longrightarrow \omega\uparrow \quad \Omega\downarrow$$

以上只是近似讨论，只适用高速自转，即 $\omega >> \Omega$

刚体力学小结

一、运动学　　描写刚体转动的物理量

1. 角量：　θ　$\Delta\theta$　ω　β　　微积分关系

   线量：　$\vec{r}$　$\Delta\vec{r}$　$\vec{v}$　$\vec{a}$

2. 角量与线量的关系　$s = r\theta$　$a_\tau = r\beta$

   $v = r\omega$　$a_n = r\omega^2$

3. $\vec{\omega}$ 方向：　右手螺旋法

   $\vec{\omega}$ 与 $\vec{v}$ 的关系：　$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

4. 匀角加速转动公式　$\theta = \theta_0 + \omega t + \dfrac{1}{2}\beta t^2$

   $\omega = \omega_0 + \beta t$　　$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\theta - \theta_0)$

二、动力学

1. 基本概念：

➢力矩：$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ （定点、定轴）

➢ 转动惯量：$J = \sum m_i r_i^2$ $J = \int r^2 dm$

➢ 转动动能：$E_k = \frac{1}{2} J\omega^2$

➢ 转动角动量：$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ （定点）

定轴转动：$L = J\omega$

2. 基本定理：

➢ 转动定律：$\vec{M} = J\vec{\beta}$

（定轴转动中力矩的瞬时作用规律）

- 转动动能定理：$\int_{\theta_1}^{\theta_2} Md\theta = \frac{1}{2}J\omega_2{}^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2$
- 角动量定理：$\int_{t_1}^{t_2} Mdt = J_2\omega_2 - J_1\omega_1$

力矩的持续作用规律

- 功能原理：$A_{外} + A_{非} = E - E_0$
- 守恒定律：$\vec{M}_{外} = 0$ 时， $\vec{L}$ 守恒

  $A_{外} + A_{非} = 0$ 时， E 守恒

3. 解题思路：（隔离分析方法）
   - 平动部分： 分析外力 $\vec{F} = m\vec{a}$
   - 转动部分： 分析力矩 $\vec{M} = J\vec{\beta}$
   - 平动与转动的联系： 角量和线量的关系

质点　回顾与对比　刚体

质量　m	J　转动惯量
速度　$\vec{v}$	$\vec{\omega}$　角速度
加速度　$\vec{a}$	$\vec{\beta}$　角加速度
力　$\vec{F}$	$\vec{M}$　力矩
动量　$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = J\vec{\omega}$　角动量
动能　$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$　转动动能

质点　回顾与对比　刚体

牛顿运动定律 $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a}$	转动定律 $M = \frac{d(J\omega)}{dt} J\beta$
动量定理 $\int_{t_0}^{t} \vec{F} dt = \Delta\vec{P}$	角动量定理 $\int_{t_0}^{t} M dt = \Delta L$
动量守恒 $\vec{F} = 0, \Delta\vec{P} = 0$	$\vec{\beta}$　角动量守恒 $\vec{M} = 0, \Delta\vec{L} = 0$
动能定理 $A = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s} = \Delta E_k$	$\vec{M}$　动能定理 $A = \int_a^b M \cdot d\theta = \Delta E_k$

质点　　　　刚体（定轴转动）

	质点	刚体（定轴转动）
运动方程	$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M} = J_z\vec{\beta}$
作功	$dA = \vec{F} \bullet d\vec{r}$	$dA = M_z(F)\,d\theta$
动能定理	$A = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$	$A = \frac{1}{2}J_z\omega_2^2 - \frac{1}{2}J_z\omega_1^2$
动量定理	$\vec{P} = m\vec{v}$	$L_z = J_z\omega$
	$\int_{t_0}^{t} F dt = (mv)_{t_1} - (mv)_{t_0}$	$\int_{t_0}^{t_1} M_z dt = (J_z\omega)_{t_1} - (J_z\omega)_{t_0}$

转动惯量定义：$J = \sum \Delta m_i r_i^2$

力矩定义 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

动量矩定义为：$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$

作业：P. 226, 6.5； 6.6 ; 6.10; 6.17； 6.21