高等数学
第一章：函数、极限与连续函数

张道平

南开大学数学科学学院 414

daopingzhang@nankai.edu.cn

迄今为止，我们还没有讨论在什么条件下可以保证极限存在的问题，而对于极限，我们当然首先是关注它是否存在极限，只有在收敛时，求极限才有意义. 本节我们介绍几个极限存在的判别法则，并建立两个重要极限. 本节内容很重要，它是高等数学的理论基础.

3 极限存在准则与两个重要极限

迄今为止，我们还没有讨论在什么条件下可以保证极限存在的问题，而对于极限，我们当然首先是关注它是否存在极限，只有在收敛时，求极限才有意义. 本节我们介绍几个极限存在的判别法则，并建立两个重要极限. 本节内容很重要，它是高等数学的理论基础.

3.1 夹逼定理、两个重要极限

迄今为止，我们还没有讨论在什么条件下可以保证极限存在的问题，而对于极限，我们当然首先是关注它是否存在极限，只有在收敛时，求极限才有意义. 本节我们介绍几个极限存在的判别法则，并建立两个重要极限. 本节内容很重要，它是高等数学的理论基础.

3.1 夹逼定理、两个重要极限

夹逼定理 I: 设数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 满足下列两个条件: (1) 存在正整数 N_0, 当 $n \geq N_0$ 时，有 $y_n \leq x_n \leq z_n$; (2) $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

迄今为止，我们还没有讨论在什么条件下可以保证极限存在的问题，而对于极限，我们当然首先是关注它是否存在极限，只有在收敛时，求极限才有意义．本节我们介绍几个极限存在的判别法则，并建立两个重要极限．本节内容很重要，它是高等数学的理论基础．

3.1 夹逼定理、两个重要极限

夹逼定理 I: 设数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 满足下列两个条件：(1) 存在正整数 N_0, 当 $n \geq N_0$ 时，有 $y_n \leq x_n \leq z_n$; (2) $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

例：求极限 $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}\right)$.

例：试证 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

例：试证 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

夹逼定理 II: 设函数 $f(x), g(x), h(x)$ 满足如下两个条件：(1) 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)=\{x|0<|x-x_0|<\delta_0\}$ 时，就有 $g(x)\le f(x)\le h(x)$; (2) $\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}h(x)=A$. 则 $\lim_{x\to x_0}f(x)$ 存在，且 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$. (x 趋于无穷结论也成立)

例：试证 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

夹逼定理 II: 设函数 $f(x), g(x), h(x)$ 满足如下两个条件：(1) 当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)=\{x|0<|x-x_0|<\delta_0\}$ 时，就有 $g(x)\le f(x)\le h(x)$; (2) $\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=A$. 则 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，且 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$. (x 趋于无穷结论也成立)

试证重要极限 $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1.$

推论：(1) 设函数 $\varphi(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，且 $\varphi(x) \neq 0$. 若 $\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = 0$, 则 $\lim_{x\to x_0}\frac{sin\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$. ($x$ 趋于无穷结论也成立) (2) 如果 $x_n \neq 0(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{sinx_n}{x_n} = 1$.

推论：(1) 设函数 $\varphi(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，且 $\varphi(x) \neq 0$. 若 $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$, 则 $\lim_{x\to x_0} \frac{sin\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$. ($x$ 趋于无穷结论也成立) (2) 如果 $x_n \neq 0(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} \frac{sinx_n}{x_n} = 1$.

例：求 $\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2}$.

推论：(1) 设函数 $\varphi(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，且 $\varphi(x) \neq 0$. 若 $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$, 则 $\lim_{x\to x_0} \frac{sin\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$. ($x$ 趋于无穷结论也成立) (2) 如果 $x_n \neq 0(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} \frac{sinx_n}{x_n} = 1$.

例：求 $\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2}$.

例：求 $\lim_{x\to 0} \frac{arctanx}{x}$.

定义：如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件
$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$(或
$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots$), 则称数列 $\{x_n\}$
是单调增加的 (或单调减少的)，简称为单增 (或单减).
单调增加和单调减少的数列统称为单调数列。

定义：如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件
$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$(或 $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \cdots$), 则称数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的 (或单调减少的)，简称为单增 (或单减). 单调增加和单调减少的数列统称为单调数列。

定理：单调有界准则或单调有界收敛定理：单调有界数列必有极限. 详言之，单调增加且有上界 (或单调减少且有下届) 的数列必有极限.

例：设 $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}(n = 1, 2, 3, \cdots)$，试证 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求 $\lim_{x\to\infty} x_n$.

例：设 $x_1=\sqrt{2}$, $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}(n=1,2,3,\cdots)$，试证 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求 $\lim_{x\to\infty} x_n$.

试证重要极限 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在.

例：设 $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}(n = 1, 2, 3, \cdots)$，试证 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求 $\lim_{x\to\infty} x_n$.

试证重要极限 $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ 存在.

试证 $\lim_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$.

推论：(1) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$; (2) 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内都有 $\varphi(x)\neq 0$, 而且 $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, 则 $\lim_{x\to x_0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$; (3) 设 $x_n\neq 0(n=1,2,3,\cdots)$, 且 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$, 则 $\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=e$.

推论：(1) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$; (2) 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内都有 $\varphi(x)\neq 0$, 而且 $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, 则 $\lim_{x\to x_0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$; (3) 设 $x_n\neq 0(n=1,2,3,\cdots)$, 且 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$, 则 $\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=e$.

例：求 $\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2+1}{n^2+3n+1})^n$.

推论：(1) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$; (2) 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内都有 $\varphi(x)\neq 0$, 而且 $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, 则 $\lim_{x\to x_0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$; (3) 设 $x_n\neq 0(n=1,2,3,\cdots)$, 且 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$, 则 $\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=e$.

例：求 $\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2+1}{n^2+3n+1})^n$.

例：求 $\lim_{x\to 0}(1+sin2x)^{\frac{1}{x}}$.

推论：(1) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$; (2) 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内都有 $\varphi(x)\neq 0$, 而且 $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, 则 $\lim_{x\to x_0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$; (3) 设 $x_n\neq 0(n=1,2,3,\cdots)$, 且 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$, 则 $\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=e$.

例：求 $\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2+1}{n^2+3n+1})^n$.

例：求 $\lim_{x\to 0}(1+sin2x)^{\frac{1}{x}}$.

以 e 为底的对数称为自然对数，记这种对数为 lnx. lnx 和 e^x 在自然科学中是十分重要的两个函数, 现在用指数函数 e^x 定义几个在应用上常常遇到的函数：双曲正弦，双曲余弦，双曲正切，双曲余切.

3.3.2 几个基本定理、柯西收敛准则

3.3.2 几个基本定理、柯西收敛准则

定义：设 E 是一个非空实数集. 如果存在常数 β(或 α), 使得满足下述两个条件：(1) $\forall x \in E$，都有 $x \leq \beta$(或 $x \geq \alpha$); (2) $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_\epsilon > \beta - \epsilon$(或 $x_\epsilon < \alpha + \epsilon$), 则称 β 为数集 E 的上确界 (或称 α 为数集 E 的下确界)，记作 $\beta = sup\ E$ (或 $\alpha = inf\ E$).

3.3.2 几个基本定理、柯西收敛准则

定义：设 E 是一个非空实数集. 如果存在常数 β(或 α), 使得满足下述两个条件：(1) $\forall x \in E$，都有 $x \leq \beta$(或 $x \geq \alpha$); (2) $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_\epsilon > \beta - \epsilon$(或 $x_\epsilon < \alpha + \epsilon$), 则称 β 为数集 E 的上确界 (或称 α 为数集 E 的下确界)，记作 $\beta = sup\ E$ (或 $\alpha = inf\ E$).

例：$E = \{x|0 < x < 1\}$ 与 $E = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$ 的上下确界.

确界存在公理：凡有上界 (或有下界) 的非空数集，必有上确界 (或下确界).

确界存在公理：凡有上界 (或有下界) 的非空数集，必有上确界 (或下确界).

闭区间套定理：设闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足下列两个条件：(1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] (n = 1, 2, 3 \cdots)$; (2) 区间之长趋于零：$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ (凡是满足上述两个条件的闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 称为闭区间套), 则存在唯一的实数 ξ, 使得 $\xi \in [a_n, b_n] (n = 1, 2, 3, \cdots)$, 而且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$.

紧性定理：有界数列必存在收敛的子列.

紧性定理：有界数列必存在收敛的子列.

柯西 (Cauchy) 准则 I：数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是：$\forall\epsilon > 0, \exists N$, 当 $m > N, n > N$ 时，就有 $|x_m - x_n| < \epsilon$(称满足这个条件的数列 $\{x_n\}$ 为基本数列或称为柯西数列).

紧性定理：有界数列必存在收敛的子列.

柯西 (Cauchy) 准则 I：数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是：$\forall\epsilon > 0, \exists N$, 当 $m > N, n > N$ 时，就有 $|x_m - x_n| < \epsilon$(称满足这个条件的数列 $\{x_n\}$ 为基本数列或称为柯西数列).

柯西 (Cauchy) 准则 II: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta_0) = \{x|0 < |x - x_0| < \delta_0\}$ 内有定义，则极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是：任意给定 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x_1 - x_0| < \delta$ 且 $0 < |x_2 - x_0| < \delta$ 时，就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

例：设 $0 < x_1 < y_1$，令 $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$，$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} (n = 1, 2, 3, \cdots)$. 试证：$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

例：设 $0 < x_1 < y_1$，令 $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} (n = 1, 2, 3, \cdots)$. 试证：$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

例：设 $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$, 试证数列 $\{x_n\}$ 收敛.

例：设 $0 < x_1 < y_1$，令 $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$，$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} (n = 1, 2, 3, \cdots)$. 试证：$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

例：设 $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$，试证数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证明：e 是无理数.

练习： $\lim_{n\to\infty} narctan\frac{3}{n}$; $\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2+3n+1}{n^2+1})^n$.

练习： $\lim_{n\to\infty} narctan\frac{3}{n}$; $\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2+3n+1}{n^2+1})^n$.

练习： 试求极限 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

练习：$\lim_{n\to\infty} n\arctan\frac{3}{n}$; $\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2+3n+1}{n^2+1})^n$.

练习：试求极限 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

练习：设 $x_n \le a \le z_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$, 且 $\lim_{n\to\infty}(x_n - z_n) = 0$. 试证 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$.

练习： $\lim_{n\to\infty} n\arctan\frac{3}{n}$; $\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2+3n+1}{n^2+1})^n$.

练习： 试求极限 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

练习： 设 $x_n \le a \le z_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$, 且 $\lim_{n\to\infty}(x_n - z_n) = 0$. 试证 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$.

练习： 设 $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \sqrt{3+2x_n}(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 试证数列 $\{x_n\}$ 收敛， 并求极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$.

练习：$\lim_{n\to\infty} narctan\frac{3}{n}$; $\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2+3n+1}{n^2+1})^n$.

练习：试求极限 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

练习：设 $x_n \leq a \leq z_n(n=1,2,3,\cdots)$, 且 $\lim_{n\to\infty}(x_n - z_n) = 0$. 试证 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$.

练习：设 $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \sqrt{3+2x_n}(n=1,2,3,\cdots)$, 试证数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$.

练习：设 $x_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots)$, 试用柯西准则证明极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在.