线性代数-二次型

- 二次型的定义
- 标准形
- 正定二次型
- 二次型的类型

8.1 二次型的定义

二次型的定义

定义(二次型). 设n元实系数二次齐次函数

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\dots,x_n) = a_{11}x_1^2 &+ 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
&+ a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
&\vdots \\
&+ a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

称为实数域上的n元二次型，简称n元实二次型.

例 1: $f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + 12x_1x_2 + 20x_2^2$是一个二元实二次型.

例 2: $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$是一个三元实二次型.

二次型的矩阵

例 1: $$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2) &= 2x_1^2+12x_1x_2+20x_2^2 \\
&= 2x_1^2 \quad + \quad 6x_1x_2 \\
&+ \quad 6x_2x_1 \quad + \quad 20x_2^2 \\
&= x_1(2x_1+6x_2)+x_2(6x_1+20x_2) \\
&= (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 2x_1+6x_2 \\ 6x_1+20x_2 \end{pmatrix} \\
&= (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

拆成两等份

若令$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{pmatrix}$, 则$f(x_1,x_2)$可写成

$$f(x)=x^T\boldsymbol{A}\,x.$$

$f(x_1,x_2)$的矩阵

二次型的矩阵

例 2：$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

$$\begin{aligned}
&= x_1x_2 + x_1x_3 \\
&+ x_2x_1 - 3x_2x_3 \\
&+ x_3x_1 - 3x_3x_2 \\
&= x_1(x_2+x_3) + x_2(x_1-3x_3) + x_3(x_1-3x_2) \\
&= (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} x_2+x_3 \\ x_1-3x_3 \\ x_1-3x_2 \end{pmatrix} \\
&= (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵

二次型的矩阵

定义(二次型的矩阵). 给定n元实二次型

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ + \ a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ \vdots \\ + \ a_{nn}x_n^2. \end{aligned}$$

令$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, 则$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$可以写成

$$f(x) = x^T A\, x, \qquad 其中A^T = A.$$

对称矩阵A称为二次型$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$的矩阵, 其中A的主对角线元素为平方项的系数, 非主对角线元素$a_{ij} = a_{ji}$为x_ix_j系数的一半.

练习. 写出二次型$f(x_1,x_2) = (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$的矩阵.

二次型的矩阵

二次型与对称矩阵的一一对应.

- 任何一个n元实二次型对应到实对称矩阵.
- 任意的实对称矩阵A对应实二次型$f(x) = x^T A x$.

可逆线性替换

定义(可逆线性替换). 设有n元实二次型$f(x)=x^TAx$. 若作

变量替换$x=Cy$, 其中C为n阶可逆阵以及$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, 则得

到一个关于变量$y_1,\dots,y_n$的n元实二次型:

$$
\begin{aligned}
g(y) &\triangleq f(Cy) \\
&= (Cy)^T A (Cy) \\
&= y^T\left(\boldsymbol{C^T A C}\right)y.
\end{aligned}
$$

合同关系

定义(合同关系). 设A,B是n阶实矩阵. 若存在n阶可逆矩阵C使得$B=C^TAC$，则称A合同于B.

性质. **合同关系是一个等价关系.**

证明.

- 反身性：$X=E^TXE$.
- 对称性：若$Y=C^TXC$(C可逆)，则$X=(C^{-1})^TYC^{-1}$.
- 传递性：若$Y=C^TXC$(C可逆)且$Z=D^TYD$(D可逆)， 则

$$Z=D^T(C^TXC)D=(CD)^TX(CD). \qquad \blacksquare$$

8.2 标准形

标准形

问题：能否通过可逆线性替换$x = Cy$将二次型$f(x) = x^T Ax$

化成“简洁的”形式?

只含平方项：$d_1 y_1^2 + \cdots + d_r y_r^2$

标准形

Lagrange配方法

例 1：$f(x_1,x_2) = 2x_1^2+12x_1x_2+20x_2^2$

$$= 2(x_1^2+6x_1x_2)+20x_2^2$$

$$= 2(x_1+3x_2)^2+\quad 2x_2^2.$$

完全平方和

作变量替换$\begin{cases} y_1 = x_1 + 3x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$（即$y=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}x$），则$f(x_1,x_2)$可化为

$$g(y_1,y_2)=2y_1^2+2y_2^2.$$

所作线性替换$x=Cy$，其中

$$C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Lagrange配方法

例 2：$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3.$

没有平方项！

第 1 步： 创造平方项. 作线性替换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases},$$ 即$x=C_1y$，其中$C_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

则得到关于y的二次型

$$\begin{aligned} g(y) &= f(C_1y) \\ &= 2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+2(y_1+y_2)y_3-6(y_1-y_2)y_3 \\ &= 2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3. \end{aligned}$$

Lagrange配方法

第 2 步： 配平方.

$$g(y)=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3.$$

$$=2(y_1^2-2y_1y_3)-2y_2^2+8y_2y_3$$

关于y_2,y_3的二次型

$$=2(y_1-y_3)^2\ -2y_2^2+8y_2y_3-2y_3^2$$

$$=2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2.$$

线性替换 $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3, \\ z_3 = y_3 \end{cases}$ 即$z=C_2y=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}y$将

$g(y)$ 化为关于z的二次型

$$h(z)=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2.$$

Lagrange配方法

$$f(x) \xrightarrow{x=C_1y} g(y) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$$

$$\xrightarrow{z=C_2y} h(z) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2.$$

故线性替换$x = (C_1C_2^{-1})z$将$f(x)$化为标准形

$$h(z) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2.$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

正交对角化法

谱定理(Spectral Theorem). 设A为n阶实对称矩阵. 则存在n阶正交阵Q使得

$$Q^{-1}AQ = Q^{T}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中$\lambda_1, \dots, \lambda_n$为$A$的特征值.

谱定理(二次型形式). **给定$\boldsymbol{n}$元二次型$\boldsymbol{f(x) = x^T A x}$, 存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$使得线性替换$\boldsymbol{x = Qy}$将$\boldsymbol{f(x)}$化为标准形$\boldsymbol{\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2}$, 其中$\boldsymbol{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$为$\boldsymbol{A}$的特征值.**

标准形

练习：用Lagrange配方法和正交对角化法将

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2x_3$$

化为标准形.

- 配方法：$y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_3^2$.
- 正交对角化法：$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

唯一性

问题：二次型$f(x) = x^T Ax$的标准形中平方项项数是由f唯一确定的吗?

定理(平方项项数等于秩). **n元实二次型$f(x) = x^T Ax$的任何标准形中平方项项数等于$R(A)$.**

证明. 设可逆线性替换$x = Cy$将$f(x)$化为标准形

$$g(y) \triangleq f(Cy) = y^T (C^T AC)y.$$

则$g(y)$中平方项项数 $= C^T AC$主对角线上非零元个数

$$= R(C^T AC)$$

$$= R(A).$$

■

唯一性

问题：二次型$f(x)=x^TAx$的标准形中正平方项项数是由f唯一确定的吗?

惯性定理(正平方项项数是不变量). **n元实二次型$f(x)=x^TAx$任何标准形中正平方项项数由f唯一确定，与所作可逆线性替换无关.**

证明. 从略. ■

唯一性

由惯性定理可定义二次型的如下参数:

- 正惯性指数：标准形中正平方项项数 p
- 负惯性指数：标准形中负平方项项数 $q = r - p$
- 符号差： $p - q = 2p - r$

例： $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$的一个标准形为

$$h(z) = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2.$$

故f的秩为 3，正惯性指数为 2，负惯性指数为 1，符号差为 1.

8.3 正定二次型

正定二次型

定义(正定二次型). 若任给$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$有$f(x) = x^T A x > 0$，则称$f(x)$为正定二次型；实对称矩阵$A$称为正定矩阵.

定理(正定二次型的判定). 下列均为$\boldsymbol{n}$元实二次型$\boldsymbol{f(x) = x^T A x}$为正定二次型的充分必要条件.

(1)　$\boldsymbol{A}$的所有特征值大于0.

(2)　$\boldsymbol{f(x)}$的正惯性指数为$\boldsymbol{n}$.

(3)　$\boldsymbol{A}$合同于$\boldsymbol{E_n}$.

(4)　$\boldsymbol{A}$的所有顺序主子式大于0.

正定二次型

(1) $\boldsymbol{n}$元实二次型$\boldsymbol{f(x) = x^T A x}$为正定二次型 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$的所有特征值大于0.

证明. 根据**谱定理**存在正交矩阵$Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$使得

$$Q^{-1}AQ = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中$\lambda_1, \dots, \lambda_n$为$A$的特征值.

$$A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i q_i^T .$$

从而

$$f(x) = x^T \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i q_i^T x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(q_i^T x\right)^2 .$$

正定二次型

(1) **$\boldsymbol{n}$元实二次型$\boldsymbol{f(x) = x^T A x}$为正定二次型 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$的所有特征值大于0.**

证明(续).

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(q_i^T x\right)^2}.$$

充分性： 假设$\lambda_i > 0, i = 1, \dots n$.

给定任何$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$，存在$j \in \{1, \dots, n\}$使得$q_j^T x \neq 0$(为什么?)．从而

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(q_i^T x\right)^2 \geq \lambda_j \left(q_j^T x\right)^2 > 0.$$

必要性： 假设某个$\lambda_i \leq 0$．不妨假设$\lambda_1 \leq 0$．则

$$f(q_1) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(q_i^T q_1\right)^2 = \lambda_1 (q_1^T q_1)^2 \leq 0.$$

因$q_1 \neq \mathbf{0}$，$f(x)$不是正定二次型. ■

正定二次型

推论(正定矩阵行列式大于0). **若$\boldsymbol{A}$为正定矩阵，则$|\boldsymbol{A}| > \mathbf{0}$.**

证明. 令$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$为$A$的特征值.

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0.$$

推论得证. ■

说明. 逆命题不成立(反例?).

正定二次型

(2) **$\boldsymbol{n}$元实二次型$\boldsymbol{f(x)=x^TAx}$正定 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{f}$的正惯性指数为$\boldsymbol{n}$.**

证明. 根据**谱定理**存在正交矩阵Q使得线性替换$x=Qy$将$f(x)$化为标准形$\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$，其中$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$为$A$的特征值.

$$f\text{的正惯性指数为}n \Leftrightarrow \lambda_i>0, i=1,\ldots,n.$$

由**(1)**命题得证. ■

正定二次型

(3) $\boldsymbol{n}$元实二次型$\boldsymbol{f(x)=x^TAx}$为正定二次型 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$合同于$\boldsymbol{E_n}$.

证明.

$f(x)$为正定二次型 $\Leftrightarrow$ f的正惯性指数为n (2)

$\Leftrightarrow$ f的某个标准形为$y_1^2+\cdots+y_n^2$ （为什么?）

$\Leftrightarrow$ A合同于E_n. ■

正定二次型

(4) $\quad$ **n元实二次型$\boldsymbol{f(x)=x^TAx}$正定 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$的所有顺序主子式大于0.**

证明. 设$A=(a_{ij})$.

必要性. 令$A_k=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$为$A$的$k$阶顺序主子阵，$1\le k\le n$.

k元二次型

$$f_k(x_1,\dots,x_k)=(x_1,\dots,x_k)A_k\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

正定(为什么?)，故由推论$|A_k|>0$.

充分性. 对n用数学归纳法(自证). $\blacksquare$

正定二次型

例：证明$f(x_1,x_2)=2x_1^2+12x_1x_2+20x_2^2$是正定二次型.

解：$f(x_1,x_2)$ 的矩阵为$A=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 6 & 20\end{pmatrix}$.

方法 1：判别条件(4). A的顺序主子式为$|A_1|=|2|>0$, $|A_2|=|A|>0$.

方法 2：判别条件(1). A的特征值为$11\pm\sqrt{117}>0$.

方法 3：判别条件(2).

$f(x_1,x_2)$的标准形为$2y_1^2+2y_2^2$，故正惯性指数为2.

方法 4：定义.

$$f(x_1,x_2) = 2(x_1+3x_2)^2+2x_2^2>0,\ \forall\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

8.4 二次型的类型

负定二次型

定义(负定二次型). 若任给$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$有$f(x) = x^T A x < 0$,

则称$f(x)$为负定二次型；实对称矩阵A称为负定矩阵.

说明. A为负定矩阵 $\Leftrightarrow$ $-A$为正定矩阵.

负定二次型

定理(负定二次型的判定). 下列均为n元实二次型$f(x)=x^TAx$为负定二次型的充分必要条件.

(1) A的所有特征值小于0.

(2) $f(x)$的负惯性指数为n.

(3) A合同于$-E_n$.

(4) 矩阵$-A$的所有顺序主子式大于0，即

$$(-1)^k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, k=1,\dots,n.$$

负定二次型

例：$f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$是负定二次型.

解：$f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$.

A的顺序主子式为

$$|A_1|=-2<0,$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -6\end{vmatrix}>0,$$

$$|A_3|=|A|=-34<0.$$

思考.　如何用定义证明?

半正定二次型

定义（半正定二次型）．若任给$x \in \mathbb{R}^n$有$f(x) = x^T A x \geq 0$，

则称$f(x)$为半正定二次型；实对称矩阵A称为半正定矩阵.

半正定二次型

定理(半正定二次型的判定). **下列均为n元实二次型$f(x)=x^TAx$为半正定二次型的充分必要条件.**

证明与正定类似

(1) A的所有特征值大于等于0.

(2) $f(x)$的正惯性指数为f的秩.

(3) A合同于$\begin{pmatrix} E_{R(A)} & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$.

(4) A的所有主子式大于等于0.

半正定二次型

定理(半正定二次型的判定).

$$\boldsymbol{n}\text{元实二次型}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\text{为半正定二次型}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boldsymbol{A}\text{的所有主子式大于等于}0.$$

说明. A的所有顺序主子式大于等于0 $\nRightarrow$ f半正定.

$$f(x_1, x_2) = -x_2^2.$$

- f的矩阵为$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$且$A$的所有顺序主子式大于等于0.
- f不是半正定的.

半负定二次型

定义（半负定二次型）. 若任给$x \in \mathbb{R}^n$有$f(x) = x^T A x \leq 0$,

则称$f(x)$为半负定二次型；实对称矩阵A称为半负定矩阵.

说明. A为半负定矩阵 $\Leftrightarrow$ $-A$为半正定矩阵.

半负定二次型

定理(半负定二次型的判定). 下列均为n元实二次型$f(x)=x^TAx$为半负定二次型的充分必要条件.

(1) A的所有特征值小于等于0.

(2) $f(x)$的负惯性指数为f的秩.

(3) A合同于$\begin{pmatrix} -E_{R(A)} & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$.

(4) 矩阵$-A$的所有主子式大于等于0.

不定二次型

定义(不定二次型). 若$f(x) = x^T Ax$既非半正定又非半负定，则称f为不定二次型.

例：$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$是不定二次型(为什么?).

性质(不定二次型). **若$\boldsymbol{n}$元实二次型$\boldsymbol{f(x) = x^T Ax}$为不定二次型，则存在$\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$使得$\boldsymbol{f(x_0) = 0}$.**

证明. 练习. ■

二次型总结

二次型总结

难点.

- 正定二次型的判定.
- 唯一性.

重点.

- 二次型的矩阵.
- 化标准形.
- 二次型的类型.

二次型总结

1. 设$f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_2x_3$.

(a) 写出f的矩阵A.

(b) 将f化为标准形.

(c) 判定f的类型.

2. 如果把n阶实对称矩阵按合同分类，即两个n阶实对称矩阵属于同一类当且仅当它们合同. 问共有几类?

3. 如果A,B是n阶正定矩阵. 证明$A+B$也是正定矩阵.

4. 证明下列二次型是半正定二次型但不是正定二次型.

$$n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$$