

高等数学

第四章：不定积分

张道平

南开大学数学科学学院 414

daopingzhang@nankai.edu.cn

1. 原函数与不定积分

1.1 原函数与不定积分的概念

1. 原函数与不定积分

1.1 原函数与不定积分的概念

定义：如果在区间 I 上函数 $F(x)$ 的导数为 $f(x)$ ，即对任一 $x \in I$ ，都有 $F'(x) = f(x)$ 或 $dF(x) = f(x)dx$ ，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数。

1. 原函数与不定积分

1.1 原函数与不定积分的概念

定义：如果在区间 I 上函数 $F(x)$ 的导数为 $f(x)$ ，即对任一 $x \in I$ ，都有 $F'(x) = f(x)$ 或 $dF(x) = f(x)dx$ ，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数。

$$(\sin x)' = \cos x, \forall x \in (-\infty, \infty), (\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \forall x \neq 0.$$

1. 原函数与不定积分

1.1 原函数与不定积分的概念

定义：如果在区间 I 上函数 $F(x)$ 的导数为 $f(x)$ ，即对任一 $x \in I$ ，都有 $F'(x) = f(x)$ 或 $dF(x) = f(x)dx$ ，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数。

$$(\sin x)' = \cos x, \forall x \in (-\infty, \infty), (\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \forall x \neq 0.$$

显然，一个函数的原函数不是唯一的。

1. 原函数与不定积分

1.1 原函数与不定积分的概念

定义：如果在区间 I 上函数 $F(x)$ 的导数为 $f(x)$ ，即对任一 $x \in I$ ，都有 $F'(x) = f(x)$ 或 $dF(x) = f(x)dx$ ，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数。

$$(\sin x)' = \cos x, \forall x \in (-\infty, \infty), (\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \forall x \neq 0.$$

显然，一个函数的原函数不是唯一的。

定理：如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，那么在区间 I 上必存在函数 $F(x)$ ，使对任一 $x \in I$ ，都有 $F'(x) = f(x)$ 。简言之，连续函数必有原函数。

1. 原函数与不定积分

定理：设在区间 I 上 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 的原函数，其中 C 是任意常数，而且 $f(x)$ 的任一原函数都可以表示成 $F(x) + C$ 的形式.

1. 原函数与不定积分

定理：设在区间 I 上 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 的原函数，其中 C 是任意常数，而且 $f(x)$ 的任一原函数都可以表示成 $F(x) + C$ 的形式.

我们把函数 $f(x)$ 的原函数的一般表达式 $F(x) + C$ 称为 $f(x)$ 的不定积分，记为 $\int f(x)dx = F(x) + C$ ，其中 $f(x)$ 称为被积函数，符号“ \int ”称为积分号， $f(x)dx$ 称为被积表达式（简称为被积式）， x 称为积分变量， C 称为积分常数.

1. 原函数与不定积分

定理：设在区间 I 上 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 的原函数，其中 C 是任意常数，而且 $f(x)$ 的任一原函数都可以表示成 $F(x) + C$ 的形式.

我们把函数 $f(x)$ 的原函数的一般表达式 $F(x) + C$ 称为 $f(x)$ 的不定积分，记为 $\int f(x)dx = F(x) + C$ ，其中 $f(x)$ 称为被积函数，符号“ \int ”称为积分号， $f(x)dx$ 称为被积表达式（简称为被积式）， x 称为积分变量， C 称为积分常数.

1.2 基本积分表 (熟记!)

1. 原函数与不定积分

1.3 不定积分的性质

1. 原函数与不定积分

1.3 不定积分的性质

$f(x)$ 连续, 对函数 $f(x)$ 先积分后微分两种运算相互抵消. $f(x)$ 可微, 对函数 $f(x)$ 先微分后积分两种运算相互抵消, 但相差一个任意常数.

1. 原函数与不定积分

1.3 不定积分的性质

$f(x)$ 连续, 对函数 $f(x)$ 先积分后微分两种运算相互抵消. $f(x)$ 可微, 对函数 $f(x)$ 先微分后积分两种运算相互抵消, 但相差一个任意常数.

性质: 设函数 $f(x)$ 的原函数存在, k 为非零常数, 则

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$$

1. 原函数与不定积分

1.3 不定积分的性质

$f(x)$ 连续, 对函数 $f(x)$ 先积分后微分两种运算相互抵消. $f(x)$ 可微, 对函数 $f(x)$ 先微分后积分两种运算相互抵消, 但相差一个任意常数.

性质: 设函数 $f(x)$ 的原函数存在, k 为非零常数, 则

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$$

性质: $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

1. 原函数与不定积分

1.3 不定积分的性质

$f(x)$ 连续, 对函数 $f(x)$ 先积分后微分两种运算相互抵消. $f(x)$ 可微, 对函数 $f(x)$ 先微分后积分两种运算相互抵消, 但相差一个任意常数.

性质: 设函数 $f(x)$ 的原函数存在, k 为非零常数, 则

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$$

性质: $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

例: 计算 $\int (1 - \sqrt{x})^3 dx.$

1. 原函数与不定积分

1.3 不定积分的性质

$f(x)$ 连续, 对函数 $f(x)$ 先积分后微分两种运算相互抵消. $f(x)$ 可微, 对函数 $f(x)$ 先微分后积分两种运算相互抵消, 但相差一个任意常数.

性质: 设函数 $f(x)$ 的原函数存在, k 为非零常数, 则

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$$

性质: $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

例: 计算 $\int (1 - \sqrt{x})^3 dx.$

例: 求 $\int 3^x e^{-x} dx.$

1. 原函数与不定积分

例：求 $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

1. 原函数与不定积分

例：求 $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

例：求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

1. 原函数与不定积分

例：求 $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

例：求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

几何意义，初值问题 (附有初值条件的求原函数的问题).

1. 原函数与不定积分

例：求 $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

例：求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

几何意义，初值问题 (附有初值条件的求原函数的问题).

例：设曲线 $y = f(x)$ 过点 $(2, 0)$ ，且其上任一点处的切线斜率等于该点的横坐标，求此曲线的方程.

1. 原函数与不定积分

例：求 $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

例：求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

几何意义，初值问题 (附有初值条件的求原函数的问题).

例：设曲线 $y = f(x)$ 过点 $(2, 0)$ ，且其上任一点处的切线斜率等于该点的横坐标，求此曲线的方程.

练习：求不定积分 $\int \max\{1, x^2\} dx$.

1. 原函数与不定积分

例：求 $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

例：求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

几何意义，初值问题 (附有初值条件的求原函数的问题).

例：设曲线 $y = f(x)$ 过点 $(2, 0)$ ，且其上任一点处的切线斜率等于该点的横坐标，求此曲线的方程.

练习：求不定积分 $\int \max\{1, x^2\} dx$.

练习：已知 $f(\sin^2 x) = \cos^2 x$ ，求 $f(x)$.

1. 原函数与不定积分

例：求 $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

例：求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

几何意义，初值问题 (附有初值条件的求原函数的问题).

例：设曲线 $y = f(x)$ 过点 $(2, 0)$ ，且其上任一点处的切线斜率等于该点的横坐标，求此曲线的方程.

练习：求不定积分 $\int \max\{1, x^2\} dx$.

练习：已知 $f(\sin^2 x) = \cos^2 x$ ，求 $f(x)$.

练习：求不定积分 $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$.