高等数学
第三章：微分学基本定理及其应用

张道平

南开大学数学科学学院 414

daopingzhang@nankai.edu.cn

4.1 函数的单调性

4.1 函数的单调性

定理：设函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内可导，则 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加 (单调减少) 的充要条件是 $f'(x) \geq 0 (f'(x) \leq 0)$.

4.1 函数的单调性

定理：设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加 (单调减少) 的充要条件是 $f'(x)\geq 0(f'(x)\leq 0)$.

定理：设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0(f'(x)<0)$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格单增 (严格单减).

4.1 函数的单调性

定理：设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加 (单调减少) 的充要条件是 $f'(x)\geq 0(f'(x)\leq 0)$.

定理：设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0(f'(x)<0)$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格单增 (严格单减).

例：确定函数 $f(x)=x^3-3x+2$ 的单调区间.

4.1 函数的单调性

定理：设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加 (单调减少) 的充要条件是 $f'(x)\geq 0(f'(x)\leq 0)$.

定理：设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0(f'(x)<0)$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格单增 (严格单减).

例：确定函数 $f(x)=x^3-3x+2$ 的单调区间.

例：试证：当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{sinx}{x}>\sqrt[3]{cosx}$.

4.2 函数的极值与最值

4.2 函数的极值与最值

极值判别法 I： 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0, \delta)$ 内连续, 在该邻域内可导 (x_0 可以除外),

(1) 如果当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时,$f'(x) > 0$, 而当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时， $f'(x) < 0$， 则 $f(x)$ 在 x_0 取得极大值;

(2) 如果当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时,$f'(x) < 0$, 而当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时， $f'(x) > 0$， 则 $f(x)$ 在 x_0 取得极小值;

(3) 如果当 $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 时, 恒有 $f'(x) > 0$ 或 $f'(x) < 0$, 则 $f(x_0)$ 不是极值.

4.2 函数的极值与最值

极值判别法 I：设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0,\delta)$ 内连续，在该邻域内可导 (x_0 可以除外)，

(1) 如果当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，而当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 取得极大值；

(2) 如果当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，而当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 取得极小值；

(3) 如果当 $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 时，恒有 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$，则 $f(x_0)$ 不是极值.

例：求函数 $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值.

极值判别法 II: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, 则

(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值；

(2) 当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值.

极值判别法 II: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, 则
(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时， $f(x_0)$ 为极大值;
(2) 当 $f''(x_0)>0$ 时， $f(x_0)$ 为极小值.

极值判别法 II 的推广: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 有 n 阶导数，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, 则
(1) 当 n 是偶数时，若 $f^{(n)}(x_0)<0$, 则 $f(x_0)$ 是极大值; 若 $f^{(n)}(x_0)>0$, 则 $f(x_0)$ 是极小值.
(2) 当 n 是奇数时， $f(x_0)$ 不是极值.

极值判别法 II: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$, 则
(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时， $f(x_0)$ 为极大值;
(2) 当 $f''(x_0)>0$ 时， $f(x_0)$ 为极小值.

极值判别法 II 的推广: 设函数 $f(x)$ 在 x_0 有 n 阶导数，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, 则
(1) 当 n 是偶数时，若 $f^{(n)}(x_0)<0$, 则 $f(x_0)$ 是极大值; 若 $f^{(n)}(x_0)>0$, 则 $f(x_0)$ 是极小值.
(2) 当 n 是奇数时， $f(x_0)$ 不是极值.

例： 设函数 $y=f(x)$ 是由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 确定的，求其极值.

例： 求 $f(x) = x^3(x-5)^2$ 的极值.

例：求 $f(x) = x^3(x-5)^2$ 的极值.

例：求函数 $f(x) = \sqrt[3]{2x - x^2}$ 在 $[-1, 4]$ 上的最大值和最小值.

例：求 $f(x) = x^3(x-5)^2$ 的极值.

例：求函数 $f(x) = \sqrt[3]{2x - x^2}$ 在 $[-1, 4]$ 上的最大值和最小值.

例：讨论函数 $f(x) = lnx - \frac{x}{e} + a(a > 0)$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点的个数.

4.3 曲线的凹凸性与拐点

4.3 曲线的凹凸性与拐点

定义：设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，若对 (a,b) 内任意两点 x_1 和 x_2，及任意实数 λ_1 和 $\lambda_2(\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_1+\lambda_2=1)$, 恒有 $f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)<\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)$, 则称曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是下凸的；如果恒有 $f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)>\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)$, 则称曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是上凸的.

定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内具有二阶导数，

(1) 若在 (a, b) 内 $f''(x) \geq 0$, 且在 (a, b) 的任何子区间内不恒为零，则曲线 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是下凸的;

(2) 若在 (a, b) 内 $f''(x) \leq 0$, 且在 (a, b) 的任何子区间内不恒为零，则曲线 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是上凸的.

4. 导数在函数研究中的应用

定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内具有二阶导数，

(1) 若在 (a, b) 内 $f''(x) \geq 0$, 且在 (a, b) 的任何子区间内不恒为零，则曲线 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是下凸的;

(2) 若在 (a, b) 内 $f''(x) \leq 0$, 且在 (a, b) 的任何子区间内不恒为零，则曲线 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是上凸的.

定义：设 $M_0(x_0, y_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 上的一点. 如果曲线经过点 M_0 时，其凹凸性发生了变化 (即曲线由下凸变成了上凸或由上凸变成了下凸)，则称点 M_0 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

例：讨论函数 $y = e^{-x^2}$ 的凹凸性及拐点.

例：讨论函数 $y = e^{-x^2}$ 的凹凸性及拐点.

4.4 直角坐标系下函数图形的描绘

例：讨论函数 $y = e^{-x^2}$ 的凹凸性及拐点.

4.4 直角坐标系下函数图形的描绘

定义：当曲线 C 上的动点 M 沿着曲线无限远离坐标原点时，若 M 与某直线 L 的距离趋于零，则称直线 L 为曲线 C 的渐近线.

例：讨论函数 $y = e^{-x^2}$ 的凹凸性及拐点.

4.4 直角坐标系下函数图形的描绘

定义：当曲线 C 上的动点 M 沿着曲线无限远离坐标原点时，若 M 与某直线 L 的距离趋于零，则称直线 L 为曲线 C 的渐近线.

讨论曲线 $y = f(x)$ 在什么条件下有渐近线，以及如何求渐近线.

例：讨论函数 $y = e^{-x^2}$ 的凹凸性及拐点.

4.4 直角坐标系下函数图形的描绘

定义：当曲线 C 上的动点 M 沿着曲线无限远离坐标原点时，若 M 与某直线 L 的距离趋于零，则称直线 L 为曲线 C 的渐近线.

讨论曲线 $y = f(x)$ 在什么条件下有渐近线，以及如何求渐近线.

水平渐近线，斜渐近线，垂直渐近线.

例：讨论函数 $y=e^{-x^2}$ 的凹凸性及拐点.

4.4 直角坐标系下函数图形的描绘
定义：当曲线 C 上的动点 M 沿着曲线无限远离坐标原点时，若 M 与某直线 L 的距离趋于零，则称直线 L 为曲线 C 的渐近线.

讨论曲线 $y=f(x)$ 在什么条件下有渐近线，以及如何求渐近线.

水平渐近线，斜渐近线，垂直渐近线.

例：求曲线 $f(x)=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ 的渐近线.

练习：证明函数 $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

练习：证明函数 $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

练习：设 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 二阶导数连续，且 $\varphi(0)=0,\varphi'(0)\neq 0$. 证明：$(0,0)$ 点是曲线 $y=f(x)=xsinx\varphi(x)$ 的拐点.

练习：证明函数 $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

练习：设 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 二阶导数连续，且 $\varphi(0)=0,\varphi'(0)\neq 0$. 证明：$(0,0)$ 点是曲线 $y=f(x)=xsinx\varphi(x)$ 的拐点.

练习：设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有二阶导数，且 $f''(x)\geq 0$, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 (a,b) 内的 n 个点，正数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$. 证明：$\sum_{k=1}^n\lambda_k f(x_k)\geq f(\sum_{k=1}^n\lambda_k x_k)$.

练习：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足：(1) $f(a)=f(b)=0$; (2) $f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$, 其中 $g(x)$ 为某个已知的且在 $[a,b]$ 上连续的函数. 试证：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为零.