线性代数–特征值作业解答

黄申为

2022 年 12 月 18 日

1. **设$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. 不通过计算$A$的特征多项式证明$\lambda = 0$是$A$的特征值.**

   Solution. 观察到A的前两行之和等于第三行, 故$|A| = 0$. 因为所有特征值的乘积等于A的行列式, 故$\lambda = 0$是A的特征值.

2. **求$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的特征值和特征向量并判断$A$是否可以相似对角化. 如果可以相似对角化, 请给出相似矩阵P; 如果不能相似对角化, 请说明理由.**

   Solution. 注意到A是一个排列矩阵: Ax是将x的第1个分量与第4个分量交换以及第2个分量与第3个分量交换后所得到的向量, 即

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

   因此$Ax = \lambda x$的解x满足$(\lambda^2 - 1)x_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. 因为特征向量不能是零向量, 所以$\lambda = 1$或者$\lambda = -1$. 下面求特征向量.

- $\lambda = 1$. $Ax = x$等价于$x_1 = x_4$且$x_2 = x_3$. 取$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 得属于$\lambda = 1$的线性无关的特征向量为

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda = -1$. $Ax = -x$等价于$x_1 = -x_4$且$x_2 = -x_3$. 取$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 得属于$\lambda = -1$的线性无关的特征向量为

$$p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因为A有4个线性无关的特征向量, A可以相似对角化. 令

$$P = (p_1, p_2, p_3, p_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$.

3. 设A为n阶方阵.

   (a) A^T与A有否一定有相同的特征值? 如果是请给出证明; 如果不是, 请举出反例.

   (b) A^T与A有否一定有相同的特征向量? 如果是请给出证明; 如果不是, 请举出反例.

Solution.

(a) 回答是肯定的. 我们证明A^T与A有相同的特征多项式, 从而有相同的特征值:

$$\begin{aligned} f_{A^T}(\lambda) &= |A^T - \lambda E| \\ &= |A^T - (\lambda E)^T| \\ &= |(A - \lambda E)^T| \\ &= |A - \lambda E| \\ &= f_A(\lambda). \end{aligned}$$

(b) 回答是否定的. 反例不唯一. 考虑$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则$A$和$A^T$的特征值均为$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. 但是, A的和A^T的属于$\lambda_2 = 2$的特征向量并不相同: A的属于$\lambda_2 = 2$的特征向量为$k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(k \neq 0)$, 而A^T的属于$\lambda_2 = 2$的特征向量为$k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(k \neq 0)$.

4. **证明: 若A相似于B则A与B有相同的特征值.**

Solution. 设$B = P^{-1}AP$. 则

$$\begin{aligned} f_B(\lambda) &= |B - \lambda E| \\ &= |P^{-1}AP - (\lambda E)| \\ &= |P^{-1}(A - \lambda E)P| \\ &= |P^{-1}||A - \lambda E||P| \\ &= |A - \lambda E| \\ &= f_A(\lambda). \end{aligned}$$

5. **给出一个二阶方阵A使得A没有实特征值并解释原因.**

Solution. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$是一个旋转变换, 它表示将一个平面向量逆时针旋转90度, 从而A没有实特征向量以及实特征值. 答案不唯一.

6. **你是如何理解矩阵的特征值和特征向量的? 请给出解释.**

Solution. 这个题目希望大家能够对矩阵的特征值和特征向量有自己的理解.

7. **设λ是方阵A的特征值. 证明:**

(a) λ^k**是**A^k**的特征值.**

(b) **若**A**可逆, 则**$\frac{1}{\lambda}$**是**A^{-1}**的特征值.**

Solution. 令x是A的属于λ的特征向量, 则

$$Ax = \lambda x. \tag{1}$$

(a) 我们证明$A^k x = \lambda^k x$. 当$k = 2$时,

$$\begin{aligned} A^2 x &= A(Ax) \\ &= A(\lambda x) \\ &= \lambda(Ax) \\ &= \lambda^2 x. \end{aligned}$$

对$k \geq 3$用归纳法类似可证.

(b) 当A可逆时, 在(1)两边同乘A^{-1}:

$$x = A^{-1}(\lambda x).$$

两边同除λ可得$A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$.

8. **设**$u = (u_1, u_2)^T$**,** $v = (v_1, v_2)^T$**. 若**u**是2阶方阵**$A = uv^T$**的特征向量, 求**A**的所有特征值.**

Solution. 令λ是对应于特征向量u的特征值, 则

$$\begin{aligned} \lambda u &= Au \\ &= (uv^T)u \\ &= u(v^T u). \end{aligned}$$

因为u非零, $\lambda = v^T u$. 因为$|A| = 0$, 所以0是A的特征值. 所以, A的所有特征值为0和$v^T u$.

9. **设**$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$**. 我们在课堂中证明了对于任何的向量**$u_0 = (p, 1-p)^T$**, 由**$u_{k+1} = Au_k$ **(**$k = 0, 1, \ldots$**) 所定义的序列**$\{u_k\}$**会趋于一个平稳分布**$u_\infty = (0.6, 0.4)^T$**. 问当**k**趋于无穷时,** A^k**会趋于哪个矩阵? 给出推理.**

Solution. 对A按列分块有$A = (p_1, p_2)$. 则

$$\begin{aligned} A^k &= A^{k-1}A \\ &= A^{k-1}(p_1, p_2) \\ &= (A^{k-1}p_1, A^{k-1}p_2). \end{aligned}$$

由于A的每一列元素和为1,

$$A^k \to (u_\infty, u_\infty) = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad k \to \infty.$$

10. **回忆K_n表示n个顶点的完全图. 令$A = (a_{ij})$是K_n的邻接矩阵.**

  (a) **证明$A = J - I$, 其中J表示所有元素为1的矩阵.**

  (b) **求A的所有特征值.**

Solution.

(a) 根据A的定义,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & 如果\ i \neq j \\ 0 & 如果\ i = j. \end{cases}$$

所以, $A = J - I$.

(b) 首先我们计算J的特征值. 令$j = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, 则容易验证$Jj = nj$, 因此$\lambda_1 = n$是$J$的一个特征值. 因为$|J| = 0$, 故$\lambda = 0$是$J$的特征值. 根据定义, J的属于$\lambda = 0$的特征向量为齐次线性方程组$Jx = 0$的解, 即

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \tag{2}$$

的非零解.所以, $\lambda_1 = n$是J的1重特征值而$\lambda = 0$是J的$n-1$重特征值. 因为I的特征值为1且任意非零向量为属于1的特征向量, 所以$A = J - I$的特征值为$n - 1$ (1重)和-1 ($n - 1$重).

注: 上面的证明中我们用到了性质: 若λ是J的特征值以及μ是I的特征值, 则$\lambda - \mu$是A的特征值. 这个性质之所以成立是因为存在一个向量x使得x既是J的属于λ的特征向量又是I的属于μ的特征向量. 对一般的矩阵, 矩阵和差的特征值不一定等于矩阵特征值的和差.