高等数学
第二章：导数与微分

张道平

南开大学数学科学学院 414

daopingzhang@nankai.edu.cn

3. 高阶导数

定义：设函数 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 存在，若 $y'=f'(x)$ 在点 x_0 的导数存在，则称之为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的二阶导数，记为 $f''(x_0), y''(x_0)$ 或 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=x_0}$，即 $f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}$. 若函数 $y=f(x)$ 在某区间内每一点都存在二阶导数，则得到二阶导函数 $f''(x), y''(x)$ 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

定义：设函数 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 存在，若 $y'=f'(x)$ 在点 x_0 的导数存在，则称之为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的二阶导数，记为 $f''(x_0), y''(x_0)$ 或 $\frac{d^2y}{dx^2}\big|_{x=x_0}$，即 $f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}$. 若函数 $y=f(x)$ 在某区间内每一点都存在二阶导数，则得到二阶导函数 $f''(x), y''(x)$ 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

例：求 n 次多项式
$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的各阶导数.

定义：设函数 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 存在，若 $y'=f'(x)$ 在点 x_0 的导数存在，则称之为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的二阶导数，记为 $f''(x_0), y''(x_0)$ 或 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=x_0}$，即 $f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}$. 若函数 $y=f(x)$ 在某区间内每一点都存在二阶导数，则得到二阶导函数 $f''(x), y''(x)$ 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

例：求 n 次多项式 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的各阶导数.

例：求 $y=sinx$ 的 n 阶导数.

定义：设函数 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 存在，若 $y'=f'(x)$ 在点 x_0 的导数存在，则称之为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的二阶导数，记为 $f''(x_0), y''(x_0)$ 或 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=x_0}$，即 $f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}$. 若函数 $y=f(x)$ 在某区间内每一点都存在二阶导数，则得到二阶导函数 $f''(x), y''(x)$ 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

例：求 n 次多项式 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的各阶导数.

例：求 $y=sinx$ 的 n 阶导数.

例：求 $y=ln(1+x)$ 的 n 阶导数.

3. 高阶导数

莱布尼茨 (Leibniz) 公式：设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 有 n 阶导数，则 $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$，其中 $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

莱布尼茨 (Leibniz) 公式：设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 有 n 阶导数，则 $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$, 其中 $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

例：设 $y = e^{3x}x^2$, 求 $y^{(n)} (n \geq 3)$.

莱布尼茨 (Leibniz) 公式：设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 有 n 阶导数，则 $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$, 其中 $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

例：设 $y = e^{3x}x^2$, 求 $y^{(n)}(n \geq 3)$.

复合函数二阶导数的计算：设复合函数 $y = f[\varphi(x)]$, 且 $y = f(u)$，$u = \varphi(x)$, y 关于 x 的一阶导数为 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$, 利用乘积求导公式，有 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}(\frac{du}{dx})^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$.

例：设 $u=f[\varphi(x)+y^2]$, 其中方程 $y+e^y=x$ 确定 y 是 x 的函数，且 $f(x)$, $\varphi(x)$ 二阶可导，求 $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$.

例：设 $u=f[\varphi(x)+y^2]$，其中方程 $y+e^y=x$ 确定 y 是 x 的函数，且 $f(x)$，$\varphi(x)$ 二阶可导，求 $\frac{du}{dx}$，$\frac{d^2u}{dx^2}$.

例：摆线 (半径为 a 的圆轮沿直线滚动时轮子上一定点所形成的轨迹) 的参数方程为

$$\begin{cases} x=a(t-sint), \\ y=a(1-cost), \end{cases}$$

求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

例：设 $u = f[\varphi(x) + y^2]$, 其中方程 $y + e^y = x$ 确定 y 是 x 的函数，且 $f(x)$, $\varphi(x)$ 二阶可导，求 $\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}$.

例：摆线 (半径为 a 的圆轮沿直线滚动时轮子上一定点所形成的轨迹) 的参数方程为

$$\begin{cases} x = a(t - sint), \\ y = a(1 - cost), \end{cases}$$

求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

练习：设 $y = arctanx$，试证：

$y^{(n)} = (n-1)!sinn(y + \frac{\pi}{2})cos^n y$, 并求 $y^{(n)}(0)$.

练习：设 $y = \frac{ln x}{x}, x > 0$，求 $y^{(n)}$.

3. 高阶导数

练习：设 $y = \frac{ln x}{x}, x > 0$，求 $y^{(n)}$.

练习：$y = f(x)$ 和 $x = \varphi(y)$ 互为反函数，$f(x)$ 可导，且 $f'(x) \neq 0$, 试用 $f'(x), f''(x)$ 和 $f'''(x)$ 表示 $\varphi'(y), \varphi''(y)$ 和 $\varphi'''(y)$.

练习：设 $y=\frac{lnx}{x}, x>0$，求 $y^{(n)}$.

练习：$y=f(x)$ 和 $x=\varphi(y)$ 互为反函数，$f(x)$ 可导，且 $f'(x)\neq 0$, 试用 $f'(x), f''(x)$ 和 $f'''(x)$ 表示 $\varphi'(y), \varphi''(y)$ 和 $\varphi'''(y)$.

练习：曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称，已知 $f(1)=2, f'(2)=-3, f''(1)=\frac{2}{9}$. 求 $f'(1)$ 和 $f''(2)$.