线性代数–行列式作业

黄申为

2022 年 4 月 6 日

1. 设 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2), P_3(x_3,y_3)$ 是平面上的三个不共线的点. 证明三角形 $\Delta_{P_1P_2P_3}$ 的面积为 $\frac{1}{2}|D|$, 其中
$$D = \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}.$$

2. 用定义计算三阶行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

3. 写出四阶行列式含 $a_{12}a_{23}$ 的项.

4. 判断排列 $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$ 的奇偶性.

5. 若 $j_1j_2\dots j_n$ 的逆序数为 k, 求 $j_n\dots j_2j_1$ 的逆序数.

6. 计算行列式
$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

7. 设
$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix},$$
其中 D 的 (i,j) 元的代数余子式记作 A_{ij}, 求 $A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$.

8. **计算下列行列式** (D_k **为** k **阶行列式**):

(a) $D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$.

(b) $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & \cdots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n & n & n \\ n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}$, 这里 $n \geq 3$.

(c) $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$.

9. 设

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

满足对所有 $i, j = 1, 2, \ldots, n$ 有 $a_{ij} = -a_{ji}$. 证明当 n 为奇数时 $D_n = 0$.

10.
- 一个图 G 是一个二元组 (V, E), 其中 V 称为 G 的顶点集, 而 E 是 V 中若干二元子集的集合, 称为 G 的边集. 比如

  $$G = (\{v_1, v_2, v_3\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}\})$$

  是一个图. 直观的我们可以用一个圆圈代表 V 中的每个顶点, 并且如果 $\{v, u\}$ 是 E 中的元素, 那么我们在代表 u 和 v 的圆圈之间连一条线, 如下图所示.
- 给定一个图 $G = (V, E)$, 其中 $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, 我们可以按照如下方式定义一个与 G 关联的多元多项式:

  $$A(G) = \prod_{i<j:\{i,j\}\in E} (x_j - x_i),$$

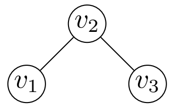

图 1: 一个图的例子.

其中 x_j 是对应顶点 j 的变量. 比如与 $G = (\{1,2,3\},\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\})$ 关联的多项式为

$$A(G) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

注意到上述式子乘开后, 若不合并同类项应该有 $2^3 = 8$ 项: 每项对应从每个 $x_j - x_i$ 中选择一个变量的选择方式, 也就是

$$A(G) = x_2x_3^2 - x_1x_2x_3 - x_1x_3^2 + x_1^2x_3 - x_2^2x_3 + x_2^2x_1 + x_1x_2x_3 + x_1^2x_2.$$

但是合并同类项后, 其中 $+x_1x_2x_3$ 与 $-x_1x_2x_3$ 抵消, 最后只剩下 6 项:

$$A(G) = x_2x_3^2 - x_1x_3^2 + x_1^2x_3 - x_2^2x_3 + x_2^2x_1 + x_1^2x_2.$$

对于一个一般的有 m 条边的图 G, 合并同类项前 $A(G)$ 展开中应该有 2^m 项, 但是合并同类项后剩下的项数可能会小于 2^m.

- 给定一个图 G, 如果 G 中任何两条顶点之间都有边, 那么 G 就称为是完全图, 有 n 个顶点的完全图记做 K_n. 问题: 求 K_n 的关联多项式 $A(K_n)$ 合并同类项后的项数.