线性代数-线性变换

- 线性变换的定义和性质
- 线性变换的矩阵
- 线性变换在不同基下的矩阵
- 矩阵的特征值和特征向量

6.1 线性变换的定义和性质

线性变换的定义

定义(线性变换). 设V和U是线性空间，$T: V \longrightarrow U$是一个映射. 如果

- $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in V$，$T(\alpha_1 + \alpha_2) = T\alpha_1 + T\alpha_2$;
- $\forall \alpha \in V, k \in \mathbb{R}$，$T(k\alpha) = kT\alpha$;

则称T是V到U的一个线性变换.

如果$U = V$，则称T是V中的线性变换.

例 1：设V是线性空间.

- $T: V \longrightarrow V$使得$T\alpha = \alpha, \forall \alpha \in V$是$V$中的线性变换，称为恒等变换.
- $T: V \longrightarrow V$使得$T\alpha = 0_V, \forall \alpha \in V$是$V$中的线性变换.

线性变换的定义

例 2：设$V = P[x]_2$.

（1）微分运算$D: V \longrightarrow V$使得$Df = f', \forall f \in V$是V中的线性变换.

$$\forall f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, g = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \text{以及} k \in \mathbb{R}, \text{有}$$

- $D(f+g) = D\big((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2\big)$

$$= (a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2)x$$

$$= (a_1 + 2a_2 x) + (b_1 + 2b_2 x)$$

$$= Df + Dg.$$

- $D(kf) = D(ka_0 + (ka_1)x + (ka_2)x^2)$

$$= ka_1 + 2ka_2 x$$

$$= k(a_1 + 2a_2 x) = kDf.$$

线性变换的定义

例 2(续)：设$V=P[x]_2$.

(2) 变换$T: P[x]_2 \longrightarrow P[x]_2$使得$Tf=a_0, \forall f=a_0+a_1x+a_2x^2 \in P[x]_2$是$V$中的线性变换.（自证）

(3) 变换$T: P[x]_2 \longrightarrow P[x]_2$使得$Df=1, \forall f=a_0+a_1x+a_2x^2 \in P[x]_2$不是$V$中的线性变换.

$$T(2f) \neq 2T(f).$$

线性变换的定义

例 3：旋转变换与投影变换.

- $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$使得$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$是线性变换.
- $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$使得$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$是线性变换.

线性变换的定义

练习. 令V是n阶对称阵全体关于矩阵加法和数乘构成的线性空间. 对于n阶可逆阵P, 证明合同变换

$$T(A) = P^T AP, \forall A \in V,$$

是V中的线性变换.

线性变换的性质

设V,U是线性空间，$T:V\longrightarrow U$是一个线性变换.

性质 1：$\boldsymbol{T0_V = 0_U}$；$\boldsymbol{T(-\alpha) = -T\alpha}$.

证明. $T(-\alpha) = T\big((-1)\alpha\big)$ 线性空间的性质 3

$= -1(T\alpha)$ 线性变换的定义

$= -T\alpha.$ 线性空间的性质 3

因为$V \neq \emptyset$, 可取$\alpha \in V$. 则$0_V = \alpha + (-\alpha)$.

两边用T作用:

$$T0_V = T\big(\alpha + (-\alpha)\big) = T\alpha + T(-\alpha) = T\alpha + (-T\alpha) = 0_U. \quad \blacksquare$$

线性变换的性质

设V,U是线性空间，$T:V\longrightarrow U$是一个线性变换.

性质 2：**若$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{k_1\alpha_1}+\cdots+\boldsymbol{k_r\alpha_r}$，则$\boldsymbol{T\beta}=\boldsymbol{k_1T\alpha_1}+\cdots+\boldsymbol{k_rT\alpha_r}$.**

证明. 由线性变换的定义可得. ■

性质 3：**若$\boldsymbol{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}\in\boldsymbol{V}$线性相关，则$\boldsymbol{T\alpha_1,\ldots,T\alpha_r}$也线性相关.**

证明. 因$\alpha_1,\ldots,\alpha_r\in V$线性相关，存在不全为0的实数$k_1,\ldots,k_r$使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=0_V.$$

两边用T作用：

$$T(k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r)=T0_V.$$

由**性质 1 和 性质 2**，$k_1T\alpha_1+\cdots+k_rT\alpha_r=0_U$. 故$T\alpha_1,\ldots,T\alpha_r$线性相关. ■

说明. 线性变换将线性相关的向量映成线性相关的向量，但不一定把线性无关的向量映成线性无关的向量(反例?).

线性变换的性质

设V,U是线性空间，$T:V\longrightarrow U$是一个线性变换.

性质 4：**$\boldsymbol{T}$的像集$\mathbf{Im}(\boldsymbol{T})=\{\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{U}|\exists\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$使得$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{T\alpha}\}\subseteq\boldsymbol{U}$是$\boldsymbol{U}$的子空间.**

证明. 任取$\beta_1,\beta_2\in\mathrm{Im}(T)$，存在$\alpha_1,\alpha_2\in V$使得

$$T\alpha_1=\beta_1,\quad T\alpha_2=\beta_2.$$

- $\beta_1+\beta_2=T\alpha_1+T\alpha_2=T(\alpha_1+\alpha_2)$，故$\beta_1+\beta_2\in\mathrm{Im}(T)$.
- 任给$k\in\mathbb{R}$，$k\beta_1=kT\alpha_1=T(k\alpha_1)$，故$k\beta_1\in\mathrm{Im}(T)$.

这表明$\mathrm{Im}(T)$关于U的加法和数乘运算封闭，由子空间判定定理，$\mathrm{Im}(T)$是U的子空间. ■

线性变换的性质

设V,U是线性空间，$T: V \longrightarrow U$是一个线性变换.

性质 5：$\boldsymbol{T}$**的零空间**$\boldsymbol{N_T} = \{\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V} | \boldsymbol{T\alpha} = \mathbf{0}_{\boldsymbol{U}}\} \subseteq \boldsymbol{V}$**是**$\boldsymbol{V}$**的子空间.**

证明. 只需证明N_T关于V的加法和数乘封闭.

任取$\alpha_1, \alpha_2 \in N_T$以及$k \in \mathbb{R}$,

- $T(\alpha_1 + \alpha_2) = T\alpha_1 + T\alpha_2 = 0_U + 0_U = 0_U$，故$\alpha_1 + \alpha_2 \in N_T$.
- $T(k\alpha_1) = kT\alpha_1 = k0_U = 0_U$，故$k\alpha_1 \in N_T$. ■

线性变换的性质

最重要的例子. 设A为$m \times n$矩阵. 令

$$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$x \longmapsto Ax$$

则T是一个线性变换.

- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $T(x+y) \triangleq A(x+y) = Ax + Ay = Tx + Ty$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$, $T(kx) \triangleq A(kx) = k(Ax) = kTx$.

T的像集$\mathrm{Im}(T) = \{Ax | x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$. 对$A$按列分块有

$$Ax = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n.$$

故$\mathrm{Im}(T) = L(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, 即$T$的像集是矩阵$A$的列所生成的子空间.

线性变换的性质

最重要的例子. 设A为$m \times n$矩阵. 令

$$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$x \longmapsto Ax$$

- T的像集是矩阵A的列所生成的子空间.
- T的零空间$N_T = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$是齐次线性方程组的解空间.

定理(Counting Theorem). $\mathbf{dim}(\mathbf{Im}(\boldsymbol{T})) + \mathbf{dim}(\boldsymbol{N_T}) = \boldsymbol{n}.$

A的列数

证明. 由**齐次线性方程组解集的秩**, $\dim(N_T) = n - R(A)$.

另一方面, 由**生成子空间维数公式**,

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim\big(L(a_1, a_2, \dots, a_n)\big) = R(A).$$

故$\dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(N_T) = R(A) + \big(n - R(A)\big) = n.$ ∎

6.2 线性变换的矩阵

线性变换的矩阵

定义(线性变换的矩阵). 设$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$是线性空间V的基, $T: V \longrightarrow V$是一个线性变换. 则$T\alpha_i, 1 \leq i \leq n$可由$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$唯一的线性表示:

$$\begin{cases} T\alpha_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n \\ T\alpha_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n \\ \qquad\vdots \\ T\alpha_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n \end{cases}.$$

则$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$称作$T$在基$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$下的矩阵.

记忆. A的第i列是$T\alpha_i$在$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$下的坐标.

线性变换的矩阵

例 1：求微分运算D在$p_1 = x^3, p_2 = x^2, p_3 = x, p_4 = 1 \in P[x]_3$下的矩阵.

解：
$$\begin{cases} Dp_1 = & 3x^2 & = 0p_1 & + 3p_2 & + 0p_3 & + 0p_4 \\ Dp_2 = & 2x & = 0p_1 & + 0p_2 & + 2p_3 & + 0p_4 \\ Dp_3 = & 1 & = 0p_1 & + 0p_2 & + 0p_3 & + 1p_4 \\ Dp_4 = & 0 & = 0p_1 & + 0p_2 & + 0p_3 & + 0p_4 \end{cases}.$$

故D在$p_1 = x^3, p_2 = x^2, p_3 = x, p_4 = 1 \in P[x]_3$下的矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

说明. 线性变换的矩阵与基向量的顺序是有关的.

$$D\text{在}p_4, p_3, p_2, p_1\text{下的矩阵为}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

线性变换的矩阵

例 2：设T为$\mathbb{R}^3$中表示将给定向量投影到xOy平面的线性变换，即

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

（a）求T在基e_1, e_2, e_3下的矩阵.

（b）求T在基$\alpha = e_1, \beta = e_2, \gamma = e_1 + e_2 + e_3$下的矩阵.

解：（a）$Te_1 = e_1 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3.$

$Te_2 = e_2 = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3.$

$Te_3 = \mathbf{0} \ = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3.$

故T在基e_1, e_2, e_3下的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

线性变换的矩阵

例 2：设T为$\mathbb{R}^3$中表示将给定向量投影到xOy平面的线性变换，即

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}.$$

（a）求T在基e_1,e_2,e_3下的矩阵.

（b）求T在基$\alpha=e_1,\beta=e_2,\gamma=e_1+e_2+e_3$下的矩阵.

解：（b）$T\alpha=\alpha=1\alpha+0\beta+0\gamma.$

$$T\beta=\beta=0\alpha+1\beta+0\gamma.$$

$$T\gamma=T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=1\alpha+1\beta+0\gamma.$$

故T在基α,β,γ下的矩阵为$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$

线性变换的矩阵

练习：函数集合$V=\{(a_2x^2+a_1x+a_0)e^x|a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$关于函数的加法和数乘构成了一个3维线性空间．求微分运算D在基

$$\alpha_1=x^2e^x,\alpha_2=xe^x,\alpha_3=e^x$$

下的矩阵.

线性变换的矩阵

定义(线性变换的矩阵). 设$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$是线性空间V的基, $T:V\longrightarrow V$是一个线性变换. 则$T\alpha_i, 1\le i\le n$可由$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$唯一的线性表示:

$$\begin{cases} T\alpha_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n \\ T\alpha_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n \\ \qquad\qquad\vdots \\ T\alpha_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n \end{cases}.$$

则$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$称作$T$在基$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$下的矩阵.

形式等式. $(\boldsymbol{T\alpha_1},\boldsymbol{T\alpha_2},\ldots,\boldsymbol{T\alpha_n})=(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},\ldots,\boldsymbol{\alpha_n})\boldsymbol{A}.$

线性变换的矩阵

引理(利用线性变换的矩阵计算坐标). **设$\boldsymbol{T}$是线性空间$\boldsymbol{V}$中的线性变换且在基$\boldsymbol{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$下的矩阵为$\boldsymbol{A}$. 若$\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$在$\boldsymbol{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$下的坐标为$\boldsymbol{x}$, 则$\boldsymbol{T\alpha}$在$\boldsymbol{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$下的坐标为$\boldsymbol{Ax}$.**

证明. 根据假设, $\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n$.

两边用T作用:

$$T\alpha = (T\alpha_1,\ldots,T\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)Ax. \quad \blacksquare$$

线性变换的矩阵

定理(线性变换与矩阵一一对应). **给定$\boldsymbol{n}$阶方阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a_{ij}})$以及$\boldsymbol{n}$维线性空间$\boldsymbol{V}$的基$\boldsymbol{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$，存在唯一的$\boldsymbol{V}$中的线性变换$\boldsymbol{T}$使得$\boldsymbol{T}$在$\boldsymbol{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$下的矩阵恰好为$\boldsymbol{A}$.**

证明. 令$T:V\longrightarrow V$使得

- $T\alpha_i \triangleq a_{1i}\alpha_1+\cdots+a_{ni}\alpha_n, 1\le i\le n.$
- 任给$\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n\in V$,

$$T\alpha \triangleq x_1T\alpha_1+\cdots+x_nT\alpha_n.$$

则T在$\alpha_1,\dots,\alpha_n$下的矩阵为A.

线性变换的矩阵

- $T\alpha_i \triangleq a_{1i}\alpha_1 + \cdots + a_{ni}\alpha_n, 1 \le i \le n.$
- 任给$\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n \in V$,

$$T\alpha \triangleq \ x_1T\alpha_1 + \cdots + x_nT\alpha_n.$$

证明(续). 下证T是V中的线性变换.

- 设$\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n, \beta = y_1\alpha_1 + \cdots + y_n\alpha_n$,

$$\begin{aligned} T(\alpha+\beta) &= T\big((x_1+y_1)\alpha_1 + \cdots + (x_n+y_n)\alpha_n\big) \\ &= (x_1+y_1)T\alpha_1 + \cdots + (x_n+y_n)T\alpha_n \\ &= (x_1T\alpha_1 + \cdots + x_nT\alpha_n) + (y_1T\alpha_1 + \cdots + y_nT\alpha_n) \\ &= T\alpha + T\beta. \end{aligned}$$

线性变换的矩阵

- $T\alpha_i \triangleq a_{1i}\alpha_1 + \cdots + a_{ni}\alpha_n, 1 \le i \le n.$
- 任给$\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n \in V$,

$$T\alpha \triangleq x_1 T\alpha_1 + \cdots + x_n T\alpha_n.$$

证明(续). 下证T是V中的线性变换.

- 设$k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(k\alpha) &= T((kx_1)\alpha_1 + \cdots + (kx_n)\alpha_n) \\ &= (kx_1)T\alpha_1 + \cdots + (kx_n)T\alpha_n \\ &= kT\alpha. \end{aligned}$$

线性变换的矩阵

证明(续). 下证唯一性. 若T'是V中的线性变换且T'在$\alpha_1, \dots, \alpha_n$的矩阵为$A$, 则$T' = T$, 即$T\alpha = T'\alpha, \forall \alpha \in V$.

- T'在$\alpha_1, \dots, \alpha_n$的矩阵为$A$, 则$T'\alpha_i = T\alpha_i, 1 \le i \le n$.
- 任取$\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n \in V$. 则

$$\begin{aligned} T'\alpha &= T'(x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n) \\ &= x_1T'\alpha_1 + \cdots + x_nT'\alpha_n \\ &= x_1T\alpha_1 + \cdots + x_nT\alpha_n \\ &= T\alpha. \end{aligned}$$

■

6.3 线性变换在不同基下的矩阵

线性变换的矩阵

回顾. 设T为$\mathbb{R}^3$中将给定向量投影到xOy平面的线性变换，则

- T在基e_1, e_2, e_3下的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- T在基$\alpha = e_1, \beta = e_2, \gamma = e_1 + e_2 + e_3$下的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

问题: 同一线性变换在不同基下的矩阵有怎么样的联系?

线性变换的矩阵

定理(线性变换在不同基下的矩阵). **设$\boldsymbol{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$和$\boldsymbol{\beta_1,\dots,\beta_n}$是线性空间$\boldsymbol{V}$的两个基，$\boldsymbol{P}$是$\boldsymbol{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$到$\boldsymbol{\beta_1,\dots,\beta_n}$的过渡矩阵．若线性变换$\boldsymbol{T: V \longrightarrow V}$在$\boldsymbol{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$下的矩阵为$\boldsymbol{A}$，在$\boldsymbol{\beta_1,\dots,\beta_n}$下的矩阵为$\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{B = P^{-1}AP}$.**

证明. 根据假设,

$$(\beta_1,\dots,\beta_n) = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)P \qquad (1)$$

$$(T\alpha_1,\dots,T\alpha_n) = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)A \qquad (2)$$

$$(T\beta_1,\dots,T\beta_n) = (\beta_1,\dots,\beta_n)B \qquad (3)$$

在(1)两边同时右乘P^{-1}:

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = (\beta_1,\dots,\beta_n)P^{-1} \qquad (4)$$

在(1)两边同时用T作用:

$$\begin{aligned}(T\beta_1,\dots,T\beta_n) &= (T\alpha_1,\dots,T\alpha_n)P && \text{线性变换性质 2}\\ &= (\alpha_1,\dots,\alpha_n)AP && (2)\\ &= (\beta_1,\dots,\beta_n)P^{-1}AP. && (4)\end{aligned}$$

因为B和$P^{-1}AP$都是T在$\beta_1,\dots,\beta_n$下的矩阵，$B = P^{-1}AP$. ■

线性变换的矩阵

例：设2维线性空间V中的线性变换T在基α_1,α_2下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

求T在α_2,α_1下的矩阵.

解：$(\alpha_2,\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2)P$，其中$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

注意到$P^{-1}=P$. 由**线性变换在不同基下的矩阵定理**，T在α_2,α_1下的矩阵为

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

线性变换的矩阵

练习. 设3维线性空间V中的线性变换T在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为$A=(a_{ij})$，求$T$在基$\alpha_1,k\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵，其中$k\neq 0$.

思考：若B是A经过一次初等列变换而得到的，是否一定有可逆矩阵P使得$P^{-1}AP=B$?

线性变换的矩阵

定义(相似关系). 设A,B为n阶方阵. 若存在n阶可逆矩阵P使得$B=P^{-1}AP$，则称A相似于B，记作$A\sim_s B$.

性质. **相似关系是等价关系.**

证明.

- 反身性：$A=E_n^{-1}AE_n$.
- 对称性：若$B=P^{-1}AP$，则$A=PBP^{-1}$.
- 传递性：若$B=P^{-1}AP$，$C=Q^{-1}BQ$，则

$$C=(PQ)^{-1}A(PQ).$$

■

线性变换的矩阵

线性变换在不同基下的矩阵定理：同一线性变换在不同基下的矩阵是相似的.

问题：逆命题是否成立?

定理(相似矩阵). **设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$为不同的$\boldsymbol{n}$阶方阵且$\boldsymbol{A} \sim_s \boldsymbol{B}$. 则$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$必为某个$\boldsymbol{n}$维线性空间$\boldsymbol{V}$中的线性变换在两个不同基下的矩阵.**

证明. 因$A \sim_s B$，存在n阶可逆矩阵P使得$B = P^{-1}AP$.

由**矩阵与线性变换的一一对应关系**，A必是V中某个线性变换T在某个基$\alpha_1, \dots, \alpha_n$下的矩阵.

令$\beta_1, \dots, \beta_n$满足$(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)P$.

则因P可逆，$\beta_1, \dots, \beta_n$是V的基. 而T在$\beta_1, \dots, \beta_n$下的矩阵为B. ∎

6.4 矩阵的特征值和特征向量

矩阵的特征值和特征向量

问题：给定n维线性空间V中的线性变换T, 能否选取V的基使得T在选定基下的矩阵有“简洁的”形式?

对角矩阵

矩阵形式. 给定n阶方阵A, 是否存在n阶可逆矩阵P使得$P^{-1}AP$为对角矩阵?

矩阵的特征值和特征向量

问题：给定n阶方阵A，是否存在n阶可逆矩阵P使得$P^{-1}AP$为对角矩阵?

探索：从必要条件出发.

- 假设存在n阶可逆矩阵P使得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$.
- 两边左乘P：$AP=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$.
- 对P按列分块：$A(p_1,\dots,p_n)=(p_1,\dots,p_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$

$$\Updownarrow$$

$$(Ap_1,\dots,Ap_n)=(\lambda_1 p_1,\dots,\lambda_n p_n).$$

即$\boldsymbol{Ap_i=\lambda_i p_i}$，$\quad i=1,\dots,n.$

矩阵的特征值和特征向量

定义(特征值和特征向量). 设A为n阶方阵. 若存在$\lambda \in \mathbb{R}$和$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$使得

$$Ax = \lambda x,$$

则称λ是A的特征值；非零向量x是A的属于λ的特征向量.

几何解释.

- 矩阵A是一个线性函数，x是A的输入而Ax是输出.
- 若输出向量Ax与输入向量x在同一“直线”上，则x为特征向量. 数λ是拉伸因子.

矩阵的特征值和特征向量

例 1：求$R=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解：R是一个对称变换，即将平面上的给定点变成关于直线$y=x$的对称点的变换.

问题：平面上的哪些点p满足Rp和p在同一直线上?

- 若p位于直线$y=x$上，则$Rp=p$也位于$y=x$上

⇨ $\lambda=1$是R的特征值，属于$\lambda=1$的特征向量为$y=x$上除原点外的所有点.

- 若p位于直线$y=-x$上，则$Rp=-p$也位于$y=-x$上

⇨ $\lambda=-1$是R的特征值，属于$\lambda=-1$的特征向量为$y=-x$上除原点外的所有点.

矩阵的特征值和特征向量

例 2：求$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解：P是将xOy平面上的给定点投影到x轴上的变换.

问题：平面上的哪些点p满足p在x轴上的投影点和p在同一直线上?

- 若p位于x轴上，则$Pp = p$也位于x轴上

⇨ $\lambda = 1$是P的特征值，属于$\lambda = 1$的特征向量为x轴上除原点外的所有点.

- 若p位于y轴上，则$Pp = \mathbf{0} = 0p$也位于y轴上

⇨ $\lambda = 0$是P的特征值，属于$\lambda = 0$的特征向量为y轴上除原点外的所有点.

矩阵的特征值和特征向量

特征值和特征向量的计算方法. 设$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$.

- $Ax_0=\lambda x_0 \Leftrightarrow (A-\lambda E)x_0=0$. 若$x_0$是$A$的特征向量，则$x_0$是齐次线性方程组$(A-\lambda E)x=0$的非零解. 由线性方程组理论，$(A-\lambda E)x=0$有非零解当且仅当$|A-\lambda E|=0$.
- $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$ 是关于λ的n次多项式，称为A的特征多项式，记作$f_A(\lambda)$.

  因此，**A的特征值为$f_A(\lambda)$的根**.
- 对于A的给定特征值λ^*，**A的属于λ^*的特征向量为$(A-\lambda^* E)x=0$的非零解.**

矩阵的特征值和特征向量

例 1：求$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解：$f_A(\lambda)=|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 3-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)^2.$

故A的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1.$

- $\lambda_1=2$时，$A-2E=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim_r\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$

故$(A-2E)x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\end{cases}$. 选取$x_3$为自由未知量, 得基础解系为$p_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

故属于$\lambda_1=2$的特征向量为$kp_1(k\neq 0)$.

- $\lambda_2=\lambda_3=1$时, $A-E=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim_r\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$

故$(A-E)x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_3=0\\ x_2+2x_3=0\end{cases}$. 选取$x_3$为自由未知量, 得基础解系$p_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

故属于$\lambda_2=\lambda_3=1$的特征向量为$kp_2(k\neq 0)$.

矩阵的特征值和特征向量

例 2：求$A=\begin{pmatrix}0.8 & 0.3\\0.2 & 0.7\end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解：$f_A(\lambda)=\begin{vmatrix}0.8-\lambda & 0.3\\0.2 & 0.7-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-\frac{1}{2})$.

故A的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=\frac{1}{2}$.

- $\lambda_1=1$时，$A-E=\begin{pmatrix}-0.2 & 0.3\\0.2 & -0.3\end{pmatrix}\sim_r\begin{pmatrix}1 & -3/2\\0 & 0\end{pmatrix}$.

  故属于$\lambda_1=1$的特征向量为$k\begin{pmatrix}3/2\\1\end{pmatrix}(k\neq 0)$.

- $\lambda_2=1/2$时, $A-\frac{1}{2}E=\begin{pmatrix}0.3 & 0.3\\0.2 & 0.2\end{pmatrix}\sim_r\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$.

  故属于$\lambda_2=1/2$的特征向量为$k\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}(k\neq 0)$.

说明. 所有元素非负且每列列和为1的矩阵称为马尔可夫(Markov)矩阵.

矩阵的特征值和特征向量

设$A=(a_{ij})$为n阶方阵, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$为$A$的特征值.

性质 1. $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$.

证明. 由定义, $f_A(\lambda)=|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$ (1)

又$f_A(\lambda)$可因式分解为$f_A(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$. (2)

比较(1)与(2)中λ^{n-1}的系数:

- (2) $(-1)^{n-1}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$
- (1) $(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})$

(行列式展开中只有主对角线乘积会出现λ^{n-1})

性质得证. ■

性质 2. $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$.

证明. $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=f_A(0)=|A|$. ■

矩阵的特征值和特征向量

定理(属于不同特征值的特征向量是线性无关的). **设$\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k}$是$\boldsymbol{n}$阶方阵$\boldsymbol{A}$的$\boldsymbol{k}$个互异的特征值且$\boldsymbol{p_1, p_2, \ldots, p_k}$分别是$\boldsymbol{A}$的属于$\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k}$的特征向量. 则$\boldsymbol{p_1, p_2, \ldots, p_k}$线性无关.**

证明. 对k用归纳法.

当$k = 1$时, p_1线性无关(特征向量是非零的).

现假设$k \geq 2$且结论对$k - 1$成立.

令
$$x_1 p_1 + \cdots + x_{k-1} p_{k-1} + x_k p_k = \mathbf{0}. \tag{1}$$

上式两边用A左乘:

$$x_1(Ap_1) + \cdots + x_{k-1}(Ap_{k-1}) + x_k(Ap_k) = \mathbf{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1 \lambda_1 p_1 + \cdots + x_{k-1} \lambda_{k-1} p_{k-1} + x_k \lambda_k p_k = \mathbf{0} \tag{2}$$

矩阵的特征值和特征向量

定理(属于不同特征值的特征向量是线性无关的). **设$\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k}$是$\boldsymbol{n}$阶方阵$\boldsymbol{A}$的$\boldsymbol{k}$个互异的特征值且$\boldsymbol{p_1, p_2, \dots, p_k}$分别是$\boldsymbol{A}$的属于$\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k}$的特征向量. 则$\boldsymbol{p_1, p_2, \dots, p_k}$线性无关.**

证明(续). $x_1 p_1 + \cdots + x_{k-1} p_{k-1} + x_k p_k = \mathbf{0}.$ (1)

$$x_1 \lambda_1 p_1 + \cdots + x_{k-1} \lambda_{k-1} p_{k-1} + x_k \lambda_k p_k = \mathbf{0} \tag{2}$$

- (2)式减去(1)式的λ_k倍:

$$x_1(\lambda_1 - \lambda_k) p_1 + \cdots + x_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) p_{k-1} = \mathbf{0}.$$

- 由归纳假设, $p_1, \dots, p_{k-1}$线性无关. 故$x_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0, i = 1, \dots, k-1.$
- 因$\lambda_i \neq \lambda_k (i = 1, \dots, k-1)$, $x_i = 0.$
- 代入(1)式得$x_k p_k = \mathbf{0}$. 因$p_k \neq \mathbf{0}$, $x_k = 0.$

故$p_1, p_2, \dots, p_k$线性无关. ■

矩阵的特征值和特征向量

定理(属于不同特征值的特征向量是线性无关的). **设$\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k}$是$\boldsymbol{n}$阶方阵$\boldsymbol{A}$的$\boldsymbol{k}$个互异的特征值且$\boldsymbol{p_{j1}, p_{j2}, \ldots, p_{jr_j}}$是$\boldsymbol{A}$的属于$\boldsymbol{\lambda_j}$的$\boldsymbol{r_j}$个线性无关的特征向量. 则**

$$\boldsymbol{p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1r_1}, p_{21}, p_{22}, \ldots, p_{2r_2}, p_{k1}, p_{k2}, \ldots, p_{kr_k}}$$

线性无关.

证明. 练习. ■

矩阵的特征值和特征向量

例：设λ_1, λ_2是A的两个不同的特征值且p_1和p_2分别是属于λ_1和λ_2的特征向量．证明$p_1 + p_2$不是A的特征向量.

证明．假设$p_1 + p_2$是A的属于λ的特征向量.

- $A(p_1 + p_2) = \lambda(p_1 + p_2)$.
- 因$Ap_1 = \lambda_1 p_1, Ap_2 = \lambda_2 p_2$，从而$A(p_1 + p_2) = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$.

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = \lambda(p_1 + p_2)$$

$$\Updownarrow$$

$$(\lambda_1 - \lambda) p_1 + (\lambda_2 - \lambda) p_2 = \mathbf{0}$$

- 因p_1, p_2线性无关，$(\lambda_1 - \lambda) = (\lambda_2 - \lambda) = 0$，从而$\lambda_1 = \lambda_2$.

这与λ_1, λ_2互异矛盾. ∎

矩阵的特征值和特征向量的应用

问题：给定n阶方阵A，是否存在n阶可逆矩阵P使得$P^{-1}AP$为对角矩阵?

定理(矩阵可对角化的充要条件)．**一个$\boldsymbol{n}$阶方阵$\boldsymbol{A}$可以相似对角化当且仅当$\boldsymbol{A}$有$\boldsymbol{n}$个线性无关的特征向量.**

证明． **必要性.** 假设存在可逆阵P使得$P^{-1}AP = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

对P按列分块有

$$A(p_1, \dots, p_n) = (p_1, \dots, p_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 p_1, \dots, \lambda_n p_n).$$

即$Ap_i = \lambda_i p_i, 1 \le i \le n$. 故$p_i$是$A$的特征向量.

因P可逆，$p_1, \dots, p_n$线性无关.

矩阵的特征值和特征向量的应用

问题：给定n阶方阵A，是否存在n阶可逆矩阵P使得$P^{-1}AP$为对角矩阵?

定理(矩阵可对角化的充要条件). **一个n阶方阵A可以相似对角化当且仅当A有n个线性无关的特征向量.**

证明(续). **充分性.** 假设A有n个线性无关的特征向量$p_1, \dots, p_n$. 令λ_i是对应于p_i的特征值.

因$p_1, \dots, p_n$线性无关, $P \triangleq (p_1, \dots, p_n)$可逆.

又$Ap_i = \lambda_i p_i$, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$. ■

矩阵的特征值和特征向量的应用

问题：给定n阶方阵A，是否存在n阶可逆矩阵P使得$P^{-1}AP$为对角矩阵?

定理(矩阵可对角化的充分条件). **若$\boldsymbol{n}$阶方阵$\boldsymbol{A}$有$\boldsymbol{n}$个互异的特征值，则$\boldsymbol{A}$可以相似对角化.**

证明. 由属于不同特征值的特征向量线性无关以及充要条件可得. ■

矩阵的特征值和特征向量的应用

例 1：$A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$是否可以相似对角化？

解：$f_A(\lambda)=\begin{vmatrix}-2-\lambda&1&1\\0&2-\lambda&0\\-4&1&3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2$. 故$A$的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2$.

- $\lambda_1=-1$时，$A+E=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&3&0\\-4&1&4\end{pmatrix}\sim_r\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. 则基础解系为$p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.
- $\lambda_2=\lambda_3=2$时, $A-2E=\begin{pmatrix}-4&1&1\\0&0&0\\-4&1&1\end{pmatrix}\sim_r\begin{pmatrix}1&-1/4&-1/4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

则基础解系为$p_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\1\\0\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\0\\1\end{pmatrix}$.

令$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}1&1/4&1/4\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. 则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

说明. 特征值的顺序应与特征向量的顺序一致!

矩阵的特征值和特征向量的应用

例 2: $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$是否能够相似对角化?

解: 由之前的计算, A的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1.$

- 故属于$\lambda_1=2$的特征向量为$k\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}(k\neq 0).$
- 故属于$\lambda_2=\lambda_3=1$的特征向量为$k\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}(k\neq 0).$

A没有3个线性无关的特征向量, 故A不能相似对角化.

矩阵的特征值和特征向量的应用

练习. $A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$是否能够相似对角化?

矩阵的特征值和特征向量的应用

人口迁移问题. 设有S和T两座城市且2022年初的人口分布为$u_0=\begin{pmatrix}0.5\\0.5\end{pmatrix}$.

每年这两个城市的人口按照如下规律在S和T之间迁移:

$$u_{k+1}=Au_k,\ k=0,1,\dots,$$

其中$A=\begin{pmatrix}0.8 & 0.3\\0.2 & 0.7\end{pmatrix}$. 求$u_k$以及当$k$充分大时$S$和$T$的人口分布情况.

解: 因为A是马尔可夫矩阵, 总人口在人口迁移过程中既没有增加也没有减少.

$u_{k+1}=\begin{pmatrix}0.8 & 0.3\\0.2 & 0.7\end{pmatrix}u_k$的意思是下一年

- S中人口的80%仍然留在S, 而20%迁移到T.
- T中人口的70%仍然留在T, 而30%迁移到S.

矩阵的特征值和特征向量的应用

解(续): A的特征值为

- $\lambda_1 = 1$, $p_1 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$是属于$\lambda_1 = 1$的特征向量.
- $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$属于$\lambda_2 = 1/2$的特征向量.

因属于不同特征值的特征向量是线性无关的, p_1, p_2是$\mathbb{R}^2$的基,

从而u_0可由p_1, p_2唯一地线性表示:

$$u_0 = x_1 p_1 + x_2 p_2. \qquad (*)$$

将$u_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$代入(*)得$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} x_1 - x_2 = \frac{1}{2} \\ x_1 + x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}.$

故$x_1 = \frac{2}{5}, x_2 = \frac{1}{10}$.

矩阵的特征值和特征向量的应用

解（续）：

$$u_0 = x_1 p_1 + x_2 p_2. \qquad x_1 = 2/5, x_2 = 1/10 \qquad (*)$$

在 (*) 两边左乘A^k得：

$$u_k = x_1 \lambda_1^k p_1 + x_2 \lambda_2^k p_2$$

$$= \frac{2}{5} \mathbf{1}^k \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} \qquad k \longrightarrow \infty$$

当k充分大时，S和T的人口分布趋于一个平稳分布$u_\infty = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}$.

矩阵的特征值和特征向量的应用

思考：若$u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 人口分布还会趋于稳定吗？若趋于稳定, 会趋于哪个分布?

线性变换总结

线性变换总结

难点.

- 线性变换与矩阵之间的一一对应关系.
- 线性变换在不同基下的矩阵是相似的.
- 属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

重点.

- 线性变换的判定.
- 求线性变换的矩阵.
- 线性变换在不同基下的矩阵.
- 求矩阵的特征值和特征向量

线性变换总结

1. 在线性空间V中定义变换T使得$T\xi=\xi+\alpha,\forall\xi\in V$，其中$\alpha\in V$是一固定向量．判断$T$是否为线性变换？给出理由．

2. 给定$\mathbb{R}^3$中线性变换T使得$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1-x_2\\x_2+x_3\\x_1\end{pmatrix}$.

- 求T在基e_1,e_2,e_3下的矩阵.
- 求T在基$e_1,e_2,e_1+e_2+e_3$下的矩阵.

3. 判定矩阵$A=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{pmatrix}$是否可以相似对角化?

4. 设λ是可逆矩阵A的特征值，证明$\frac{1}{\lambda}$是A^{-1}的特征值.