线性代数–矩阵作业解答

黄申为

2022 年 10 月 25 日

1. **判断命题若$A^2 = 0$, 则$A = 0$是否正确？若正确, 请给出证明; 若不正确, 请举出反例.**

   Solution. 命题不成立. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是一个反例. 答案不唯一.

2. **设A, B都是n阶对称阵, 证明AB是对称矩阵的充分必要条件是$AB = BA$.**

   Solution. AB是对称阵 $\Leftrightarrow (AB)^T = AB \Leftrightarrow B^TA^T = AB \Leftrightarrow BA = AB$, 这里最后一个等价是根据$A, B$是对称阵的条件而得到的.

3. **求所有与$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$可交换的矩阵.**

   Solution. 设B与A可交换, 即$AB = BA$. 首先, 因为AB与BA有定义, B必为3阶方阵. 设 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$. 对$A$按行分块有$A = (e_2, e_3, 0)^T$, 而对$A$按列分块有$A = (0, e_1, e_2)$, 这里$e_i$是第$i$个分量为1的标准单位向量. 注意到$e_i^T$左乘一个矩阵就是该矩阵的第$i$行, 而$e_i$右乘一个矩阵就是该矩阵的第$i$列. 故$AB = BA$即

$$\begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \\ 0 & b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}.$$

从而有$b_{21} = b_{31} = b_{32} = 0, b_{11} = b_{22} = b_{33}, b_{12} = b_{23}$. 因此与$A$可交换的矩阵$B$ 一定是如下形式的上三角阵

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix},$$

其中x, y, z为任意的实数.

4. **(a) 设**$a = (2, 1, -3)^T, b = (1, 2, 4)^T$**,** $A = ab^T$**. 求**A^{101}**.**

   (b) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$**.求**$A^n$**.**

   Solution.

   (a) 由矩阵乘法的结合律, 有

$$A^{101} = (ab^T)(ab^T)\cdots(ab^T) = (b^Ta)^{100}(ab^T).$$

由已知有, $b^Ta = (1, 2, 4)(2, 1, -3)^T = -8$且$ab^T = (2, 1, -3)^T(1, 2, 4) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & -6 & -12 \end{pmatrix}$, 故

$$A^{101} = 8^{100}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & -6 & -12 \end{pmatrix}.$$

(b) 不难用归纳法证明 $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n\lambda & 1 \end{pmatrix}$.

5. **设**A**是**n**阶方阵. 若**$AA^T = E$**且**$|A| = -1$**, 证明**$|A + E| = 0$**.**

   Solution. 由假设条件有

$$\begin{aligned} |A + E| &= |A + AA^T| \\ &= |A(E + A^T)| \\ &= |A(E^T + A^T)| \\ &= |A(E + A)^T| \\ &= |A||E + A| \\ &= -|A + E|, \end{aligned}$$

故$|A + E| = 0$.

6. **在课堂中我们给出了矩阵乘法的定义: 给定$A=(a_{ij})_{m\times s}$与$B=(b_{ij})_{s\times n}$, 我们定义A与B的乘积为 $AB=(c_{ij})_{m\times n}$, 其中对任意的$i=1,2,\ldots,m$与$j=1,2,\ldots,n$有**
$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}.$$
我们发现在这种定义下矩阵的乘法不满足交换律, 即AB不一定等于BA. 现在给定$A=(a_{ij})_{m\times n}$与$B=(b_{ij})_{m\times n}$, 请给出一种定义A和B乘积的方式, 记做$A\otimes B$, 使得$A\otimes B=B\otimes A$, 并简单给出一个这种乘法可能的应用场景（好比课本中的定义的乘法可以用来计算总收入与总利润或者线性变换的复合）.

Solution. 一种可能的乘积方式为$A\otimes B=(c_{ij})$, 其中$c_{ij}=a_{ij}b_{ij}$, 这种乘积被称为Hadmard积, 这种乘积在图像处理中有应用. 答案不唯一.

7. **成语覆水难收描述的是矩阵中的什么概念? 给出简单解释.**

Solution. 不可逆矩阵. 当一个不可逆矩阵作用于一个向量, 不存在另一个矩阵抵消它的作用, 就如泼出去的水无法恢复原来的状态.

8. **写出一个不可逆的二阶非零方阵并说明为什么该方阵不可逆.**

Solution. $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ 是一个不可逆矩阵, 因为$|A|=0$.

9. **设n阶方阵A的伴随矩阵为A^*.**

   (a) **若A可逆, 证明$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.**

   (b) **证明$|A^*|=|A|^{n-1}$.**

   (c) **设A为3阶方阵且$|A|=\frac{1}{2}$, 求$|(2A)^{-1}-5A^*|$.**

Solution. 对于任何矩阵A有
$$AA^*=|A|E \tag{1}$$
(a) 若A可逆, 则$|A|\neq 0$, 从而(1)变为$\frac{A}{|A|}A^*=E$. 故$(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}$. 由于(1)对A^{-1}成立, 故$(A^{-1})(A^{-1})^*=|A^{-1}|E$, 得$(A^{-1})^*=\frac{A}{|A|}$. 于是(a)得证.

(b) 若$A=0$, 结论显然成立. 下面设$A\neq 0$. 我们考虑两个情况.

情况 1. $|A|=0$. 则(1)变为$AA^*=0$. 若A^*可逆, 则$A=0$, 矛盾. 所以A^*不可逆, 从而$|A^*|=0=|A|^{n-1}$.

情况 2. $|A| \neq 0$. 在(1)两边取行列式得$|A||A^*| = |A|^n$. 因为$|A| \neq 0$, 故$|A^*| = |A|^{n-1}$.

(c) 因$|A| = \frac{1}{2} \neq 0$, $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = 2A^*$. 从而,

$$\begin{aligned}
|(2A)^{-1} - 5A^*| &= |\frac{1}{2}A^{-1} - 5A^*| \\
&= |A^* - 5A^*| \\
&= |-4A^*| \\
&\overset{\text{(b)}}{=} (-4)^3|A|^2 = -16.
\end{aligned}$$

10. **(a) 用分块矩阵乘法计算**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

(b) 设n阶方阵A及s阶方阵B都可逆, 求 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1}$.

Solution.

(a) 根据矩阵元素的特点, 将两个矩阵都分成4个2×2的矩阵进行计算, 具体计算从略.

(b) $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.