高等数学
第二章：导数与微分

张道平

南开大学数学科学学院 414

daopingzhang@nankai.edu.cn

2.1 基本初等函数的导数公式

2. 导数的基本公式和运算法则

2.1 基本初等函数的导数公式

- 常数函数的导数等于零.

2.1 基本初等函数的导数公式

- 常数函数的导数等于零.
- $(sinx)' = cosx$.

2.1 基本初等函数的导数公式

- 常数函数的导数等于零.
- $(sinx)' = cosx$.
- $(cosx)' = -sinx$.

2. 导数的基本公式和运算法则

2.1 基本初等函数的导数公式

- 常数函数的导数等于零.
- $(sinx)' = cosx$.
- $(cosx)' = -sinx$.
- $(x^{\mu})' = \mu \cdot x^{\mu-1}$ (μ 为实数且 $\mu \neq 0, x > 0$).

2.1 基本初等函数的导数公式

- 常数函数的导数等于零.
- $(sinx)' = cosx$.
- $(cosx)' = -sinx$.
- $(x^{\mu})' = \mu \cdot x^{\mu-1}$ (μ 为实数且 $\mu \neq 0, x > 0$).
- $(a^x)' = a^x lna$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

2.1 基本初等函数的导数公式

- 常数函数的导数等于零.
- $(sinx)' = cosx$.
- $(cosx)' = -sinx$.
- $(x^{\mu})' = \mu \cdot x^{\mu-1}$ (μ 为实数且 $\mu \neq 0, x > 0$).
- $(a^x)' = a^x lna$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).
- $(log_a x)' = \frac{1}{xlna}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

2.1 基本初等函数的导数公式

- 常数函数的导数等于零.
- $(sinx)' = cosx$.
- $(cosx)' = -sinx$.
- $(x^{\mu})' = \mu \cdot x^{\mu-1}$ (μ 为实数且 $\mu \neq 0, x > 0$).
- $(a^{x})' = a^{x}lna$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).
- $(log_{a}x)' = \frac{1}{xlna}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

2.2 导数的四则运算

2.1 基本初等函数的导数公式

- 常数函数的导数等于零.
- $(sinx)' = cosx$.
- $(cosx)' = -sinx$.
- $(x^{\mu})' = \mu \cdot x^{\mu-1}$ (μ 为实数且 $\mu \neq 0, x > 0$).
- $(a^x)' = a^x lna$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).
- $(log_a x)' = \frac{1}{xlna}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

2.2 导数的四则运算

定理：如果函数 $u(x), v(x)$ 在点 x 可导，则它们的和 $u(x) + v(x)$, 差 $u(x) - v(x)$，积 $u(x) \cdot v(x)$，商 $\frac{u(x)}{v(x)}(v(x) \neq 0)$ 都在点 x 可导，

且

- $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$.
- $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.
- $[\frac{u(x)}{v(x)}]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} (v(x) \neq 0)$.

且

- $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$.
- $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.
- $[\frac{u(x)}{v(x)}]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} (v(x) \neq 0)$.

例：求正切函数 $y = tanx$ 的导数.

且

- $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x).$
- $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$
- $[\frac{u(x)}{v(x)}]' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}(v(x) \neq 0).$

例：求正切函数 $y = tanx$ 的导数.

例：求 $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} + xlnx$ 的导数.

且

- $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$.
- $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.
- $[\frac{u(x)}{v(x)}]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} (v(x) \neq 0)$.

例：求正切函数 $y = tanx$ 的导数.

例：求 $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} + xlnx$ 的导数.

2.3 复合函数的求导法则

且

- $[u(x)\pm v(x)]' = u'(x)\pm v'(x)$.
- $[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.
- $[\frac{u(x)}{v(x)}]' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}(v(x)\neq 0)$.

例：求正切函数 $y = tanx$ 的导数.

例：求 $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} + xlnx$ 的导数.

2.3 复合函数的求导法则

定理：若函数 $y = f(u)$ 在点 u 可导，且函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x 可导，则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 在点 x 可导，且 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$.

例：设函数 $f(x)$ 可导且 $f(\frac{x}{2}) = cosx$, 求 $f'(f(x)), [f(f(x))]'$

例：设函数 $f(x)$ 可导且 $f(\frac{x}{2}) = cosx$, 求 $f'(f(x)), [f(f(x))]'$

例：已知 $f'(x)$ 在 $x = 1$ 处连续，且 $f'(1) = -4$, 求 $\lim_{x\to 0^+} \frac{d}{dx} f(cos\sqrt{x})$.

例：设函数 $f(x)$ 可导且 $f(\frac{x}{2}) = cosx$, 求 $f'(f(x)), [f(f(x))]'$

例： 已知 $f'(x)$ 在 $x = 1$ 处连续，且 $f'(1) = -4$, 求 $\lim_{x \to 0^+} \frac{d}{dx} f(cos\sqrt{x})$.

2.4 反函数求导法则

例：设函数 $f(x)$ 可导且 $f(\frac{x}{2}) = cosx$, 求 $f'(f(x)), [f(f(x))]'$

例：已知 $f'(x)$ 在 $x = 1$ 处连续，且 $f'(1) = -4$, 求 $\lim_{x\to 0^+} \frac{d}{dx} f(cos\sqrt{x})$.

2.4 反函数求导法则

定理：设函数 $y = f(x)$ 在点 x 的某邻域内连续且严格单调，$f'(x)$ 存在且 $f'(x) \neq 0$，则其反函数 $x = \varphi(y)$ 对点 y 可导，且 $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

例：设函数 $f(x)$ 可导且 $f(\frac{x}{2}) = cosx$, 求 $f'(f(x)), [f(f(x))]'$

例：已知 $f'(x)$ 在 $x = 1$ 处连续，且 $f'(1) = -4$, 求 $\lim_{x\to 0^+} \frac{d}{dx} f(cos\sqrt{x})$.

2.4 反函数求导法则

定理：设函数 $y = f(x)$ 在点 x 的某邻域内连续且严格单调，$f'(x)$ 存在且 $f'(x) \neq 0$，则其反函数 $x = \varphi(y)$ 对点 y 可导，且 $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

例：求 $y = arcsinx, y = arccosx$ 的导数.

例：设函数 $f(x)$ 可导且 $f(\frac{x}{2}) = cosx$, 求 $f'(f(x)), [f(f(x))]'$

例： 已知 $f'(x)$ 在 $x = 1$ 处连续，且 $f'(1) = -4$, 求 $\lim_{x \to 0^+} \frac{d}{dx} f(cos\sqrt{x})$.

2.4 反函数求导法则

定理：设函数 $y = f(x)$ 在点 x 的某邻域内连续且严格单调，$f'(x)$ 存在且 $f'(x) \neq 0$，则其反函数 $x = \varphi(y)$ 对点 y 可导，且 $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

例： 求 $y = arcsinx, y = arccosx$ 的导数.

例： 求 $y = arctanx, y = arccotx$ 的导数.

2.5 隐函数求导法则

2.5 隐函数求导法则

例： 求由方程 $sinxy + ln(y - x) = x$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$.

2.5 隐函数求导法则

例：求由方程 $sinxy + ln(y - x) = x$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$.

例：证明曲线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}(0 < x < a)$ 上任意一点的切线在两坐标轴上的截距之和等于 a.

2.5 隐函数求导法则

例：求由方程 $sinxy + ln(y - x) = x$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$.

例：证明曲线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}(0 < x < a)$ 上任意一点的切线在两坐标轴上的截距之和等于 a.

例：求幂指数函数 $y = x^x(x > 0)$ 的导数.

2.5 隐函数求导法则

例：求由方程 $sinxy + ln(y-x) = x$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$.

例：证明曲线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}(0 < x < a)$ 上任意一点的切线在两坐标轴上的截距之和等于 a.

例：求幂指数函数 $y = x^x(x > 0)$ 的导数.

例：求函数 $y = \sqrt{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{xsinx}}$ 的导数.

2.6 参数方程和极坐标方程所确定的函数的导数

2.6 参数方程和极坐标方程所确定的函数的导数

例：设函数 $y = y(x)$ 由方程组

$$\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3 \\ e^y sint - y + 1 = 0 \end{cases}$$

所确定，求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0}$.

2.6 参数方程和极坐标方程所确定的函数的导数

例：设函数 $y = y(x)$ 由方程组

$$\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3 \\ e^y sint - y + 1 = 0 \end{cases}$$

所确定，求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0}$.

例：设曲线的极坐标方程为 $r = 2cos\theta$, (1) 求 $r'(\frac{\pi}{6})$; (2) 求该曲线在 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 对应点 M_0 处的切线方程.

2.7 分段函数求导方法

2.7 分段函数求导方法

例：设

$$f(x) = \begin{cases} x^2 cos\frac{1}{x}, x \neq 0, \\ 0, \qquad\quad x = 0, \end{cases}$$

试求 $f'(x)$.

练习：求 $y=|(x^2-1)(x+1)|$ 的导数.

练习：求 $y = |(x^2 - 1)(x + 1)|$ 的导数.

练习：设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导，且对任意 x_1, x_2 有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$. 如果 $f'(0) = 1$, 试证 $f'(x) = f(x)$.

练习：求 $y = |(x^2 - 1)(x+1)|$ 的导数.

练习：设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导，且对任意 x_1, x_2 有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$. 如果 $f'(0) = 1$, 试证 $f'(x) = f(x)$.

练习：设 $f(x)$ 可微，
$f(8) = 4, f'(8) = \frac{1}{3}, g(x) = \sqrt{f[2f(3x+2)]}$, 求 $g'(2)$.

练习：求 $y=|(x^2-1)(x+1)|$ 的导数.

练习：设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且对任意 x_1, x_2 有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$. 如果 $f'(0)=1$, 试证 $f'(x)=f(x)$.

练习：设 $f(x)$ 可微，
$f(8)=4, f'(8)=\frac{1}{3}, g(x)=\sqrt{f[2f(3x+2)]}$, 求 $g'(2)$.

练习：设 $y=f(\sqrt{lnx})$, 已知 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2x^2\sqrt{lnx}}$, 求 $f'(x)$.

2. 导数的基本公式和运算法则

练习：求 $y = |(x^2 - 1)(x + 1)|$ 的导数.

练习：设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导，且对任意 x_1, x_2 有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$. 如果 $f'(0) = 1$, 试证 $f'(x) = f(x)$.

练习：设 $f(x)$ 可微，
$f(8) = 4, f'(8) = \frac{1}{3}, g(x) = \sqrt{f[2f(3x + 2)]}$, 求 $g'(2)$.

练习：设 $y = f(\sqrt{lnx})$, 已知 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x^2\sqrt{lnx}}$, 求 $f'(x)$.

练习：设 $y = f(x)$ 与 $x = \varphi(y)$ 互为反函数，$f(x)$ 可导，且 $f'(x) \neq 0$, $f(3) = 5$, $g(x) = f[\frac{1}{3}\varphi^2(4x - 3)]$, 求 $g'(2)$.