草 稿 区

计算机大类 2023--2024 学年第 2 学期《概率论与数理统计》课程期末考试试卷（A 卷）

任课老师：　　专业：　　年级：　　学号：　　姓名：　　成绩：

一 、单项选择题（共 18 分，每小题 2 分）：

1. 已知事件 A，B 均为非零概率事件，且 $A \supset B$，则（　　）。

（A）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　（B）$P(AB)=P(A)P(B)$　（C）$P(A|B)=P(A)/P(B)$　（D）$P(A-B)=P(A)-P(B)$

2. 函数 $f(x)=\cos x$ 是某随机变量的概率密度函数，则该随机变量可能的取值范围为（　　）。

（A）$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$　（B）$\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$　（C）$[0,\pi]$　（D）$\left[\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{7\pi}{4}\right]$

3. 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续性随机变量，他们的概率密度函数分别为 $p_1(x)$和 $p_2(x)$，分布函数分别是 $F_1(x)$和 $F_2(x)$，则（　　）。

（A）$p_1(x)+p_2(x)$ 必为某个随机变量的概率密度函数　（B）$p_1(x)\,p_2(x)$ 必为某个随机变量的概率密度函数

（C）$F_1(x)+F_2(x)$ 必为某个随机变量的分布函数　（D）$F_1(x)\,F_2(x)$ 必为某个随机变量的分布函数

4. 设随机变量 X, Y 相互独立，且 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 存在，记 $U=\max\{X,Y\}, V=\min\{X,Y\}$，则 $E(UV)=$（　　）。

（A）$E(U)\cdot E(V)$　（B）$E(X)\cdot E(Y)$　（C）$E(U)\cdot E(Y)$　（D）$E(X)\cdot E(V)$

5. 设随机变量 X, Y 不相关，则下面式子中不成立的是（　　）。

（A）$\mathrm{cov}(X,Y)=0$　（B）$D(XY)=D(X)D(Y)$　（C）$\rho_{XY}=0$　（D）$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

6. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{1000}$ 是相互独立的随机变量，且 $X_i \sim B(1,p)$ $(i=1,2,\cdots,1000)$，则下列结论不正确的是（ ）。

（A）点估计 $\hat{p}=\dfrac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000}X_i$　（B）$\sum_{i=1}^{1000}X_i \sim B(1000,p)$

（C）$P\left\{a<\dfrac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000}X_i<b\right\}\approx\Phi(b)-\Phi(a)$　（D）$P\left\{a<\sum_{i=1}^{1000}X_i<b\right\}\approx\Phi\left(\dfrac{b-1000p}{\sqrt{1000p(1-p)}}\right)-\Phi\left(\dfrac{a-1000p}{\sqrt{1000p(1-p)}}\right)$

草 稿 区

7. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $X\sim N(1,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $\dfrac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$ 的分布为（　　）。

（A）$N(0,1)$　　（B）$t(1)$　　（C）$\chi^2(1)$　　（D）$F(1,1)$

8. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自均值为 λ 的泊松分布总体的样本，其中 λ 未知，则下列估计量中是 λ 的无偏估计量的是（　　）。

（A）$T_1=\dfrac{1}{6}(X_1+X_2)+\dfrac{1}{2}(X_3+X_4)$　　（B）$T_2=\dfrac{1}{5}(X_1+2X_2+3X_3+4X_4)$

（C）$T_3=\dfrac{1}{10}(4X_1-X_2+5X_3+2X_4)$　　（D）$T_4=\dfrac{X_1}{2}+\dfrac{1}{9}(2X_2+3X_3+4X_4)$

9. 设总体 X 服从正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，据此样本检验 μ。如果在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下接受了 $H_0:\mu=\mu_0$，则在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下（　　）。

（A）接受 H_0　　（B）拒绝 H_0

（C）可能接受，也可能拒绝 H_0 (受数据随机性影响，不稳定)　　（D）第一类错误的概率变大了

二 、填空（共 18 分，每小题 3 分）：

1. 设某批次电子元件正品率为 0.8, 次品率为 0.2。 现在对这批元件进行测试，只要有一个正品就停止测试，则测试次数 X 的概率分布 $P(X=k)=$________________; 测试次数为偶数的概率为________________。

2. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}A+Be^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & else\end{cases}$，其中 $\lambda>0$ 为常数，则 A=___________，B=___________。

3. 甲乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球，令 X、Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数，求 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=$____________。

4. 设随机变量 X 服从 $(-1,b)$ 上的均匀分布，若用契比雪夫不等式有 $P\{|X-1|<\varepsilon\}\ge\dfrac{2}{3}$，则 $b=$_________，　$\varepsilon=$__________。

5. 设 $X\sim N(0,4)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{15}$ 是来自总体 X 的样本，则 $\dfrac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2\left(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2\right)}$ 服从的分布是___________。（写对参数）

草 稿 区

6. 若一批零件的长度 X (单位:cm) 服从正态分布 $N(\mu,1)$, 从中随机地抽取 16 个零件, 得到长度的平均值为 40cm，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是____________。(注:标准正态分布函数值 $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(1.645)=0.95$)

三、解答题（10 分）：

发报台分别以 0.6 和 0.4 发出信号"*"和"-"。由于通信系统受到干扰，当发出信号"*"时，收报台未必收到"*"，而是分别以 0.8 和 0.2 的概率收到信号"*"和"-"；同样，当发出信号"-"时，收报台分别以概率 0.9 和 0.1 收到信号"-"和"*"。求：

（1）收报台收到信号"*"的概率；

（2）当收到信号"*"时，发报台确实是发出信号"*"的概率。

四、解答题（10 分）

设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，求 $Y=\sin X$ 的概率密度。

五、解答题（14 分）

设 (X,Y) 是二维变量，X 的边缘概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，在给定 $X=x(0<x<1)$ 的条件下 Y 的条件概率密度为

$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$。

（1）求 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$；

（2）求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$；

（3）求 $P\{X>2Y\}$。

六、解答题（10 分）

假设二维随机变量 (X,Y) 在矩形 $G=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$ 上服从均匀分布，记

$U=\begin{cases}0, & 若X\le Y\\ 1, & 若X>Y\end{cases}$，　　$V=\begin{cases}0, & 若X\le 2Y\\ 1, & 若X>2Y\end{cases}$.

（1）求U和V的联合分布；（2）求U和V的相关系数ρ。

草 稿 区

七、解答题（10 分）

设总体X的概率密度为$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}x^{(1-\theta)/\theta}, & 0<x<1.\\ 0, & else.\end{cases}$，其中$0<\theta<\infty$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体的简单随机样本。

（1）验证θ的最大似然估计量$\hat{\theta}=\dfrac{-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$；

（2）证明$\hat{\theta}$是θ的无偏估计量。

八、解答题（10 分）

某灯泡厂在采用一种新工艺的前后，分别抽取 10 个灯泡进行寿命（单位：小时）检测，计算得到：采用新工艺前，灯泡寿命的样本均值为 2460，样本标准差为 56；采用新工艺后，灯泡寿命的样本均值为 2550，样本标准差为 48。设灯泡的寿命服从正态分布，是否可以认为采用新工艺后灯泡的平均寿命有显著提高(取显著性水平$\alpha=0.01$)?

提示：1. 灯泡寿命的方差在采用新工艺的前后均未知，需先确定其关系。2. 部分可能用到的上α分位数见下表

$z_{0.01}=2.33$	$z_{0.005}=2.57$		
$t_{0.01}(10)=2.76$	$t_{0.01}(9)=2.92$	$t_{0.005}(10)=3.17$	$t_{0.005}(9)=3.25$
$t_{0.01}(20)=2.53$	$t_{0.01}(18)=2.55$	$t_{0.005}(20)=2.85$	$t_{0.005}(18)=2.88$
$\chi^2_{0.01}(10)=23.21$	$\chi^2_{0.01}(9)=21.67$	$\chi^2_{0.005}(10)=25.19$	$\chi^2_{0.005}(9)=23.59$
$\chi^2_{0.01}(20)=37.57$	$\chi^2_{0.01}(18)=37.16$	$\chi^2_{0.005}(20)=40.00$	$\chi^2_{0.005}(18)=37.16$
$F_{0.01}(10,10)=4.85$	$F_{0.01}(9,9)=5.35$	$F_{0.005}(10,10)=5.85$	$F_{0.005}(9,9)=6.54$

草　稿　区