线性代数-行列式

- 行列式的定义
    1. 二阶行列式
    2. 三阶行列式
    3. n阶行列式
- 行列式的性质
- 行列式的计算
- 行列式按行(列)展开

1.1 行列式的定义

二阶行列式的引入

设有二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1. & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (2) \end{cases}$$

用消元法求解

$$(1) \times a_{22}: \quad a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1 a_{22},$$

$$(2) \times a_{12}: \quad a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{12}b_2;$$

两式相减消去x_2得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1 a_{22} - a_{12}b_2.$$

类似可以消去x_1得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

若$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则方程组有唯一解

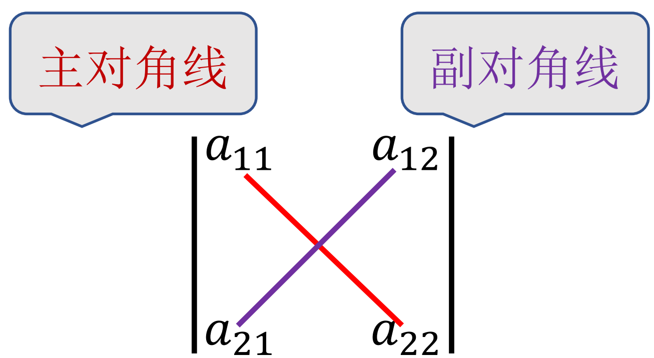
$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

二阶行列式的引入

用记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$表示$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$并称之为由$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$这4个数所确定的二阶行列式，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

记忆：对角线法则.



练习：$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =?$

二阶行列式的引入

当$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$，方程组有唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\qquad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

注意到

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}\triangleq D_1$$

$$a_{11}b_2-a_{21}b_1\ =\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}\triangleq D_2,$$

则

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

规律：D_i是由b_1,b_2替换D中第i列得到的二阶行列式.

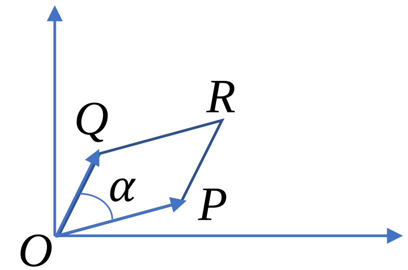
二阶行列式的引入

思考：如果$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$，方程组的解会有哪些情况？

二阶行列式的几何意义

定理(二阶行列式的几何意义). **设$D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$. 令$P(a,b)$和$Q(c,d)$是平面上的两个点. 则向量$\overrightarrow{OP}$和$\overrightarrow{OQ}$张成的平行四边形的面积为$|D|$.**

证明. 设向量$\overrightarrow{OP}$和$\overrightarrow{OQ}$之间的夹角为$\alpha(0\le\alpha\le\pi)$. 记向量$\overrightarrow{OP}$和$\overrightarrow{OQ}$张成的平行四边形为$OPQR$.



$$\mathrm{Area}(OPQR)=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\ \sin\alpha$$
$$=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

将$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|}$代入上式有:

$$\mathrm{Area}(OPQR)=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\sqrt{1-\frac{(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ})^2}{(|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|)^2}}=\sqrt{(|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|)^2-(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ})^2}$$
$$=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2}$$
$$=|ad-bc|.$$

■

思考: 为什么平行四边形的面积不是D?

三阶行列式的定义

回顾：二阶行列式是由二元一次线性方程组的四个系数a_{ij}按照某种代数运算得到的一个数值$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，这个数值不为零时方程组有唯一解$x_i = \frac{D_i}{D}, i = 1,2.$

问题：三阶行列式是否可以类比地通过三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

定义?

即是否存在关于方程组系数a_{ij}的某种代数运算，使得经过这种运算后得到的一个数值$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$满足$D \neq 0$时，方程组有唯一解$x_i = \frac{D_i}{D}, i = 1,2,3$?

动手尝试!

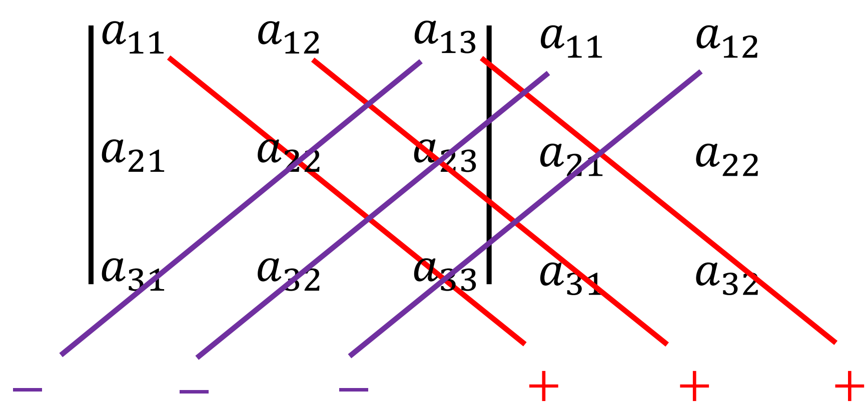
三阶行列式的定义

定义(三阶行列式). 给定9个数$a_{ij}(1 \leq i,j \leq 3)$, 其确定的三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

记忆：沙路法.



三阶行列式的定义

定义(三阶行列式). 给定9个数$a_{ij}(1 \le i,j \le 3)$, 其确定的三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

记忆：沙路法.

练习：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =?$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} =?$$

三阶行列式的几何意义

定理(三阶行列式的几何意义). 设$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3}\\ \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{b_3}\\ \boldsymbol{c_1} & \boldsymbol{c_2} & \boldsymbol{c_3}\end{vmatrix}$. **令$\boldsymbol{P(a_1,a_2,a_3)}$，$\boldsymbol{Q(b_1,b_2,b_3)}$，$\boldsymbol{R(c_1,c_2,c_3)}$是空间中的三个点，则向量$\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}$，$\overrightarrow{\boldsymbol{OQ}}$和$\overrightarrow{\boldsymbol{OR}}$张成的平行六面体的体积为$\boldsymbol{|D|}$.**

证明. 向量的叉积(自证). ■

排列

定义(排列). 由$1,2,\ldots n$组成的一个有序数组称为一个n级排列. 所有n级排列的总数为$n!$.

例: 所有3级排列为$123, 132, 213, 231, 312, 321$.

例: 排列$12\cdots n$称为标准排列.

逆序数

定义(逆序数). 给定排列$j_1j_2\cdots j_n$，若一对数在$j_1j_2\cdots j_n$中的前后位置与标准次序相反，即前面的数字大于后面的数字，则称这对数为一个**逆序**.

排列$j_1j_2\cdots j_n$中逆序的总数称为$j_1j_2\cdots j_n$的逆序数，记作$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

例：$12\cdots n$中没有逆序，故$\tau(12\cdots n)=0$.

例：31542的逆序为$31, 32, 54, 52, 42$，$\tau(31542)=5$.

逆序数

逆序数的计算方法. 给定排列$j_1j_2\cdots j_n$,

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n)= j_1\text{后面比 } j_1 \text{ 小的数的个数}$$
$$+j_2\text{后面比 } j_2 \text{ 小的数的个数}$$
$$\vdots$$
$$+j_{n-1}\text{后面比 } j_{n-1} \text{ 小的数的个数}$$

例: 求$135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 42$的逆序数.

解: $\tau=$

逆序数

逆序数的计算方法. 给定排列$j_1 j_2 \cdots j_n$,

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = j_1\text{后面比 } j_1 \text{ 小的数的个数}$$
$$+ j_2\text{后面比 } j_2 \text{ 小的数的个数}$$
$$\vdots$$
$$+ j_{n-1}\text{后面比 } j_{n-1} \text{ 小的数的个数}$$

例: 求$135 \cdots (2n-1)(2n)(2n-2) \cdots 42$的逆序数.

解: $\tau = 1$

逆序数

逆序数的计算方法. 给定排列$j_1 j_2 \cdots j_n$,

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = j_1\text{后面比 } j_1 \text{ 小的数的个数}$$
$$+ j_2\text{后面比 } j_2 \text{ 小的数的个数}$$
$$\vdots$$
$$+ j_{n-1}\text{后面比 } j_{n-1} \text{ 小的数的个数}$$

例: 求$135 \cdots (2n-1)(2n)(2n-2) \cdots 42$的逆序数.

解: $\tau = 1 + 2$

逆序数

逆序数的计算方法. 给定排列$j_1 j_2 \cdots j_n$,

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = j_1\text{后面比 } j_1 \text{ 小的数的个数}$$
$$+ j_2\text{后面比 } j_2 \text{ 小的数的个数}$$
$$\vdots$$
$$+ j_{n-1}\text{后面比 } j_{n-1} \text{ 小的数的个数}$$

例: 求$135 \cdots (2n-1)(2n)(2n-2) \cdots 42$的逆序数.

解: $\tau = 1 + 2 + \cdots + (n-1)$

逆序数

逆序数的计算方法. 给定排列$j_1j_2\cdots j_n$,

$$
\begin{aligned}
\tau(j_1j_2\cdots j_n) = {} & j_1\text{后面比 } j_1 \text{ 小的数的个数} \\
& + j_2\text{后面比 } j_2 \text{ 小的数的个数} \\
& \vdots \\
& + j_{n-1}\text{后面比 } j_{n-1} \text{ 小的数的个数}
\end{aligned}
$$

例: 求$135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 42$的逆序数.

解: $\tau = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + (n-1)$

逆序数

逆序数的计算方法. 给定排列$j_1 j_2 \cdots j_n$,

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = j_1\text{后面比 } j_1 \text{ 小的数的个数}$$
$$+ j_2\text{后面比 } j_2 \text{ 小的数的个数}$$
$$\vdots$$
$$+ j_{n-1}\text{后面比 } j_{n-1} \text{ 小的数的个数}$$

例: 求$135 \cdots (2n-1)(2n)(2n-2) \cdots 42$的逆序数.

解: $\tau = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + (n-1) + (n-2)$

逆序数

逆序数的计算方法. 给定排列$j_1 j_2 \cdots j_n$,

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = j_1\text{后面比 } j_1 \text{ 小的数的个数}$$

$$+ j_2\text{后面比 } j_2 \text{ 小的数的个数}$$

$$\vdots$$

$$+ j_{n-1}\text{后面比 } j_{n-1} \text{ 小的数的个数}$$

例: 求$135 \cdots (2n-1)(2n)(2n-2) \cdots 42$的逆序数.

解: $\tau = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1$

逆序数

逆序数的计算方法. 给定排列$j_1 j_2 \cdots j_n$,

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = j_1\text{后面比 } j_1 \text{ 小的数的个数}$$
$$+ j_2\text{后面比 } j_2 \text{ 小的数的个数}$$
$$\vdots$$
$$+ j_{n-1}\text{后面比 } j_{n-1} \text{ 小的数的个数}$$

例: 求$135 \cdots (2n-1)(2n)(2n-2) \cdots 42$的逆序数.

解: $\tau = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1$

$$= n(n-1).$$

奇偶性

定义(奇偶性). 逆序数为奇数的排列为**奇排列**, 逆序数为偶数的排列为**偶排列**.

例: 讨论下列排列的奇偶性.

(a) $n(n-1)\cdots 21$; (b) $(2n)1(2n-1)2\cdots(n+1)n$.

解: (a) $\tau(n(n-1)\cdots 21)=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$.

当$n\equiv 0,1(\mathrm{mod}\ 4)$时, 该排列为偶排列; 当$n\equiv 2,3(\mathrm{mod}\ 4)$时, 该排列为奇排列.

$$
\begin{aligned}
(b)\ \ \tau\big((2n)1(2n-1)2\cdots(n+1)n\big)&=(2n-1)+(2n-3)+\cdots+1\\
&=n^2.
\end{aligned}
$$

当n为偶数时, 该排列为偶排列; 当n为奇数时, 该排列为奇排列.

对换

定义(对换). 把一个排列中某两个数互换而其余的数保持不动，得到一个新排列，这一操作称为一个**对换**. 如果互换的两个数是相邻的，这样的对换叫做**相邻对换**.

定理. **对换改变排列的奇偶性.**

证明思路.	先考虑相邻对换的情况，再将一般情况转化为相邻对换.

对换

证明. 首先考虑相邻对换的情况.

- 设$p = a_1 \cdots a_\ell \boldsymbol{ab} b_1 \cdots b_m$对换$a$与$b$得到排列$p' = a_1 \cdots a_\ell \boldsymbol{ba} b_1 \cdots b_m$.
- 任取$\{x, y\} \subseteq \{1,2, \dots, n\}$，考察$\{x, y\}$对$p$与$p'$的逆序数贡献情况.
- 若$\{x, y\} \neq \{a, b\}$，则$\{x, y\}$对p与p'的逆序数贡献相同.
- 若$\{x, y\} = \{a, b\}$，则
  - 若$a < b$，$\{a, b\}$在p中不为逆序而在p'中为逆序，$\tau(p') = \tau(p) + 1$.
  - 若$a > b$，$\{a, b\}$在p'中不为逆序而在p中为逆序，$\tau(p') = \tau(p) - 1$.

  因此$\tau(p') = \tau(p) \pm 1$，即排列奇偶性改变.

对换

证明(续). 现在考虑一般情况. 设$p = a_1 \cdots a_\ell \boldsymbol{a} b_1 \cdots b_m \boldsymbol{b} c_1 \cdots c_k$对换$a$与$b$得到排列$p' = a_1 \cdots a_\ell \boldsymbol{b} b_1 \cdots b_m \boldsymbol{a} c_1 \cdots c_k$.

问题: 对换a与b的效果能否用一系列相邻对换实现?

$$p = a_1 \cdots a_\ell \boldsymbol{a} b_1 \cdots b_m \boldsymbol{b} c_1 \cdots c_k$$

$$\xrightarrow[\text{作相邻对换}]{\text{将}b\text{与其左边的}b_i\text{依次}} a_1 \cdots a_\ell \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k \qquad m\text{次}$$

$$\xrightarrow[\text{作相邻对换}]{\text{将}a\text{与其右边的}b\text{和}b_i\text{依次}} p' = a_1 \cdots a_\ell \boldsymbol{b} b_1 \cdots b_m \boldsymbol{a} c_1 \cdots c_k \qquad m\text{+1次}$$

因此对换a与b $\Leftrightarrow$ $2m+1$次相邻对换. ■

对换

思考：定理是否能够不通过相邻对换的情况直接证明?

排列

回顾.

- 二阶行列式
- 三阶行列式
- 逆序数：排列中逆序的总数.
- 奇偶性：逆序数的奇偶性.
- **定理：对换改变排列奇偶性.**
  - 证法 1：先证相邻对换的情况，再将一般情况转化为相邻对换的情况.
  - 证法 2：直接证明.

对换

推论 1(对换次数的奇偶性). **奇(偶)排列需要通过奇(偶)数次对换变成标准排列.**

证明. 因为标准排列是偶排列，结论由定理直接可得. ■

对换

推论 2(奇偶排列个数相等). **当$n \geq 2$时，n级奇排列个数与n级偶排列个数相等.**

证明思路 1：分别计数n级奇排列和n级偶排列.

证明思路 2：构造奇排列和偶排列之间的一一对应（双射）.

映射（补充知识）

定义(映射). 给定非空集合A与B，若对A中任意的元素a都有B中唯一的元素b与之对应，则称这种对应规则为A到B的一个映射，记作$f: A \longrightarrow B$.

元素b称为a在f下的像，记作$b = f(a)$；元素a称为b在f下的原像.

例: “学生 $\longrightarrow$ 学号” 是映射,

“学生 $\longrightarrow$ 课程” 不是映射.

映射（补充知识）

定义(单射，满射，双射). 设$f: A \longrightarrow B$是一个映射.

- 若任何$a_1, a_2 \in A$且$a_1 \neq a_2$，都有$f(a_1) \neq f(a_2)$，则称f为单射.（不同的元素有不同的像）
- 若任给$b \in B$，都存在$a \in A$使得$b = f(a)$，则称f为满射.
- 若f既是单射又是满射，则称f为双射(一一对应).

例 1：“父亲”是否为单射?

是否为满射?

例 2：“同桌”是一个双射.

映射（补充知识）

定理(映射的性质). **设$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$为有限集合且$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B}$是一个映射.**

- **若$\boldsymbol{f}$为单射，则$|\boldsymbol{A}| \leq |\boldsymbol{B}|$.**
- **若$\boldsymbol{f}$为满射，则$|\boldsymbol{A}| \geq |\boldsymbol{B}|$.**
- **若$\boldsymbol{f}$为双射，则$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$.**

证明. 若f为单射，则$\{f(a): a \in A\} \subseteq B$是$B$的一个大小为$|A|$的子集，故$|A| \leq |B|$. ■

对换

推论 2(奇偶排列个数相等). **当$n \geq 2$时，n级奇排列个数与n级偶排列个数相等.**

证明. 令O与E分别表示n级奇排列和n级偶排列的集合. 定义O到E的对应规则

$$f: O \longrightarrow E$$

$$p = i_1 i_2 i_3 \cdots i_n \longmapsto f(p) = i_2 i_1 i_3 \cdots i_n.$$

因为对换改变排列奇偶性，f是一个从O到E的映射.

- f是满射. 给定$p' = i_1 i_2 i_3 \cdots i_n \in E$，存在$p = i_2 i_1 i_3 \cdots i_n \in O$使得$p' = f(p)$.
- f是单射. 给定两个不同的奇排列$p_1 = i_1 i_2 \cdots i_n$和$p_2 = j_1 j_2 \cdots j_n$，存在某个位置$s \in \{1,2,\ldots,n\}$使得$i_s \neq j_s$，从而$f(p_1) \neq f(p_2)$.

因此f是双射. ■

对换

思考.

- 给出满射性质的证明.
- 无限集合如何比较大小?

n阶行列式的定义

用排列的观点来看二阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \triangleq a_{1\mathbf{1}}a_{2\mathbf{2}} - a_{1\mathbf{2}}a_{2\mathbf{1}}.$$

- 二阶行列式每项都是行列式中两个不同行不同列元素的乘积.
- 每项固定行指标为标准排列12时，其列指标对应某个2级排列j_1j_2：j_1j_2为**偶**排列时其符号为正，j_1j_2为**奇**排列时其符号为负.

所以,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2} (-1)^{\tau(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2},$$

其中求和指标j_1j_2表示对所有2级排列求和.

n阶行列式的定义

用排列的观点来看三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

- 三阶行列式每项都是行列式中三个不同行不同列元素的乘积.
- 每项固定行指标为标准排列123时，其列指标对应某个3级排列$j_1j_2j_3$：$j_1j_2j_3$为**偶**排列时其符号为正, $j_1j_2j_3$为**奇**排列时其符号为负.

所以,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中求和指标$j_1j_2j_3$表示对所有3级排列求和.

n阶行列式的定义

二阶和三阶行列式用排列的观点看符合相同的规律，因此我们类比地定义n阶行列式.

定义(n阶行列式). 给定n^2个数$a_{ij}(1 \le i,j \le n)$，由这n^2个数确定的n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \triangleq \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

- n阶行列式展开中有$n!$项, 每项都是来自不同行不同列的n个元素乘积.
- 每项对应一个n级排列$j_1 j_2 \cdots j_n$, 偶排列对应的项为正, 奇排列对应的项为负.

说明.

- 通常用$|a_{ij}|$或者$\det(a_{ij})$简记n阶行列式.
- 一阶行列式$|a| = a$.

n阶行列式的定义

例 1：计算$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{vmatrix}$和$\begin{vmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & 2 & \\ & & & 3 & & \\ & & 4 & & & \\ & 5 & & & & \\ 6 & & & & & \end{vmatrix}$.

解：由行列式定义，

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3j_4} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}.$$

因为行列式中有许多元素为0, 求和式中有许多项为0. 因此只需找出求和式中的所有非零项及其对应的排列. 注意到

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4} \neq 0 \iff a_{ij_i} \neq 0, i = 1,2,3,4 \iff j_i = i, i = 1,2,3,4.$$

所以, 求和式中只有一项非零项其对应排列为标准排列1234. 故

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(1234)} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = 24.$$

n阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & 2 & \\ & & & 3 & & \\ & & 4 & & & \\ & 5 & & & & \\ 6 & & & & & \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_6} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_6)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{6 j_6}.$$

注意到

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{6j_6} \neq 0 \iff j_i = 7 - i, i = 1,2, \dots, 6.$$

所以求和式中只有一项非零项其对应排列为654321. 故

$$\begin{vmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & 2 & \\ & & & 3 & & \\ & & 4 & & & \\ & 5 & & & & \\ 6 & & & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(654321)} a_{16} a_{25} \cdots a_{61} = -720.$$

n阶行列式的定义

例 1 的结论可以推广到三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

和反三角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n\cdots 21)} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n\cdots 21)} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$

n阶行列式的定义

例 2：已知$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$，求$x^3$的系数.

解：由行列式定义，$f(x)$是x的多项式且最高次幂为x^3．显然含x^3的有两项：

$$(-1)^{\tau(1234)}x\cdot x\cdot x\cdot 1与(-1)^{\tau(1243)}x\cdot x\cdot 1\cdot (2x),$$

即x^3与$-2x^3$．故 $f(x)$中x^3的系数为-1.

n阶行列式的定义

练习：计算下列n阶行列式.

$$(a)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & n-1 \\ n & & & & 0 \end{vmatrix}.$$

$$(b)\ \begin{vmatrix} & & & 1 & 0 \\ & & 2 & 0 & \\ & \iddots & 0 & & \\ n-1 & \iddots & & & \\ 0 & & & & n \end{vmatrix}.$$

1.2 行列式的性质

行列式的性质

性质 1. **设$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$. 则**

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

证明思路.	建立两个求和式中项之间的一一对应关系并证明对应的项相等.

具体例子.

考虑$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \boldsymbol{a_{14}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} & a_{34} \\ a_{41} & \boldsymbol{a_{42}} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

- 左式中的项$(-1)^{\tau(4132)}a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$对应右式中的项 $(-1)^{\tau(2431)}a_{21}a_{42}a_{33}a_{14}$.
- 当$a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$的列标4132通过对换变成标准排列时, 其行标从标准排列变成2431. 因此,

4132的奇偶性 = 对换次数奇偶性 = 2431的奇偶性.

从而$(-1)^{\tau(4132)}a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}=(-1)^{\tau(2431)}a_{21}a_{42}a_{33}a_{14}$.

行列式的性质

性质 1. **设**$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$. **则**

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

证明. 给定等式左边的一项$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$，通过一系列元素的对换可把$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$写成$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$, 其中$i_1 i_2 \cdots i_n$是$1,2,\dots,n$的某个排列.

这就确定了从所有n级排列S_n到自身的一个映射

$$f: S_n \longrightarrow S_n$$

$$j_1 j_2 \cdots j_n \mapsto f(j_1 j_2 \cdots j_n) = i_1 i_2 \cdots i_n.$$

并且f将$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$对应到$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$.

在元素对换的过程中，当$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$的列标从$j_1 j_2 \cdots j_n$变为标准排列时，其行标从标准排列变为$i_1 i_2 \cdots i_n$.

根据**对换次数奇偶性推论**，$j_1 j_2 \cdots j_n$与$i_1 i_2 \cdots i_n$有相同的奇偶性. 故

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

行列式的性质

证明(续). 下面证明f是双射.

- f的对应规则为：如果数k出现在$j_1j_2\cdots j_n$的第s个位置上，则$i_1i_2\cdots i_n$的第k个位置上的数为s.
- 只需证明f是单射或满射.

任给两个不同的排列$p=j_1j_2\cdots j_n$和$p'=j_1'j_2'\cdots j_n'$，存在数k使得k出现在p与p'的不同位置上，从而$f(p)$与$f(p')$的第k个位置上的数不同，即$f(p)\neq f(p')$. ■

思考：如何证明f是满射?

关于证明

- 证明的书写是一项需要练习的技能，将直观理解变成严格的证明是需要花功夫的.

- 将复杂证明简化成直观思想是硬币的另一面(比如勾股定理的图片证明).

行列式的性质

性质 2. **交换行列式中的两行，行列式变号.**

证明思路.	建立两个行列式展开式中项之间的一一对应关系并证明对应的项互为相反数.

具体例子.

$$
设D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \boldsymbol{a_{14}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} & a_{34} \\ a_{41} & \boldsymbol{a_{42}} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{交换第2行与第4行}} D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \boldsymbol{a_{14}} \\ a_{41} & \boldsymbol{a_{42}} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} & a_{34} \\ \boldsymbol{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}.
$$

- 则D中的项$(-1)^{\tau(4132)}a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$对应$D'$中的项$(-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{42}a_{33}a_{21}$.
- 观察到4231是由4132经过一次对换而得到的. 故

$$(-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{42}a_{33}a_{21}=-(-1)^{\tau(4132)}a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}.$$

行列式的性质

性质 2. **交换行列式中的两行，行列式变号.**

证明. 设$D=\left|a_{ij}\right|$交换第i行和第j行$(i<j)$后得到行列式$D'=\left|b_{ij}\right|$. 若$k\notin\{i,j\}$, $b_{k\ell}=a_{k\ell}$并且$b_{i\ell}=a_{j\ell}, b_{j\ell}=a_{i\ell}\ (1\le \ell\le n)$.

$$D'=\sum_{p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}\,b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}\qquad \text{行列式定义}$$

$$=\sum_{p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}\,\boldsymbol{a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}}\qquad \text{假设条件}$$

$$=-\sum_{p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots \boldsymbol{p_j}\cdots \boldsymbol{p_i}\cdots p_n)}\,a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}\qquad \text{对换定理}$$

$$=-\sum_{p_1\cdots \boldsymbol{p_j}\cdots \boldsymbol{p_i}\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}\,a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}\qquad \text{对换是双射}$$

$$=-D. \qquad \blacksquare$$

说明. 倒数第二个等式中改变求和指标只是交换求和次序.

行列式的性质

推论. **如果行列式D中有两行完全相同，则$D=0$.**

证明. 根据性质 2，若交换D中完全相同的两行有$D=-D$，故$D=0$. ■

性质 3. **行列式中某一行中所有元素都乘以同一个数k等于用数k乘以此行列式.**

证明. 我们用行列式定义来证明. 设$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$= k\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$= kD.$$ ■

行列式的性质

性质 4. **行列式中如果有两行元素成比例，则此行列式为零.**

证明. **性质** 2 + **性质** 3. ■

性质 5.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明. 行列式的定义. ■

性质 6. **把行列式中某行的各元素乘同一个数后加到另一行对应元素上去，行列式不变.**

证明. **性质** 4 + **性质** 5. ■

1.3 行列式的计算

行列式的计算

思考：按照定义计算n阶行列式需要多少时间?

回答：$2(n+1)!$.

性质 $\Rightarrow$ **快速**计算行列式

行列式的计算

化三角法:

- 利用行列式的性质化行列式为三角行列式.
- 三角行列式是容易计算的.

行列式的计算

行列式操作记号

• 提取公因子k	$r_i \div k$	$c_i \div k$
• 交换两行或两列	$r_i \leftrightarrow r_j$	$c_i \leftrightarrow c_j$
• 将某行或列乘k加到另一行或列	$r_j + kr_i$	$c_j + kc_i$

说明. 这里+是记号约定，不能随意交换次序！

行列式的计算

例 1：计算行列式$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解题思路.	将D化为上三角行列式，即将主对角线以下元素都变为0.

解：$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_2 + 5r_1} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-24} & \mathbf{18} & \mathbf{-19} \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

行列式的计算

解： $D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+5r_1} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & -24 & 18 & -19 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_4-3r_1]{r_3-2r_1} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & -24 & 18 & -19 \\ \mathbf{0} & \mathbf{10} & \mathbf{-5} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{16} & \mathbf{-10} & \mathbf{11} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_3 \div 10} \mathbf{10}\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -24 & 18 & -19 \\ 0 & 16 & -10 & 11 \end{vmatrix}$$

行列式的计算

解：$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 + 5r_1} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & -24 & 18 & -19 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$$\underset{r_4 - 3r_1}{\overset{r_3 - 2r_1}{=\!=\!=}} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & -24 & 18 & -19 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \\ 0 & 16 & -10 & 11 \end{vmatrix} \underset{r_2 \leftrightarrow r_3}{\overset{r_3 \div 10}{=\!=\!=}} 10\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -24 & 18 & -19 \\ 0 & 16 & -10 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\underset{r_4 - 16r_2}{\overset{r_3 + 24r_2}{=\!=\!=}} 10\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{-7} \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 + \frac{1}{3}r_3} 10\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{2/3} \end{vmatrix} = \mathbf{40}.$$

上三角行列式

行列式的计算

例 2：计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$.

解：$D_n \xlongequal{\text{所有列加到第1列}} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a+(n-1)b} & b & b & \cdots & b \\ \boldsymbol{a+(n-1)b} & a & b & \cdots & b \\ \boldsymbol{a+(n-1)b} & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a+(n-1)b} & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{第1列提取}a+(n-1)b} [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} \mathbf{1} & b & b & \cdots & b \\ \mathbf{1} & a & b & \cdots & b \\ \mathbf{1} & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{1} & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{所有行减去第1行}} [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

行列式的计算

练习：计算下列行列式.

$$(a)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$(b)\ \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}.$$

行列式的计算

思考:

- 如果只允许做$r_j + kr_i$类型的操作，是否能将给定行列式化为上三角行列式?

- 如果想将$|a_{ij}|$化为下三角行列式，需要什么样的操作?

行列式的计算

例 3：计算n阶行列式$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$.

解：从最后一列起将后一列加到前一列，

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+\cdots+n & 2+\cdots+n & 3+\cdots+n & \cdots & (n-2)+(n-1)+n & (n-1)+n & n \\ \mathbf{0} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{0} & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{0} & -(n-1) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}(n-1)!.$$

说明. 必须从最后一列开始，操作顺序不能随意交换！

行列式的计算

例 4：计算n阶行列式$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n+x_n \\ 1 & 2 & \cdots & (n-1)+x_{n-1} & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2+x_2 & \cdots & n-1 & n \\ 1+x_1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix}$.

解：$D_n \xlongequal{\text{所有行减去第1行}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n+x_n \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & -x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 & -x_n \\ x_1 & 0 & \cdots & 0 & -x_n \end{vmatrix}$

爪形行列式

$$\xlongequal{c_n + \frac{x_n}{x_j} c_j, 1 \le j \le n-1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n+x_n+\frac{x_n}{x_{n-1}}(n-1)+\cdots+\frac{x_n}{x_1} \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 & \mathbf{0} \\ x_1 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{0} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{x_i} + 1\right).$$

行列式的计算

定理(分块行列式). 证明$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1k}} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \boldsymbol{0} & \\ \boldsymbol{a_{k1}} & \cdots & \boldsymbol{a_{kk}} & & & \\ \boldsymbol{c_{11}} & \cdots & \boldsymbol{c_{1k}} & \boldsymbol{b_{11}} & \cdots & \boldsymbol{b_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{c_{n1}} & \cdots & \boldsymbol{c_{nk}} & \boldsymbol{b_{n1}} & \cdots & \boldsymbol{b_{nn}} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1k}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{k1}} & \cdots & \boldsymbol{a_{kk}} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \boldsymbol{b_{11}} & \cdots & \boldsymbol{b_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{b_{n1}} & \cdots & \boldsymbol{b_{nn}} \end{vmatrix}.$

把对D_1做的行操作和对D_2做的列操作放到D中是什么效果?

证明. 设$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$.

- 对D_1做**行操作$\boldsymbol{r_j+kr_i}$**将其化为下三角行列式$D_1=\begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{kk}$.
- 对D_2做**列操作$\boldsymbol{c_j+kc_i}$**将其化为下三角行列式$D_2=\begin{vmatrix} q_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}=q_{11}\cdots q_{nn}$.

若对D的前k行做行操作r_j+kr_i, 再对D的后n列做列操作c_j+kc_i, 则

$$D=\begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}=(p_{11}\cdots p_{kk})(q_{11}\cdots q_{nn})=D_1D_2. \qquad \blacksquare$$

意义. 将高阶行列式的计算化为低阶行列式的计算.

1.4 行列式按行（列）展开

行列式按行(列)展开

定义(代数余子式). 在n阶行列式$|a_{ij}|$中将元素a_{ij}所在行和列划去后,剩下的元素按照它们在原行列式中的相对位置组成的$n-1$阶行列式叫做a_{ij}的余子式,记作M_{ij}. 表达式$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称为a_{ij}的代数余子式.

例: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$中

- a_{11}的余子式和代数余子式为$A_{11}=M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$;
- a_{12}的余子式$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$,代数余子式$A_{12}=-M_{12}$.

行列式按行(列)展开

回顾:

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \boldsymbol{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}}.$

- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\xlongequal{\text{合并同类项}} \boldsymbol{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}}.$$

这个规律对n阶行列式也成立.

定理(行列式按行(列)展开). **n阶行列式$D = |a_{ij}|$等于它任何一行(列)各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即**

$$\boldsymbol{D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \qquad i = 1, 2, \cdots n,}$$

按行展开

或者

$$\boldsymbol{D = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni}, \qquad i = 1, 2, \cdots n.}$$

按列展开

行列式按行(列)展开

引理. $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1j}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{a_{ij}} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nj}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{vmatrix}=\boldsymbol{a_{ij}A_{ij}}.$

证明思路.	先考虑a_{ij}为$(1,1)$-元的情况，再将一般情况转化为此特殊情况.

证明. 若$D=\left|\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right|$, 则

$$D=a_{11}M_{11}=a_{11}A_{11}.$$

分块行列式定理

行列式按行(列)展开

证明(续). 现在考虑一般情况. 下面通过一系列行和列的交换将a_{ij}挪到$(1,1)$-元的位置.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{将第}i\text{行依次与第}i-1,\dots,1\text{行交换}} D_1=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{a_{ij}} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \boldsymbol{i-1}\text{次}$$

$$\xrightarrow{\text{将第}j\text{列依次与第}j-1,\dots,1\text{列交换}} D_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{ij}} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{,i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \boldsymbol{j-1}\text{次}$$

行列式按行(列)展开

证明(续).

$$D_2 = \left|\begin{array}{c|cccccc} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{,i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right|$$

$\boldsymbol{M_{ij}}$

故由**性质 2**,

$$D = (-1)^{(i-1)+(j-1)} D_2 = (-1)^{i+j} D_2.$$

另一方面,

$$D_2 = a_{ij}(a_{ij}\text{在}D_2\text{中的代数余子式})$$

(1, 1)−元的情况

$$= a_{ij} M_{ij}.$$

从而,

$$D = (-1)^{i+j} D_2 = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

$$= a_{ij} A_{ij}.$$

■

行列式按行(列)展开

思考：上面证明中为什么不直接将第i行与第1行交换，再将第j列与第1列交换？

行列式按行(列)展开

定理(行列式按行(列)展开). n阶行列式$D = |a_{ij}|$等于它任何一行(列)各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$\boldsymbol{D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \qquad i = 1, 2, \cdots n,}$$

或者

$$\boldsymbol{D = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni}, \qquad i = 1, 2, \cdots n.}$$

证明. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + 0 + \cdots 0 & 0 + a_{i2} + \cdots 0 & \cdots & 0 + 0 + \cdots + a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5 $$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

引理 $$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$ ■

行列式按行(列)展开应用

应用 1：计算行列式$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

说明. 将某一行或列中除一个元素外的所有元素变为0后再使用按行(列)展开定理.

行列式按行(列)展开应用

应用 2：范德蒙德(Vandermonde)行列式.

$$\boldsymbol{V_n \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)}.$$

证明. 对n用数学归纳法.

当$n = 2$时，$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$，定理成立.

行列式按行(列)展开应用

应用 2：范德蒙德(Vandermonde)行列式.

$$\boldsymbol{V_n \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i).}$$

证明(续). 假设$n \geq 3$且定理对$n-1$阶范德蒙德行列式成立.

从最后一行开始，后一行减去前一行的x_1倍，

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$n-1$阶范德蒙德行列式

按第1列展开并提取公因子

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\prod_{2\le i<j\le n}(x_j - x_i)$$

归纳假设

$$= \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i).$$

■

行列式按行(列)展开应用

应用 3：代数余子式的线性组合. **n阶行列式的任何一行(列)各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和为零，即** $\boldsymbol{a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j,}$

或者 $\boldsymbol{a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j.}$

证明. 设$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$. 现将$D$的第$j$行元素替换为$a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in}$得到一个新的行列式$D'$:

$$D'\triangleq\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \longleftarrow \text{第}j\text{行}$$

$$=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}.$$ **按第j行展开**

因为D'有两行相同, $D'=0$. 故结论得证. ■

行列式按行(列)展开应用

推论. **设$D=|a_{ij}|$，则**

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D, & i=j;\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D, & i=j;\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

证明. 由**行列式按行(列)展开定理**及其**应用 3**可得. ■

上面的证明表明:

$$\begin{array}{r l} & \\ & \\ & \\ \text{第}j\text{行}\rightarrow & \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=b_1A_{j1}+b_2A_{j2}+\cdots+b_nA_{jn}.$$

行列式按行(列)展开应用

例：令$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$. 求$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$和$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}$.

解.

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}=130.$$

$$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41}$$

$$=\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 & 2 \\ \mathbf{-1} & 1 & 3 & -4 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 & -1 \\ \mathbf{-1} & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

行列式总结

行列式总结

难点.

- 行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \triangleq \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

- 行列式按行(列)展开

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \qquad i = 1, 2, \cdots n,$$

$$D = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni}, \qquad i = 1, 2, \cdots n.$$

重点.

- 行列式的性质.
- 行列式的计算：**定义、化三角法、按行(列)展开.**

行列式总结

1. 用行列式定义证明 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

2. 证明行列式按行(列)展开定理.

3. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 8 & 6 & -9 & 1 \\ 101 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 156 & 2 & 4 & 0 \\ -5 & 67 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$

4. 计算n阶行列式 (a) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}.$

5. 证明 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix} = 0$(其中$n \geq 2$).

扩展阅读

扩展阅读

A Brief History of Determinant in

Linear Algebra: A Modern Introduction

—— David Poole

- 高斯在1801年第一次使用了行列式这个术语
- 柯西发展了行列式的理论
- 雅可比行列式是多变量微积分中重要的概念