

第三章

电磁感应



§ 1. 法拉第电磁感应定律

一、Faraday和电磁感应

- 1820年H. C. 奥斯特发现电流磁效应后，有许多物理学家便试图寻找它的逆效应（1820–1831）。
- 在怎样一种情况下，磁能够推动电荷，形成电流（感应电流，电磁感应）。
- 电流的磁效应及之前研究的电磁学都是在静止和恒定条件下的研究，而逆效应（电磁感应）不是一种在静止和稳定的、恒定的条件下的现象，而是一种在运动和变化的过程中出现的暂态效应。



- **Faraday**的前期实验
 - **1824**年，将强磁铁放在线圈中，线圈附近的小磁针不偏转。
 - **1825**年，将导体回路放在另一通有强电流的回路附近，没有在导体回路中测到电流。
 - **1828**年，设计了专门的装置，使回路与磁铁处于不同的位置，仍未见回路中产生电流。
- **Ampere**进行了类似实验，同样无结果。

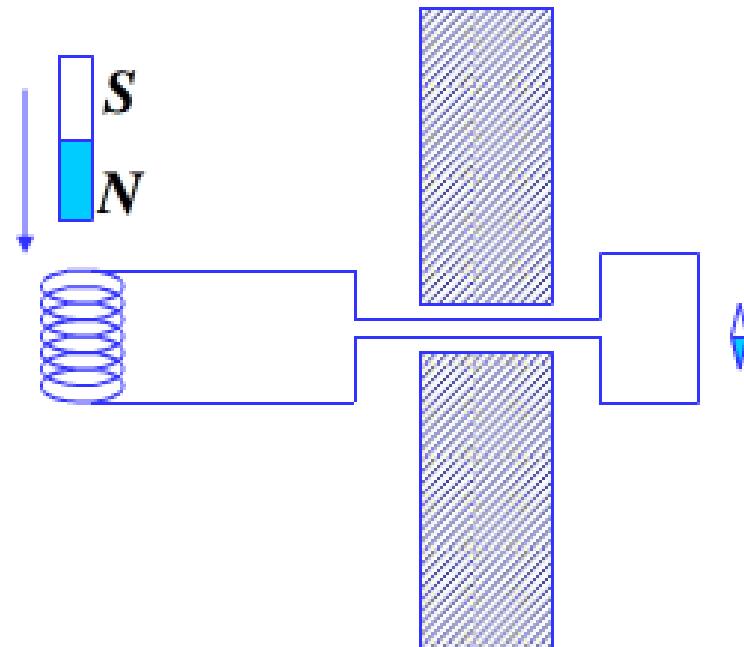
实际上，在**1822**年**Ampere**和他的助手**Auguste de la Rive**已经在实验上发现一个电流可以感应出另一个电流，但**Ampere**忽视了这一重大发现。



• Colladon实验 (1823年)

实验：将磁铁插入螺线管中或从其中拔出，观察是否会在螺线管线圈中产生电流。

失败：没有助手。



• Arago实验（1822年）

- 1822年，Arago和Humboldt在测量地磁时发现磁针附近的金属物体对磁针的振动有阻尼作用——电磁阻尼现象。
- 1824年，Arago圆盘实验——电磁驱动。

旋转的铜盘可以带动悬掉于其上方的磁针转动，但有所滞后；反之以磁铁代替磁针，转动磁铁也会带动铜盘转动，二者的旋转也是异步的。



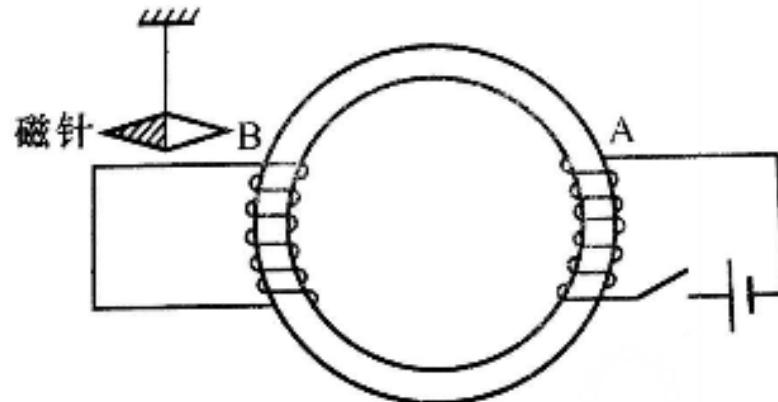
- Henry实验（1829年）

- 1829年，Henry在研究用不同长度的导线缠绕的电磁铁的提举力时，发现当通电流的线圈与电源断开时，在断开处会产生强烈电火花——自感现象。

（1832年Henry读到Faraday电磁感应的论文摘要后重新开始研究，同年发表有关自感的论文）



- 1831年8月，Faraday发现电磁感应现象
-



将线圈A的开关闭合时，小磁针发生偏转，振动并最终停在原来的位置上；再将线圈A的开关断开时，小磁针同样发生偏转，振动并最终停在原来的位置上，只是偏转的方向相反。

同年Faraday又做了多个实验，确定了电磁感应是一种在变化和运动过程中才出现的暂态效应。



- 1831年11月，Faraday归纳可以产生感应
-

电流的五类条件：

1. 变化的电流
2. 变化的磁场
3. 运动的恒定电流
4. 运动的恒定磁铁
5. 导体在磁场中运动

➤ 电磁感应：在运动和变化过程中出现的一种
暂态效应



- Faraday提出了感应电动势 $\mathcal{E}_{\text{感应}}$ 的概念：
 - 存在推动电荷运动的非静电力；
 - 感应电动势是描绘非静电力作功本领的物理量；
 - 感应电动势不以载流回路是否存在为转移。
- Faraday提出了产生感应电动势的原因：
 - 近距作用的思想，将电力线与磁力线的物理图像从静态推广到动态，从孤立推广到相互联系。



1832年3月12日，法拉第写给英国皇家学会的一封密封信：

前不久在皇家学会上宣读了题为《对电作的实验工作》的两篇论文，文中所介绍的一些研究成果，以及由于其他观点与实验而产生的一些问题，使我得出结论：磁作用的传播需要时间，即当一个磁铁作用于另一个远处的磁铁或者一块铁时，产生作用的原因是逐渐地从磁体传播开去的；这种传播需要一定时间，而这个时间显然是非常短的。我还认为，电感应也是这样传播的。我认为磁力从磁极出发的传播类似于水面上波纹的振动或者空气粒子的声振动。也就是说，我打算把振动理论应用于磁现象，就像对声所做的那样。而且，这也是光现象最可能的解释。类比之下，我认为也可以把振动理论应用于电感应。



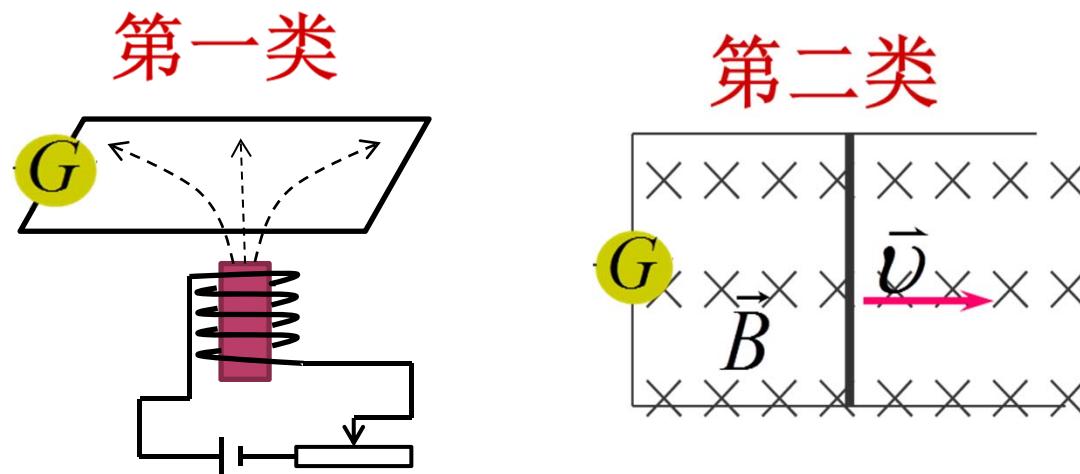
我想用来证实这些观点，然而我的时间要用于履行职责，这可能会拖长实验的时间，而实验本身也可能成为感测对象。因此，我在把这封信递交皇家学会收藏时，要以一个确定的日期来为自己保留这个发现。这样，当从实验上得到证实时，我就有权宣布这个日期是我的发现的日期。就我所知，现在除我而外，科学家中还没有人持有类似的观点。



二、Faraday电磁感应定律

1. 电磁感应现象

两种类型：



两类的共同特点是：以闭合回路为边界的曲面的磁通量随时间发生变化，就会在闭合回路中产生电流——电磁感应现象。产生的电流——感应电流。有电流必然就有电动势——感应电动势。

实验发现，当保持其他条件不变，只改变闭合回路的电阻时发现： R 增大，则 I 减小； R 减小，则 I 增大；但感应电动势不变。

$$IR = \varepsilon$$

因此，与感应电流相比，感应电动势更能充分描述电磁感应的规律。事实上，即使不形成回路，甚至不存在导体，当然也不会有感应电流，在空间也可以产生感应电动势。



2. 电动势

只有静电场不能维持稳恒电流。（如电容器放电就是在静电场的作用下，电流由大到小到0的衰变过程，不能维持稳恒的电流。）

要维持稳恒的电流，必须有**非静电力作功**，将其它形式的能量补充给电路，即电源。

在电源内部，非静电力使电荷从负极搬到正极板。

电动势的定义：把单位正电荷从负极通过电源内部移到正极时，非静电力 \mathbf{K} 所作的功。



把正电荷 q 经电源内部由负极移到正极时，非静电力作的功为：

$$A_k = \int_{-}^{+} q \overrightarrow{E}_k \bullet d\vec{l}$$

电动势为：

$$\mathcal{E} = \frac{A_k}{q} = \frac{1}{q} \int_{-}^{+} q \overrightarrow{E}_k \bullet d\vec{l} = \int_{-}^{+} \overrightarrow{E}_k \bullet d\vec{l}$$

3. 法拉第定律

精确的实验表明：

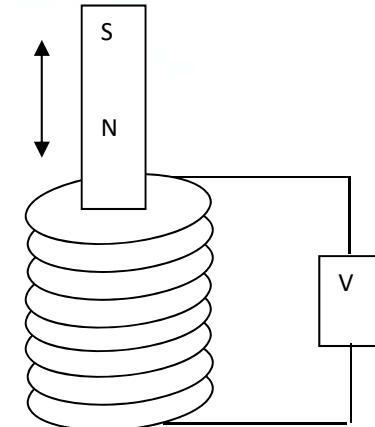
回路中的感应电动势等于磁通量 φ_B 对时间变化率的负值，即：

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_S B \cos \theta ds$$

- 感应电动势的单位：在国际单位制中是，伏特=韦伯/秒
- 感应电动势是标量，但也有方向，可用正负表示。

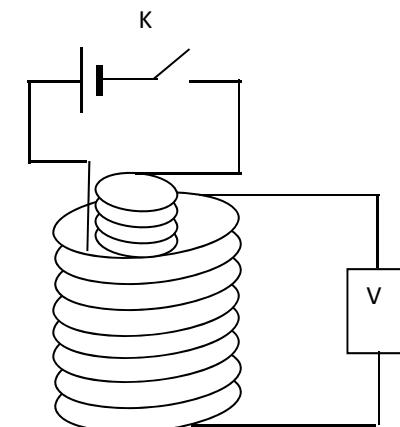
实验1：

磁铁插入线圈中，使线圈中的磁通量发生变化，从而在线圈中产生感应电动势。



实验2：

内线圈通、断电的变化产生一个变化的磁场，在外线圈中便产生了感应电动势，其中没有任何移动的部件，这样产生的电动势称为感生电动势。

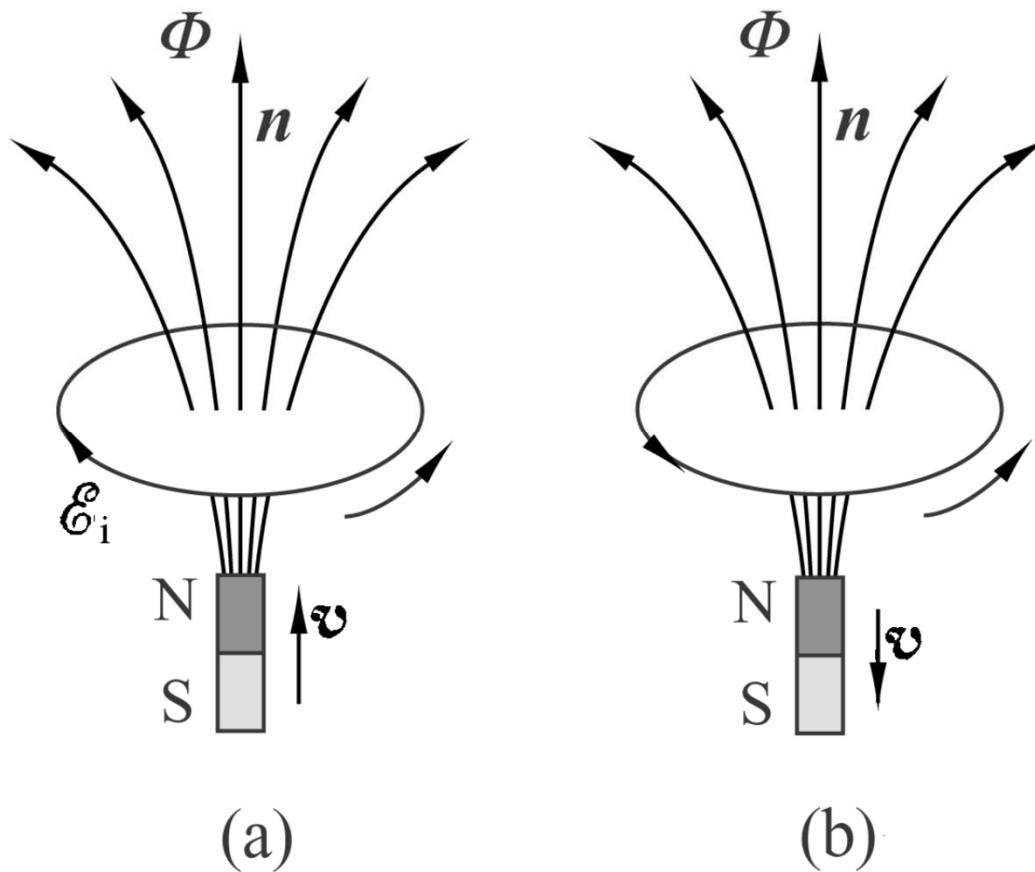


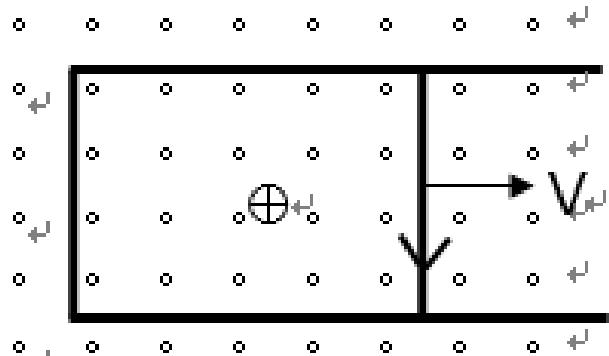
利用法拉第定律计算感应电动势：

- (1) 任意规定回路绕行的方向；
- (2) 按右手定则确定回路所围曲面的正法线方向 \hat{n} ；
- (3) 再确定磁通量的正负， \vec{B} 与 \vec{n} 成锐角， φ_B 为正， \vec{B} 与 \vec{n} 成钝角， φ_B 为负；
- (4) 计算 $\varepsilon = -\frac{d\varphi_B}{dt}$ ；
- (5) ε 为正，说明 ε 的方向与规定的绕行方向相同； ε 为负，说明 ε 的方向与规定的绕行方向相反。

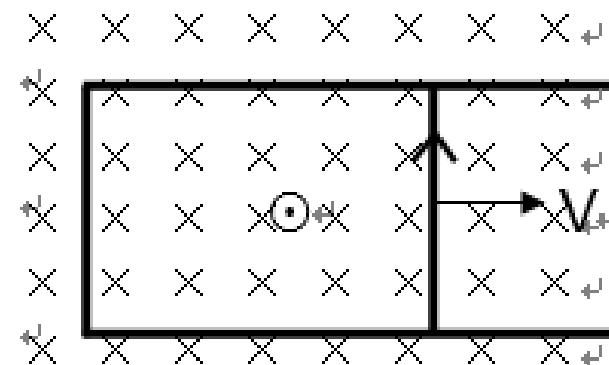


电动势方向

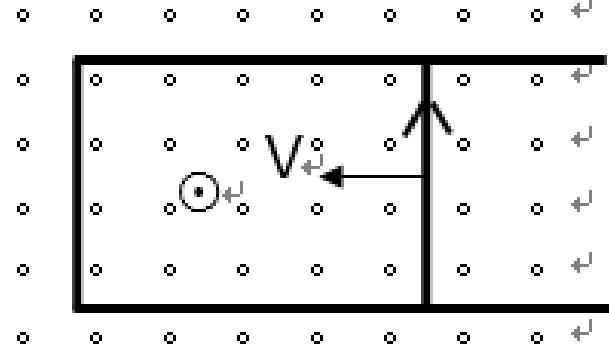




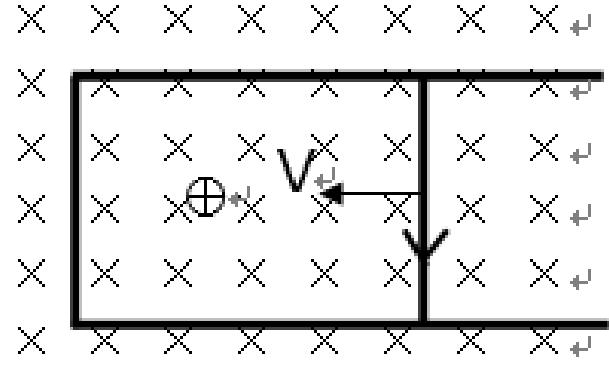
$$\frac{d\Phi}{dt} > 0$$



$$\frac{d\Phi}{dt} > 0$$



$$\frac{d\Phi}{dt} < 0$$



$$\frac{d\Phi}{dt} < 0$$



4. 楞次定律

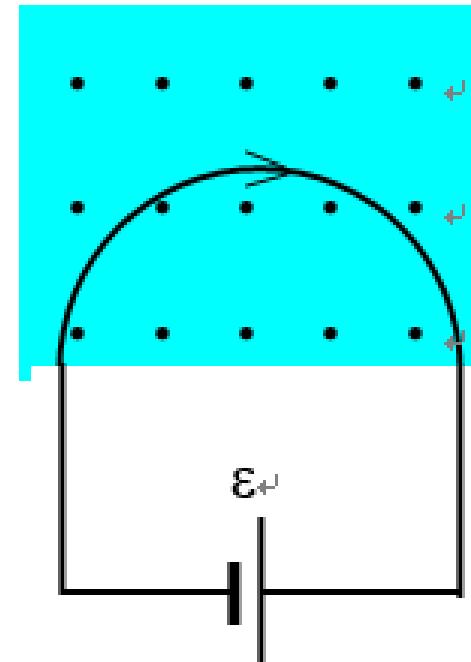
- 利用法拉第定律，能计算感应电动势的大小，又能判断其方向，但有时判定方向用楞次定律更为方便。
- 楞次定律：**感应电流（或感应电动势）总是补偿（或反抗）磁通量的变化。
- 说明：
 - 补偿指的是对磁通量变化的补偿，而不是磁通量的补偿。
 - 补偿并不是意味着完全抵消。
- 法拉第定律适合用于定量求解，楞次定律适合定性判断，二者通称为**电磁感应定律**。



书中例题 10.2(p. 443)

一半径 $r=0.20\text{m}$ 的半圆导线和直导线组成一回路，磁场垂直纸面向外，磁感应强度大小 $B=4t^2+2t+3$ ，回路电阻 $R=2$ 欧姆，其中接一电动势 $\epsilon=2.0\text{V}$ 的理想电源（不计内阻）

求： $t=10\text{s}$ 时回路中的感应电动势的大小和方向及回路中的电流。



解：半圆中的磁通量为：

$$\Phi = \vec{B} \bullet \vec{S} = (4t^2 + 2t + 3) \frac{\pi r^2}{2}$$

由法拉第电磁感应定律：

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -(8t + 2) \frac{\pi r^2}{2}$$

当 $t=10s$ 时 $\mathcal{E}_i = -5.2V$

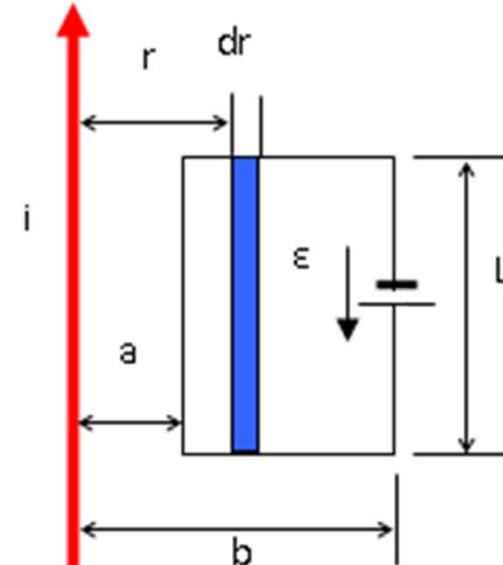
根据愣次定律，感应电动势的方向为顺时针方向。

回路中的电流为： $i = \frac{\sum \mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}}{R} = \frac{5.2 - 2}{2} = 1.6(A)$

书中例题 10.3(p. 444)

长直导线载有变化的电流 $i = (6t^2 + 6t) \times 10^{-1} A$, 接有电源的矩形线框放置在导线的同一平面里, 如图, $a = 0.1m$, $b = 0.3m$, $L = 0.3m$, 电源电动势 $\epsilon = 2V$, 线圈内磁介质的磁导率 $\mu = 1.46 \times 10^{-4} Tm/A$, 线圈总匝数为 1000, 电阻 $R = 2$ 欧姆。

求: $t = 1\text{min}$ 时线圈中电流 I 的大小和方向。



解：在距长直导线为r的矩形面积元 $ds=Ldr$, 磁感应强度

$$B = \frac{\mu i}{2\pi r}$$

穿过面积元 ds 的磁通量为：

$$d\Phi = B \bullet ds = \frac{\mu i}{2\pi r} L dr$$

穿过矩形线圈的磁通量为：

$$\Phi = \int B \bullet ds = \int_a^b \frac{\mu i L}{2\pi r} dr = \frac{\mu i L}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

整个线圈的感应电动势为：

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i &= -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu NL}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \frac{di}{dt} \\ &= -\frac{\mu NL}{2\pi} \ln \frac{b}{a} (12t + 6) \times 10^{-1}\end{aligned}$$

当 $t=1\text{min}=60\text{s}$ 时

$$\mathcal{E}_i = -0.56 \text{ (V)} \quad \text{方向为逆时针}$$

线圈中的电流：

$$I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_i}{R} = \frac{2 - 0.56}{2} = 0.72(A)$$

§ 2. 感应电动势

一动生电动势与感生电动势

- 根据法拉第定律知，只要以闭合回路为边界的曲面的磁通量随时间发生变化，那么该闭合回路就会产生感应电动势。
- 存在的问题：
 - (1) 感应电动势对应的非静电力是什么力？
 - (2) 如果没有闭合环路，是否有感应电动势？
 - (3) 如果没有导体，是否有感应电动势？
- 回答这些问题需要对电磁感应现象进行分类，并分析产生感应电动势的内在原因。

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_s B \cos \theta ds$$

- 引起磁通量变化的因素：
 - 导线在运动：引起面积、角度 $\cos \theta$ 等几个因素的变化

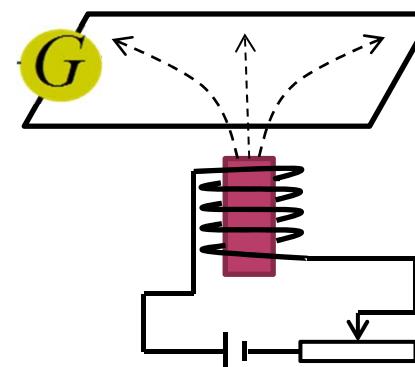
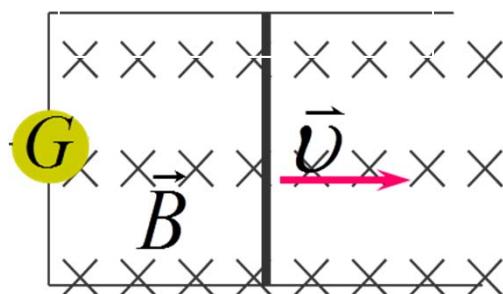


动生电动势

- 磁场变化

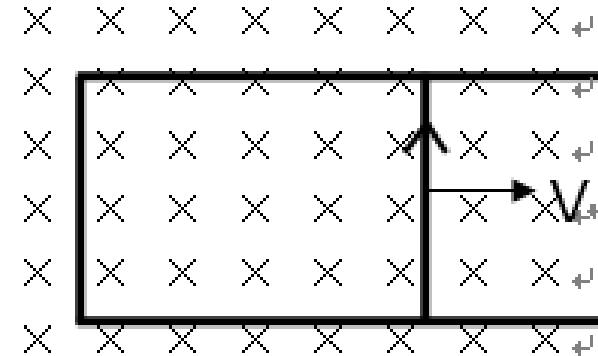
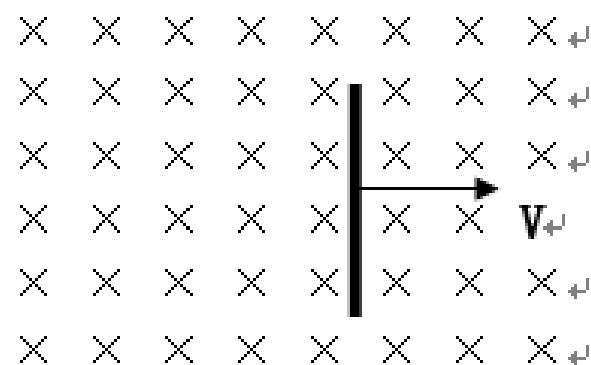


感生电动势



一、动生电动势

- 导体在磁场中运动产生的电动势——动生电动势。



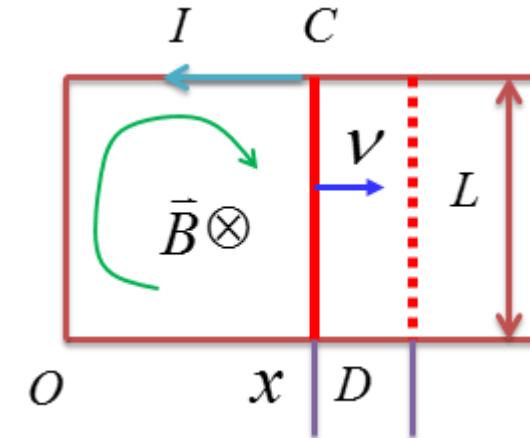
利用Faraday定律：选定，顺时针为回路绕行方向。

假定 $t = 0$ 时， $x = 0$ ， t 时刻：

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \iint dS = BLx$$

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -BL \frac{dx}{dt} = -BLv$$

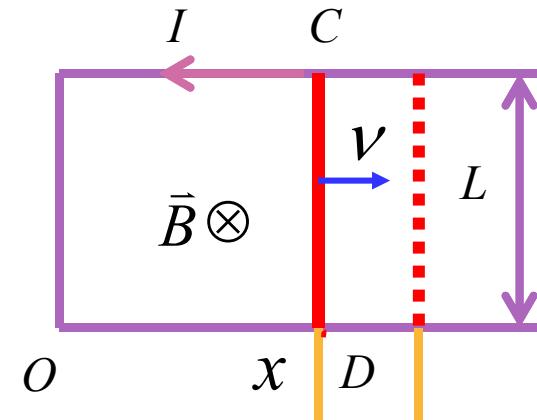
$\because \varepsilon < 0$, $\therefore \varepsilon$ 方向为逆时针。



- 这样的动生电动势是如何产生的呢？
- 动生电动势对应的非静电力是什么力？
- 这里的非静电力实际上就是洛伦兹力！

- CD中自由电子随CD运动，故会受到洛伦兹力。电子由C → D运动，这样C、D两端出现静电场，阻碍这种运动。当达到平衡时，静电力与洛伦兹力大小相同。

$$\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$$



- C、D端存在稳定的电位差，即CD成为电源，C正极，D负极。
- 这就是说，金属棒C、D内存在的非静电力——洛伦兹力。



- 非静电力：

$$\overrightarrow{E}_k = \frac{\vec{F}}{-e} = \frac{-e(\vec{v} \times \vec{B})}{-e} = \vec{v} \times \vec{B}$$

- 根据电源电动势定义：

$$\varepsilon = \int_D^C \overrightarrow{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_D^C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_D^C Bv dl = BLv$$

- 其结论与法拉第定律的结论相同，假设成立，即非静电力是洛伦兹力。
- 由以上分析可知：动生电动势只分布在运动的导体上，与回路中不运动的部分无关。



- 实际上，即使不存在回路，只要有运动的导体，电动势就可能存在，而且大小不变，相当于一个开路电源。
- 以上结论虽然从特例中获得，但是适合普遍规律，普遍地讲，任一运动导体线元：

$$d\varepsilon = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

- 任一运动导体L：

$$\varepsilon = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (\text{正负与 } d\vec{l} \text{ 有关})$$

\vec{v} 是导线线元 $d\vec{l}$ 相对于磁场 \vec{B} 的速度。

\vec{v} 、 \vec{B} 可以是不均匀的， L 可以是任意形状的。



补充例题

长为L的铜棒，固定一端，并以角速度 ω 旋转， $\omega//B$



补充例题

长为L的铜棒，固定一端，并以角速度 ω 旋转， $\omega//\mathbf{B}$

求：棒两端的电势差。

解：在棒上取 $d\mathbf{l}$ ，其速度 $\mathbf{v}=\omega \mathbf{l}$ ，

单位电荷受洛伦兹力 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ，洛伦兹力所作的元功为：

$$d\varepsilon = (\vec{v} \times \vec{B}) \bullet d\vec{l} = v B dl = B \omega l dl$$

沿棒对元功积分即的棒两端的电动势：

$$\varepsilon = \int_0^L B \omega l dl = \frac{1}{2} B \omega l^2 \Big|_0^L = \frac{1}{2} B \omega L^2$$

按照法拉第电磁感应定律， dt 时间内，棒扫过角度 $d\theta$ ，
扫过的面积为 $dS = \frac{1}{2}L^2d\theta$ ，磁通量变化为：

$$d\Phi = B \frac{1}{2} L^2 d\theta$$

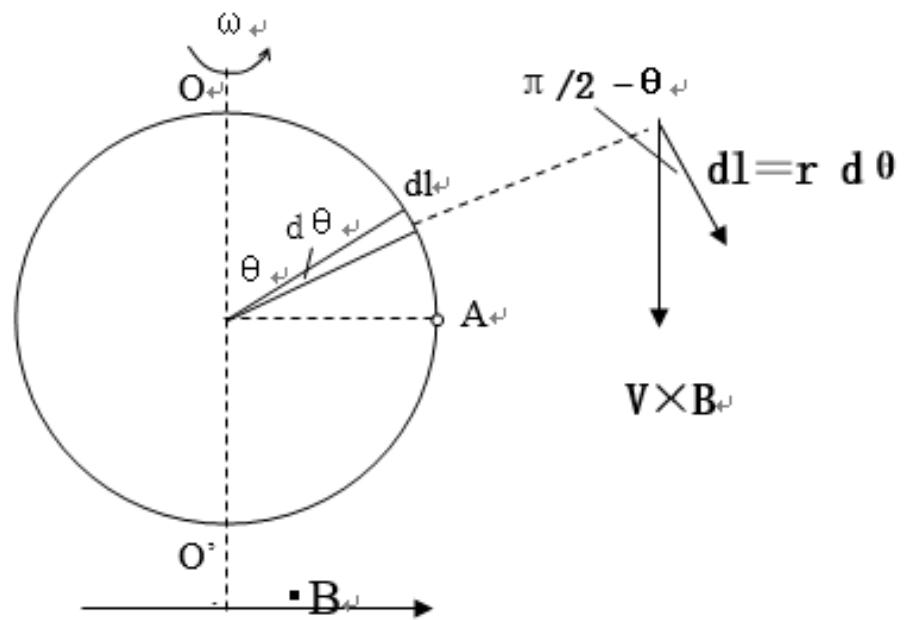
棒两端的电动势为：

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2} BL^2 \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2} BL^2 \omega$$

书中例题10. 6 (P452)

磁感应强度为 \mathbf{B} 的匀强磁场中，放置一圆形线圈，线圈电阻为 R ，半径为 r ，绕直径 OO' 以匀角速度 ω 旋转，当线圈平面转至与 \mathbf{B} 平行时。

求： OA 两点的动生电动势及回路中的感应电流。



$$\xi_{OA} = \int_O^A \vec{V} \times \vec{B} \bullet d\vec{l}$$

$$\xi_{OA} = \int_O^A V B dl \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$V = \omega r \sin\theta; \quad dl = r d\theta$$

$$\xi_{OA} = \int_0^{\pi/2} \omega r \sin \theta B \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) r d\theta$$

$$= \omega r^2 B \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\omega r^2 B \pi}{4}$$



整个圆形线圈产生的感应电动势为 $0 \sim 2\pi$ 积分

$$\xi = \omega r^2 B \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \omega r^2 B \pi$$

线圈产生的感应电流：

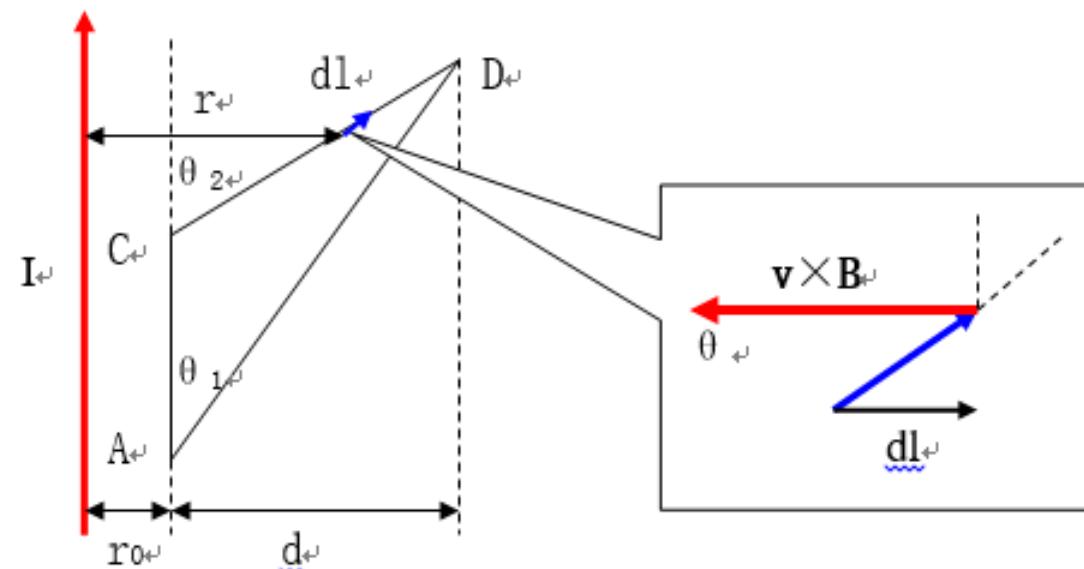
$$I = \frac{\omega r^2 B \pi}{R}$$



书中例题10. 7 (P453)

一通有恒定电流 I 的长直导线，旁边有一个与它共面的三角形线圈 ACD ， AC 的长为 l ， D 到 AC 边的垂直距离为 d ，时刻 t ，边 AC 与长直平行且相距 r ，

试求：当线圈由图位置，以速度 v 沿竖直方向向上运动时，三角形线圈每边上的动生电动势的大小和方向。



解：AC段的电动势为0

CD段电动势为：

$$\xi_{CD} = \int_C^D (\vec{v} \times \vec{B}) \bullet d\vec{l} = \int_C^D vB \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_2\right) dl = - \int vB \sin \theta_2 dl$$

r处的磁场强度 $B=\mu_0 I / (2\pi r)$; $dl=dr/\sin\theta_2$, 所以

$$\xi_{CD} = - \int_{r_0}^{r_0+d} v \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sin \theta_2 \frac{dr}{\sin \theta_2} = - \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{r_0 + d}{r_0}$$

同样的方法得到AD段电动势为：

$$\xi_{AD} = - \int_{r_0}^{r_0+d} v \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sin \theta_1 \frac{dr}{\sin \theta_1} = - \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{r_0 + d}{r_0}$$

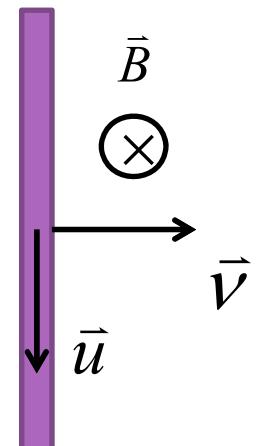
整个回路中的电动势为0.

• 问题：洛伦兹力是否做功：

- 对于电源，非静电力作功，将其他形式的能量转换为静电能。对于动生电动势的电源来说，非静电力是洛伦兹力。而我们上一章介绍过，洛伦兹力永远不做功，这是不是说明前后矛盾呢？当然不是：
- 当导体以速度 \vec{v} 运动时，自由电子速度包含两个分量： \vec{v} （随同导体）、定向移动速度： \vec{u}

$$\therefore \text{洛伦磁力: } \vec{F} = -e(\vec{v} + \vec{u}) \times \vec{B} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_1 = -e\vec{v} \times \vec{B}, \quad \vec{F}_2 = -e\vec{u} \times \vec{B}$$



可以证明，两个分量对电子做功代数和为零。



- 分量 \vec{F}_1 在 dt 时间内所做的功：

$$\begin{aligned}A_1 &= \vec{F}_1 \cdot (\vec{v} + \vec{u}) dt = -e(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot (\vec{v} + \vec{u}) dt \\&= -e(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} dt\end{aligned}$$

- 分量 \vec{F}_2 在 dt 时间内所做的功：

$$\begin{aligned}A_2 &= \vec{F}_2 \cdot (\vec{v} + \vec{u}) dt = -e(\vec{u} \times \vec{B}) \cdot (\vec{v} + \vec{u}) dt \\&= -e(\vec{u} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt\end{aligned}$$

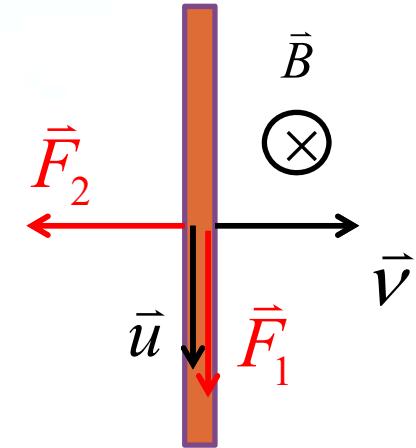
\because 由矢量运算公式： $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}$

$$\therefore A_1 = -A_2, \text{ 即 } A_1 + A_2 = 0$$

也就是说，洛伦兹力做的总功为零。



- 它的一个分量 \vec{F}_1 对自由电子做正功，产生动生电动势。另一分量 \vec{F}_2 与导体运动的方向相反，构成导体运动的阻力，做负功。
- 也就是说，对于这样的电源，磁场本身不提供能量，只是起能量传递的作用。



外界的能量 $\xrightarrow{\text{磁场 (洛伦兹力)}}$ 静电能



例题

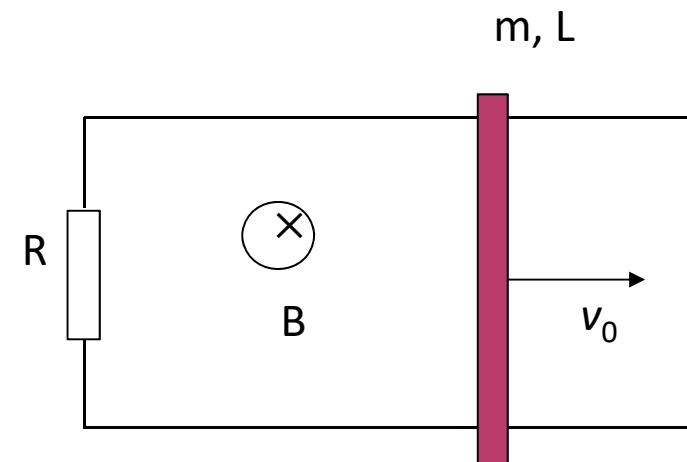
一质量为 m , 长度为 L 的导线, 置于电阻为 R 的回路中, 空间中加有如图所示方向的均匀磁场, 磁感应强度大小为 B 。如导线以速度 v_0 开始沿 x 轴正方向运动。

求: $v(t)$, 并解释动能的损失。

解: 任意时刻速 $v(t)$,

$$\mathcal{E}_{\text{动生}}(t) = \int_0^L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = BLv(t)$$

产生电流 $i(t)$



$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BLv(t)}{R}$$

有电流后，产生安培力：

$$df(t) = i(t)d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$F(t) = \int_0^L df(t) = i(t) LB = \frac{B^2 L^2}{R} v(t)$$

运动方程：

$$F = \frac{B^2 L^2}{R} v = -m \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{B^2 L^2}{mR} dt = -\frac{dt}{\tau}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{B^2 L^2}{mR}$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = \int_0^t -\frac{dt}{\tau}, \quad \ln \frac{v}{v_0} = -\frac{t}{\tau}$$

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$$



$$P = i^2 R$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\infty i^2 R dt = \int_0^\infty \left(\frac{BLv}{R} \right)^2 R dt \\ &= \frac{B^2 L^2}{R} v_0^2 \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = -\frac{\tau}{2} \frac{B^2 L^2}{R} v_0^2 \int_0^\infty e^{-2t/\tau} d(-2t/\tau) \\ &= -\frac{1}{2} m v_0^2 \int_0^\infty e^{-2t/\tau} d(-2t/\tau) = \frac{1}{2} m v_0^2 \end{aligned}$$

动能损耗转化为电能（电路中的焦耳热）

发电机

例题

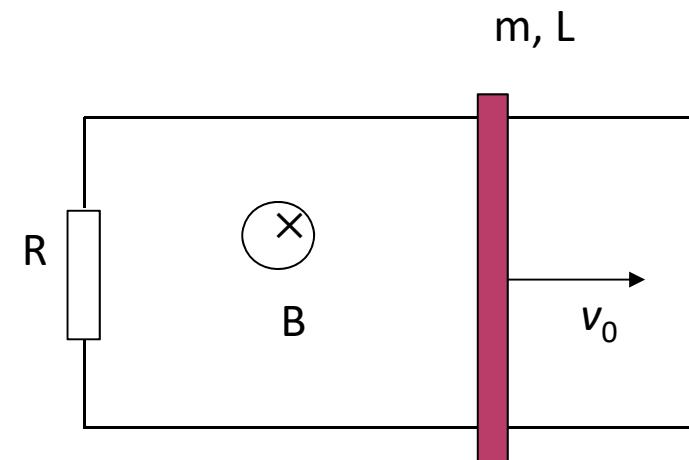
一质量为 m , 长度为 L 的导线, 置于电阻为 R 的回路中, 空间中加有如图所示方向的均匀磁场, 磁感应强度大小为 B 。如导线以速度 v_0 开始沿 x 轴正方向运动。

求: $v(t)$, 并解释动能的损失。

解: 任意时刻速 $v(t)$,

$$\mathcal{E}_{\text{动生}}(t) = \int_0^L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = BLv(t)$$

产生电流 $i(t)$



$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BLv(t)}{R}$$

有电流后，产生安培力：

$$df(t) = i(t)d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\underline{F(t)} = \int_0^L df(t) = i(t)LB = \frac{B^2 L^2}{R} v(t)$$

运动方程：

$$F = \frac{B^2 L^2}{R} v = -m \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{B^2 L^2}{mR} dt = -\frac{dt}{\tau}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{B^2 L^2}{mR}$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = \int_0^t -\frac{dt}{\tau}, \quad \ln \frac{v}{v_0} = -\frac{t}{\tau}$$

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$$

$$P = i^2 R$$

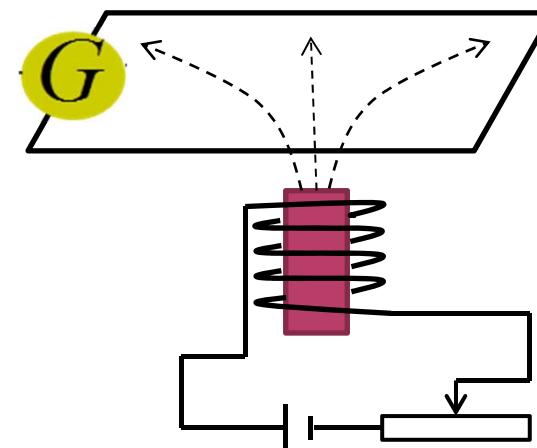
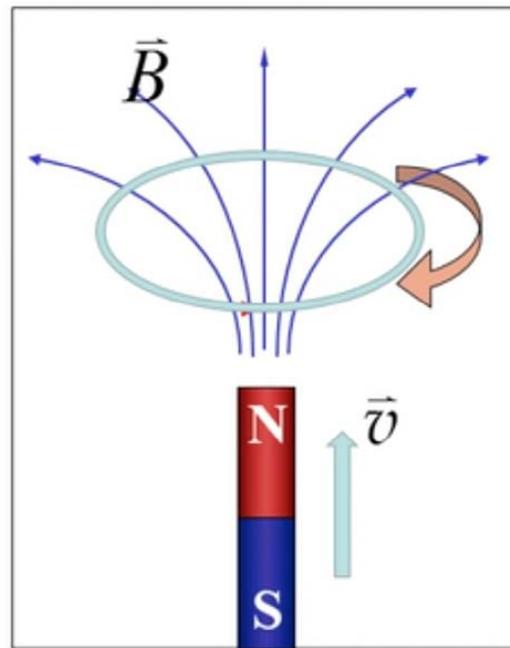
$$\begin{aligned} A &= \int_0^\infty i^2 R dt = \int_0^\infty \left(\frac{BLv}{R} \right)^2 R dt \\ &= \frac{B^2 L^2}{R} v_0^2 \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = -\frac{\tau}{2} \frac{B^2 L^2}{R} v_0^2 \int_0^\infty e^{-2t/\tau} d(-2t/\tau) \\ &= -\frac{1}{2} m v_0^2 \int_0^\infty e^{-2t/\tau} d(-2t/\tau) = \frac{1}{2} m v_0^2 \end{aligned}$$

动能损耗转化为电能（电路中的焦耳热）

发电机

二、感生电动势

- 洛伦兹力能很好地解释动生电动势产生的机制，却不能解释为什么在导体回路不动，只是磁场的变化，会在导体中产生感应电动势。



- 麦克斯韦在分析和研究了这类电磁感应现象后提出：无论有无导体或导体回路，变化的磁场都将在其周围空间产生一种电场，这种电场的电力线是闭合的，称为涡旋电场或有旋电场 $\vec{E}_{\text{旋}}$ 。

$$\mathcal{E}_{\text{感生}} = \oint \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l}$$

- 磁场随时间变化产生的电动势叫做感生电动势或涡旋电动势。

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{感应}} &= -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= \mathcal{E}_{\text{动生}} + \mathcal{E}_{\text{感生}} \\ &= \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} + \oint \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

根据法拉第定律和电动势的定义

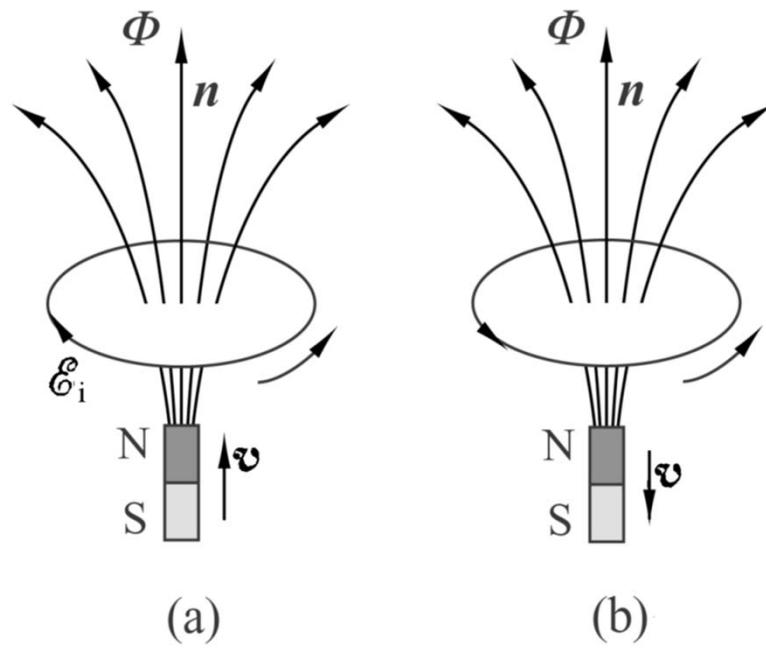
$$\mathcal{E}_{\text{感应}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint \bar{B} \cdot d\bar{S}$$

积分式中 S 是以闭合回路 L 为边界的曲面，当回路固定不变时：

$$\mathcal{E}_{\text{感生}} = \oint \bar{E}_{\text{旋}} \cdot d\bar{l} = - \iint_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S}$$

因为 B 即是时间的函数，也是空间变量的函数，所以这里要用偏导数。

有旋电场的方向



在存在有旋电场的地方，如果有导体回路存在，则在有旋电场的作用下，在回路中产生电流；如果没有导体回路存在，有旋电场依然存在。

总结：

存在两种不同起源的电场

静电场

- 由静止电荷激发的电场
- 对电荷有作用力

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

- 环路定理

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

- 高斯定理

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{S \text{ 内}} q_i$$

感生电场

- 由变化的磁场激发的电场
- 对电荷有作用力

$$\vec{F}_k = q\vec{E}_{\text{旋}}$$

- 环路定理

$$\oint_L \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

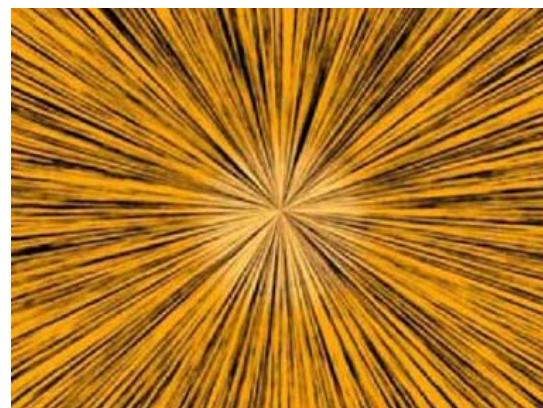
- 高斯定理

$$\iint_S \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{S} = 0$$



静电场

- 静电场是有源无旋场



- 静电场的电场线起于正电荷，终于负电荷，是一组不闭合的曲线

感生电场

- 感生电场无源有旋场



- 感生电场的电场线与变化的磁场方向满足右螺旋的反方向，是一组闭合的曲线



感生电动势（电场）的计算

一、方法一

应用 $\varepsilon = \int_I \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l}$ 计算

- 这种方法要求先计算出积分路径上各点的 $\vec{E}_{\text{旋}}$ ，再通过做积分得到感生电动势
- 但是在一般情况下，计算 $\vec{E}_{\text{旋}}$ 是困难的，所以只有在某些对称情况下（如长螺线管形成的变化磁场区域），才能比较方便计算感生电动势

二、方法二

应用电磁感应定律计算

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

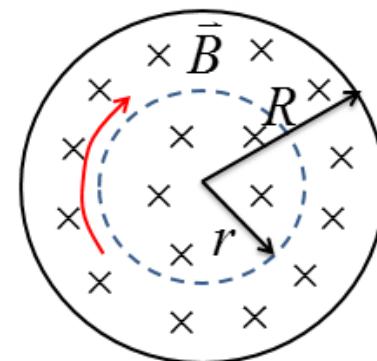
- 对于闭合电路，只需知道线圈的 $\frac{d\Phi}{dt}$ ，就可求出感生电动势
- 对于非闭合的一段导线 ab ，可假设一条辅助曲线与 ab 组成闭合回路，只要知道这个闭合回路的 $\frac{d\Phi}{dt}$ 也可以用法拉第定律求出感生电动势



书中例题 10.8(p. 455)

半径为 R 的长直螺线管中载有变化电流，管内产生均匀磁场，当磁感应强度的变化率以恒定速率增加时，

求：（1）管内外有旋电场 $E_{\text{旋}}$ ，并计算同心圆形导体回路中的感生电动势。

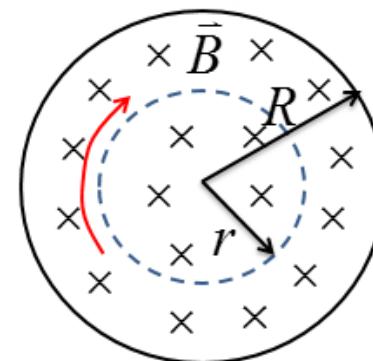


书中例题 10.8(p. 455)

半径为 R 的长直螺线管中载有变化电流，管内产生均匀磁场，当磁感应强度的变化率以恒定速率增加时，

求：（1）管内外有旋电场 $E_{\text{旋}}$ ，并计算同心圆形导体回路中的感生电动势。

解： r 为闭合回路半径，由于螺线管的对称性，可知涡旋电场也是对称的，其电力线为同心的圆周，在同一圆周上 $\vec{E}_{\text{旋}}$ 的大小相等方向沿切线方向。



思路：由法拉第定律求 ε ,

由 $\mathcal{E}_{\text{感生}} = \oint_L \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l}$, 则可求出 $\vec{E}_{\text{旋}}$

选定绕行方向：顺时针

磁通量：

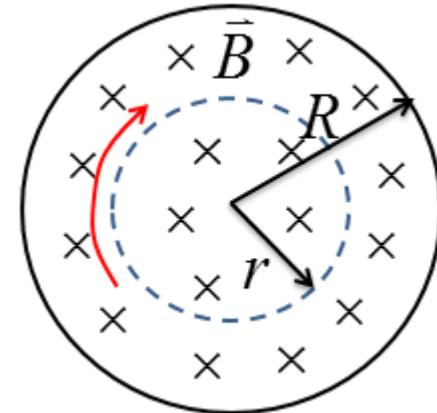
$$\phi = \pi r^2 B \quad (r < R)$$

$$\phi = \pi R^2 B \quad (r > R)$$

电动势：

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} \quad (r < R)$$

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\pi R^2 \frac{dB}{dt} \quad (r > R)$$

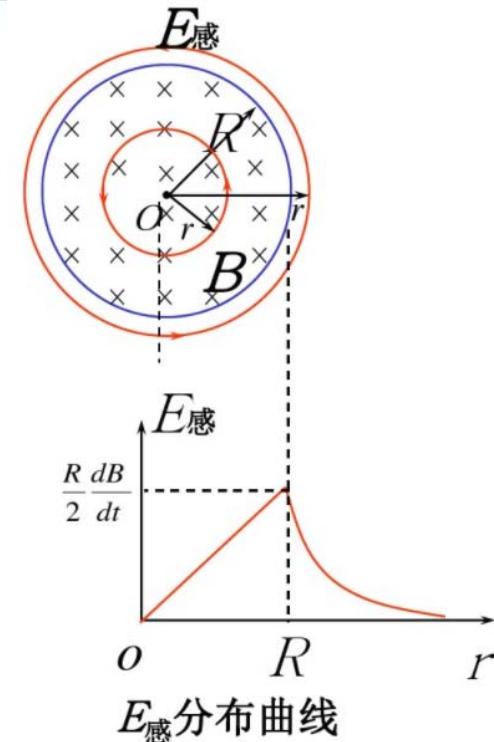


$$\mathcal{E}_{\text{感生}} = \oint \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = 2\pi r E_{\text{旋}}$$

涡旋电场：

$$E_{\text{旋}} = \frac{\varepsilon}{2\pi r} = -\frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (r < R)$$

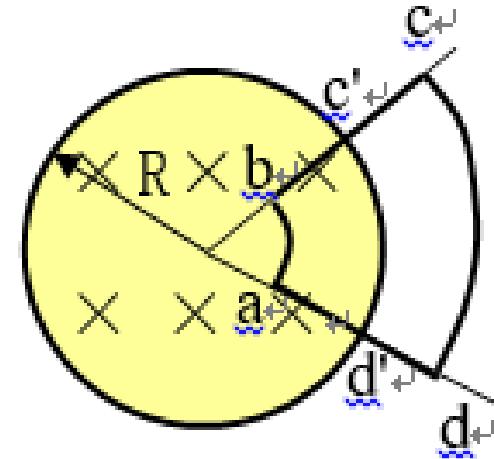
$$E_{\text{旋}} = \frac{\varepsilon}{2\pi r} = -\frac{R^2}{2r} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (r > R)$$



方向： $\frac{\partial B}{\partial t} > 0$, 逆时针; $\frac{\partial B}{\partial t} < 0$, 顺时针。

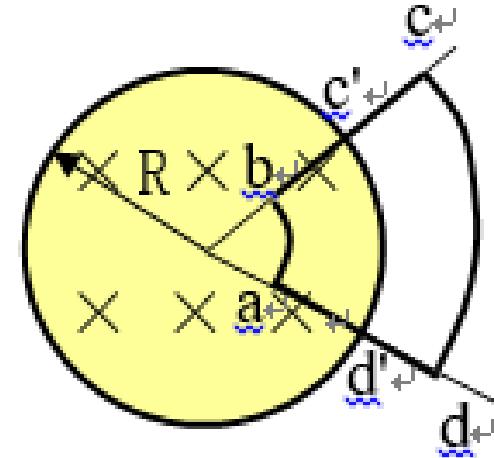
例题 求闭合回路abcda中的感生电动势。

其中， ab 、 cd 是圆心角 $\theta = \pi/3$ 的圆弧， bc 、 ad 沿半径， $ad' = dd' = oa = R/2$ ， c' 、 d' 分别是 bc 和 ad 与圆柱截面的交点。



例题 求闭合回路abcda中的感生电动势。

其中， ab 、 cd 是圆心角 $\theta = \pi/3$ 的圆弧， bc 、 ad 沿半径， $ad' = dd' = oa = R/2$ ， c' 、 d' 分别是 bc 和 ad 与圆柱截面的交点。



解：为了求 $abcda$ 回路中的感生电动势，可将回路分段分别求 ε_{ab} 、 ε_{bc} 、 ε_{cd} 、 ε_{da} ，然后求其代数和。

由于 ad 、 bc 与有旋电场处处垂直，

$$\therefore \varepsilon_{da} = \varepsilon_{bc} = 0$$

对于ab段可用前面得到的结果，

且 $r=R/2$, 积分限为 $0 \sim \pi/3 \cdot R/2 = \pi R/6$ 。

$$E_{ab} = -\frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{R}{4} \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\mathcal{E}_{ab} = \int_a^b \bar{E}_{ab} \bullet d\bar{l} = - \int_0^{\pi R/6} \frac{R}{4} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \bullet d\bar{l} = \frac{\pi R^2}{24} \frac{\partial B}{\partial t}$$

对于cd段可用前面得到的结果，且 $r=3R/2$, 积分限为 $0 \sim \pi/3 \cdot 3R/2 = \pi R/2$ 。

$$E_{cd} = -\frac{R^2}{2r} \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{R}{3} \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\mathcal{E}_{cd} = \int_c^d \vec{E}_{cd} \bullet d\vec{l} = - \int_0^{\pi R/2} \frac{R}{3} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{l} = - \frac{\pi R^2}{6} \frac{\partial B}{\partial t}$$

回路 abcda 中总的电动势为：

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \mathcal{E}_{ab} + \mathcal{E}_{bc} + \mathcal{E}_{cd} + \mathcal{E}_{da} \\ &= \frac{\pi R^2}{24} \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\pi R^2}{6} \frac{\partial B}{\partial t} = - \frac{\pi R^2}{8} \frac{\partial B}{\partial t}\end{aligned}$$

如果 ab 段的有旋电场与沿积分路径的方向一致的话，则 cd 段的有旋电场与沿积分路径的方向相反。

\therefore 这两段的电动势是相减的。



以上是通过有旋电场对单位正电荷作功得到的回路中产生的电动势，
如果从法拉第电磁感应定律可直接得到回路中的感应电动势：

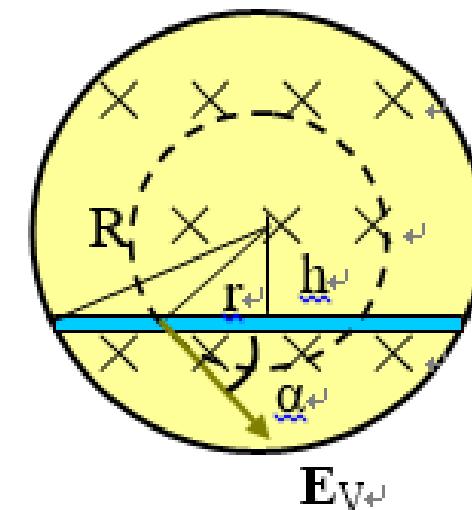
$$\mathcal{E} = -\frac{1}{6} \left(\pi R^2 - \pi \frac{R^2}{4} \right) \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\pi R^2}{8} \frac{\partial B}{\partial t}$$

与前面得到的结果相同。



例题

将长为 L 的导体棒 ab 垂直于磁场放置在螺线管内，求棒两端的电动势。



例题

将长为L的导体棒ab垂直于磁场放置在螺线管内，求棒两端的电动势。

解法一：从有旋电场求ab端的电动势。

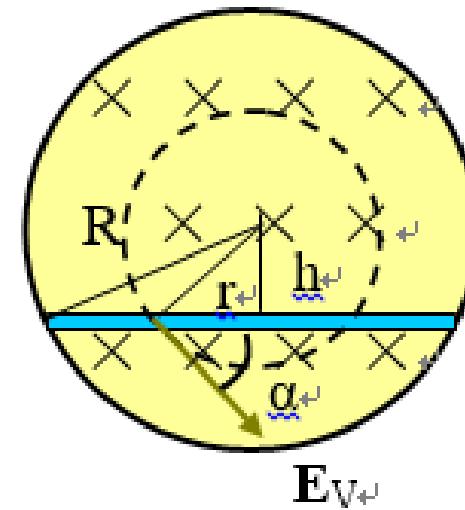
$$\varepsilon_{ab} = \int_a^b \vec{E}_{ab} \bullet d\vec{l} = \int_a^b E_{\text{旋}} \cos \alpha dl$$

在 $r < R$ 区域内

$$E_{\text{旋}} = -\frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t}$$

，且 $\cos \alpha = \frac{h}{r}$

$$\varepsilon_{ab} = -\int_a^b \frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{h}{r} dl = -\frac{h}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \int_a^b dl = -\frac{h}{2} \frac{\partial B}{\partial t} L = -\frac{L}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \frac{\partial B}{\partial t}$$



解法二：沿圆半径做辅助线Oa和Ob形成三角形，由于沿半径方向与有旋电场垂直，其电动势为0，只有ab段产生电动势，根据法拉第电磁感应定律，三角形回路中的感应电动势为：

$$\mathcal{E}_{ab} = -S \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{Lh}{2} \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{L}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \frac{\partial B}{\partial t}$$

书中例题10.9(p. 457)

薄壁导体柱壳，半径为 r ，高为 h ，电阻为 R ，放在 N 匝，长 L 的螺线管中部， $L \gg h$ ，螺线管中通以交变电流 $I = I_0 \sin \omega t$ 。

- 求：
- (1) 柱壳中的感应电流
 - (2) 怎样提高感应电流产生的焦耳热。



书中例题10.9(p. 457)

薄壁导体柱壳，半径为 r ，高为 h ，电阻为 R ，放在 N 匝，长 L 的螺线管中部， $L \gg h$ ，螺线管中通以交变电流 $I = I_0 \sin \omega t$ 。

- 求：（1）柱壳中的感应电流
（2）怎样提高感应电流产生的焦耳热。

解： $\because L \gg h$ ，螺线管可看成长直螺线管，磁感应强度为：

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I$$

柱壳中的磁通量为：

$$\Phi = B \bullet S = \mu_0 \frac{N}{L} I \pi r^2 = \frac{\mu_0 N \pi r^2}{L} I$$

柱壳壁中产生的感生电动势为：

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 \frac{N}{L} \pi r^2 \frac{dI}{dt} = \\ &-\mu_0 \frac{N}{L} \pi r^2 \frac{d(I_0 \sin \omega t)}{dt} = \frac{\mu_0 N \pi r^2 I_0 \omega}{L} \cos \omega t\end{aligned}$$

感应电流为：

$$I = \frac{\mu_0 N \pi r^2 I_0 \omega}{LR} \cos \omega t$$



(2) 怎样提高感应电流产生的焦耳热。

交变电流在一个周期内感应电流功率的平均值：

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T I^2 R dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\mu_0^2 N^2 \pi^2 r^4 I_0^2 \omega^2}{L^2 R} \cos^2 \omega t dt \\ &= \frac{\mu_0^2 N^2 \pi^2 r^4 I_0^2 \omega^2}{2 L^2 R T} \int_0^T (1 + \cos 2\omega t) dt \\ &= \frac{\mu_0^2 N^2 \pi^2 r^4 I_0^2 \omega^2}{2 L^2 R}\end{aligned}$$

t时间内，感应电流产生的焦耳热为：

$$Q = \bar{P}t = \frac{\mu_0^2 N^2 \pi^2 r^4 I_0^2 \omega^2 t}{2 L^2 R} = \frac{\pi^2 r^4}{2 R} B^2 \omega^2 t$$

$$Q = \bar{P}t = \frac{\mu_0^2 N^2 \pi^2 r^4 I_0^2 \omega^2 t}{2L^2 R} = \frac{\pi^2 r^4}{2R} B^2 \omega^2 t$$

其中 $B = \mu N I_0 / L$, 由上式可以看出与焦耳热有关的参数:

- 与 r^4 成正比, 薄柱壳的半径增大, 加热效果提高很快;
- 与 B^2 成正比, 磁场越强, 加热效果越好;
- 与 ω^2 成正比, 频率越快, 加热效果越好;
- 与 R 成反比, 电阻越小, 加热效果越好, 适于加热导体;
- 提高 B 需要提高线圈的电流, 从而使消耗的功率提高;
- 提高 ω 则不需要提高电流就能达到提高热量的目的。

在高频加热中, 通常采用几兆赫兹的交变电流。

例题

加热一半径为 R , 高为 b , 电阻率为 ρ 的金属圆柱, 磁感应强度的变化率恒定地增加。

求: 圆柱体内的电流。



例题

加热一半径为R，高为b，电阻率为 ρ 的金属圆柱，磁感应强度的变化率恒定地增加。

求：圆柱体内的电流。

解：取半径为r，厚度为dr，高为b的柱壳，其磁通量和感生电动势分别为：

$$\Phi = B\pi r^2$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

根据电阻率的定义

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

可知柱壳的电阻为：

$$dR = \rho \frac{l}{dS} = \rho \frac{2\pi r}{bdr}$$



柱壳内产生的感应电流为：

$$di = \frac{\varepsilon}{dR} = \frac{-\pi r^2 \frac{dB}{dt}}{\rho \frac{2\pi r}{bdr}} = -\frac{rb}{2\rho} \frac{dB}{dt} dr$$

整个金属圆柱内的电流：

$$i = \int_0^R di = - \int_0^R \frac{b}{2\rho} \frac{dB}{dt} r dr = -\frac{bR^2}{4\rho} \frac{dB}{dt}$$

有旋电场（涡旋电场）在导体中产生的电流叫涡旋电流。

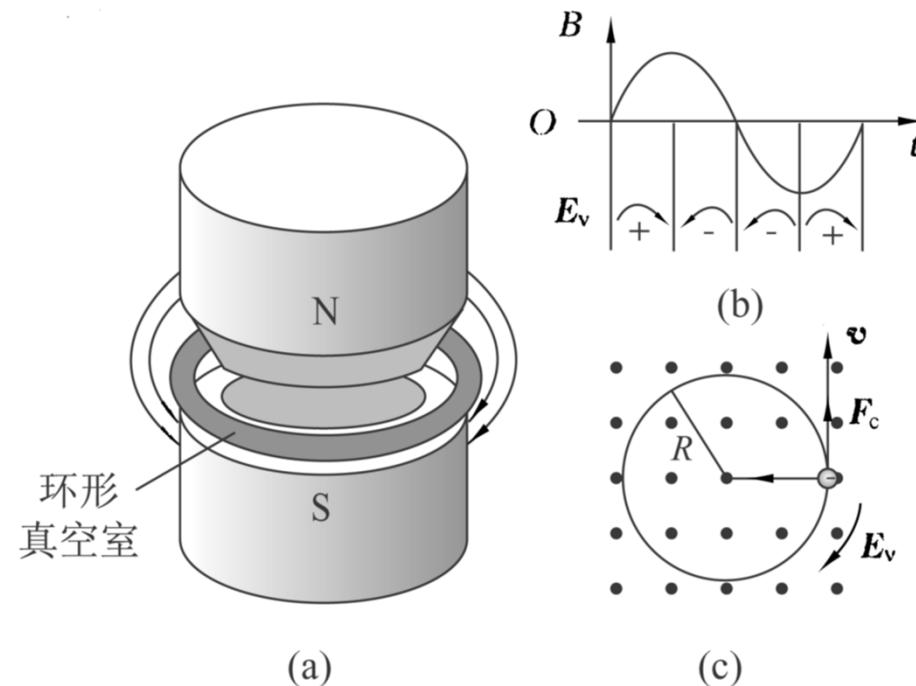
利用涡旋电流可对金属进行加热，如电磁灶，高频加热；

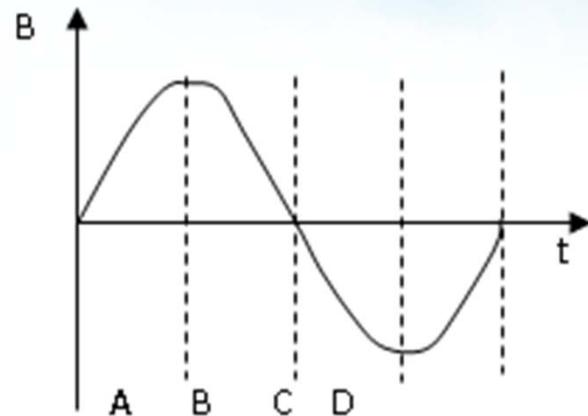
涡旋电流有时也有害，如造成变压器中铁芯的发热。

所以变压器中的铁芯都做成片状(减小R)来降低涡旋电流。

三、电子感应加速器

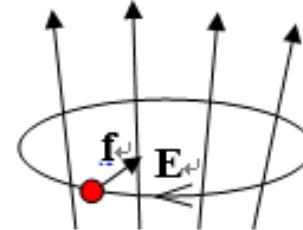
在圆柱形电磁铁间隙中有一个环形，真空室交变电流产生交变磁场；变的磁场产生有旋电场。在有旋电场的作用下，真空室内的电子被加速。





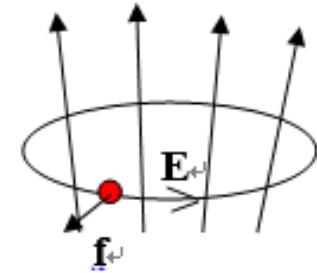
在一个周期中，电流的变化分成ABCD 4个部分，运动的电子还会受洛伦磁力的作用。

A:



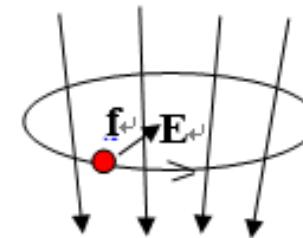
$$\Phi > 0; \frac{d\Phi}{dt} > 0$$

B:



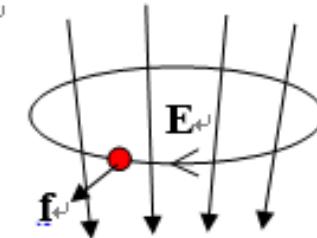
$$\Phi > 0; \frac{d\Phi}{dt} < 0$$

C:



$$\Phi < 0; \frac{d\Phi}{dt} > 0$$

D:



$$\Phi < 0; \frac{d\Phi}{dt} < 0$$



从图中可看到，在A区与C区有旋电场和洛伦滋力的共同作用使电子沿圆周轨道运动；其中只有A区电子才能从电子枪发出，如图逆时针绕圆周运动

打到靶上，所以真正有用的只有 $\frac{1}{4}$ 个周期。由于电子的质量非常小，在

$\frac{1}{4}$ 周期里已经能获得很高的能量。最高能量可达到300MeV。



使电子稳定在固定半径R的圆轨道上运动的条件：

电子做圆周运动时的向心力为洛伦兹力：

$$evB_R = \frac{mv^2}{R}$$

$$mv = eRB_R$$

其中 B_R 是圆轨道半径上的磁感应强度， v 与 \mathbf{B} 垂直。

圆轨道半径上的有旋电场的大小为：

$$\int \vec{E}_V \bullet d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$



在圆轨道上， E_V 是常量，沿圆轨道积分为 $E_V 2\pi R$ ，圆轨道包围的面积 S 内的磁通量为

$$\Phi = \pi R^2 \bar{B} ,$$

其中 \bar{B} 为面积 S 内磁感应强度的平均值，

\therefore 有旋电场的大小为：

$$E_V 2\pi R = \pi R^2 \frac{d\bar{B}}{dt}$$

$$E_V = \frac{R}{2} \frac{d\bar{B}}{dt}$$



根据牛顿第二定律：

$$\frac{d(mv)}{dt} = eE_v = \frac{eR}{2} \frac{d\bar{B}}{dt}$$

对比 $mv = eRB_R$

可得 $B_R = \frac{1}{2} \bar{B}$

由此得到，电子在圆轨道上运行的条件是：轨道半径上的磁感应强度是圆内磁感应强度平均值的一半。

小结：两类感应电动势

1) 切割形---动生电动势

$$\mathcal{E}_i = \int_b^a \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = \int_{L_{ba}} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

2) 场变形---感生电动势

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

3) 二者兼而有之

$$\mathcal{E}_i = \int_{L_{ba}} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

作业: 10.11 , 10.12, 10.14, 10.15, 10.16



南開大學
Nankai University