线性代数-行列式

- 行列式的定义
    1. 二阶行列式
    2. 三阶行列式
    3. n阶行列式
- 行列式的性质
- 行列式的计算
- 行列式按行(列)展开

1.1 行列式的定义

二阶行列式的引入

设有二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1. & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (2) \end{cases}$$

用消元法求解

$$(1) \times a_{22}: \quad a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22},$$

$$(2) \times a_{12}: \quad a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{12}b_2;$$

两式相减消去x_2得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

类似可以消去x_1得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

若$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

二阶行列式的引入

用记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$表示$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$并称之为由$a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$这4个数所确定的二阶行列式，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

记忆：对角线法则.

主对角线　　副对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

练习：$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=?$

二阶行列式的引入

当$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$，方程组有唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \qquad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

注意到

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \triangleq D_1$$

$$a_{11}b_2-a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \triangleq D_2,$$

则

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

规律：D_i是由b_1, b_2替换D中第i列得到的二阶行列式.

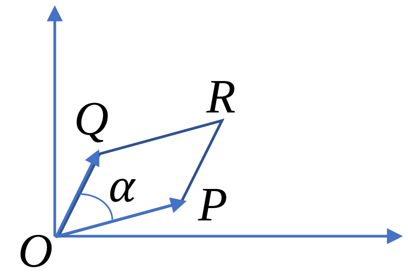
二阶行列式的引入

思考：如果$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0$，方程组的解会有哪些情况?

二阶行列式的几何意义

定理(二阶行列式的几何意义). **设$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix}=\boldsymbol{ad}-\boldsymbol{bc}$. 令$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$和$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})$是平面上的两个点. 则向量$\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}$和$\overrightarrow{\boldsymbol{OQ}}$张成的平行四边形的面积为$|\boldsymbol{D}|$.**

证明. 设向量$\overrightarrow{OP}$和$\overrightarrow{OQ}$之间的夹角为$\alpha(0\le\alpha\le\pi)$. 记向量$\overrightarrow{OP}$和$\overrightarrow{OQ}$张成的平行四边形为$OPQR$.



$$\text{Area}(OPQR)=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\ \sin\alpha$$
$$=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

将$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|}$代入上式有:

$$\text{Area}(OPQR)=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\sqrt{1-\frac{(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ})^2}{(|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|)^2}}=\sqrt{(|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|)^2-(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ})^2}$$
$$=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2}$$
$$=|ad-bc|.$$

■

思考: 为什么平行四边形的面积不是D?

三阶行列式的定义

回顾：二阶行列式是由二元一次线性方程组的四个系数a_{ij}按照某种代数运算得到的一个数值$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，这个数值不为零时方程组有唯一解$x_i = \frac{D_i}{D}, i = 1,2.$

问题：三阶行列式是否可以类比地通过三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

定义?

即是否存在关于方程组系数a_{ij}的某种代数运算，使得经过这种运算后得到的一个数值$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$满足$D \neq 0$时，方程组有唯一解$x_i = \frac{D_i}{D}, i = 1,2,3$?

动手尝试!

三阶行列式的定义

定义(三阶行列式). 给定9个数$a_{ij}(1 \leq i,j \leq 3)$, 其确定的三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

记忆：沙路法.

$$\begin{array}{|ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

三阶行列式的定义

定义(三阶行列式). 给定9个数$a_{ij}(1 \le i,j \le 3)$, 其确定的三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

记忆：沙路法.

练习： $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =?$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} =?$

三阶行列式的几何意义

定理(三阶行列式的几何意义). 设$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{b_3} \\ \boldsymbol{c_1} & \boldsymbol{c_2} & \boldsymbol{c_3} \end{vmatrix}$. 令$\boldsymbol{P(a_1,a_2,a_3)}$, $\boldsymbol{Q(b_1,b_2,b_3)}$, $\boldsymbol{R(c_1,c_2,c_3)}$**是空间中的三个点，则向量**$\boldsymbol{\overrightarrow{OP}}$, $\boldsymbol{\overrightarrow{OQ}}$**和**$\boldsymbol{\overrightarrow{OR}}$**张成的平行六面体的体积为**$\boldsymbol{|D|}$**.**

证明. 向量的叉积(自证). ■

排列

定义(排列). 由$1,2,\ldots n$组成的一个有序数组称为一个n级排列. 所有n级排列的总数为$n!$.

例: 所有3级排列为$123, 132, 213, 231, 312, 321$.

例: 排列$12\cdots n$称为标准排列.

逆序数

定义(逆序数). 给定排列$j_1j_2\cdots j_n$，若一对数在$j_1j_2\cdots j_n$中的前后位置与标准次序相反，即前面的数字大于后面的数字，则称这对数为一个**逆序**.

排列$j_1j_2\cdots j_n$中逆序的总数称为$j_1j_2\cdots j_n$的逆序数，记作$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

例：$12\cdots n$中没有逆序，故$\tau(12\cdots n)=0$.

例：31542的逆序为$31,32,54,52,42$，$\tau(31542)=5$.

逆序数

逆序数的计算方法. 给定排列$j_1 j_2 \cdots j_n$,

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = j_1\text{后面比 } j_1 \text{ 小的数的个数}$$
$$+ j_2\text{后面比 } j_2 \text{ 小的数的个数}$$
$$\vdots$$
$$+ j_{n-1}\text{后面比 } j_{n-1} \text{ 小的数的个数}$$

例: 求$135 \cdots (2n-1)(2n)(2n-2) \cdots 42$的逆序数.

解: $\tau =$

逆序数

逆序数的计算方法. 给定排列$j_1 j_2 \cdots j_n$,

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = j_1\text{后面比 } j_1 \text{ 小的数的个数}$$
$$+ j_2\text{后面比 } j_2 \text{ 小的数的个数}$$
$$\vdots$$
$$+ j_{n-1}\text{后面比 } j_{n-1} \text{ 小的数的个数}$$

例: 求$135 \cdots (2n-1)(2n)(2n-2) \cdots 42$的逆序数.

解: $\tau = 1$

逆序数

逆序数的计算方法. 给定排列$j_1j_2\cdots j_n$,

$$
\begin{aligned}
\tau(j_1j_2\cdots j_n) = &\ j_1\text{后面比 } j_1 \text{ 小的数的个数}\\
&+j_2\text{后面比 } j_2 \text{ 小的数的个数}\\
&\ \vdots\\
&+j_{n-1}\text{后面比 } j_{n-1} \text{ 小的数的个数}
\end{aligned}
$$

例: 求$135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 42$的逆序数.

解: $\tau = 1+2$

逆序数

逆序数的计算方法. 给定排列$j_1 j_2 \cdots j_n$,

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = \ j_1\text{后面比 } j_1 \text{ 小的数的个数}$$
$$+ j_2\text{后面比 } j_2 \text{ 小的数的个数}$$
$$\vdots$$
$$+ j_{n-1}\text{后面比 } j_{n-1} \text{ 小的数的个数}$$

例: 求$135 \cdots (2n-1)(2n)(2n-2) \cdots 42$的逆序数.

解: $\tau = 1 + 2 + \cdots + (n-1)$

逆序数

逆序数的计算方法. 给定排列$j_1 j_2 \cdots j_n$,

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = j_1\text{后面比 } j_1 \text{ 小的数的个数}$$
$$+ j_2\text{后面比 } j_2 \text{ 小的数的个数}$$
$$\vdots$$
$$+ j_{n-1}\text{后面比 } j_{n-1} \text{ 小的数的个数}$$

例: 求$135 \cdots (2n-1)(2n)(2n-2) \cdots 42$的逆序数.

解: $\tau = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + (n-1)$

逆序数

逆序数的计算方法. 给定排列$j_1j_2\cdots j_n$,

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n) = j_1\text{后面比 } j_1 \text{ 小的数的个数}$$
$$+j_2\text{后面比 } j_2 \text{ 小的数的个数}$$
$$\vdots$$
$$+j_{n-1}\text{后面比 } j_{n-1} \text{ 小的数的个数}$$

例: 求$135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 42$的逆序数.

解: $\tau = 1+2+\cdots+(n-1)+(n-1)+(n-2)$

逆序数

逆序数的计算方法. 给定排列$j_1 j_2 \cdots j_n$,

$$\begin{aligned}\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = \ & j_1\text{后面比 } j_1 \text{ 小的数的个数} \\ & + j_2\text{后面比 } j_2 \text{ 小的数的个数} \\ & \quad \vdots \\ & + j_{n-1}\text{后面比 } j_{n-1} \text{ 小的数的个数}\end{aligned}$$

例: 求$135 \cdots (2n-1)(2n)(2n-2) \cdots 42$的逆序数.

解: $\tau = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1$

逆序数

逆序数的计算方法. 给定排列$j_1j_2\cdots j_n$,

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n)= j_1\text{后面比 } j_1 \text{ 小的数的个数}$$
$$+j_2\text{后面比 } j_2 \text{ 小的数的个数}$$
$$\vdots$$
$$+j_{n-1}\text{后面比 } j_{n-1} \text{ 小的数的个数}$$

例: 求$135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 42$的逆序数.

解: $\tau=1+2+\cdots+(n-1)+(n-1)+(n-2)+\cdots+1$

$=n(n-1).$

奇偶性

定义(奇偶性). 逆序数为奇数的排列为**奇排列**, 逆序数为偶数的排列为**偶排列**.

例：讨论下列排列的奇偶性.

$(a)\ n(n-1)\cdots 21$;　　　　$(b)\ (2n)1(2n-1)2\cdots(n+1)n$.

解：$(a)\ \tau(n(n-1)\cdots 21)=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$.

当$n\equiv 0,1(\mathrm{mod}\ 4)$时，该排列为偶排列；当$n\equiv 2,3(\mathrm{mod}\ 4)$时，该排列为奇排列.

$$\begin{aligned}(b)\ \tau\big((2n)1(2n-1)2\cdots(n+1)n\big)&=(2n-1)+(2n-3)+\cdots+1\\&=n^2.\end{aligned}$$

当n为偶数时，该排列为偶排列；当n为奇数时，该排列为奇排列.

对换

定义(对换). 把一个排列中某两个数互换而其余的数保持不动，得到一个新排列，这一操作称为一个**对换**. 如果互换的两个数是相邻的，这样的对换叫做**相邻对换**.

定理. **对换改变排列的奇偶性.**

证明思路.	先考虑相邻对换的情况，再将一般情况转化为相邻对换.

对换

证明. 首先考虑相邻对换的情况.

- 设$p = a_1 \cdots a_\ell \boldsymbol{ab} b_1 \cdots b_m$对换$a$与$b$得到排列$p' = a_1 \cdots a_\ell \boldsymbol{ba} b_1 \cdots b_m$.
- 任取$\{x, y\} \subseteq \{1,2, \dots, n\}$，考察$\{x, y\}$对$p$与$p'$的逆序数贡献情况.
- 若$\{x, y\} \neq \{a, b\}$，则$\{x, y\}$对p与p'的逆序数贡献相同.
- 若$\{x, y\} = \{a, b\}$，则
    - 若$a < b$，$\{a, b\}$在p中不为逆序而在p'中为逆序，$\tau(p') = \tau(p) + 1$.
    - 若$a > b$，$\{a, b\}$在p'中不为逆序而在p中为逆序，$\tau(p') = \tau(p) - 1$.

  因此$\tau(p') = \tau(p) \pm 1$，即排列奇偶性改变.

对换

证明(续)．现在考虑一般情况．设$p=a_1\cdots a_\ell \boldsymbol{a} b_1\cdots b_m \boldsymbol{b} c_1\cdots c_k$对换$a$与$b$得到排列$p'=a_1\cdots a_\ell \boldsymbol{b} b_1\cdots b_m \boldsymbol{a} c_1\cdots c_k$.

问题：对换a与b的效果能否用一系列相邻对换实现?

$$p=a_1\cdots a_\ell \boldsymbol{a} b_1\cdots b_m \boldsymbol{b} c_1\cdots c_k$$

$$\xrightarrow[\text{作相邻对换}]{\text{将}b\text{与其左边的}b_i\text{依次}} a_1\cdots a_\ell \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} b_1\cdots b_m c_1\cdots c_k \qquad m\text{次}$$

$$\xrightarrow[\text{作相邻对换}]{\text{将}a\text{与其右边的}b\text{和}b_i\text{依次}} p'=a_1\cdots a_\ell \boldsymbol{b} b_1\cdots b_m \boldsymbol{a} c_1\cdots c_k \qquad m+1\text{次}$$

因此对换a与$b \Leftrightarrow 2m+1$次相邻对换. ■

对换

思考：定理是否能够不通过相邻对换的情况直接证明?

排列

回顾.

- 二阶行列式
- 三阶行列式
- 逆序数：排列中逆序的总数.
- 奇偶性：逆序数的奇偶性.
- **定理：对换改变排列奇偶性.**
  - 证法 1：先证相邻对换的情况，再将一般情况转化为相邻对换的情况.
  - 证法 2：直接证明.

对换

推论 1(对换次数的奇偶性). **奇(偶)排列需要通过奇(偶)数次对换变成标准排列.**

证明. 因为标准排列是偶排列，结论由定理直接可得. ■

对换

推论 2(奇偶排列个数相等). **当$n \geq 2$时，n级奇排列个数与n级偶排列个数相等.**

证明思路 1：分别计数n级奇排列和n级偶排列.

证明思路 2：构造奇排列和偶排列之间的一一对应（双射）.

映射（补充知识）

定义(映射). 给定非空集合A与B，若对A中任意的元素a都有B中唯一的元素b与之对应，则称这种对应规则为A到B的一个映射，记作$f: A \longrightarrow B$.

元素b称为a在f下的像，记作$b = f(a)$；元素a称为b在f下的原像.

例: “学生 $\longrightarrow$ 学号” 是映射,

“学生 $\longrightarrow$ 课程” 不是映射.

映射（补充知识）

定义(单射，满射，双射). 设$f: A \longrightarrow B$是一个映射.

- 若任何$a_1, a_2 \in A$且$a_1 \neq a_2$，都有$f(a_1) \neq f(a_2)$，则称f为单射.（不同的元素有不同的像）
- 若任给$b \in B$，都存在$a \in A$使得$b = f(a)$，则称f为满射.
- 若f既是单射又是满射，则称f为双射(一一对应).

例 1：“父亲”是否为单射?

是否为满射?

例 2：“同桌”是一个双射.

映射（补充知识）

定理(映射的性质). **设$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$为有限集合且$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{B}$是一个映射.**

- **若$\boldsymbol{f}$为单射，则$|\boldsymbol{A}| \leq |\boldsymbol{B}|$.**
- **若$\boldsymbol{f}$为满射，则$|\boldsymbol{A}| \geq |\boldsymbol{B}|$.**
- **若$\boldsymbol{f}$为双射，则$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$.**

证明. 若f为单射，则$\{f(a): a \in A\} \subseteq B$是$B$的一个大小为$|A|$的子集，故$|A| \leq |B|$. ■

对换

推论 2(奇偶排列个数相等). **当$\boldsymbol{n} \geq \mathbf{2}$时，$\boldsymbol{n}$级奇排列个数与$\boldsymbol{n}$级偶排列个数相等.**

证明. 令O与E分别表示n级奇排列和n级偶排列的集合. 定义O到E的对应规则

$$f: O \longrightarrow E$$

$$p = i_1 i_2 i_3 \cdots i_n \longmapsto f(p) = i_2 i_1 i_3 \cdots i_n.$$

因为对换改变排列奇偶性，f是一个从O到E的映射.

- f是满射. 给定$p' = i_1 i_2 i_3 \cdots i_n \in E$，存在$p = i_2 i_1 i_3 \cdots i_n \in O$使得$p' = f(p)$.
- f是单射. 给定两个不同的奇排列$p_1 = i_1 i_2 \cdots i_n$和$p_2 = j_1 j_2 \cdots j_n$，存在某个位置$s \in \{1,2, \dots, n\}$使得$i_s \neq j_s$，从而$f(p_1) \neq f(p_2)$.

因此f是双射. ∎

对换

思考.

- 给出满射性质的证明.
- 无限集合如何比较大小?