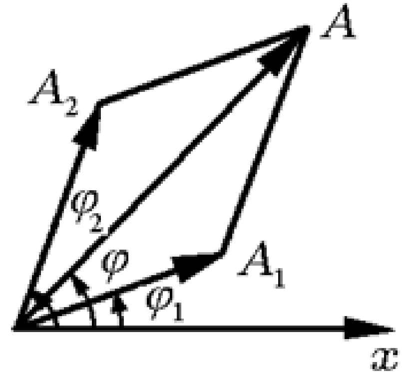
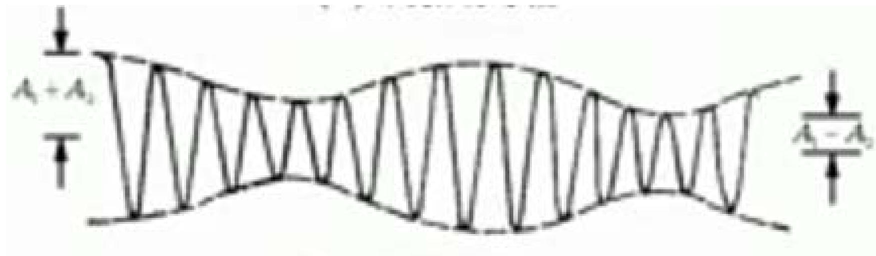
上节内容回顾一：

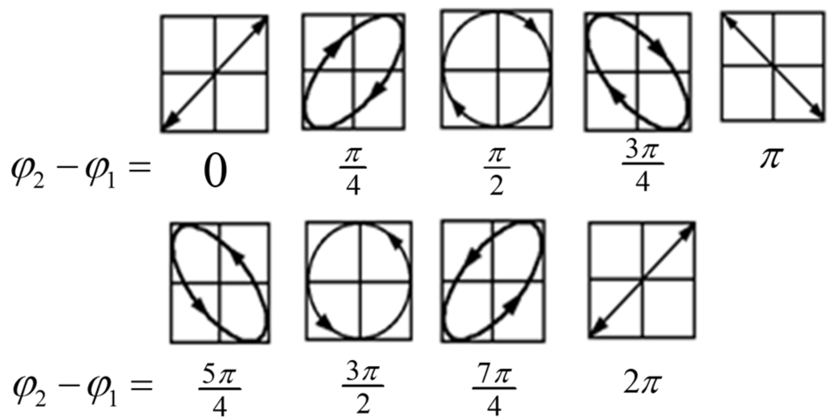


上节内容回顾二：

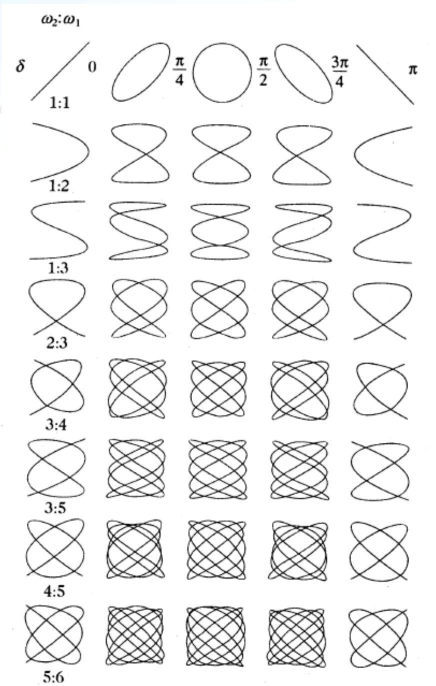


(b) 两振动不等幅

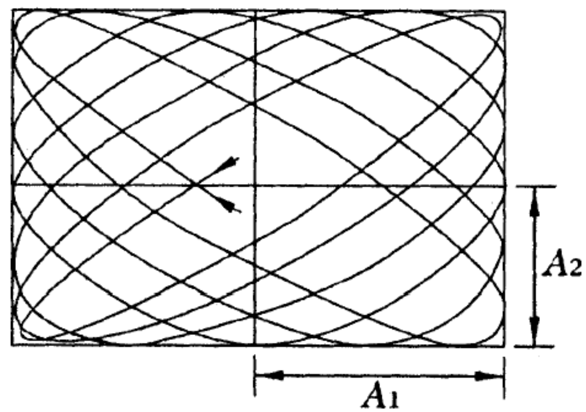
上节内容回顾三：


$\varphi_2 - \varphi_1 =$ 0 $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{4}$ π
$\varphi_2 - \varphi_1 =$ $\frac{5\pi}{4}$ $\frac{3\pi}{2}$ $\frac{7\pi}{4}$ 2π

上节内容回顾四：

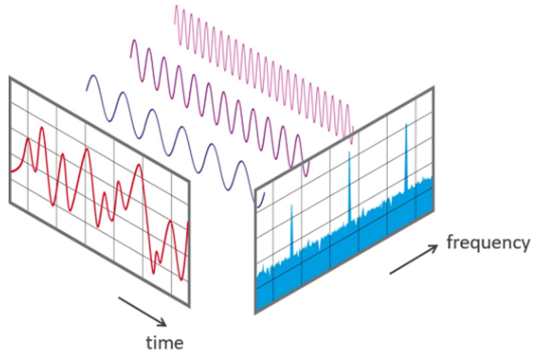


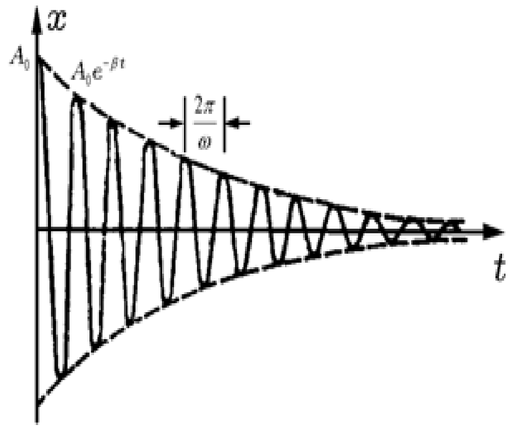
$\omega_2:\omega_1$
δ
0
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
π
1:1
1:2
1:3
2:3
3:4
3:5
4:5
5:6



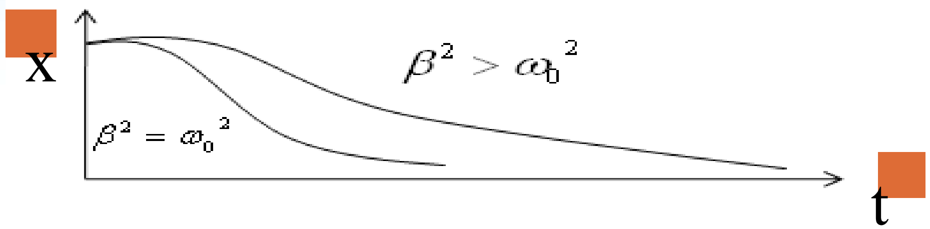
A_2
A_1

上节内容回顾五：

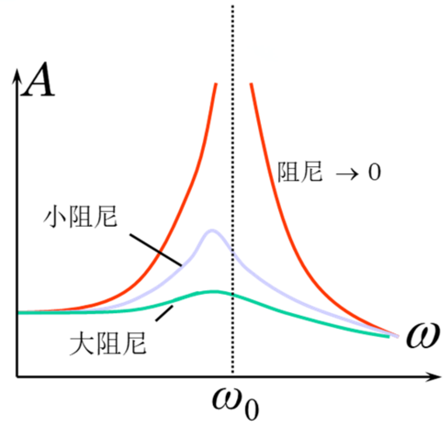




上节内容回顾六：



上节内容回顾七：



第八章

波

§1. 机械波

- 如果在空间某处发生的扰动，以一定的速度由近及远向四处传播，则称这种传播着的扰动为波。
- 不同性质的扰动的传播机制虽不相同，但由此形成的波却具有共同的规律性，波是能量传播的形式之一。
- 机械振动在弹性介质内的传播形成机械波（又称弹性波）。
- 由电磁扰动在真空或介质内的传播形成电磁波。
- 此外，近代物理指出，微观粒子以至任何物体都具有波形，这种波叫物质波，尽管物质波与机械波或电磁波有本质的不同（例如它并不传播能量），但在传播、叠加等方面仍与上述两种波有着共同的性质。

- 振动的传播过程叫做**波**。
- 机械振动在弹性介质中的传播——**机械波**。

> 机械波的特点：

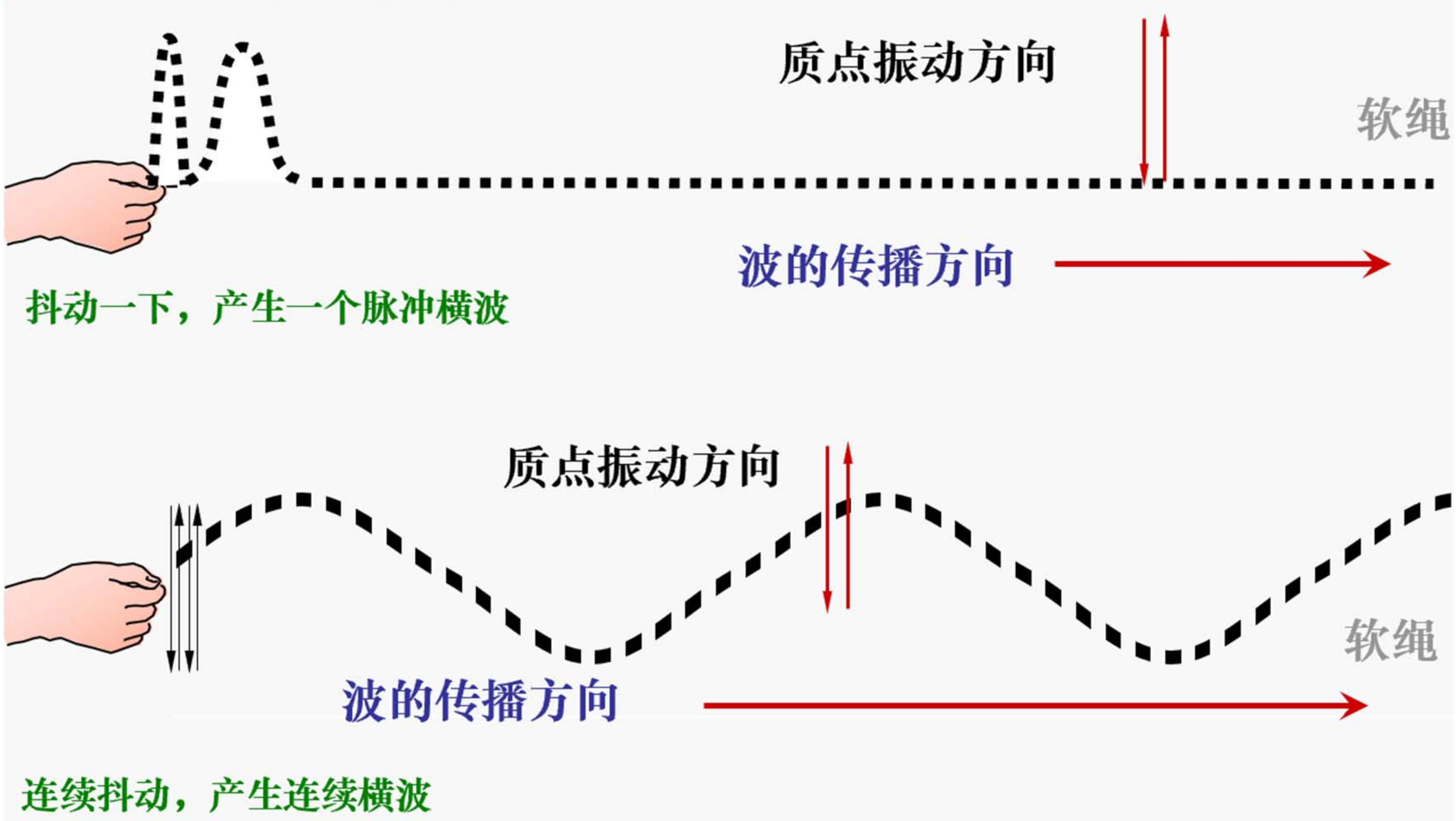
1. 机械波是一种机械运动形式，必须具备两个条件：振源和弹性介质；
2. 波是指介质整体所表现的运动状态；
3. 波的传播是质点振动状态的传播过程，亦即振动位相的传播过程，而所有的质点都仍在各自的平衡位置附近振动。

弹性介质和振源

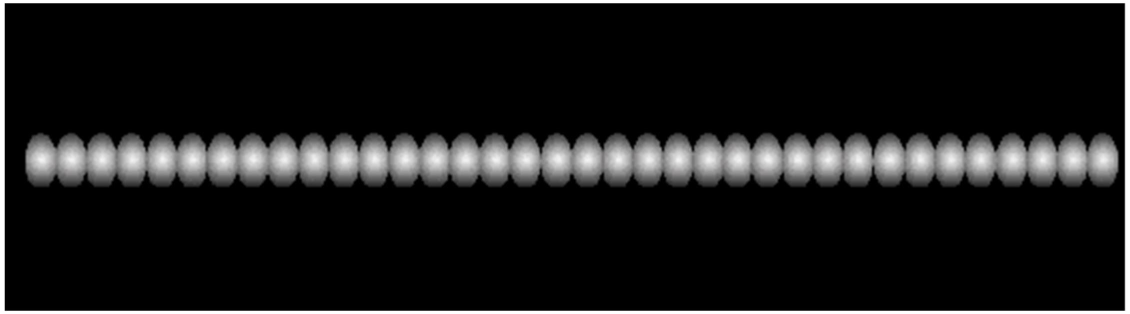
- 由无穷多的质点，通过相互之间的弹性作用组合在一起的连续介质——**弹性介质**。
- 在弹性介质中，可以设想各质点（质元）有一个平衡位置，它一离开平衡位置，即受到各附近质点的指向平衡位置的合力。质元间的相互作用（如弹性）使波得以传播，质元的惯性使波以有限的速度传播。
- 引起波动的初始振动物体——**波源/振源**。
- 足够小，可看做质点的波源叫**点波源**。
- **产生机械波的条件**：振源、弹性介质。
- 波：振动向前传播，传播的只是**振动状态**，而不是质点。
- 振动：质点只在**平衡位置**附近振动，不会随波作超过自身振动范围的运动。

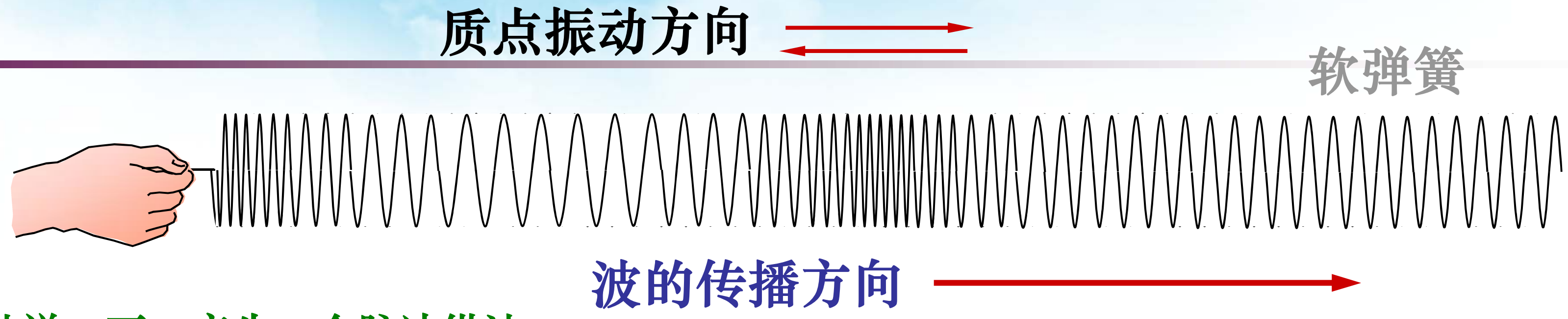
南开大学 Nankai University

§2. 波的分类

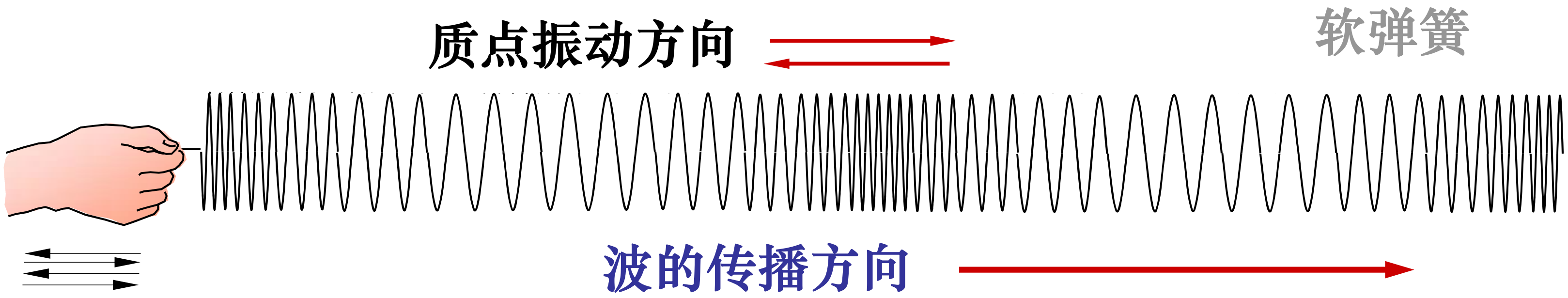


如果波源振动方向与波的传播方向垂直，就会形成周期性峰、谷的传播。这样的波，称为横波。



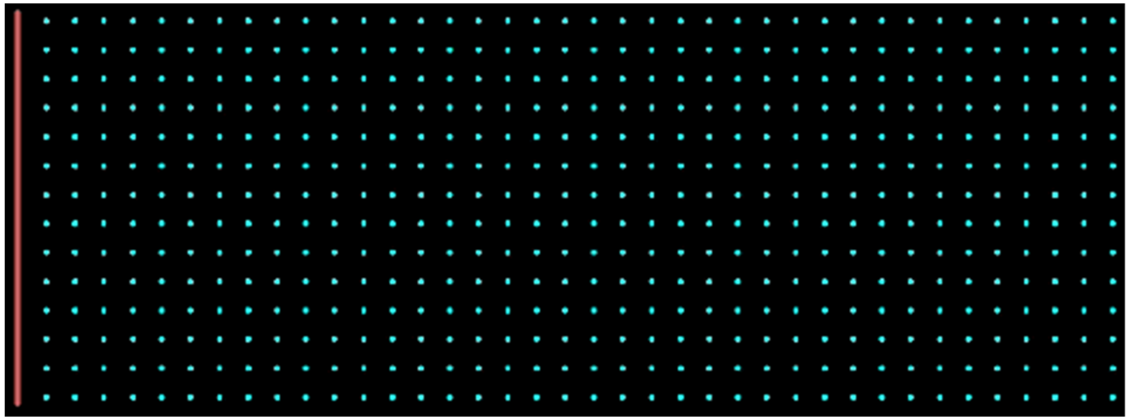


抽送一下，产生一个脉冲纵波



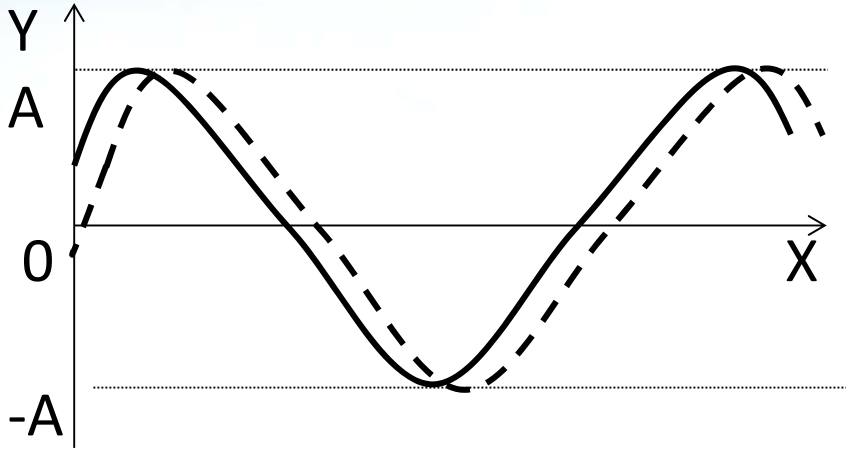
连续抽送，产生连续纵波

如果波源振动方向与波的传播方向平行，就会形成周期性疏、密的传播。这样的波，称为纵波。

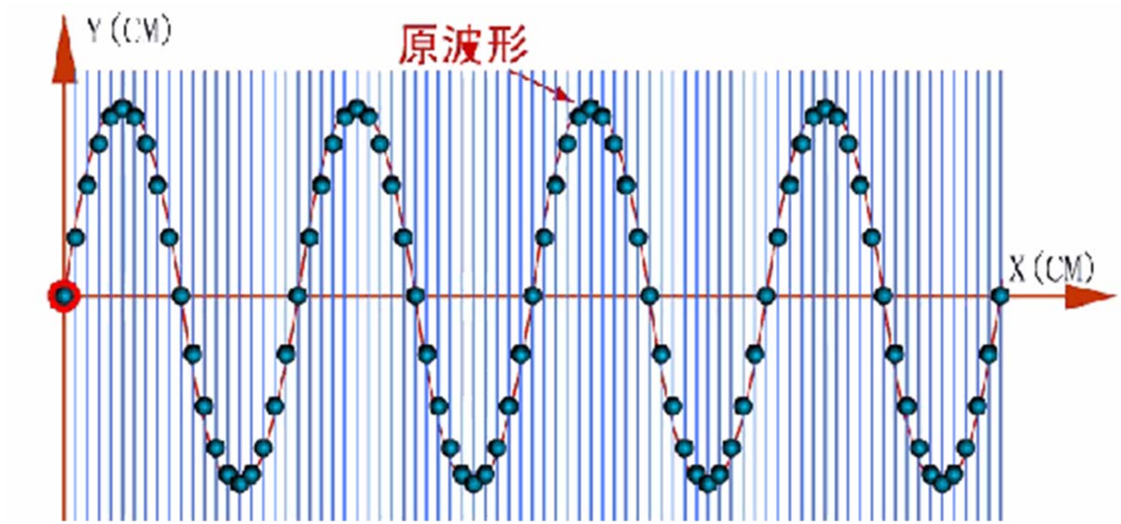


一、按传播方式

- **波形曲线**：以质点的位置为横坐标，以质点的位移为纵坐标所画的曲线称为波形曲线。



对于横波：曲线正好与介质中的波形一致。可直接看出**波峰**和**波谷**。
对于纵波：质点的运动方向与波的传播方向一致，曲线上点的Y坐标只代表质点的位移。可推断**疏部**和**密部**的位置。


Y (CM)
原波形
X (CM)

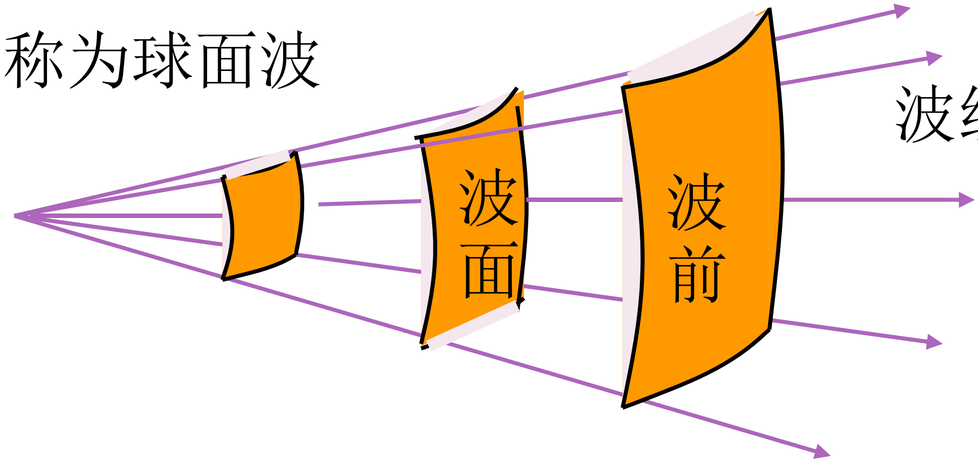
二、按空间形状

如果波在各向同性的均匀无限介质中传播，那么，从一个点波源发出的扰动，经过一定时间后，扰动将到达一个球面上，如果扰动是周期性的，介质中各处也相继发生同频率的周期性扰动。

波阵面：介质中振动位相相同的点的轨迹称为波阵面，简称波面。

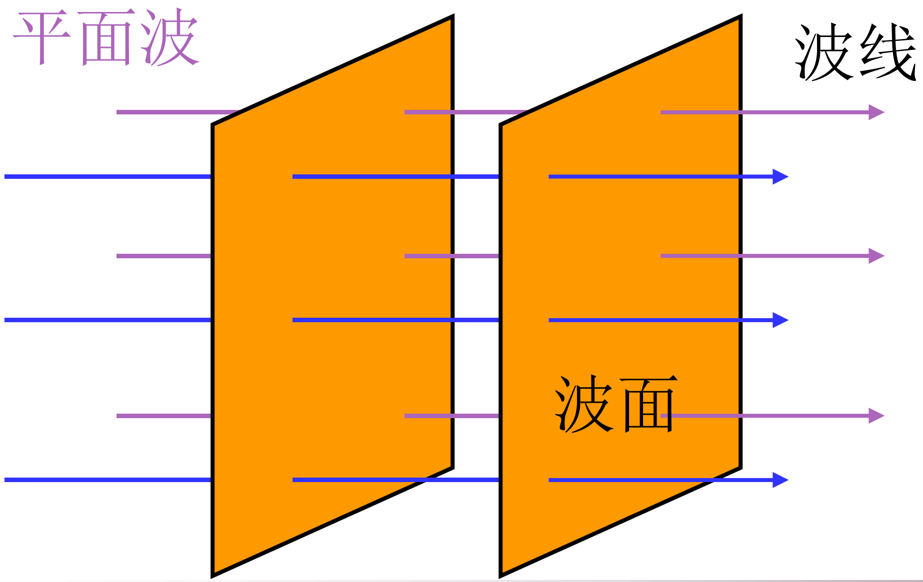
波前：最前面的波阵面称为波前。

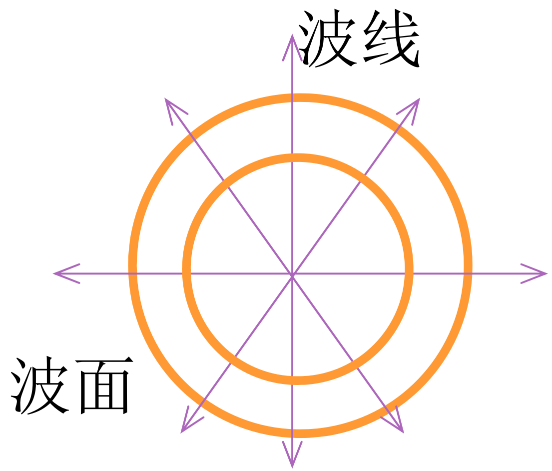
球面波：波阵面是球面的波称为球面波



平面波：在离波源足够远处，在观察的不大范围内，球面可看成平面，这种波就称为平面波

波线：自波源出发且沿着波的传播方向所画的线叫波线，在各向同性介质中，波线和波面互相垂直。





三、按波源振动方式

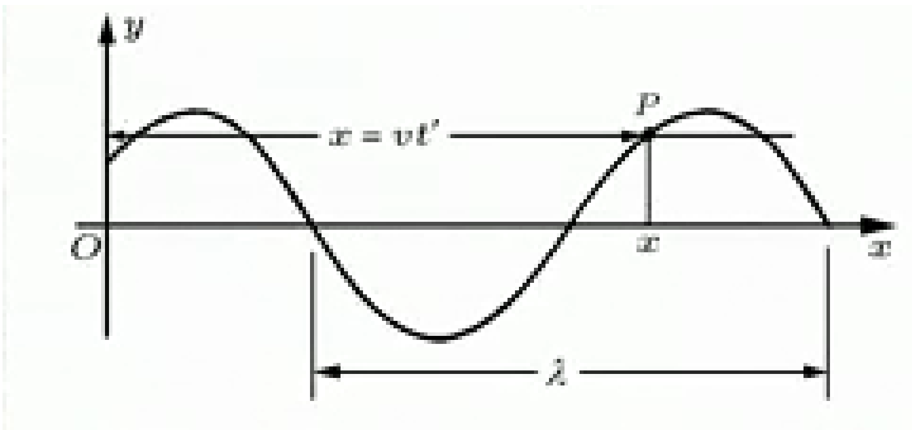
波源作周期振动形成的波称为周期波。

波源作间歇振动形成的波称为脉冲波。

波源作简谐振动形成的波称为简谐波。

§3. 平面简谐波

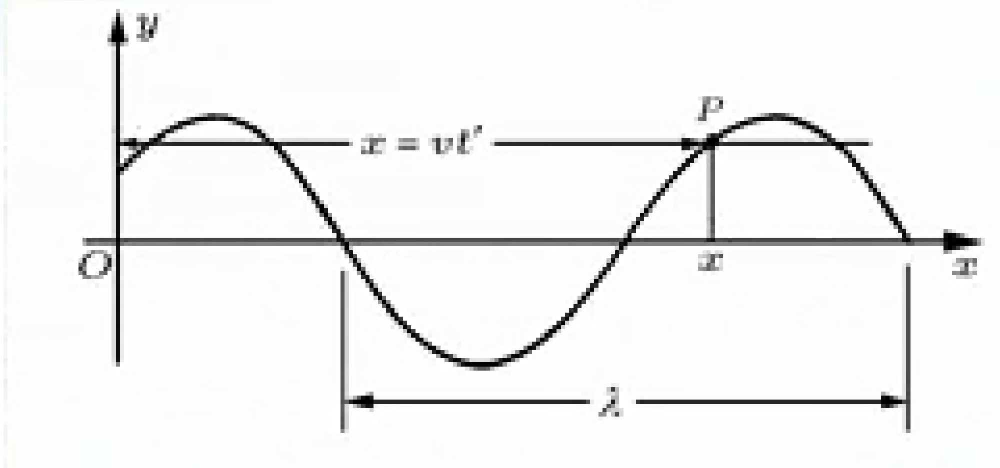
如果波源作简谐振动，介质中各质点也将相继作同频率的简谐振动，这样形成的波叫简谐波。如果波面为平面，则这样的波称为平面简谐波。由于平面简谐波的波面上每一点的振动和传播规律完全一样，故平面简谐波可以用一维的方式来处理。



如图所示，设一简谐波沿正x方向传播，已知在t时刻坐标原点0处振动位移的表示为：

$$y_0 = A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

于是P点的位移为：



$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

波的运动方程

u称为波的位相速度，也称为波速，它表示单位时间某一振动相位所传播的距离。

由于波是向右传播的，又称为右行波。

令： $\lambda = uT$

T：波源作一次完全振动的时间。周期表征了波的时间周期性。

λ: 相邻同相位两点间的距离为简谐波的波长。波源作一次完全振动，波前进的距离，反映了波的空间周期性

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right] \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad u = \frac{\lambda}{T}$$

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})]$$

时间的周期性

空间的周期性

令 $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ 称为**波数**，它表示在2π米内所包含的波长数

$$y = A\cos(\omega t - kx)$$

平面简谐波

$$y = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$$

ω，T是和时间有关的量

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$$

κ，λ是和空间有关的量

$$y = A\cos\left(\omega t - kx+\varphi_0\right)$$

其对应关系为：

时间t：	角频率ω	周期T
空间x：	波数k	波长λ

而它们由波速相互联系：　$u=\dfrac{\lambda}{T}=\dfrac{\omega}{k}$

$$y = A\cos(\omega t - kx)$$

从以上表达式看出，x处的相位比0处的相位落后kx，这说明波是由0处传到x处的，即沿x轴方向传播。

如果x处的相位比0处的相位超前kx，则波是由x处传到0处的，即沿－x轴方向传播，可表示为：

$$y = A\cos(\omega t + kx)$$

$$y = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

其中T由波源决定，u由介质决定。

简谐波运动学方程的物理意义：

波的运动学方程是一个二元函数，位移既是时间t的函数，又是位置x的函数。

1. 当x一定，y仅为t的函数，例如$x=x_1$时，即盯住某一位置看，

$$y = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x_1}{u}\right)+\varphi_0\right] = A\cos(\omega t+\varphi_1)$$

它表示$x=x_1$这一质点随时间作简谐振动，时刻t和t+T的振动状态相同，说明波动过程在时间上具有周期性，振动的周期（频率）和振幅与波源相同，位相落后波源：

$$\varphi_1 - \varphi_0 = -\frac{\omega}{u}x_1 = -2\pi\frac{x_1}{\lambda}$$

南开大学 Nankai University

在同一时刻t，位于 x_1、x_2 两质点的振动相位差为：

$$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2$$

$$=[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda})+\varphi_0-2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x_2}{\lambda})-\varphi_0]$$

$$=\frac{2\pi}{\lambda}(x_2-x_1)=k(x_2-x_1)$$

如 $x_2-x_1=k\lambda$， 则$\Delta\varphi=2k\pi$

即两质点振动相位相同。

如 $x_2-x_1=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$， 则$\Delta\varphi=(2k+1)\pi$

即两质点振动相位相反。

2. 当t一定，y仅为x的函数，当$t=t_1$时

$$y = A\cos\left(\omega t_1 - kx + \varphi_0\right) = A\cos\left(kx - \varphi_t\right)$$

其中 $\varphi_t = \omega t_1 + \varphi_0$

表示任一时刻各质点离开平衡位置的位移的分布。可以看出，波动过程在空间上具有周期性，波长就是波动的空间周期。

3. 将以上各方程中的u换成-u，即得向坐标轴负向传播的平面简谐波的运动学方程：

$$y = A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right] = A\cos\left[\omega t + kx + \varphi_0\right]$$

该波又称为左行波。

4. 波速为波在弹性介质中传播的速度，它是振动位相在介质中传播的速度，它不同于波线上各质元绕平衡位置的振动速度。波速对于各向同性介质而言是一个常数，而各质元的振动速度和加速度则是时间的函数，为：

$$\frac{\partial y}{\partial t}=-A\omega\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-A\omega^2\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$$

波动微分方程

由 $$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi)]$$

知
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}&=-A\omega^2\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]\\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}&=-A\frac{\omega^2}{u^2}\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]\end{aligned}\right\}\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

说明

(1) 上式是一切平面波所满足的微分方程（正、反传播）；

(2) 不仅适用于机械波，也广泛地适用于电磁波、热传导、化学中的扩散等过程；

(3) 若物理量是在三维空间中以波的形式传播，波动方程为右式.
$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}$$

例题（重点）

平面简谐波的波函数为：$y = 0.5\cos\pi(20t+0.1x)$

求：波的振幅、波长、周期、波速、波的传播方向及质点最大振动速度。

例题（重点）

平面简谐波的波函数为：y = 0.5cosπ(20t+0.1x)

求：波的振幅、波长、周期、波速、波的传播方向及质点最大振动速度。

解：将波函数写成标准形式：

$$y = 0.5\cos 2\pi\left(\frac{20}{2}t + \frac{0.10}{2}x\right)$$

A= 0.5m，T=2/20=0.1s，λ=2/0.10=20m，

u= λ /T=200m/s，方向：沿x轴负方向。

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -0.5 \times 20\pi \sin \pi \left(20t + 0.1x\right)$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{max} = A\varpi = 10\pi$$

$$a\Big|_{max} = A\varpi^{2}$$

例

已知波动方程为 $y=0.1\cos\dfrac{\pi}{10}(25t-x)$，其中$x$，$y$的单位为$m$，$t$的单位为$s$，求 (1)振幅、波长、周期、波速；(2)距原点为8 m和10 m两点处质点振动的位相差；(3)波线上某质点在时间间隔0.2 s内的位相差.

南開大學 Nankai University

例

已知波动方程为 $y = 0.1\cos\dfrac{\pi}{10}(25t - x)$，其中$x$，$y$的单位为$m$，$t$的单位为$s$，求 (1)振幅、波长、周期、波速；(2)距原点为8 m和10 m两点处质点振动的位相差；(3)波线上某质点在时间间隔0.2 s内的位相差.

解:(1) 将波动方程改写成如下形式

$$y = 0.1\cos\frac{25\pi}{10}(t - \frac{x}{25})$$

与波动方程的标准形式比较，即可得

$$A = 0.1m \qquad \omega = 2.5\pi\ s^{-1} \qquad u = 25\,m/s \qquad \varphi_0 = 0$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.8s \qquad \lambda = uT = 20m$$

南開大學 Nankai University

(2)同一时刻波线上坐标为x_1和x_2两点处质点振动的位相差

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) \quad = \frac{\pi}{5}$$

(3)对于波线上任意一质点，在Δt内的位相差

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{T}\Delta t \quad = \frac{\pi}{2}$$

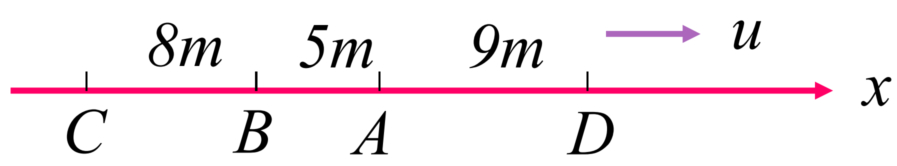
例

一平面波在介质中以速度u=20m/s沿直线传播，已知在传播路径上某点A的振动方程为 $y_A = 3\cos 4\pi t$ ，（1）若以A点为坐标原点，写出波动方程，并求C，D两点的振动方程，（2）若以B点为坐标原点，写出波动方程，并求C，D两点的振动方程。

例

一平面波在介质中以速度u=20m/s沿直线传播，已知在传播路径上某点A的振动方程为 $y_A = 3\cos 4\pi t$ ，（1）若以A点为坐标原点，写出波动方程，并求C，D两点的振动方程，（2）若以B点为坐标原点，写出波动方程，并求C，D两点的振动方程。

解:(1)　　已知参量



$$u = 20m/s \qquad \omega = 4\pi$$

原点的振动方程为 $y_0 = y_A = 3\cos 4\pi t$

因此，波动方程为 $y = 3\cos 4\pi(t - \dfrac{x}{20})$

C点和D点的振动方程只需把坐标值带入波动方程即可

$$y_C = 3\cos 4\pi(t + \frac{13}{20}) \qquad y_D = 3\cos 4\pi(t - \frac{9}{20})$$

(2) 先求坐标原点的振动方程（即B点在t时刻的振动状态）

B点的振动状态传播到A点需要的时间为

$$\Delta t = 5/20 = 1/4s$$

B点在t时刻的振动状态与A点在t+1/4时刻的振动相同

因此有 $y_0 = y_B = 3\cos 4\pi(t + 0.25)$

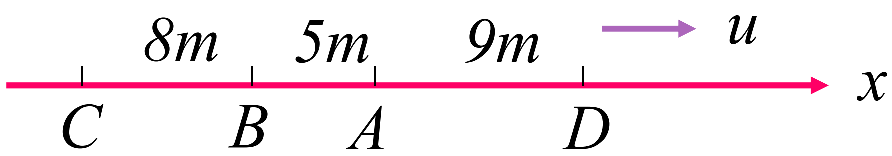
波动方程为 $y = 3\cos 4\pi(t - \frac{x}{20} + \frac{1}{4})$

C点和D点的振动方程为

$$y_C = 3\cos 4\pi(t + \frac{13}{20}) \qquad y_D = 3\cos 4\pi(t - \frac{9}{20})$$

例

一平面波在介质中以速度u=20m/s沿直线传播，已知在传播路径上某点A的振动方程为 $y_A = 3\cos 4\pi t$ ，（1）若以A点为坐标原点，写出波动方程，并求C，D两点的振动方程，（2）若以B点为坐标原点，写出波动方程，并求C，D两点的振动方程。

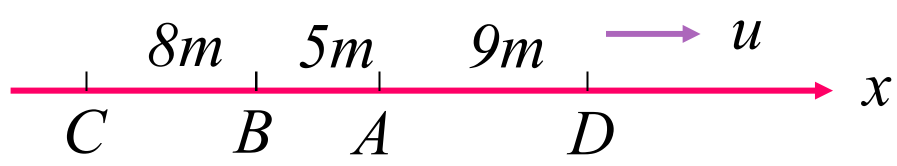


例

一平面波在介质中以速度u=20m/s沿直线传播，已知在传播路径上某点A的振动方程为 $y_A = 3\cos 4\pi t$ ，（1）若以A点为坐标原点，写出波动方程，并求C，D两点的振动方程，（2）若以B点为坐标原点，写出波动方程，并求C，D两点的振动方程。

解:(1)　　已知参量

$u = 20m/s \qquad \omega = 4\pi$



原点的振动方程为 $y_0 = y_A = 3\cos 4\pi t$

因此，波动方程为 $y = 3\cos 4\pi(t - \frac{x}{20})$

C点和D点的振动方程只需把坐标值带入波动方程即可

$$y_C = 3\cos 4\pi(t + \frac{13}{20}) \qquad y_D = 3\cos 4\pi(t - \frac{9}{20})$$

(2) 先求坐标原点的振动方程（即B点在t时刻的振动状态）

B点的振动状态传播到A点需要的时间为

$$\Delta t = 5/20 = 1/4s$$

B点在t时刻的振动状态与A点在t+1/4时刻的振动相同

因此有 $y_0 = y_B = 3\cos 4\pi(t + 0.25)$

波动方程为 $y = 3\cos 4\pi(t - \frac{x}{20} + \frac{1}{4})$

C点和D点的振动方程为

$$y_C = 3\cos 4\pi(t + \frac{13}{20}) \qquad y_D = 3\cos 4\pi(t - \frac{9}{20})$$

例

沿绳子传播的平面简谐波的波动方程为$y=0.05\cos(10\pi t-4\pi x)$，式中$x,y$以米计，$t$以秒计．求：

(1)波的波速、频率和波长；

(2)绳子上各质点振动时的最大速度和最大加速度；

(3)求$x=0.2m$处质点在$t=1s$时的位相，它是原点在哪一时刻的位相?这一位相所代表的运动状态在$t=1.25s$时刻到达哪一点?

例

沿绳子传播的平面简谐波的波动方程为y=0.05cos(10πt-4πx)，式中x,y以米计，t以秒计．求：

(1)波的波速、频率和波长；

(2)绳子上各质点振动时的最大速度和最大加速度；

(3)求x=0.2m处质点在t=1s时的位相，它是原点在哪一时刻的位相?这一位相所代表的运动状态在t=1.25s时刻到达哪一点?

解:(1)　　比较　$y = 0.05\cos(10\pi t - 4\pi x)$

$$y = A\cos(2\pi \upsilon t - \frac{2\pi}{\lambda} x)$$

得到：　振幅 $A = 0.05m$；　频率 $v = 5Hz$；

波长 $\lambda = 0.5m$；　　波速 $u = \lambda v = 2.5m/s$；

(2) 绳上各点的最大振速，最大加速度分别为

$$\upsilon_{max} = A\omega = 10\pi \times 0.05 = 0.5\pi \ m/s$$

$$a_{max} = A\omega^2 = (10\pi)^2 \times 0.05 = 5\pi^2 \ m/s^2$$

(3) x=0.2m处的振动比原点落后的时间为

$$\frac{x}{u}=\frac{0.2}{2.5}=0.08\ s$$

故 $x=0.2m$ $t=1s$， 时的位相

就是原点在 t_0=1-0.08=0.92s 时的位相，即

$$\varphi=9.2\pi$$

设这一位相所代表的运动状态在t=1.25s时刻到达x点，则:

$$x=x_1+u(t-t_1)=0.2+2.5(1.25-1.0)=0.825\ \mathrm{m}$$

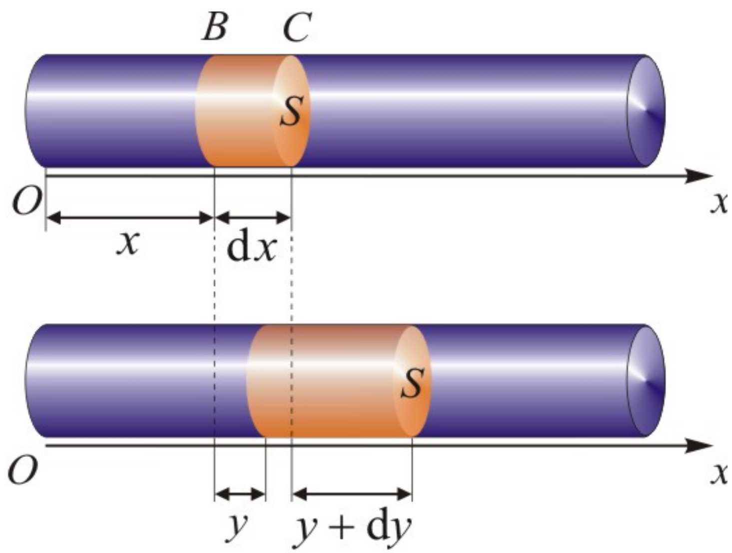
波的能量

波动过程 → { 质元由静止开始振动 / 质元也发生形变 } → 波动过程是能量的传播过程

6.3.1 波动能量的传播

以平面简谐纵波在直棒中的传播为例：设波沿x方向传播

波动表达式： $y = A\cos\omega(t - \dfrac{x}{u})$



1. 介质元的能量

1) 介质元的振动动能：

$$\mathrm{d}V = S\mathrm{d}x \quad \mathrm{d}m = \rho\mathrm{d}V = \rho S\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\mathrm{d}m\, v^2$$

Nankai University 南开大学

$$v=\frac{\partial y}{\partial t}=-A\omega\sin\omega(t-\frac{x}{u})$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{d}W_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\sin^2\left[\omega(t-\frac{x}{u})\right]\mathrm{d}V}$$

2) 介质元的弹性势能：

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}k(\mathrm{d}y)^2 \qquad k=\frac{ES}{\mathrm{d}x}=\frac{\rho u^2 S}{\mathrm{d}x}$$ （纵波, E杨氏模量）

$$=\frac{1}{2}\frac{\rho u^2 S}{\mathrm{d}x}(\mathrm{d}y)^2=\frac{1}{2}\rho u^2 S\mathrm{d}x(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{A\omega}{u}\sin[\omega(t-\frac{x}{u})]$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{d}W_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\sin^2\left[\omega(t-\frac{x}{u})\right]\mathrm{d}V=\mathrm{d}W_k}$$

3) 介质元的总能量：

$$\boxed{\mathrm{d}W=\mathrm{d}W_{\mathrm{k}}+\mathrm{d}W_{\mathrm{p}}=\rho A^2\omega^2\sin^2\left[\omega(t-\frac{x}{u})\right]\mathrm{d}V}$$

结论

(1) 介质元dV 的总能量：

$$\rho A^2\omega^2\sin^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)\right]\mathrm{d}V$$ ——周期性变化

(2) 介质元的动能、势能变化是同周期的，且相等.

(3) 机械能不守恒，因为不是孤立体系，有能量传播.

(4) 最大位移处： $E_{\mathrm{k}}=E_{\mathrm{p}}=0$

平衡位置处： $y=0,\quad E_{\mathrm{k}}=E_{\mathrm{p}}\quad\Rightarrow\quad E_{\max}$

介质的弹性模量

1、容变模量

f —正压力

S —受力面积

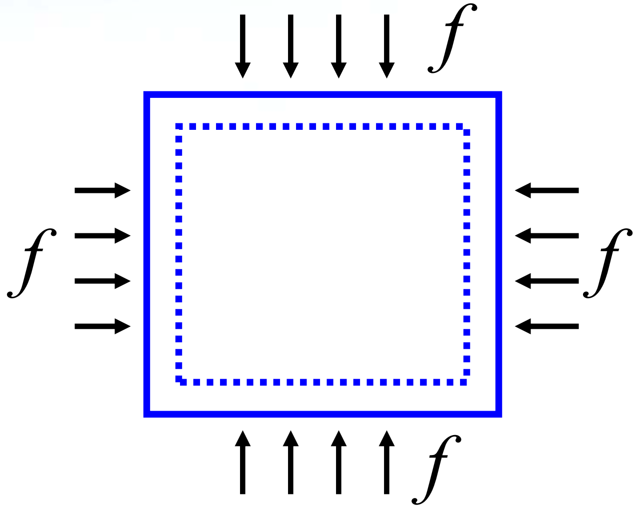
V —受力前立方体的体积

V'—受力后立方体的体积

$\Delta V = V' - V$ —体积的增量

$p = f/S$ —应力或胁强

$\Delta V/V$ —体应变或胁变

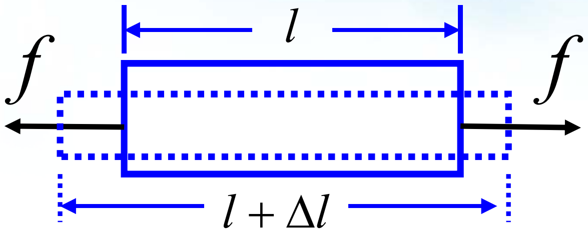


(容变情形)

容变模量 $K = -\dfrac{p}{\Delta V/V}$

（对于流体）$K = -\dfrac{1}{V}\dfrac{\partial p}{\partial V}$

2、杨氏模量



(长变情形)

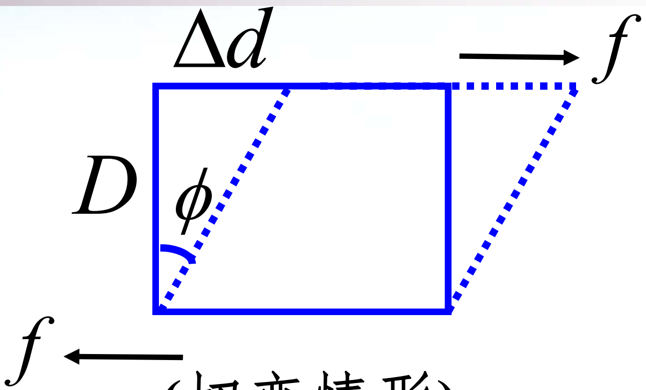
S—横截面积

f/S—应力或胁强

$\Delta l/l$ —线应变或胁变

杨氏模量 $E=\dfrac{f/S}{\Delta l/l}$

3、切变模量



(切变情形)

f —切向力

S —柱体底面积

f/S—应力或胁强

$\phi=\Delta d/D$ —切应变

切变模量 $G=\dfrac{f/S}{\phi}$

注意：波速 u 由介质的弹性模量和质量密度决定。

固体中横波波速 $u=\sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$

G为媒质切变模量，

ρ为媒质密度。

固体中纵波波速 $u=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$

E为媒质的扬氏模量

ρ为媒质密度。

气体、液体中的纵波波速

$$u=\sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

K为媒质的容变模量

ρ为媒质密度。

沿张紧弦传播的横波波速

$$u=\sqrt{\frac{F}{\rho_l}}$$

F为弦的张力。

ρ_l为弦的质量线密度。

例

频率为$\boldsymbol{\nu}$=12.5kHz的平面余弦纵波沿细长的金属棒传播，棒的杨氏模量为$\boldsymbol{E} = \mathbf{1.9\times10^{11}N/m^2}$，棒的密度$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{7.6\times10^{3}kg/m^3}$。求棒中的波速、波长、周期。

例

频率为ν=12.5kHz的平面余弦纵波沿细长的金属棒传播，棒的杨氏模量为E =**1.9×10^{11}N/m^{2}**，棒的密度ρ =**7.6×10^{3}kg/m^{3}**。求棒中的波速、波长、周期。

解 棒中的波速

$$u=\sqrt{\frac{E}{\rho}}=\sqrt{\frac{1.9\times10^{11}\ \mathrm{N\cdot m^{-2}}}{7.6\times10^{3}\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}}}=5.0\times10^{3}\ \mathrm{m/s}$$

波长 $$\lambda=\frac{u}{\nu}=\frac{5.0\times10^{3}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}{12.5\times10^{3}\ \mathrm{s^{-1}}}=0.40\,\mathrm{m}$$

周期 $$T=1/\nu=8\times10^{-5}\ \mathrm{s}$$

2. 波的能量密度

1) 能量密度：　　单位体积介质中的波动能量.

$$w=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V}=\rho A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

2) 平均能量密度：　　一个周期内的平均值.

$$\overline{w}=\frac{1}{T}\int_0^T\rho A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\overline{w}=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2}$$

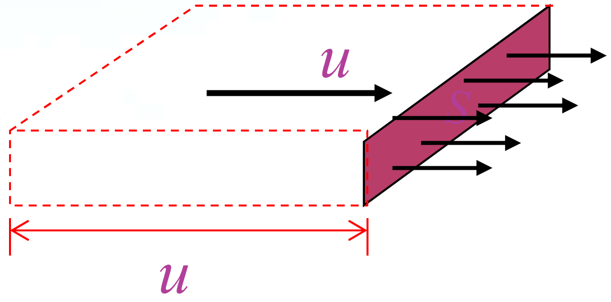
单位：$\mathrm{J\cdot m^{-3}}$

结论

机械波的能量与振幅的平方、频率的平方以及介质的密度成正比.

能流和能流密度

能流(P): 单位时间内垂直通过介质中某一面积的波的能量.



平均能流: 一个周期内的平均值.

$$\overline{P} = \overline{w}uS$$

能流密度(波的强度):

单位时间内流过垂直于波传播方向的单位面积的波的平均能量.

$$\boxed{I = \overline{w}u = \frac{1}{2}\rho u A^2 \omega^2}$$

单位: W·m^{-2}

例题

用聚焦超声波的方式，可以在液体中产生强度达120kW/cm^{2}的大振幅超声波。设波源作简谐振动，频率为500kHz，液体的密度为1g/cm^3，声速为1500m/s，求这时液体质点振动的振幅。

例题

用聚焦超声波的方式，可以在液体中产生强度达120kW/cm^{2}的大振幅超声波。设波源作简谐振动，频率为500kHz，液体的密度为1g/cm^3，声速为1500m/s，求这时液体质点振动的振幅。

解 因 $I = \rho u A^2 \omega^2 / 2$ ，所以

$$A = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2I}{\rho u}} = \frac{1}{2\pi \times 5 \times 10^5}\sqrt{\frac{2\times 120 \times 10^7}{1\times 10^3 \times 1.5 \times 10^3}}\ \mathrm{m}$$

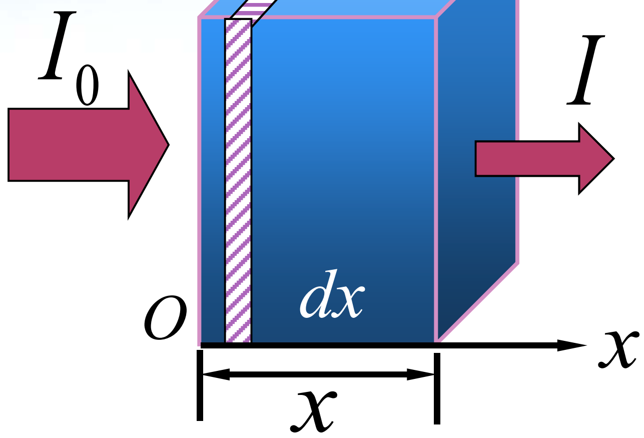
$$= 1.27 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}$$

可见液体中声振动的振幅实际上是极小的。

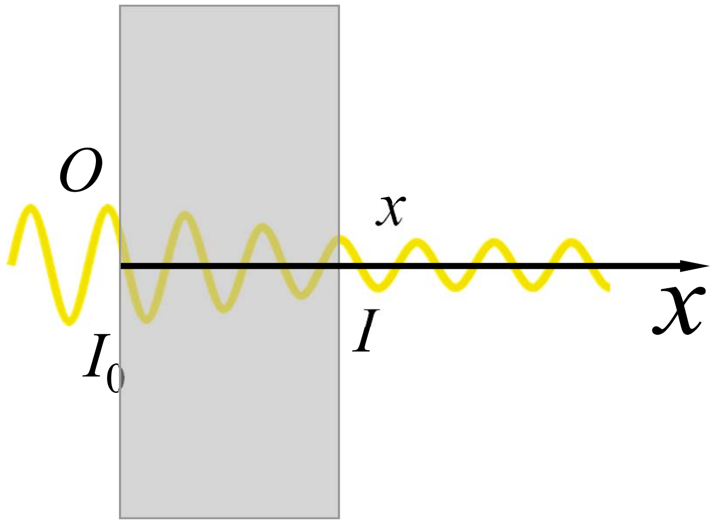
吸收媒质,实验表明:

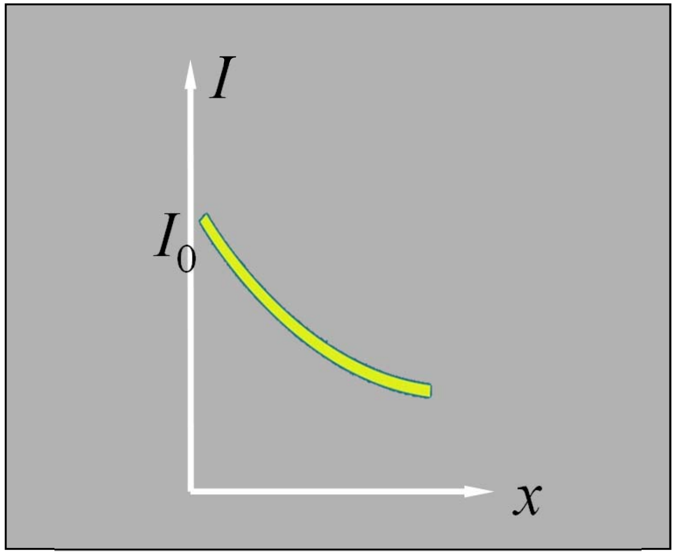
$$\mathrm{d}I = -\alpha I \mathrm{d}x$$

$$\boxed{I = I_0 e^{-\alpha x}}$$



α 为介质吸收系数，与介质的性质、温度、及波的频率有关.

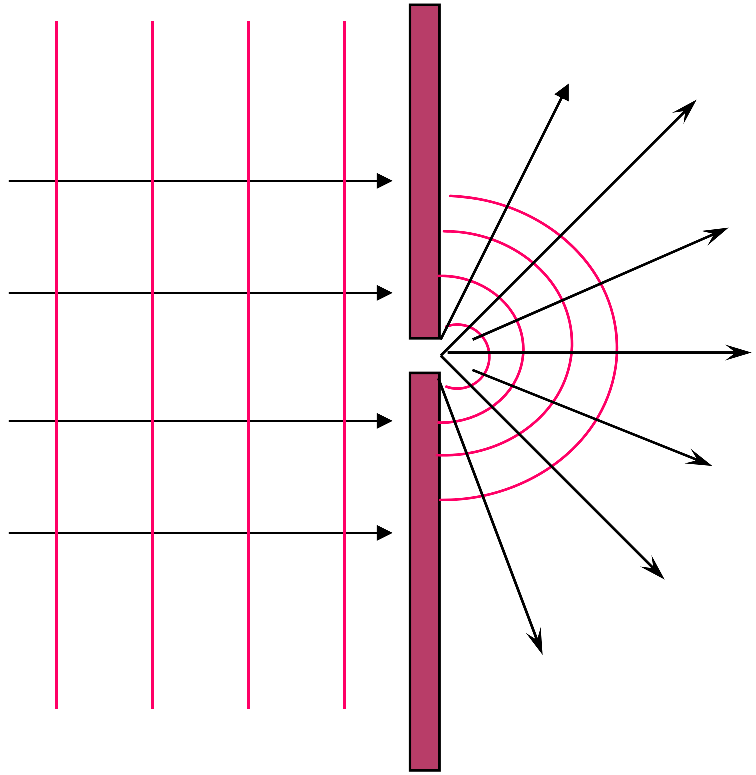




§4. 惠更斯原理和波的衍射

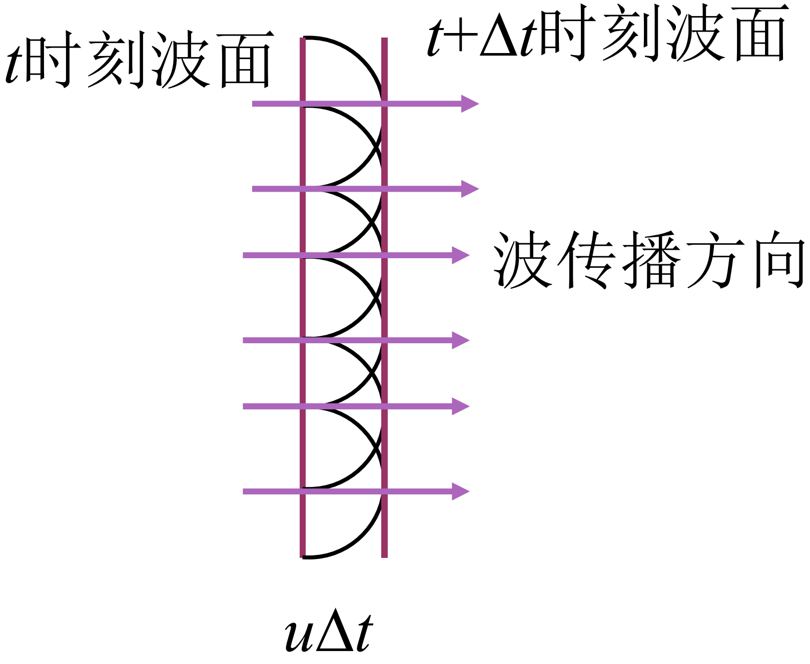
一、惠更斯原理:

波前上的每一个点都可以看做是产生球面子波的波源，在后一时刻的新的波前就是这些子波的包迹。

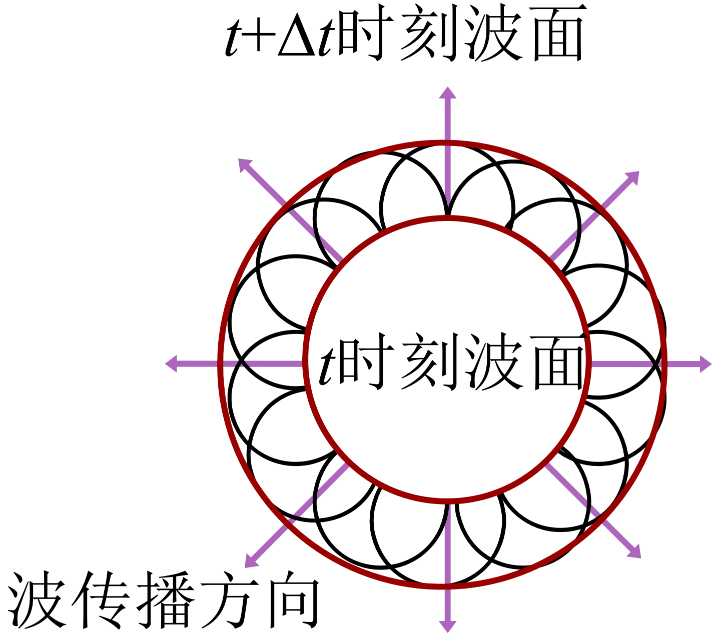


惠更斯（Christiaan Huygens, 1629-1695，荷兰物理学家、天文学家、数学家）于1678年提出。

t时刻波面→ $t+\Delta t$时刻波面→波的传播方向

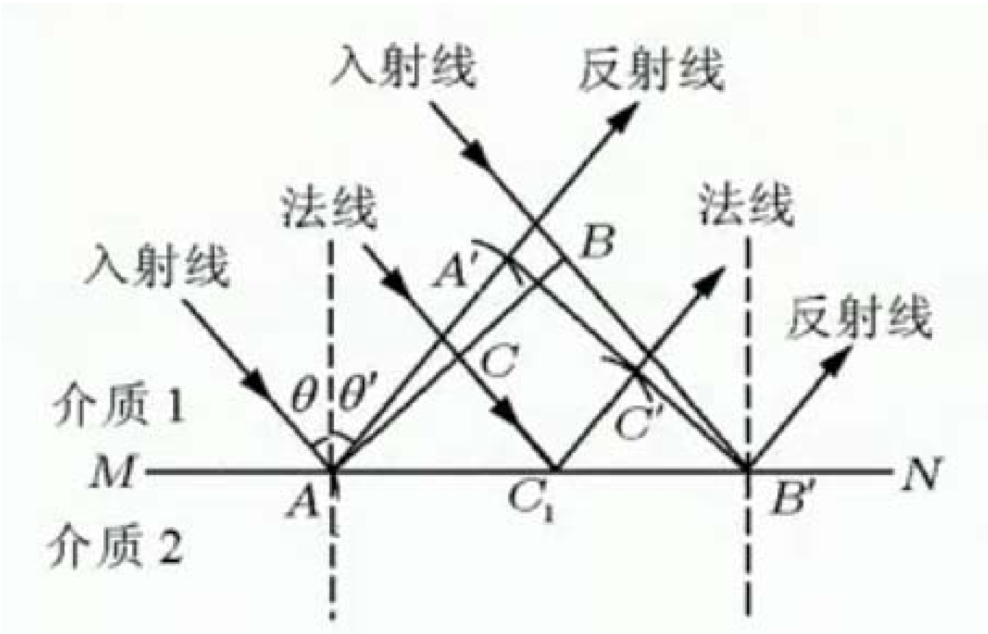


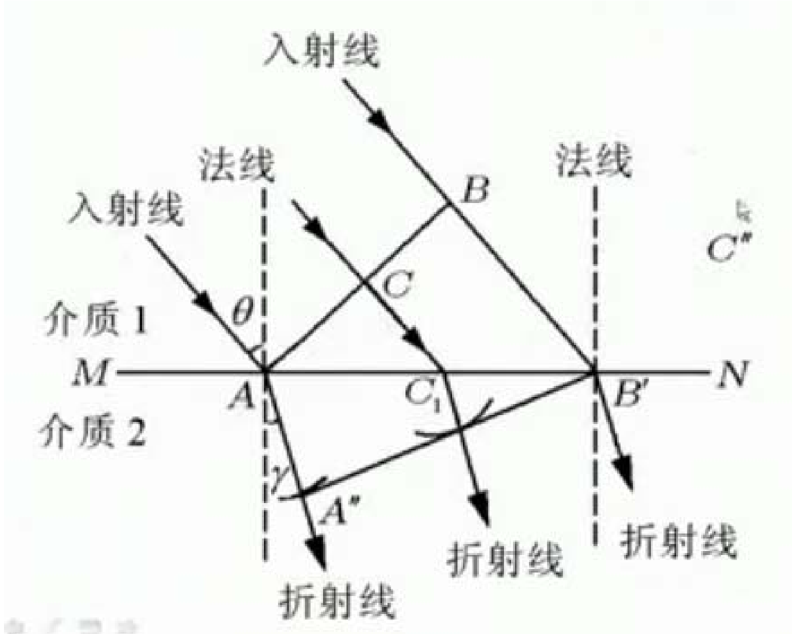
平面波



球面波

波在各项同性的均匀介质中传播时，波面不会改变形状，波线为直线。当遇到障碍物或由一种介质进入另一种介质时，波面形状、波线将发生变化。这就涉及到波的衍射、反射、折射等现象。



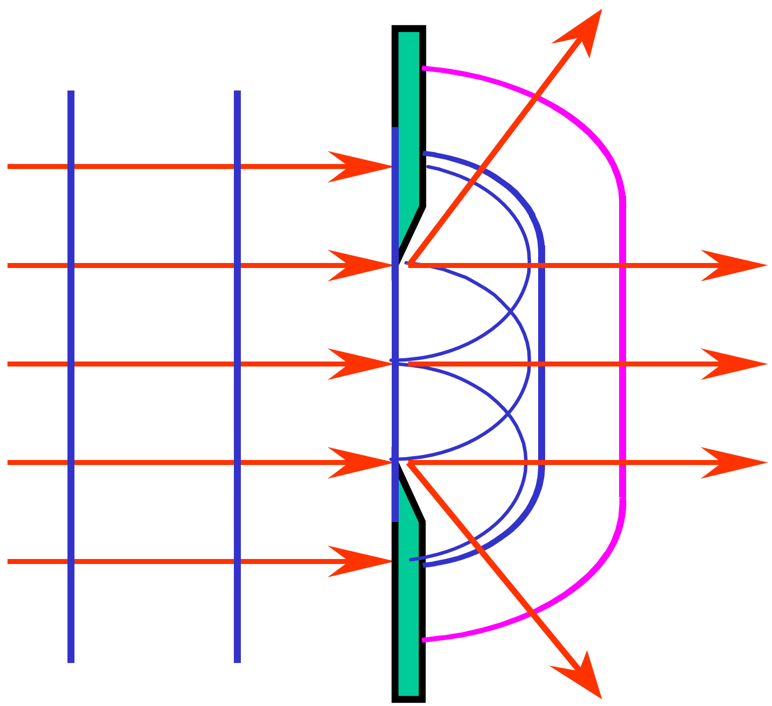


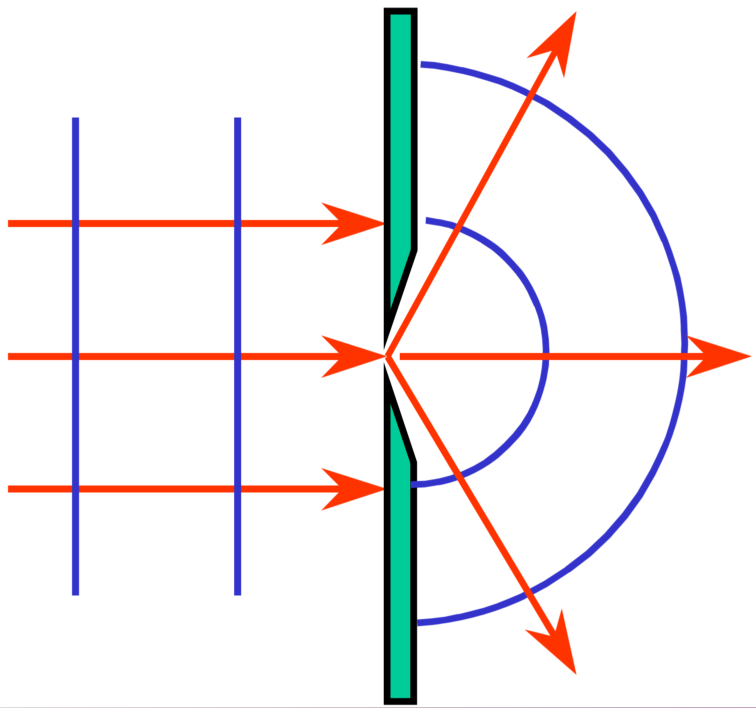
$$\frac{\sin\theta}{\sin\gamma}=\frac{AA''}{BB'}=\frac{v_1}{v_2}$$

二、波的衍射

波在经过障碍物时，波线发生弯曲，绕过障碍物的现象—波的衍射现象。波的衍射程度和障碍物的大小有关，与波长有关。波长越长，衍射现象越明显。

定量讨论，需要利用惠更斯菲涅尔原理，在光学中讨论。





§5. 波的叠加原理及干涉

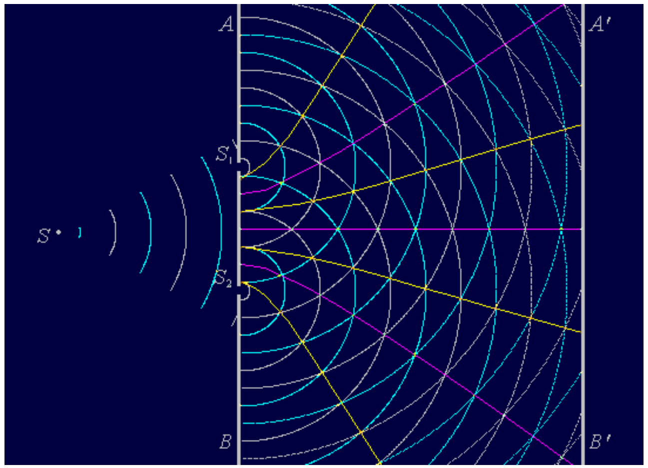
实验表明，当空间同时存在两列或两列以上的波时，每列波在传播中将不受其他波的干扰而保持原有特性（频率、波长、振幅、振动方向和传播方向）不变，而空间任一点的振动位移则等于各列波单独在该点引起的振动位移的矢量和。这一表述称为波的叠加原理

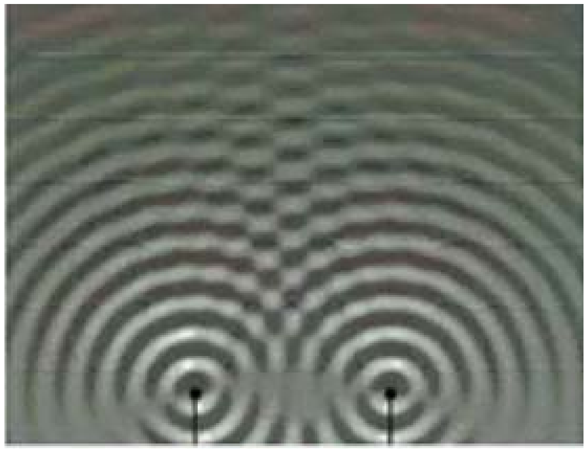
干涉现象

一般情况下，几列波在介质中相遇时，相遇区域内各处质点的合振动是很复杂的和不稳定的。

若两列波在空间相遇，空间各点的振动是完全确定的，得到波的一种稳定的叠加图样，这种现象称为波的干涉现象。

能产生干涉现象的必要条件称为波的相干条件。





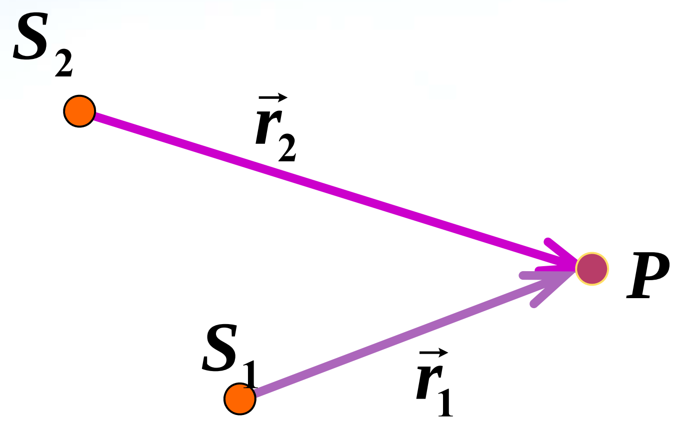
水波的干涉

相干条件

（1） 频率相同；

（2）相位差恒定；

（3）振动方向相同。

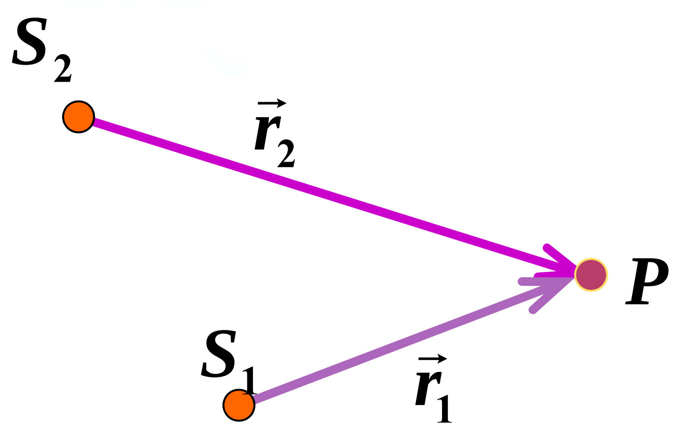


相干波

满足相干条件的波源称为相干波源，
能叠加产生干涉现象的波称为相干波。

定量分析

设有两个相干波源 S_1 和 S_2 发出的简谐波在空间 p 点相遇。



$$y_{10} = A_{10}\cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$y_{20} = A_{20}\cos(\omega t + \varphi_{20})$$

传播到P点引起的振动分别为：

$$y_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_{10} - \frac{2\pi}{\lambda}r_1)$$

$$y_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_{20} - \frac{2\pi}{\lambda}r_2)$$

在P点的振动为同方向同频率振动的合成。

合成振动为：

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

南開大學 Nankai University

$$y = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

其中： $$\tan\phi_0 = \frac{A_1\sin(\phi_{10} - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) + A_2\sin(\phi_{20} - \frac{2\pi r_2}{\lambda})}{A_1\cos(\phi_{10} - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) + A_2\cos(\phi_{20} - \frac{2\pi r_2}{\lambda})}$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi$$

由于波的强度正比于振幅的平方，合振动的强度为：

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi$$

其中： $$\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

对空间不同的位置，都有恒定的$\Delta\varphi$，因而合强度在空间形成稳定的分布，即有干涉现象。

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi$$

(1)相长干涉的条件：

$$\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - 2\pi\cdot\frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

$$= \pm 2k\pi \qquad k = 0,1,2,3,\ldots$$

$$A = A_{\max} = A_1 + A_2$$

$$I = I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}$$

(2)相消干涉的条件：

$$\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - 2\pi \cdot \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

$$= \pm(2k+1)\pi \qquad k = 0,1,2,3,...$$

$$A = A_{\min} = |A_1 - A_2| \qquad\qquad I = I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

(3)当两相干波源为同相波源时，相干条件写为:

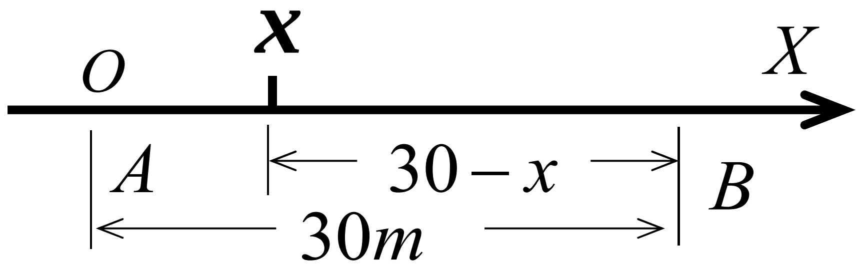
$$\delta = r_2 - r_1 = \pm k\lambda, \qquad k = 0,1,2,3,...$$ 相长干涉

$$\delta = r_2 - r_1 = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, \qquad k = 0,1,2,3,...$$ 相消干涉

其中,δ 称为波程差

例

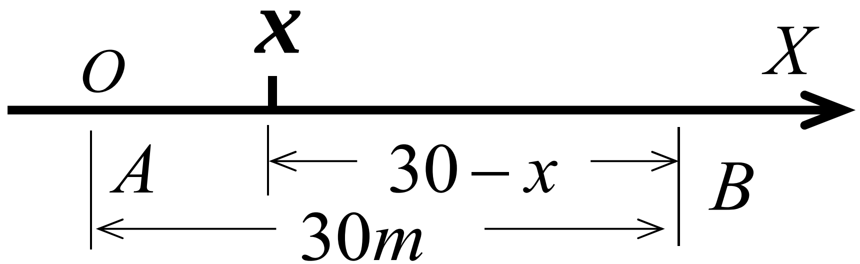
位于A、B两点的两个波源，振幅相等，频率都是100赫兹，相位差为π，其A、B相距30米，波速为400米/秒，求:A、B连线之间因相消干涉而静止的各点的位置。



例

位于A、B两点的两个波源，振幅相等，频率都是100赫兹，相位差为π，其A、B相距30米，波速为400米/秒，求:A、B连线之间因相消干涉而静止的各点的位置。

解：如图所示，取A点为坐标原点，A、B联线为X轴，取A点的振动方程：



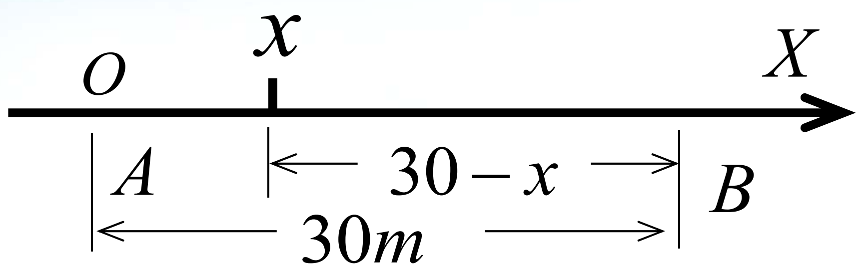
$$y_A = A\cos(\omega t + \pi)$$

在X轴上A点发出的行波方程：

$$y_1 = A\cos(\omega t + \pi - \frac{2\pi x}{\lambda})$$

B点的振动方程：

$$y_B = A\cos(\omega t + 0)$$



在X轴上B点发出的行波方程：

$$y_2 = A\cos[\omega t + 0 - \frac{2\pi(30 - x)}{\lambda}]$$

因为两波同频率，同振幅，同方向振动，所以相消干涉为静止的点满足：

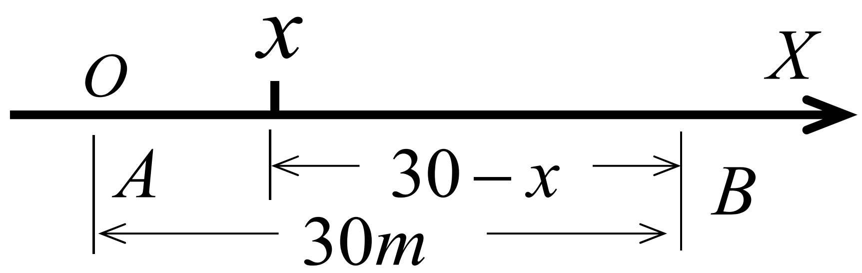
$$\Delta\varphi = \left(\pi - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) - \left[-\frac{2\pi(30 - x)}{\lambda}\right] = (2k+1)\pi$$

$$k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

$$\Delta\varphi = \left(\pi - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) - \left[-\frac{2\pi(30-x)}{\lambda}\right] = (2k+1)\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

相干相消的点需满足：

$$-30 + 2x = k\lambda$$



因为：$\lambda = \dfrac{u}{\nu} = 4m$

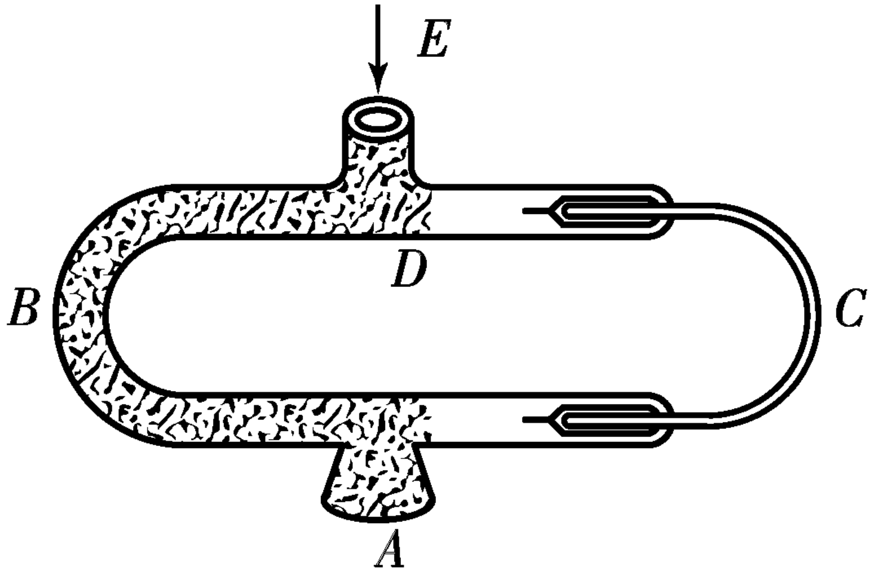
$$x = 15 + k \times 2$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm 7$$

$$x = 1,3,5,7,9,\ldots\ldots 25,27,29m$$

例

图示声波干涉仪.声波从入口E处进入仪器，分B，C两路在管中传播，然后到喇叭口A会合后传出.弯管C可以伸缩，当它渐渐伸长时，喇叭口发出的声音周期性增强或减弱.设C管每伸长8 cm，由A发出的声音就减弱一次，求此声波的频率(空气中声速为340 m/s).



南開大學
Nankai University

解：对某次干涉减弱时有：

$$\delta = L_{DCA} - L_{DBA} = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

当C管伸长x=8 cm时，再一次出现干涉减弱，即此时两路波的波程差应满足条件

$$\delta' = \delta + 2x = [2(k+1)+1]\frac{\lambda}{2}$$

以上两式相减得$\lambda = 2x$，于是可求出声波的频率为

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{u}{2x} = \frac{340}{2\times 0.08} = 2125Hz$$

南開大學 Nankai University

例

S_1和S_2为两相干波源，振幅均为A_1，相距$\lambda/4$，S_1的位相超前S_2 $\pi/2$，若两波在S_1、S_2连线方向上的强度相同，均为I_0，且不随距离变化求：

（1）S_1外侧各点的振幅和强度；

（2）S_2外侧各点的振幅和强度。

例

S_1和S_2为两相干波源，振幅均为A_1，相距$\lambda/4$，S_1的位相超前S_2 $\pi/2$，若两波在S_1 、 S_2 连线方向上的强度相同，均为I_0 ，且不随距离变化求：

（1）S_1外侧各点的振幅和强度；

（2）S_2外侧各点的振幅和强度。

解：（1）在S_1外侧距离为r的点，到S_2的距离为 $r+\dfrac{\lambda}{4}$

某时刻该点的两振动位相差为

$$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2 \quad =[\omega t-\frac{2\pi r}{\lambda}+\frac{\pi}{2}]-[\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}(r+\frac{\lambda}{4})] \ =\pi$$

因此两振动反相　　$A=A_1-A_1=0$

波强　$I=I_0+I_0+2\sqrt{I_0 I_0}\cos\Delta\phi=0$

（2）在S_2外侧距离为r的点，到S_1的距离为 $\boldsymbol{r+\frac{\lambda}{4}}$

某时刻该点的两振动位相差为

$$\boldsymbol{\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2=[\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}(r+\frac{\lambda}{4})+\frac{\pi}{2}]-[\omega t-\frac{2\pi r}{\lambda}]=0}$$

因此两振动同相 $\boldsymbol{A=A_1+A_1=2A_1}$

波强 $I=I_0+I_0+2\sqrt{I_0I_0}\cos\Delta\phi=4I_0$

例

S_1和S_2为两相干波源，振幅均为A_1，相距$\lambda/4$，S_1的位相超前S_2 $\pi/2$，若两波在S_1 、 S_2 连线方向上的强度相同，均为I_0，且不随距离变化求：

（1）S_1外侧各点的振幅和强度；

（2）S_2外侧各点的振幅和强度。

例

S_1和S_2为两相干波源，振幅均为A_1，相距$\lambda/4$，S_1的位相超前S_2 $\pi/2$ ，若两波在S_1 、 S_2 连线方向上的强度相同，均为I_0 ，且不随距离变化求：

（1）S_1外侧各点的振幅和强度；

（2）S_2外侧各点的振幅和强度。

解：（1）在S_1外侧距离为r的点，到S_2的距离为 $\boldsymbol{r+\dfrac{\lambda}{4}}$

某时刻该点的两振动位相差为

$$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2 \;=[\omega t-\frac{2\pi r}{\lambda}+\frac{\pi}{2}]-[\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}(r+\frac{\lambda}{4})] \;=\pi$$

因此两振动反相 $\quad \boldsymbol{A=A_1-A_1=0}$

波强 $\quad I=I_0+I_0+2\sqrt{I_0 I_0}\cos\Delta\phi=0$

南開大學 Nankai University

（2）在S_2外侧距离为r的点，到S_1的距离为 $r+\frac{\lambda}{4}$

某时刻该点的两振动位相差为

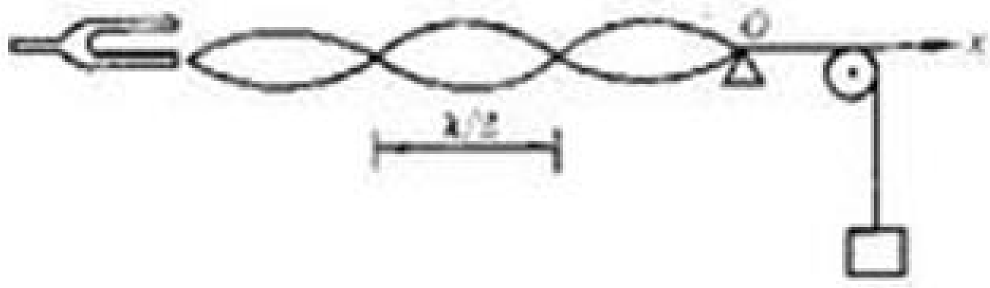
$$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2=[\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}(r+\frac{\lambda}{4})+\frac{\pi}{2}]-[\omega t-\frac{2\pi r}{\lambda}]=0$$

因此两振动同相 $A=A_1+A_1=2A_1$

波强 $I=I_0+I_0+2\sqrt{I_0I_0}\cos\Delta\phi=4I_0$

§ 6. 驻波

- 两列**振幅相同**的相干波，彼此沿相反方向传播，叠加后所形成的波——**驻波**。是一种特殊的干涉现象。
- 一个波与其反射波叠加后就可形成驻波。



- 下面分析：

$$y_1 = A\cos\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)\text{向右}$$

$$y_2 = A\cos\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)\text{向左}$$

$\because$ 质点振动方向相同，两列波叠加后：

$$y = y_1 + y_2 = A\cos\omega(t - \tfrac{x}{u}) + A\cos\omega(t + \tfrac{x}{u})$$

$$= 2A\cos(\tfrac{\omega}{u}x)\cos\omega t$$

又 $\because \omega = \dfrac{2\pi}{T},\quad u = \dfrac{\lambda}{T},\qquad \therefore \dfrac{\omega}{u} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$$\therefore y = 2A\cos(\tfrac{2\pi x}{\lambda})\cos\omega t$$

即坐标为x处的质点作振幅为$|2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}|$，角频率为$\omega$的简谐振动。

由振幅 $\left|2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right|$ 知：

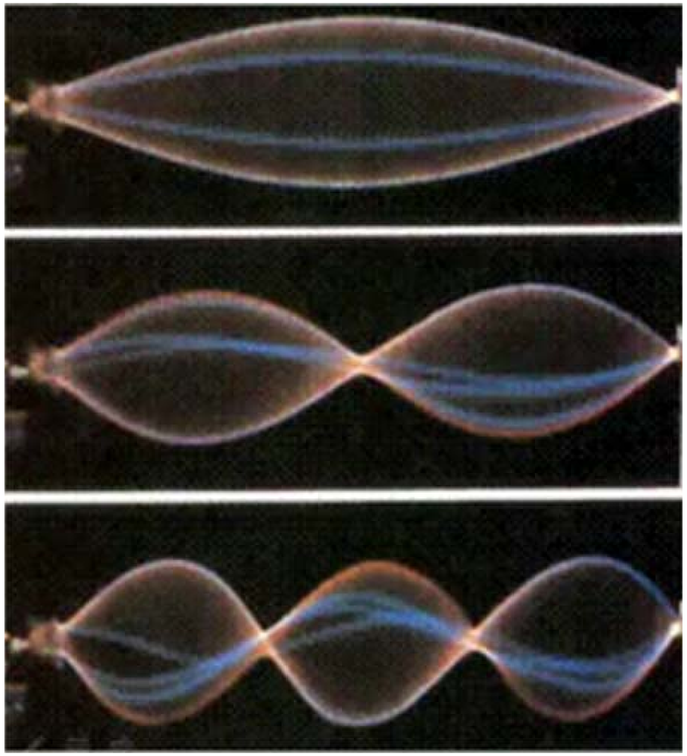
- 波腹位置满足：

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm k\pi, \qquad \text{即 } x = \pm k\frac{\lambda}{2}$$

- 波节位置满足：

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2},$$

$$\text{即 } x = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{4}$$



驻波不满足$y(t+\Delta t, x+u\Delta t)=y(t,x)$的行波条件，驻波不是行波，不是振动的传播,没有波形的推进，也没有能量的传播，参与波动的各个质点处于稳定的振动状态.

驻波波场中，各点都在作简谐振动，各点振动的频率与原来波的频率相同，但各点振幅随位置的变化而变化。

相邻波腹间的距离为：$\Delta x = \lambda/2$

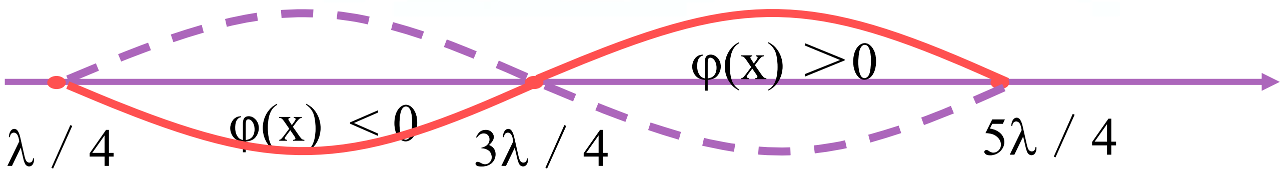
相邻波节间的距离为：$\Delta x = \lambda/2$

相邻波腹与波节间的距离为：$\lambda/4$

因此可用测量波腹间的距离，来确定波长。

驻波的位相的分布特点

$$y = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x \cdot \cos\omega t$$



①在波节两侧质点的振动相位相反。
同时达到相反方向最大位移，速度方向相反。

②两个波节之间的点其振动相位相同。
同时达到相同方向最大位移，速度方向相同。

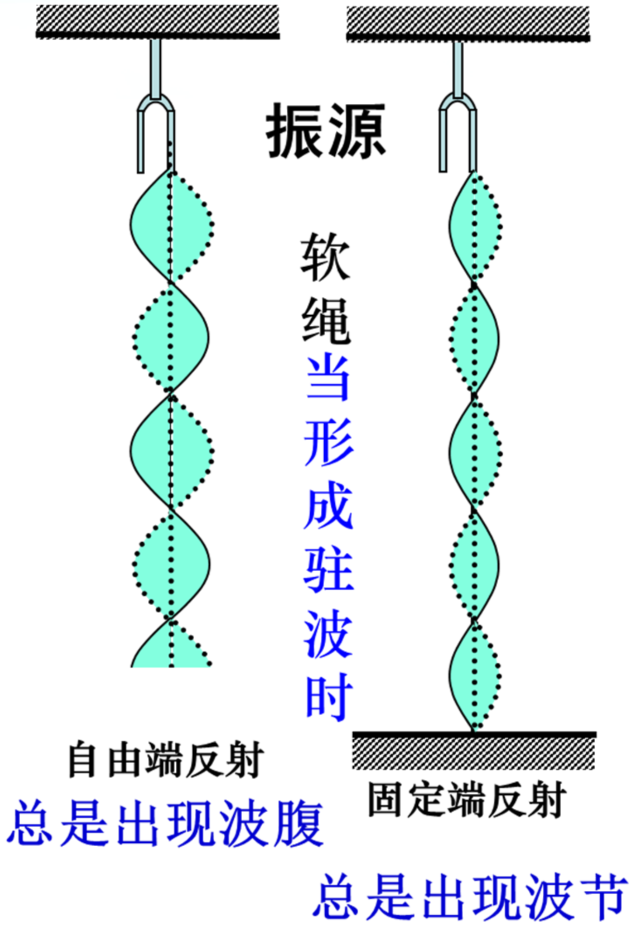
——即驻波干涉中，介质各点的振动位相分段相同，相邻两段位相相反。

半波损失

实验表明：

①波在有些分界面发生反射时，反射点为波腹，反射波与入射波在反射点同相；

②波在有些分界面发生反射时，反射点为波节，反射波与入射波在反射点反相（反射波产生了π的相位突变）。



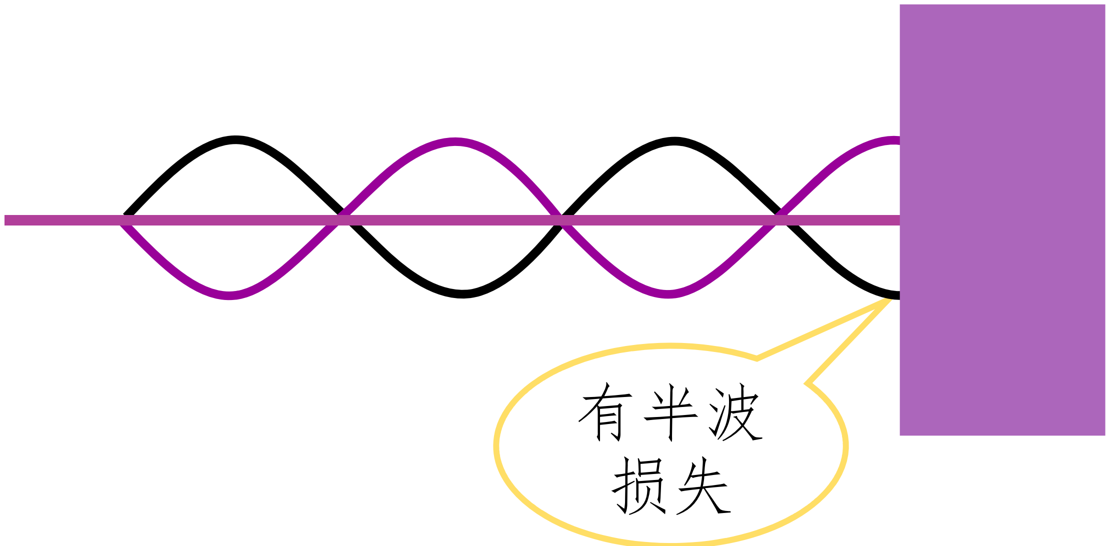
波动在反射时发生π位相突变的现象称为半波损失。

波阻：$\rho \cdot u$——即介质的密度与波速之乘积

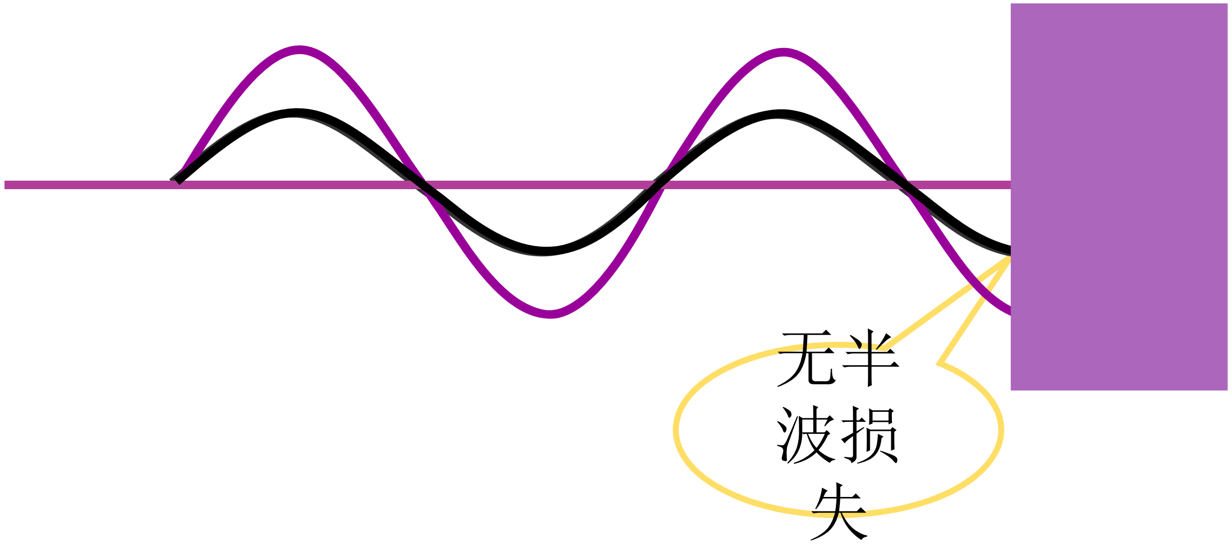
两种介质中，相对波阻大的介质为波密介质

相对波阻小的介质为波疏介质

（1）波从波疏介质垂直入射时，反射波有半波损失，界面处形成波节。



（2）波从波密介质垂直入射时，反射波没有半波损失，
界面处形成波腹。



例

在弹性介质中有一沿x轴传播的平面波，其方程为$y=0.01\cos[4t-\pi x-(\pi/2)]$ (SI)

若在x=5.00m处有一介质分界面，且在分界面处位相突变π，设反射后波的强度不变，试写出反射波的波动方程。

例

在弹性介质中有一沿x轴传播的平面波，其方程为y=0.01cos[4t-πx-(π/2)]　(SI)

若在x=5.00m处有一介质分界面，且在分界面处位相突变π，设反射后波的强度不变，试写出反射波的波动方程。

解：取波动方程的标准式为

$$y = A\cos[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0]$$

可知，波长为2m.

界面处的位相比原点落后　$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}x = \frac{2\pi}{2}\times 5 = 5\pi$

同理，反射波传到原点时，其比界面处的位相又落后5π

再考虑到界面处的位相突变π

于是，反射波在原点处的位相为

$$\phi = -(2\times 5\pi) + \pi + \phi_0 = -10\pi + \pi/2$$

于是，向左传播的波动方程为

$$y = 0.01\cos(4t + \pi x + \frac{\pi}{2} - 10\pi)$$

或 $$y = 0.01\cos(4t + \pi x + \frac{\pi}{2})$$

例

两波在一很长的弦线上传播，其波动方程式分别为:

$y_1=4.00\times10^{-2}\cos(\pi/3)(4x-24t)$ （ＳＩ）

$y_2=4.00\times10^{-2}\cos(\pi/3)(4x+24t)$ （ＳＩ）

求（１）两波的频率、波长、波速；（２）节点位置；（３）波腹位置

例

两波在一很长的弦线上传播，其波动方程式分别为:

$y_1 = 4.00 \times 10^{-2} \cos(\pi/3)(4x - 24t)$ （SI）

$y_2 = 4.00 \times 10^{-2} \cos(\pi/3)(4x + 24t)$ （SI）

求（1）两波的频率、波长、波速；（2）节点位置；（3）波腹位置

解：（1）与标准波动方程$y = A\cos 2\pi\,(\nu t - x/\lambda)$对比可得：

$$y_1 = 4.00 \times 10^{-2} \cos \tfrac{1}{3}\pi\left(4x - 24t\right)$$

$$= 4.00 \times 10^{-2} \cos\left(8\pi t - 4\pi x/3\right)$$

$$= 4.00 \times 10^{-2} \cos 2\pi\left(4t - x/\tfrac{3}{2}\right)$$

$\nu = 4\,\mathrm{Hz}$， $\lambda = 1.50\,\mathrm{m}$　　波速　$u = \nu\lambda = 6.00\,\mathrm{m/s}$

（2）节点位置

根据

$$y_1 = 4.00\times 10^{-2}\cos\left(8\pi t - 4\pi x/3\right)$$

$$y_2 = 4.00\times 10^{-2}\cos\left(8\pi t + 4\pi x/3\right)$$

驻波方程为 $$y = 2\times 4.00\times 10^{-2}\cos\frac{4\pi x}{3}\cos 8\pi t$$

节点位置满足 4πx / 3 ＝±（nπ＋ π/2）

x ＝±3（n ＋1/2）/ 4 （m） n ＝ 0， 1， 2， 3

（3）波腹位置

4πx / 3＝± nπ

x ＝±3 n / 4 （m） n ＝ 0， 1， 2， 3

§7.多普勒效应

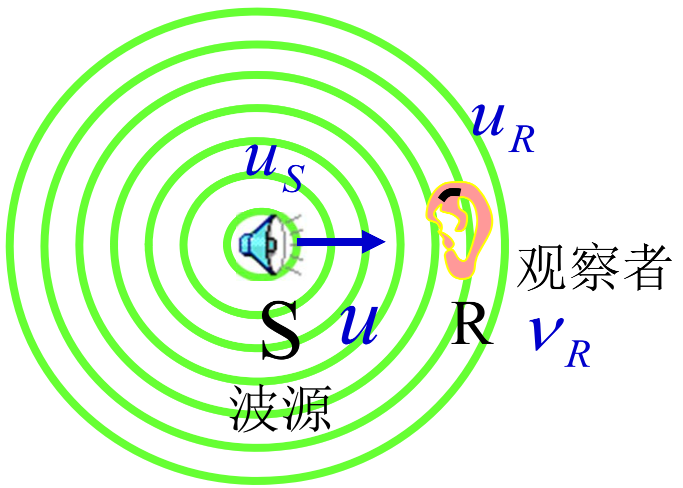
如波源与观察者相对静止，则观察者接收到的波的频率就是波源的振动频率。

如波源与观察者之间有相对运动，则二者频率互不相同，因为单位时间接收到的完整波长数和单位时间内波源发出的完整波长数不同——**多普勒效应**。

u_R：观察者相对于介质的运动速度，接近波源为正，反之为负.

u：波的传播速度，接近观察者为正，反之为负.

u_S：波源相对于介质的运动速度，接近观察者为正，反之为负.



ν_R: 观察者接收到的频率

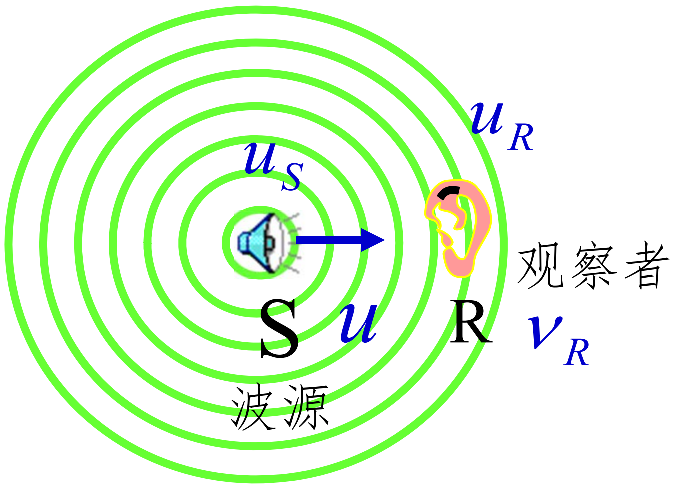
观察者在单位时间内接收到完整波形的数目.

ν_S: 波源的频率

波源在单位时间内发出的完全波的数量.

ν_W: 波的频率

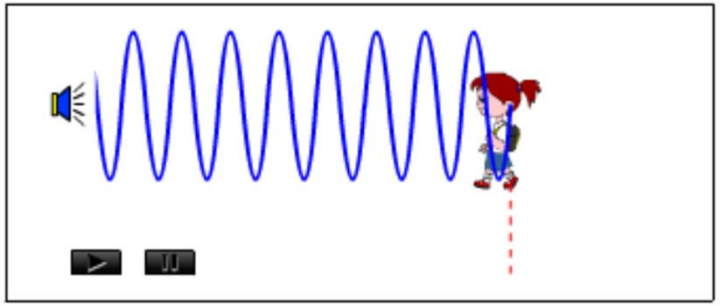
单位时间内通过介质中某点的完全波的数量.



波源静止，观察者静止:

$$\boxed{\nu_R = \nu_W = \nu_S}$$

1. 观察者接近波源　$u_R > 0$



观察者单位时间内接收的完全波的数量为：

$$\nu_R = \frac{u+u_R}{\lambda} = \frac{u+u_R}{\dfrac{u}{\nu_W}} = \frac{u+u_R}{u}\nu_W$$

$$\nu_R = \frac{u+u_R}{u}\nu_s$$

2. 观察者离开波源　$u_R < 0$

$$\nu_R = \frac{u-|u_R|}{\lambda} = \frac{u-|u_R|}{u}\nu_s$$

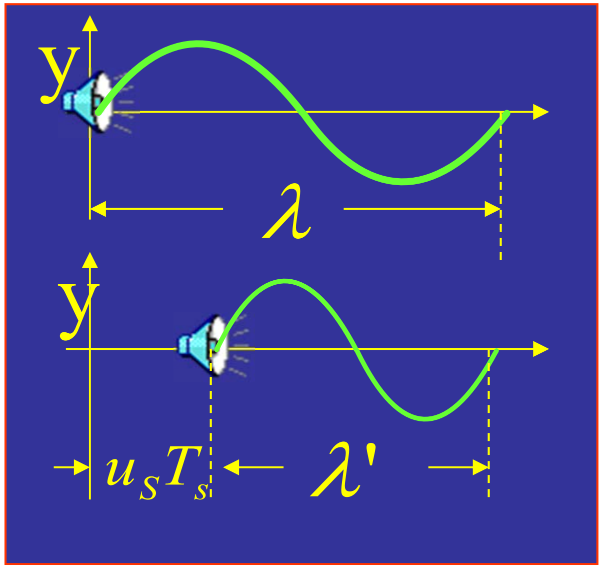
$$\boxed{\nu_R = \frac{u+u_R}{u}\nu_s}$$

观察者静止，波源以速度 u_S 相对介质运动

1. 波源接近观察者　$u_S > 0$

在每个周期中，波源移近观察者的距离为

$u_S T_s$,即每个波长缩短了 $u_S T_s$



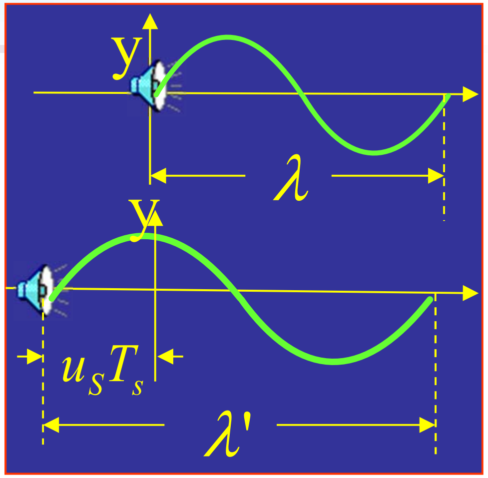
$$\lambda' = \lambda - u_S T_s = uT_s - u_S T_s$$

$$\nu_R = \nu_W = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{u - u_S}\frac{1}{T_s}$$

$$\nu_R = \frac{u}{u - u_S}\nu_s$$

——频率变高

2. 波源离开观察者 $u_S < 0$



在每个周期中，波源离开观察者的距离为

$|u_S| T_s$,即每个波长增加了 $|u_S| T_s$

$$\lambda' = \lambda + |u_S| T_s = u T_s + |u_S| T_s$$

$$\nu_R = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{u + |u_s|} \frac{1}{T_s}$$

$$\nu_R = \frac{u}{u + |u_S|} \nu_s$$

——频率变低

$$\boxed{\nu_R = \frac{u}{u - u_s} \nu_s}$$

波源以u_S运动，观测者以u_R运动（相向为正）

由于波源的运动，介质中波的频率： $\nu_W = \dfrac{u}{u-u_S}\nu_s$

由于观察者的运动，观察者接收到的频率与波的频率之间的关系：

$$\nu_R = \frac{u+u_R}{u}\nu_W$$

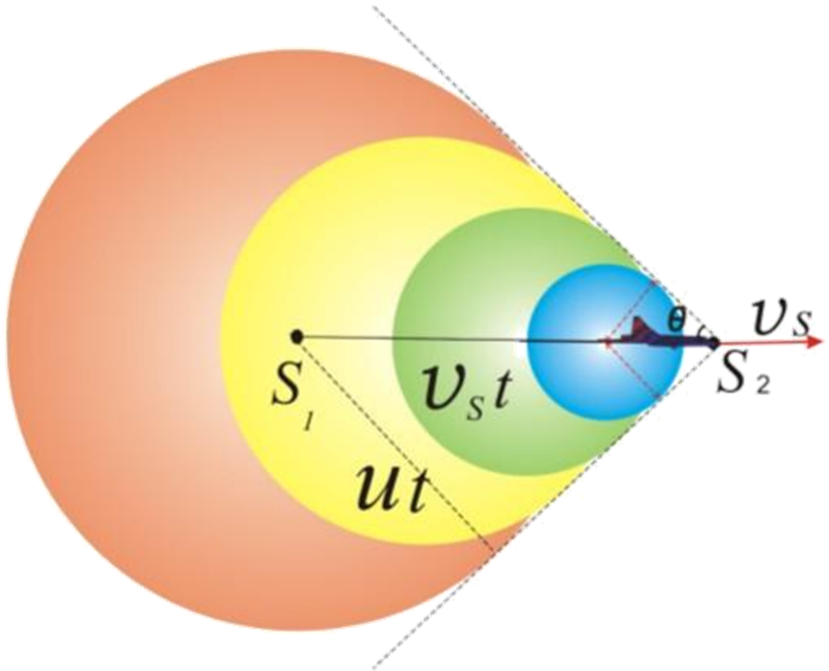
观察者接收到的频率： $\boxed{\nu_R = \dfrac{u+u_R}{u-u_S}\nu_s}$

结论

波源与观察者相互接近时，感觉到的频率较高，反之波源与观察者相互远离时，感觉到的频率较低.

冲击波和马赫锥

当波源速度大于波的速度时， 波源比波前进得快,波的前面不可能形成波动，在各个时刻波源发出的波到达的波前的包络面呈现出一个以波源为顶点的圆锥面，这种波叫冲击波，也叫马赫波，此锥面叫马赫锥.



$$\sin\theta = \frac{ut}{v_S t} = \frac{u}{v_S} = \frac{1}{M}$$

M 为马赫数

如核爆炸、超音速飞行等

例

利用多普勒效应监测汽车行驶的速度。 一固定波源发出频率为*100kHz*的超声波。当汽车迎着波源驶来时。与波源安装在一起的接受器接收到从汽车反射回来的超声波的频率为*110kHz*。已知空气中声速为$330 m.s^{-1}$, 求汽车行驶的速率。

南開大學 Nankai University

例

利用多普勒效应监测汽车行驶的速度。 一固定波源发出频率为*100kHz*的超声波。当汽车迎着波源驶来时。与波源安装在一起的接受器接收到从汽车反射回来的超声波的频率为*110kHz*。已知空气中声速为$330 m.s^{-1}$, 求汽车行驶的速率。

解: 分两步分析:

第一步: 波向着汽车传播并被汽车接收, 此时波源是静止的。汽车作为观察者迎着波源运动。设汽车的行驶速度为v, 则接收到的频率为

$$f' = \frac{u+v}{u} f$$

南開大學 Nankai University

第二步：波从汽车表面反射回来，此时汽车作为波源向着接受器运动，汽车发出的波的频率即是它接收到的频率f'，而接受器此时是观察者，它接收到的频率为

$$f'' = \frac{u}{u-v} f' = \frac{u}{u-v} \frac{u+v}{u} f = \frac{u+v}{u-v} f$$

由此解得汽车行驶的速度为

$$v = \frac{f''-f}{f''+f} u = \frac{110-100}{110+100} \times 330$$

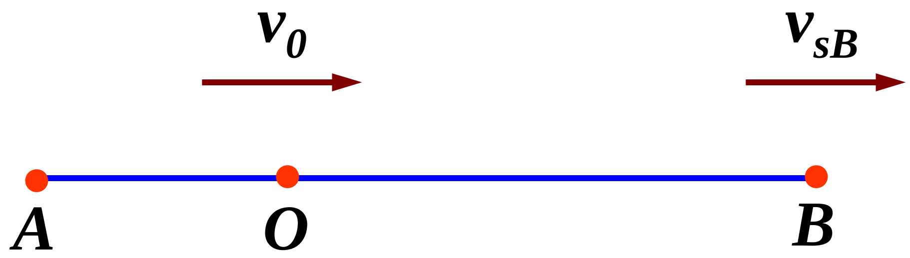
$$= 56.8(\mathrm{km.h^{-1}})$$

例

*A, B*为两个汽笛，其频率均为*500Hz*。*A*是静止的，*B*以$60m.s^{-1}$的速率向右运动。在两个汽笛之间有一观察者*O*，以$30m.s^{-1}$的速率也向右运动。已知空气中的声速为 $330m.s^{-1}$。

求: 1) 观察者听到来自*A*的频率;

2) 观察者听到来自B的频率; 3) 观察者听到的拍频。



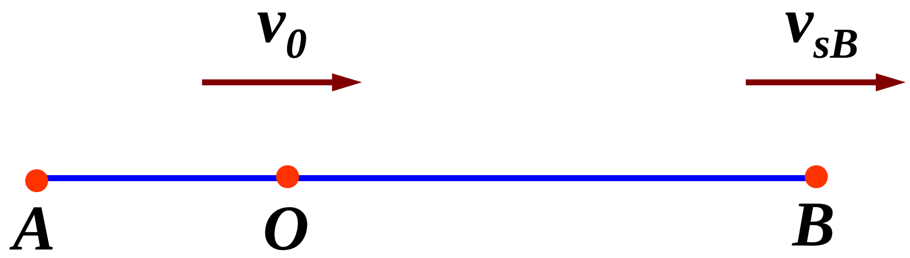
已知: $v=330m.s^{-1}$, $v_{sA}=0$, $v_{sB}=60m.s^{-1}$, $v_0=30m.s^{-1}$, $f=500Hz$

例

*A, B*为两个汽笛，其频率均为*500Hz*。*A*是静止的，*B*以$60m.s^{-1}$的速率向右运动。在两个汽笛之间有一观察者*O*，以$30m.s^{-1}$的速率也向右运动。已知空气中的声速为 $330m.s^{-1}$。

求: 1) 观察者听到来自*A*的频率;

2) 观察者听到来自B的频率; 3) 观察者听到的拍频。



已知: $v=330m.s^{-1}$, $v_{sA}=0$, $v_{sB}=60m.s^{-1}$, $v_0=30m.s^{-1}$, $f=500Hz$

解: 利用多普勒效应关系式，有

$$f' = \frac{u \pm v_0}{u \mp v_s} f$$

1) 由于观察者远离波源A运动, v_0应取负号, 观察者听到来自A的频率为

$$f' = \frac{u - v_0}{u} f = \frac{330 - 30}{330} \times 500 = 454.5(\mathrm{Hz})$$

2) 观察者向着波源B运动, v_0取正号; 而波源远离观察者运动, v_{sB}也取正号. 故观察者听到自B的频率为

$$f'' = \frac{u + v_0}{u + v_{sB}} f = \frac{330 + 30}{330 + 60} \times 500 = 461.5(\mathrm{Hz})$$

3) 拍频

$$\Delta f = |f' - f''| = 7(\mathrm{Hz})$$

$$T' = \frac{\pi}{\left|\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right|} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|}$$ ——拍的周期

π

$$\nu' = \frac{1}{T'} = \left|\frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}\right| = |\nu_2 - \nu_1|$$ ——拍频

例

警报器发射频率*1000Hz* 的声波，离观察者向一固定的目的物运动，其速度为*10m/s*. 试问:

1) 观察者直接听到从警报器传来声音的频率为多少?
2) 观察者听到从目的物反射回来的声音频率为多少?
3) 听到的拍频是多少? (空气的声速为*330m/s*)

例

警报器发射频率*1000Hz* 的声波，离观察者向一固定的目的物运动，其速度为*10m/s*. 试问:

1) 观察者直接听到从警报器传来声音的频率为多少?

2) 观察者听到从目的物反射回来的声音频率为多少?

3) 听到的拍频是多少? (空气的声速为*330m/s*)

解: 已知

$$f_s = 1000\mathrm{Hz}, v_s = 10\,\mathrm{m/s}, u = 330\,\mathrm{m/s}$$

1) 观察者直接听到从警报器传来声音的频率

$$f_1 = \frac{u}{u+\upsilon_s} f_s = \frac{330}{330+10} \times 1000 = 970.6(\mathrm{Hz})$$

2) 目的物接到的声音频率为

$$f_2 = \frac{u}{u - v_s} f_s = \frac{330}{330 - 10} \times 1000 = 1031.3(\mathrm{Hz})$$

目的物反射的频率等于入射声音的频率f_2'. 静止观察者听到反射声音的频率

$$f_2 = f_2' = 1031.3\mathrm{Hz}$$

3) 两波合成的拍频为

$$f_B = f_2 - f_1 = 1031.3 - 970.6 = 60.7(\mathrm{Hz})$$

作业：P173 (下册)

T13.11，T13.24， T13.28， T13.30 ， T13.35