高等数学
第一章：函数、极限与连续函数

张道平

南开大学数学科学学院 414

daopingzhang@nankai.edu.cn

基本情况与要求

- 教学内容：第一章-第六章
- 时间：第 4-18 周，周一，周三，中秋、十一放掉三次课，时间比较紧张
- 作业：每周三 16:00 雨课堂发布作业，下周二 23:59 之前雨课堂上传作业
- 成绩：期末 $70\%+$ 平时 30%(作业 $+$ 出勤 $+$ 课堂)
- 我的一点经验，供参考

高数0367

南开大学

仅限企业内部成员加入

该二维码 7 天内 (9月21日前)有效

高数0369

南开大学

仅限企业内部成员加入

该二维码 7 天内 (9月21日前)有效

1.1 实数

1.1 实数

1.1.1 有理数、无理数与实数轴

1.1 实数

1.1.1 有理数、无理数与实数轴

- 正整数： $N^* = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.

1.1 实数

1.1.1 有理数、无理数与实数轴

- 正整数： $N^* = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.
- 非负整数： $N = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.

1.1 实数

1.1.1 有理数、无理数与实数轴

- 正整数： $N^* = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.
- 非负整数： $N = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.
- 整数： $Z = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$.

1.1 实数

1.1.1 有理数、无理数与实数轴

- 正整数：$N^* = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.
- 非负整数：$N = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.
- 整数：$Z = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$.
- 有理数：$Q = \{\frac{p}{q} | p, q \in Z, q > 0$ 且 p 与 q 互质$\}$.

1.1 实数

1.1.1 有理数、无理数与实数轴

- 正整数： $N^* = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.
- 非负整数： $N = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.
- 整数： $Z = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$.
- 有理数： $Q = \{\frac{p}{q} | p, q \in Z, q > 0$ 且 p 与 q 互质$\}$.
- 有理数： 有穷小数或无穷循环小数.

1.1 实数

1.1.1 有理数、无理数与实数轴

- 正整数： $N^* = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.
- 非负整数： $N = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.
- 整数： $Z = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$.
- 有理数： $Q = \{\frac{p}{q} | p, q \in Z, q > 0$ 且 p 与 q 互质$\}$.
- 有理数： 有穷小数或无穷循环小数.
- 无理数： 无穷不循环小数.

1.1 实数

1.1.1 有理数、无理数与实数轴

- 正整数： $N^* = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.
- 非负整数： $N = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.
- 整数： $Z = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$.
- 有理数： $Q = \{\frac{p}{q} | p, q \in Z, q > 0$ 且 p 与 q 互质$\}$.
- 有理数： 有穷小数或无穷循环小数.
- 无理数： 无穷不循环小数. $\sqrt{2}$ 是无理数，证明?

1.1 实数

1.1.1 有理数、无理数与实数轴

- 正整数： $N^* = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.
- 非负整数： $N = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.
- 整数： $Z = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$.
- 有理数： $Q = \{\frac{p}{q} | p, q \in Z, q > 0$ 且 p 与 q 互质$\}$.
- 有理数： 有穷小数或无穷循环小数.
- 无理数： 无穷不循环小数. $\sqrt{2}$ 是无理数，证明? 无理数 $+$ 有理数?

1.1 实数

1.1.1 有理数、无理数与实数轴

- 正整数： $N^* = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.
- 非负整数： $N = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.
- 整数： $Z = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$.
- 有理数： $Q = \{\frac{p}{q} | p, q \in Z, q > 0$ 且 p 与 q 互质$\}$.
- 有理数： 有穷小数或无穷循环小数.
- 无理数： 无穷不循环小数. $\sqrt{2}$ 是无理数，证明? 无理数 $+$ 有理数?
- 一个无理数是一串有理数无限逼近的结果.

1.1 实数

1.1.1 有理数、无理数与实数轴

- 正整数： $N^* = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.
- 非负整数： $N = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.
- 整数： $Z = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$.
- 有理数： $Q = \{\frac{p}{q} | p, q \in Z, q > 0$ 且 p 与 q 互质$\}$.
- 有理数： 有穷小数或无穷循环小数.
- 无理数： 无穷不循环小数. $\sqrt{2}$ 是无理数，证明? 无理数 $+$ 有理数?
- 一个无理数是一串有理数无限逼近的结果.
- 实数： R.

1.1 实数

1.1.1 有理数、无理数与实数轴

- 正整数：$N^* = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.
- 非负整数：$N = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.
- 整数：$Z = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$.
- 有理数：$Q = \{\frac{p}{q} | p, q \in Z, q > 0$ 且 p 与 q 互质$\}$.
- 有理数：有穷小数或无穷循环小数.
- 无理数：无穷不循环小数. $\sqrt{2}$ 是无理数，证明? 无理数 $+$ 有理数?
- 一个无理数是一串有理数无限逼近的结果.
- 实数：R. 实数集 R 是有序集.

1.1 实数

1.1.1 有理数、无理数与实数轴

- 正整数：$N^* = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.
- 非负整数：$N = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.
- 整数：$Z = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$.
- 有理数：$Q = \{\frac{p}{q} | p, q \in Z, q > 0$ 且 p 与 q 互质$\}$.
- 有理数：有穷小数或无穷循环小数.
- 无理数：无穷不循环小数. $\sqrt{2}$ 是无理数，证明？无理数 $+$ 有理数？
- 一个无理数是一串有理数无限逼近的结果.
- 实数：R. 实数集 R 是有序集.
- 实数轴：规定了原点，单位长以及正方向的直线.

- 实数集 R 具有完备性.

- 实数集 R 具有完备性.
- 有理数集与无理数集各自在实数轴上具有稠密性.

- 实数集 R 具有完备性.
- 有理数集与无理数集各自在实数轴上具有稠密性.
- 奇数多还是偶数多? 整数多还是奇数多? 有理数多还是无理数多? 整数多还是有理数多?

1.1.2. 几个常用的不等式

- 实数集 R 具有完备性.
- 有理数集与无理数集各自在实数轴上具有稠密性.
- 奇数多还是偶数多? 整数多还是奇数多? 有理数多还是无理数多? 整数多还是有理数多?

1.1.2. 几个常用的不等式

设 a, b 为实数, a 的绝对值记作 $|a|$, 它的定义是

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

我们有如下几个常用的不等式:

我们有如下几个常用的不等式：

1. $|x-a|<r \leftrightarrow a-r<x<a+r\ (r>0)$;

我们有如下几个常用的不等式:

1. $|x-a|<r \leftrightarrow a-r<x<a+r\ (r>0)$;
2. $|a+b| \leq |a|+|b|$;

我们有如下几个常用的不等式：

1. $|x-a| < r \leftrightarrow a-r < x < a+r \ (r > 0)$;
2. $|a+b| \leq |a| + |b|$;
3. $|a-b| \geq ||a| - |b||$;

我们有如下几个常用的不等式:

1. $|x-a|<r \leftrightarrow a-r<x<a+r\ (r>0)$;
2. $|a+b| \leq |a|+|b|$;
3. $|a-b| \geq ||a|-|b||$;
4. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个正实数，则有

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

等号成立的充分必要条件是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$. 证明?

1.1.3. 区间与邻域

1.1.3. 区间与邻域

设 a, b 为两个实数，且 $a < b$.

1.1.3. 区间与邻域

设 a, b 为两个实数，且 $a < b$.

- 闭区间：$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$.

1.1.3. 区间与邻域

设 a, b 为两个实数，且 $a < b$.

- 闭区间：$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$.
- 开区间：$(a, b) = \{x | a < x < b\}$.

1.1.3. 区间与邻域

设 a, b 为两个实数，且 $a < b$.

- 闭区间：$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$.
- 开区间：$(a, b) = \{x | a < x < b\}$.
- 左开右闭区间：$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$.

1.1.3. 区间与邻域

设 a, b 为两个实数，且 $a < b$.

- 闭区间：$[a, b] = \{x | a \le x \le b\}$.
- 开区间：$(a, b) = \{x | a < x < b\}$.
- 左开右闭区间：$(a, b] = \{x | a < x \le b\}$.
- 左闭右开区间：$[a, b) = \{x | a \le x < b\}$.

1.1.3. 区间与邻域

设 a, b 为两个实数，且 $a < b$.

- 闭区间：$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$.
- 开区间：$(a, b) = \{x | a < x < b\}$.
- 左开右闭区间：$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$.
- 左闭右开区间：$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$.
- 左闭右正无穷的区间：$[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$.

1.1.3. 区间与邻域

设 a, b 为两个实数，且 $a < b$.

- 闭区间：$[a, b] = \{x | a \le x \le b\}$.
- 开区间：$(a, b) = \{x | a < x < b\}$.
- 左开右闭区间：$(a, b] = \{x | a < x \le b\}$.
- 左闭右开区间：$[a, b) = \{x | a \le x < b\}$.
- 左闭右正无穷的区间：$[a, +\infty) = \{x | x \ge a\}$.
- 左负无穷右开的区间：$(-\infty, b) = \{x | x < b\}$.

1.1.3. 区间与邻域

设 a, b 为两个实数，且 $a < b$.

- 闭区间：$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$.
- 开区间：$(a, b) = \{x | a < x < b\}$.
- 左开右闭区间：$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$.
- 左闭右开区间：$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$.
- 左闭右正无穷的区间：$[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$.
- 左负无穷右开的区间：$(-\infty, b) = \{x | x < b\}$.
- $(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\} = R$. 全体实数的集合.

1.1.3. 区间与邻域

设 a, b 为两个实数，且 $a < b$.

- 闭区间：$[a, b] = \{x|a \le x \le b\}$.
- 开区间：$(a, b) = \{x|a < x < b\}$.
- 左开右闭区间：$(a, b] = \{x|a < x \le b\}$.
- 左闭右开区间：$[a, b) = \{x|a \le x < b\}$.
- 左闭右正无穷的区间：$[a, +\infty) = \{x|x \ge a\}$.
- 左负无穷右开的区间：$(-\infty, b) = \{x|x < b\}$.
- $(-\infty, +\infty) = \{x| -\infty < x < +\infty\} = R$. 全体实数的集合.
- a 的 δ 邻域 $U(a, \delta)$，a 的去心 δ 邻域 $\mathring{U}(a, \delta)$，a 的左 δ 邻域和 a 的右 δ 邻域.

1.2 常量与变量

1.2 常量与变量

在所考察问题的某一过程中或系统中，有些量是始终保持不变的，我们把它称为常量，而有些量却在考察过程中不断地变换，我们把它们称为变量. 例：$s=\frac{1}{2}gt^2$. a, b, c, d 等表示常量，x, y, z, u, v, w 等表示变量。变量的变化范围称为变量的变化域。

1.3 函数的概念

1.3 函数的概念

1.3.1. 函数的定义及其表示法

1.3 函数的概念

1.3.1. 函数的定义及其表示法

映射的概念：设 X, Y 是两个非空集合，若对集合 X 中的每一个元素 x, 均可找到集合 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应，则称这个对应是集合 X 到集合 Y 的一个映射，记为 f，或记作 $f: X \to Y$, 将 x 的对应元素 y 记作 $f(x): x \to y = f(x)$, 并称 y 为映射 f 下的像，而 x 称为映射 f 下的原像 (或称为逆像). 集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 $D_f = X$，而 X 的所有元素的像 $f(x)$ 的集合 $\{y|y \in Y, y = f(x), x \in X\}$ 称为映射 f 的值域，记为 R_f (或 $f(X)$).

1.3 函数的概念

1.3.1. 函数的定义及其表示法

映射的概念：设 X, Y 是两个非空集合，若对集合 X 中的每一个元素 x, 均可找到集合 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应，则称这个对应是集合 X 到集合 Y 的一个映射，记为 f，或记作 $f: X \to Y$, 将 x 的对应元素 y 记作 $f(x): x \to y = f(x)$, 并称 y 为映射 f 下的像，而 x 称为映射 f 下的原像 (或称为逆像). 集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 $D_f = X$，而 X 的所有元素的像 $f(x)$ 的集合 $\{y|y \in Y, y = f(x), x \in X\}$ 称为映射 f 的值域，记为 R_f (或 $f(X)$). 单射，满射，双射.

函数的定义：设 X 是一个非空的实数集合，则称映射 $f: X \to R$ 为定义在 X 上的函数，即对于 X 中的每一个 x 值，按对应规律（或法则）f，在实数域 R 内都有唯一确定的实数 y 与之对应. 称 y 为函数 f 在点 x 处的函数值，记作 $y = f(x), x \in X$. x 称为自变量，y 称为因变量, X 称为函数 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f = X$. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域，记作 R_f 或 $f(X)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系，叫做函数关系.

两个函数 f, g 是相同的，如何判断?

两个函数 f, g 是相同的，如何判断？自变量和因变量采用什么符号来表示则是无关紧要的。$y = f(x), x \in X$, $s = f(t), t \in X$.

两个函数 f, g 是相同的，如何判断？自变量和因变量采用什么符号来表示则是无关紧要的。$y = f(x), x \in X$, $s = f(t), t \in X$.

例：判断下列函数是否相同：$f(x) = 1$, $g(x) = sin^2 x + cos^2 x$, $h(x) = \frac{x}{x}$.

两个函数 f, g 是相同的，如何判断？自变量和因变量采用什么符号来表示则是无关紧要的。$y = f(x), x \in X$, $s = f(t), t \in X$.

例：判断下列函数是否相同：$f(x) = 1$, $g(x) = sin^2 x + cos^2 x$, $h(x) = \frac{x}{x}$.

最常用的表示函数的方法有三种：解析法，表格法，图像法. 各有优点.

两个函数 f, g 是相同的，如何判断？自变量和因变量采用什么符号来表示则是无关紧要的。$y = f(x), x \in X$, $s = f(t), t \in X$.

例：判断下列函数是否相同：$f(x) = 1$, $g(x) = sin^2 x + cos^2 x$, $h(x) = \frac{x}{x}$.

最常用的表示函数的方法有三种：解析法，表格法，图像法. 各有优点.

$f(x_0)$, $y(x_0)$, $y|_{x=x_0}$, $f(x)|_{x=x_0}$.

1.3.2 求函数定义域的方法

1.3.2 求函数定义域的方法

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中的实际意义确定。另一种是对解析式表达的函数，通常约定这种函数的定义域是使得公式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域。在这种约定之下，一般只要写出解析式 $y = f(x)$ 即可，而不必再写出 $D_f = X$.

1.3.2 求函数定义域的方法

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中的实际意义确定。另一种是对解析式表达的函数，通常约定这种函数的定义域是使得公式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域。在这种约定之下，一般只要写出解析式 $y = f(x)$ 即可，而不必再写出 $D_f = X$.

例： $y = \sqrt{a^2 - x^2}(a > 0)$,
$y = log_a(1 - x^2)(a > 0且a \neq 1)$, $y = \sqrt{\frac{9-x^2}{x-1}}$ 的定义域.

1.3.3 几个常用的函数

1.3.3 几个常用的函数

- 常数函数：$y = c$.

1.3.3 几个常用的函数

- 常数函数： $y = c$.
- 绝对值函数： $y = |x|$.

1.3.3 几个常用的函数

- 常数函数： $y = c$.
- 绝对值函数： $y = |x|$.
- 符号函数： $y = sgnx$.

1.3.3 几个常用的函数

- 常数函数： $y = c$.
- 绝对值函数： $y = |x|$.
- 符号函数： $y = sgnx$.
- 取整函数： $y = [x]$.

1.3.3 几个常用的函数

- 常数函数： $y = c$.
- 绝对值函数： $y = |x|$.
- 符号函数： $y = sgnx$.
- 取整函数： $y = [x]$. 例： $y = x - [x]$.

1.3.3 几个常用的函数

- 常数函数： $y = c$.
- 绝对值函数： $y = |x|$.
- 符号函数： $y = sgnx$.
- 取整函数： $y = [x]$. 例： $y = x - [x]$.
- 分段函数, 阶梯函数.

1.3.3 几个常用的函数

- 常数函数： $y = c$.
- 绝对值函数： $y = |x|$.
- 符号函数： $y = sgnx$.
- 取整函数： $y = [x]$. 例： $y = x - [x]$.
- 分段函数, 阶梯函数.
- 狄利克雷函数. 周期?

在函数的定义中，对每一个 $x \in X$，对应的函数值 y 总是唯一的. 如果确定一个对应法则，按这个法则，对每一个 $x \in X$，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不总是唯一的，那么对于这样的对应法则并不符合函数的定义，习惯上我们称这种法则确定了一个多值函数. 例如，变量 x 与 y 之间的对应法则由方程 $x^2 + y^2 - r^2 = 0(r > 0)$ 所确定，对每一个 $x \in (-r, r)$，由此方程可以确定出两个 y 值；如果我们附加条件 $y \geq 0$ 或 $y \leq 0$，就得到这个多值函数的单值分支 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ 或 $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ (记 $F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$).

前面给出的函数均为显式表示，且形式为 $y = f(x)$，如此类型的函数叫做显函数. 有时，确定 x 与 y 的函数关系是通过一个方程 $F(x, y) = 0$ 建立的，这样的函数叫做隐函数，即是说函数 $y = f(x)$ 由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定，但它没有把变量 y 从方程 $F(x, y) = 0$ 中解出。在实际应用中，我们往往不是从方程 $F(x, y) = 0$ 中解出 $y = f(x)$ (即便能解出也不解出来)，因为研究隐函数的性质，通常是从 $F(x, y)$ 的性质去推出隐函数的性质.

表示函数的另一个重要方法是引入一个参变量 t，通过建立 t 与 x, t 与 y 之间的函数关系，间接地确定 x 与 y 之间的函数关系，即

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

这种方法称为函数的参数表示.

表示函数的另一个重要方法是引入一个参变量 t，通过建立 t 与 x, t 与 y 之间的函数关系，间接地确定 x 与 y 之间的函数关系，即

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

这种方法称为函数的参数表示.

例：圆 $x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 的参数方程.

表示函数的另一个重要方法是引入一个参变量 t，通过建立 t 与 x, t 与 y 之间的函数关系，间接地确定 x 与 y 之间的函数关系，即

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

这种方法称为函数的参数表示.

例：圆 $x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 的参数方程.

极坐标：极点、极轴、极半径、极角.

表示函数的另一个重要方法是引入一个参变量 t，通过建立 t 与 x, t 与 y 之间的函数关系，间接地确定 x 与 y 之间的函数关系，即

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

这种方法称为函数的参数表示.

例：圆 $x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 的参数方程.

极坐标：极点、极轴、极半径、极角.

例：圆方程 $x^2 + y^2 = R^2$，$x^2 + y^2 = 2ax\ (a > 0)$ 在极坐标系下的表达式.

1.4 几类具有某种特性的函数

1.4 几类具有某种特性的函数

1.4.1 有界函数与无界函数

1.4 几类具有某种特性的函数

1.4.1 有界函数与无界函数

设函数 $y = f(x), x \in X$. 如果存在正数 $M > 0$，使得对于所有的 $x \in X$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 是 X 上的有界函数，或者说 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果对于任意给定的正数 $M > 0$，无论它多大，总存在 $x_M \in X$，使得 $|f(x_M)| > M$，则称 $f(x)$ 在 X 上无界，或者称 $f(x)$ 在 X 上是无界函数.

1.4 几类具有某种特性的函数

1.4.1 有界函数与无界函数

设函数 $y = f(x), x \in X$. 如果存在正数 $M > 0$，使得对于所有的 $x \in X$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 是 X 上的有界函数，或者说 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果对于任意给定的正数 $M > 0$，无论它多大，总存在 $x_M \in X$，使得 $|f(x_M)| > M$，则称 $f(x)$ 在 X 上无界，或者称 $f(x)$ 在 X 上是无界函数.

几何意义?

1.4 几类具有某种特性的函数

1.4.1 有界函数与无界函数

设函数 $y = f(x), x \in X$. 如果存在正数 $M > 0$，使得对于所有的 $x \in X$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 是 X 上的有界函数，或者说 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果对于任意给定的正数 $M > 0$，无论它多大，总存在 $x_M \in X$，使得 $|f(x_M)| > M$，则称 $f(x)$ 在 X 上无界，或者称 $f(x)$ 在 X 上是无界函数.

几何意义?

例： $y = sinx$ 是有界函数.

例：判断函数 $f(x) = \frac{1}{x}cos\frac{1}{x}$ 在区间 $[a, 1](0 < a < 1)$ 和区间 $(0, 1]$ 上的有界性.

例：判断函数 $f(x) = \frac{1}{x}cos\frac{1}{x}$ 在区间 $[a, 1](0 < a < 1)$ 和区间 $(0, 1]$ 上的有界性.

1.4.2 单调函数

例：判断函数 $f(x)=\frac{1}{x}cos\frac{1}{x}$ 在区间 $[a,1](0<a<1)$ 和区间 $(0,1]$ 上的有界性.

1.4.2 单调函数

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果对 (a,b) 内的任意两点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\leq f(x_2)$ (或 $f(x_1)\geq f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 是 (a,b) 上的单调增加的函数 (或单调减少的函数)；特别当严格不等式 $f(x_1)<f(x_2)$ (或 $f(x_1)>f(x_2)$) 在 (a,b) 上都成立时，则称 $f(x)$ 是 (a,b) 上的严格单调增加的函数 (或严格单调减少的函数). (a,b) 称为 $f(x)$ 的单调区间，单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数，并简称单调增加 (或单调减少) 的函数为单增 (或单减) 的函数.

例：讨论 $f(x) = x^2$ 的单调性.

例：讨论 $f(x) = x^2$ 的单调性.

1.4.3 奇函数与偶函数

例：讨论 $f(x) = x^2$ 的单调性.

1.4.3 奇函数与偶函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 X 关于原点对称，即当 $x \in X$ 时，$-x \in X$. 如果对于任一点 $x \in X$, $f(-x) = -f(x)$ (或 $f(-x) = f(x)$) 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数 (或偶函数).

例：讨论 $f(x) = x^2$ 的单调性.

1.4.3 奇函数与偶函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 X 关于原点对称，即当 $x \in X$ 时，$-x \in X$. 如果对于任一点 $x \in X$, $f(-x) = -f(x)$ (或 $f(-x) = f(x)$) 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数 (或偶函数).

奇函数、偶函数的性质？对称，和差积商。

例：讨论 $f(x) = x^2$ 的单调性.

1.4.3 奇函数与偶函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 X 关于原点对称，即当 $x \in X$ 时，$-x \in X$. 如果对于任一点 $x \in X$, $f(-x) = -f(x)$ (或 $f(-x) = f(x)$) 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数 (或偶函数).

奇函数、偶函数的性质？对称，和差积商。

例：$y = sinx + cosx$ 既非奇函数也非偶函数.

1.4.4 周期函数

1.4.4 周期函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 X. 如果存在一个正数 T，使得对任一 $x \in X$ 有 $(x \pm T) \in X$, 且 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数， T 称为 f 的一个周期. 如果周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在最小正周期，则称这个最小正周期为 $f(x)$ 的基本周期 (通常，说周期函数的周期指的是基本周期).

1.4.4 周期函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 X. 如果存在一个正数 T，使得对任一 $x \in X$ 有 $(x \pm T) \in X$, 且 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数， T 称为 f 的一个周期. 如果周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在最小正周期，则称这个最小正周期为 $f(x)$ 的基本周期 (通常，说周期函数的周期指的是基本周期).

例： $y = sinx$ 和狄利克雷函数的基本周期.

1.5 反函数与复合函数

1.5 反函数与复合函数

1.5.1 反函数

1.5 反函数与复合函数

1.5.1 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 X，值域是 $Y=f(X)$. 如果映射 $f: X\to f(X)$ 是一一对应的，那么它的逆映射存在，记作 $f^{-1}: f(X)\to X$. 这时，由逆映射确定的函数叫函数 $y=f(x)$ 的反函数，记做 $x=f^{-1}(y)$, $y\in Y=f(X)$.

1.5 反函数与复合函数

1.5.1 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 X，值域是 $Y = f(X)$. 如果映射 $f: X \to f(X)$ 是一一对应的，那么它的逆映射存在，记作 $f^{-1}: f(X) \to X$. 这时，由逆映射确定的函数叫函数 $y = f(x)$ 的反函数，记做 $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y = f(X)$.
对称?

定理：设 $y = f(x)$ 在某区间 X 内严格单调增加 (或严格单调减少)，则必存在反函数 $x = f^{-1}(y)$，且反函数 $f^{-1}(y)$ 在区间 $Y = f(X)$ 内也是严格单调增加 (或严格单调减少) 的函数.

定理：设 $y = f(x)$ 在某区间 X 内严格单调增加 (或严格单调减少)，则必存在反函数 $x = f^{-1}(y)$，且反函数 $f^{-1}(y)$ 在区间 $Y = f(X)$ 内也是严格单调增加 (或严格单调减少) 的函数.

例：正弦函数 $y = sinx$ 与反正弦函数 $y = arcsinx$ 的讨论.

定理：设 $y = f(x)$ 在某区间 X 内严格单调增加 (或严格单调减少)，则必存在反函数 $x = f^{-1}(y)$，且反函数 $f^{-1}(y)$ 在区间 $Y = f(X)$ 内也是严格单调增加 (或严格单调减少) 的函数.

例：正弦函数 $y = sinx$ 与反正弦函数 $y = arcsinx$ 的讨论.

例：正切函数 $y = tanx$ 与反正切函数 $y = arctanx$ 的讨论.

定理：设 $y=f(x)$ 在某区间 X 内严格单调增加 (或严格单调减少)，则必存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，且反函数 $f^{-1}(y)$ 在区间 $Y=f(X)$ 内也是严格单调增加 (或严格单调减少) 的函数.

例：正弦函数 $y=sinx$ 与反正弦函数 $y=arcsinx$ 的讨论.

例：正切函数 $y=tanx$ 与反正切函数 $y=arctanx$ 的讨论.

例：指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 与对数函数 $y=log_a x$ 的讨论.

1.5.2 复合函数

1.5.2 复合函数

设函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 X，函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U. 如果 $\varphi(X)\subset U$, 则由下式确定的函数
$y=f[\varphi(x)], x\in X$ 称为由函数 $u=\varphi(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数，通常记作 $f\circ\varphi$, 变量 u 称为中间变量，即 $(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)], x\in X$.

1.5.2 复合函数

设函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 X，函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U. 如果 $\varphi(X)\subset U$, 则由下式确定的函数 $y=f[\varphi(x)], x\in X$ 称为由函数 $u=\varphi(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数，通常记作 $f\circ\varphi$, 变量 u 称为中间变量，即 $(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)], x\in X$.

函数 φ 与函数 f 能构成复合函数 $f\circ\varphi$ 的条件是：函数 $u=\varphi(x)$ 的值域 $\varphi(X)$ 必须包含在函数 f 的定义域 U 内，否则，不能构成复合函数. 一般来说，$f\circ\varphi$ 存在未必 $\varphi\circ f$ 存在，且即使 $\varphi\circ f$ 存在，一般来说 $f\circ\varphi\neq\varphi\circ f$, 也就是说复合运算的交换律不成立.

例：设函数 $f(x) = 2^x + 1$, $\varphi(x) = arcsinx$, 考虑复合函数 $f \circ \varphi$ 和 $\varphi \circ f$.

例：设函数 $f(x) = 2^x + 1$, $\varphi(x) = arcsinx$, 考虑复合函数 $f \circ \varphi$ 和 $\varphi \circ f$.

虽然交换律不成立，但结合律成立.

例：设函数 $f(x)=2^x+1$, $\varphi(x)=arcsinx$, 考虑复合函数 $f\circ\varphi$ 和 $\varphi\circ f$.

虽然交换律不成立，但结合律成立.

可以定义多个函数的复合运算.

例：设函数 $f(x) = 2^x + 1$, $\varphi(x) = arcsinx$, 考虑复合函数 $f \circ \varphi$ 和 $\varphi \circ f$.

虽然交换律不成立，但结合律成立.

可以定义多个函数的复合运算.

例：设 $f(x) = \frac{x}{1+x}(x \neq -1)$, 试求 $f(f(f(x)))$.

1.6 初等函数

1.6 初等函数

1.6.1 基本初等函数

1.6 初等函数

1.6.1 基本初等函数

- 常数函数

1.6 初等函数

1.6.1 基本初等函数

- 常数函数
- 幂函数

1.6 初等函数

1.6.1 基本初等函数

- 常数函数
- 幂函数
- 指数函数

1.6 初等函数

1.6.1 基本初等函数

- 常数函数
- 幂函数
- 指数函数
- 对数函数

1.6 初等函数

1.6.1 基本初等函数

- 常数函数
- 幂函数
- 指数函数
- 对数函数
- 三角函数

1.6 初等函数

1.6.1 基本初等函数

- 常数函数
- 幂函数
- 指数函数
- 对数函数
- 三角函数
- 反三角函数

1.6 初等函数

1.6.1 基本初等函数

- 常数函数
- 幂函数
- 指数函数
- 对数函数
- 三角函数
- 反三角函数

1.6.2 初等函数

1.6 初等函数

1.6.1 基本初等函数

- 常数函数
- 幂函数
- 指数函数
- 对数函数
- 三角函数
- 反三角函数

1.6.2 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

习题

习题

1. 用数学归纳法证明：$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

习题

1. 用数学归纳法证明：$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

2. 求 $y = arcsin(lgx)$ 的定义域. lg 以 10 为底，ln 以 e 为底。

习题

1. 用数学归纳法证明：$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

2. 求 $y = arcsin(lgx)$ 的定义域. lg 以 10 为底，ln 以 e 为底。

3. 设 $f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1+x^2}$, 求 $f(x)$.

习题

1. 用数学归纳法证明：$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

2. 求 $y = arcsin(lgx)$ 的定义域. lg 以 10 为底，ln 以 e 为底。

3. 设 $f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1+x^2}$, 求 $f(x)$.

4. 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f_2(x) = (f \circ f)(x), \cdots,$
$f_n(x) = (f \circ f_{n-1})(x)$ $(n = 3, 4, 5, \cdots)$. 求 $f_n(x)$.