高等数学
第五章：定积分及其应用

张道平

南开大学数学科学学院 414

daopingzhang@nankai.edu.cn

1.1 典型例题

1.1 典型例题

曲边梯形的面积：设平面图形是由连续曲线弧 $y = f(x)(f(x) \geq 0, x \in [a, b])$，直线 $x = a, x = b$ 以及 x 轴所围成．这类图形称为曲边梯形．计算曲边梯形的面积 A.

1.1 典型例题

曲边梯形的面积：设平面图形是由连续曲线弧 $y = f(x)(f(x) \geq 0, x \in [a, b])$, 直线 $x = a, x = b$ 以及 x 轴所围成. 这类图形称为曲边梯形. 计算曲边梯形的面积 A.

水库注水量的计算：设一个水库上游河水的流量为 $v(t)m^3/min$, 而 $v(t)$ 在 $[T_0, T]$ 上是连续函数，t 表示时间. 计算该河流在 $[T_0, T]$ 时间区间内向水库注入的总水量 V.

1.2 定积分的定义

定义：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义. 对 $[a,b]$ 作任意分割，将 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$. 任取一点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$, 作函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ 的乘积, 并作出和式 $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$. 记 $\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$, 若和式的极限 $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在，且极限值 I 与区间 $[a,b]$ 的分割以及 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 的取法无关, 则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，极限值 I 就称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的定积分，记为 $\int_a^b f(x)dx$. 其中 $f(x)$ 称为被积函数，$f(x)dx$ 称为被积表达式，x 称为积分变量.

黎曼积分，黎曼和

黎曼积分，黎曼和

定积分的值与积分变量的字母选取无关.

黎曼积分，黎曼和

定积分的值与积分变量的字母选取无关.

规定：当 $a \neq b$ 时，$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. 当 $a = b$ 时，$\int_a^a f(x)dx = 0$.

黎曼积分，黎曼和

定积分的值与积分变量的字母选取无关.

规定：当 $a \neq b$ 时，$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. 当 $a = b$ 时，$\int_a^a f(x)dx = 0$.

可积函数一定是有界的.

黎曼积分，黎曼和

定积分的值与积分变量的字母选取无关.

规定：当 $a \neq b$ 时，$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. 当 $a = b$ 时，$\int_a^a f(x)dx = 0$.

可积函数一定是有界的.

可积充分条件：设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续或只有有限个第一类间断点，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是可积的.

例：设

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 1, & x=0. \end{cases}$$

讨论积分 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ 的存在性.

例：设

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

讨论积分 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ 的存在性.

可积函数可以取特定的分割，便于计算和式的极限.

例：设

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 1, & x=0. \end{cases}$$

讨论积分 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ 的存在性.

可积函数可以取特定的分割，便于计算和式的极限.

例：已知自由下落物体的速度函数是 $v=gt$，其中 g 是重力加速度，求在时间段 $[0,T]$ 中的物体下落的距离 s.

例：设

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0. \end{cases}$$

讨论积分 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ 的存在性.

可积函数可以取特定的分割，便于计算和式的极限.

例：已知自由下落物体的速度函数是 $v=gt$，其中 g 是重力加速度，求在时间段 $[0,T]$ 中的物体下落的距离 s.

1.3 定积分的几何意义

1.4 定积分的基本性质

1.4 定积分的基本性质

线性性质：若函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积，则 $k_1 f(x) \pm k_2 g(x)$ 在 $[a, b]$ 上也可积，且

$$\int_a^b [k_1 f(x) \pm k_2 g(x)] dx = k_1 \int_a^b f(x) dx \pm k_2 \int_a^b g(x) dx,$$

其中 k_1, k_2 为任意两个常数.

1.4 定积分的基本性质

线性性质：若函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积，则 $k_1 f(x) \pm k_2 g(x)$ 在 $[a, b]$ 上也可积，且

$$\int_a^b [k_1 f(x) \pm k_2 g(x)] dx = k_1 \int_a^b f(x) dx \pm k_2 \int_a^b g(x) dx,$$

其中 k_1, k_2 为任意两个常数.

对积分区间可加性：若 $a < c < b$，且 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 与 $[c, b]$ 上都可积，反之亦然，且有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

保序性：若函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积，且满足 $f(x) \leq g(x), x \in [a, b]$, 则 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

保序性：若函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积，且满足 $f(x) \le g(x), x \in [a, b]$, 则 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

推论：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积，且 $f(x) \ge 0 (a \le x \le b)$, 则有 $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

保序性：若函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积，且满足 $f(x) \leq g(x), x \in [a, b]$, 则 $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

推论：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积，且 $f(x) \geq 0 (a \leq x \leq b)$, 则有 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

推论：若 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数，则 $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

保序性：若函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积，且满足 $f(x) \le g(x), x \in [a, b]$, 则 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

推论：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积，且 $f(x) \ge 0 (a \le x \le b)$, 则有 $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

推论：若 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数，则 $|\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

估值定理：若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积，且存在实数 m 与 M, 使得 $m \le f(x) \le M(a \le x \le b)$，则有

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

积分中值定理：设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数，则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$. (几何意义，平均高度，积分平均值).

积分中值定理：设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$.（几何意义，平均高度，积分平均值).

练习：设 $f(x),g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，试证

$$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx.$$

积分中值定理：设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$. (几何意义，平均高度，积分平均值).

练习：设 $f(x), g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，试证

$$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx.$$

练习：证明不等式 $\frac{2}{e} < \int_0^2 e^{x(x-2)}dx < 2$.

积分中值定理：设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$.（几何意义，平均高度，积分平均值).

练习：设 $f(x),g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，试证

$$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx.$$

练习：证明不等式 $\frac{2}{e}<\int_0^2 e^{x(x-2)}dx<2.$

练习：（积分中值定理的推广）证明：如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$

练习：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且 $f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-x^2} f(x)\,dx$, 试证明：在 $[0,1]$ 上至少存在一点 ξ, 使 $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$.