线性代数–向量组作业

黄申为

2022 年 3 月 28 日

1. 用定义解释含有零向量的向量组必定线性相关.

2. 问 a 取何值时下列向量共面?
$$a_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}.$$

3. 设 a_1, a_2 线性相关且 b_1, b_2 也线性相关, 问 $a_1 + b_1, a_2 + b_2$ 是否一定线性相关? 若正确给出证明; 若不正确请举出反例.

4. 设向量组 $B : b_1, \dots, b_r$ 能由向量组 $A : a_1, \dots, a_s$ 线性表示为
$$(b_1, \dots, b_r) = (a_1, \dots, a_s)K,$$
其中 K 为 $s \times r$ 矩阵且向量组 A 线性无关. 证明向量组 B 线性无关的充分必要条件是 $R(K) = r$.

5. 设有 n 维向量组 $A : a_1, a_2, \dots, a_n$. 证明它们线性无关的充要条件是任一 n 维向量都可由它们线性表示.

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$. 求一个 4×2 矩阵 B 使得 $AB = 0$ 且 $R(B) = 2$.

7. 设 4 元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 已知 η_1, η_2, η_3 是它的三个解向量且
$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 + \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$
求该方程组的通解.

8. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$, 证明 $R(A) + R(A - E) = n$.

9. 设向量组 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ $(m > 1)$ 中, $a_1 \neq 0$ 且每个 a_i $(i = 2, 3, \ldots, m)$ 都不能被 $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ 线性表示. 证明 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性无关.

10. 设 η^* 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的一个特解且 $\xi_1, \ldots, \xi_{n-r}$ 是对应齐次线性方程组的一个基础解系.

    (a) 证明 $\eta^*, \xi_1, \ldots, \xi_{n-r}$ 线性无关.

    (b) 证明 $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \ldots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 线性无关.

    (c) 设 $\eta_1, \ldots, \eta_{n-r+1}$ 是 $Ax = b$ 的 $n - r + 1$ 个线性无关的的解 (由 (b) 知它确有 $n - r + 1$ 个线性无关的的解). 试证它的任一解都可表示为

    $$x = k_1\eta_1 + \cdots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1},$$

    其中 $k_1 + \cdots + k_{n-r+1} = 1$.