线性代数–线性空间与线性变换作业解答

黄申为

2022 年 11 月 20 日

1. 判断下列集合和相应的运算是否构成线性空间.

   (a) $R^3 \setminus \{(0,0,a)^T : a \in R\}$关于向量的加法与数乘.

   (b) n阶对称矩阵的全体关于矩阵的加法和数乘.

   Solution.

   (a) 否. 加法运算不封闭.

   (b) 是. 加法和数乘运算关于对称阵是封闭的, 因此根据子空间的判定定理可得.

2. 设V是线性空间, $\alpha, \beta \in V$. 定义

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta),$$

   其中$-\beta$表示β的负元. 证明: $k(\alpha-\beta) = k\alpha - k\beta$以及$(k-\ell)\alpha = k\alpha - \ell\alpha$.

   Solution. 先证第一个等式:

$$\begin{aligned}
k(\alpha - \beta) &= k(\alpha + (-\beta)) \\
&= k\alpha + k(-\beta) \\
&= k\alpha + k((-1)\beta) \\
&= k\alpha + (-1)(k\beta) \\
&= k\alpha + (-k\beta) \\
&= k\alpha - k\beta.
\end{aligned}$$

再证第二个等式:

$$\begin{aligned}(k-\ell)\alpha &= (k+(-\ell))\alpha\\ &= k\alpha+(-\ell)\alpha\\ &= k\alpha+-(\ell\alpha)\\ &= k\alpha-\ell\alpha.\end{aligned}$$

3. **证明线性空间$P[x]_n$中, 向量组$1,x,\ldots,x^n$与向量组$1,x-a,\ldots,(x-a)^n$等价, 其中$a\in R$且$a\neq 0$.**

Solution. 显然, $1,x-a,\ldots,(x-a)^n$可由$1,x,\ldots,x^n$线性表示. 下证$1,x,\ldots,x^n$可由$1,x-a,\ldots,(x-a)^n$线性表示. 回忆泰勒公式:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

因此,

$$\begin{aligned}1 &= 1,\\ x &= a+(x-a),\\ &\vdots\\ x^n &= a^n+na^{n-1}(x-a)+\cdots+(x-a)^n.\end{aligned}$$

所以向量组$1,x,\ldots,x^n$与向量组$1,x-a,\ldots,(x-a)^n$等价.

4. **给出下列线性空间的一组基并确定其维数.**

   (a) 2阶对称阵关于矩阵的加法和数乘.

   (b) 2阶反对称阵关于矩阵的加法和数乘.

Solution.

(a) $A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$是一个基, 故该线性空间是3维的.

(b) $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$是一个基, 故该线性空间是1维的.

5. **证明$-1+x,1-x^2,-2+2x+x^2,x^3$是$P[x]_3$中的一组基, 并给出$f=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\in P[x]_3$在这组基下的坐标.**

Solution. 首先我们证明$-1+x, 1-x^2, -2+2x+x^2, x^3$线性无关. 令$k_1(-1+x)+k_2(1-x^2)+k_3(-2+2x+x^2)+k_4x^3=0$, 即 $(-k_1+k_2+k_3)+(k_1+2k_3)x+(-k_2+k_3)x^2+k_4x^3=0$. 从而

$$\begin{cases} -k_1+k_2+k_3 &= 0 \\ k_1+2k_3 &= 0 \\ -k_2+k_3 &= 0 \\ k_4 &= 0 \end{cases}$$

此线性方程组系数矩阵可逆, 故只有零解, 因而$-1+x, 1-x^2, -2+2x+x^2, x^3$线性无关. 因$P[x]_3$是4维的, $-1+x, 1-x^2, -2+2x+x^2, x^3$是基. 设$f=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$在基$1, x, x^2, x^3$下的坐标为$y=(a_0, a_1, a_2, a_3)^T$. 由基$1, x, x^2, x^3$到基$-1+x, 1-x^2, -2+2x+x^2, x^3$的过渡矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由坐标变换公式, f在$-1+x, 1-x^2, -2+2x+x^2, x^3$下的坐标为 $P^{-1}y$. 具体计算从略.

6. 在R^4中取两个基e_1, e_2, e_3, e_4 与 $\alpha_1=(2,1,-1,1)^T, \alpha_2=(0,3,1,0)^T, \alpha_3=(5,3,2,1)^T, \alpha_4=(6,6,1,3)^T$.

   (a) 求由前一个基到后一个基的过渡矩阵.

   (b) 求在两个基中有相同坐标的向量.

Solution. $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)=(e_1, e_2, e_3, e_4)P$, 其中

$$P=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) 求由前一个基到后一个基的过渡矩阵为P.

(b) 任意向量x在e_1, e_2, e_3, e_4下的坐标为x. 由坐标变换公式, x在$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$下的坐标为$P^{-1}x$. 因此在两个基下有相同坐标的向量满足方程$P^{-1}x=x$, 即$x$是$Px=x$的解. 具体计算从略.

7. **设V是一个n维线性空间, $\alpha_1,\dots,\alpha_n$是V的一个基. 解释$L(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$是什么?**

Solution. 由基和生成子空间的定义可知$L(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$是整个空间$V$.

8. **考虑二阶对称矩阵的全体关于矩阵的加法和数乘构成一个线性空间V. 在V中取一个基 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 现在$V$中定义如下变换$T$: $T(A) = P^TAP$, 其中$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.**

   (a) **证明T是V中的线性变换.**

   (b) **求T在基A_1, A_2, A_3下的矩阵.**

Solution.

(a) 若A为对称阵, 则$T(A) = P^TAP$仍为对称阵, 因此T确实是V中的一个变换. 容易验证:

$$T(A+B) = P^T(A+B)P = P^TAP + P^TBP = T(A) + T(B);$$
$$T(kA) = P^T(kA)P = kP^TAP = kT(A).$$

因此T是一个线性变换.

(b) 直接计算:

$$\begin{aligned}
T(A_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= 1A_1 + 1A_2 + 1A_3, \\
T(A_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} &= 0A_1 + 1A_2 + 2A_3, \\
T(A_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= 0A_1 + 0A_2 + 1A_3.
\end{aligned}$$

因此T在A_1, A_2, A_3下的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9. **设T是n维线性空间V中的线性变换且T在基$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$下的矩阵是$A$. 证明: 若$\alpha \in V$在$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$下的坐标为$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, 则$T\alpha$在$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$下的坐标为$Ax$.**

Solution. 由已知条件有

$$(T\alpha_1, T\alpha_2, \ldots, T\alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)A. \tag{1}$$

因为$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$, 所以

$$\begin{aligned} T\alpha &= x_1T\alpha_1 + x_2T\alpha_2 + \cdots + x_nT\alpha_n \\ &= (T\alpha_1, T\alpha_2, \ldots, T\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &\overset{(1)}{=} (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)Ax, \end{aligned}$$

从而$T\alpha$在$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$下的坐标为$Ax$.

10. **苏轼的诗句"横看成岭侧成峰"描述的是线性代数中的哪个定理?**

Solution. 同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似的.