1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\varphi(x))-f(\varphi(0))}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2(2+\sin\frac{1}{x}))-f(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2(2+\sin\frac{1}{x}))-f(0)}{x^2(2+\sin\frac{1}{x})}\cdot\dfrac{x^2(2+\sin\frac{1}{x})}{x}$

$=f'(0)\cdot\lim\limits_{x\to 0}x(2+\sin\frac{1}{x})=f'(0)\cdot 0=0.$

故，选 C.

2、 $f(x)$在$x=0$处连续，则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=2$.

因此$g(0)=0$，$g'(0)=2$.

故选C.

3、 $f(x)$为奇函数，$f(0)=0$.

由拉格朗日中值定理，有$|f(x)|=|f(x)-f(0)|=|f'(\xi)||x-0|\leq M\cdot 1$.

故选C.

4、 等价于比较$\pi\ln e$和$e\ln\pi$大小. $\Leftrightarrow$ 比较$\dfrac{\ln e}{e}$和$\dfrac{\ln\pi}{\pi}$大小.

$\therefore$只需考察$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$在$[e,\pi]$上的单调性.

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$，$x\in[e,\pi]$.

$\therefore f(\pi)<f(e)$. 即$e^\pi>\pi^e$.

南開大學 作业纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 页

5、设 $P(x,x^3)$，则 $l=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x^6}$.

由 $\frac{dx}{dt}=v_0$，$\left.\frac{dl}{dt}\right|_{(x,y)=(1,1)}=\frac{2x+6x^5}{2\sqrt{x^2+x^6}}\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=1}=2\sqrt{2}v_0$.

6. 原式 $=\lim_{x\to0}\frac{1-e^{\sin x\ln\cos x}}{x^3}\overset{(x\to0)}{=}\frac{-\sin x\ln\cos x}{x^3}=\frac{-\sin x\ln(1+(\cos x-1))}{x^3}^{(x\to0)}$

$=\frac{-\sin x(\cos x-1)}{x^3}\overset{(x\to0)}{=}-\frac{x(-\frac{1}{2}x^2)}{x^3}\overset{(x\to0)}{=}\frac{1}{2}$

7、由拉格朗日中值定理，$\exists\,\xi\in[\sin x,x]$.

s.t. $-\sin\xi=\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin x-x}$.

$\therefore$ 原式 $=\lim_{x\to0}\frac{-\sin\xi(\sin x-x)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin\xi(-\frac{1}{6}x^3)}{x^4}$

$=\frac{1}{6}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin\xi}{x}$. 因为 $\xi\in[\sin x,x]$. $1=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{x}\underset{(x\to0)}{\le}\frac{\sin\xi}{x}\underset{(x\to0)}{\le}\frac{\sin x}{x}=1$

$\therefore$ 原式 $=\frac{1}{6}$.

8、原式 $=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\ln x}}$，其中，由洛必达法则

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\cdot\frac{-1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}$

$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=-1$

$\therefore$ 原式 $=e^{-1}$

9、(1) 求导易证.

(2) 注意到 $x_n=\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{n^2-n+2i-1}{n^3}\right)$，则 $\ln x_n=\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{n^2-n+2i-1}{n^3}\right)$

由上问结论，

$$\frac{n^2-n+2i-1}{n^3+n^2+n}\le\frac{n^2-n+2i-1}{n^3+n^2-n+2i-1}\le\ln\left(1+\frac{n^2-n+2i-1}{n^3}\right)\le\frac{n^2-n+2i-1}{n^3}$$

则.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{n^2-n+2i-1}{n^3+n^2+n}\le\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{n^2-n+2i-1}{n^3}\right)\le\sum_{i=1}^{n}\frac{n^2-n+2i-1}{n^3}$$

由于 $\sum_{i=1}^{n}(n^2-n+2i-1)=n^3$. 所以.

$$\frac{n^3}{n^3+n^2+n}\le\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{n^2-n+2i-1}{n^3}\right)\le\frac{n^3}{n^3}=1$$

$n\to\infty$，由夹逼定理，$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=1$.

10. 利用单调有界原则，

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<0.$$ ∴ $\{a_n\}$ 单调减少.

下证 $\{a_n\}$ 有下界.

注意到 $\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}<\frac{1}{\sqrt{n-1}}$. 因此.

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}}<2(\sqrt{n-1}-\sqrt{n-2})<\frac{1}{\sqrt{n-2}}$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<2(\sqrt{2}-\sqrt{1})<\frac{1}{\sqrt{1}}$$

将上述各式相加. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}}$

$\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}>-2+\frac{1}{\sqrt{n}}>-2$. ∴ -2 为 $\{a_n\}$ 一个下界. ∴由单调有界原则. $\{a_n\}$ 收敛.