1、C.

由已知，$\int f(x)dx = \arctan x + C$.

则 $\int x f(1-x^2)dx = -\frac{1}{2}\int f(1-x^2)d(1-x^2) = -\frac{1}{2}\arctan(1-x^2)+C$.

故选C.

2、B.

$\because f'(\sin^2 x) = \cos^2 x = 1-\sin^2 x$，令 $\sin^2 x = t$，$f'(t) = 1-t$.

$\therefore f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + C$.

故选B.

3. A.

$\int \frac{f(ax)}{a}dx = \frac{1}{a^2}\int f(ax)\,d(ax) = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\sin ax}{ax} + C$.

故选A.

4、D.

$$f(x) = \max\{x, x^2\} = \begin{cases} x^2, & x \le 0. \\ x, & 0 < x \le 1, \\ x^2, & x > 1. \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} = 0 = f(0)$. $\therefore f(x)$在$x=0$处连续

同理，$f(x)$在$x=1$处连续.

$\Rightarrow f(x)$处处连续，因而其原函数$F(x)$连续可导，$\Rightarrow$ A错

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & x \le 0. \\ \frac{x^2}{2}, & 0 < x \le 1. \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}, & x > 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} F_-'(1) = F_+'(1) \\ F_-'(0) = F_+'(0) \end{matrix} \Rightarrow \text{B、C错}$$

D对.

南开大学 作业纸

系别______ 班级______ 姓名______ 第 页

5、令 $x=\sin t$，$t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，其中.

法一：$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t\cos t}=\int\csc^2 t\,dt=-\cot t+C=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$.

所求积分 $\int\frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx=\int\ln(1-x^2)\,d(-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x})$.

分部积分法：$=-\frac{\sqrt{1-x^2}\ln(1-x^2)}{x}+\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\cdot\frac{-2x}{1-x^2}dx$.

$=-\frac{\sqrt{1-x^2}\ln(1-x^2)}{x}-2\arcsin x+C$.

法二：令 $x=\sin t$，$t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

$$\int\frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{2\ln\cos t}{\sin^2 t\cos t}\cos t\,dt=2\int\csc^2 t\ln\cos t\,dt.$$

分部积分法.

$$=-2\int\ln\cos t\,d(\cot t)=-2\left[\cot t\ln\cos t-\int\cot t\cdot\left(\frac{-\sin t}{\cos t}\right)dt\right]$$

$$=-2\cot t\ln\cos t-2\int\cot t\tan t\,dt.$$

$$=-2\cot t\ln\cos t-2t+C.$$

当 $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 时，$\cos t=\sqrt{1-x^2}$，$\cot t=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. 于是，

上式：$-2\cot t\ln\cos t-2t=-\frac{2\sqrt{1-x^2}}{x}\ln\sqrt{1-x^2}-2\arcsin x=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ln(1-x^2)-2\arcsin x$

原积分 $=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ln(1-x^2)-2\arcsin x+C$.

南開大學 作业纸

系别______ 班级______ 姓名______ 第____页

6、$\int \frac{1}{\cos^2x\sin^4x}dx = \int \csc^4x\sec^2x\,dx = \int \csc^4x\, d\tan x.$

$= \int (\cot^2x+1)^2\, d\tan x.$

$= \int (\cot^4x+2\cot^2x+1)\, d\tan x.$

$= \int (\tan^{-4}x+2\tan^{-2}x+1)\, d\tan x.$

$= -\frac{1}{3}\tan^{-3}x - 2\tan^{-1}x + \tan x + C.$

$= -\frac{1}{3}\cot^3x - 2\cot x + \tan x + C.$

7、由 $e^y+6xy+x^2=1$ 知，当 $x=0$ 时，$y=0$.

方程 $e^y+6xy+x^2=1$ 两端对x求导得.

$$e^y\cdot y'+6y+2x=0.$$

将 $x=0, y=0$ 代入上式得 $y'(0)=0$.

上式对x求导得：

$$e^y\cdot y'^2+e^y\cdot y''+12y'+6xy''+2=0.$$

将 $x=0, y=0, y'(0)=0$. 代入上式解得 $y''(0)=-2$. $\therefore f''(0)=-2$

8. 由已知 $f(x)$ 单调不减，且 $f(0)=0$，则 $f'(x)\equiv 0$.

若不然，不妨设 $\exists x_0$. s.t. $f'(x_0)>0$，则当 $x>x_0$ 时，

$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)\geqslant f'(x_0)(x-x_0)\to+\infty$. $(x\to+\infty)$.

与 $0\leq f(x)\leq 1-e^{-x^2}$ 矛盾. $\therefore f'(x_0)\leq 0$

同理可得 $f'(x_0)\geqslant 0$. $\therefore f'(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv f(0)\equiv 0$.

~~9. (1) 易证.~~

(2) ~~由(1)可.~~

~~$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} > \sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{n}{n^2+k^2} > \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^3 > \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^3}$~~

9. 令 $g(x)=x(ax+b)$，且过点 $(0,0)$. $(1,1)$. $(4,2)$.

有. $g(x)=x\left(-\frac{x}{6}+\frac{7}{6}\right)$

令 $F(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{x}{6}(-x+7)$. $x\in[0,4]$. 显然 $F(x)$ 在 $[0,4]$ 有二阶导数.

$F'(x)=f'(x)+\frac{x}{3}-\frac{7}{6}$, $F''(x)=f''(x)+\frac{1}{3}$.

且 $F(0)=F(1)=F(4)=0$. 在 $[0,1]$ 和 $[1,4]$ 对 $F(x)$ 分别用罗尔定理.

$\exists\ \xi_1\in(0,1)$ 和 $\xi_2\in(1,4)$. 使 $F'(\xi_1)=0$, $F'(\xi_2)=0$.

在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上对 $F(x)$ 用罗尔定理，$\exists\ \xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,4)$,

使 $F''(\xi)=0$. 即 $f''(\xi)=-\frac{1}{3}$.

10. ① 设 $f(x)$ 恒为常函数，即 $f(x)\equiv 0$，结论显然成立.

② 设 $[0,1]$ 上，$f(x)\not\equiv 0$. 设 $x_0\in(0,1)$，有 $|f(x_0)|=M=\max\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|$，$\Rightarrow f'(x_0)=0$

$f(x)$ 在 x_0 处泰勒展开.

$0=f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2$ $(0<\xi_1<x_0)$.

$0=f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2$ $(x_0<\xi_2<1)$

$\Rightarrow$ $|f''(\xi_1)|=\frac{2M}{x_0^2}$, $|f''(\xi_2)|=\frac{2M}{(1-x_0)^2}$.

若 $x_0\in(0,\frac{1}{2})$. 则 $\exists\ \xi=\xi_1\in(0,\frac{1}{2})$, s.t. $|f''(\xi)|>8M$.

$x_0\in[\frac{1}{2},1)$, 则 $\exists\ \xi=\xi_2\in[\frac{1}{2},1)$, s.t. $|f''(\xi)|\geq 8M$.

证毕.