高等数学
第二章：导数与微分

张道平

南开大学数学科学学院 414

daopingzhang@nankai.edu.cn

4.1 微分的概念

4.1 微分的概念

设函数 $y=f(x)$ 在点 x 的某一邻域内有定义且在该点连续，于是，当点 x 的增量 Δx 趋于零时，对应函数增量 $y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 也趋于零. 但一般来说，增量 Δy 是 Δx 的很复杂的函数，例如 $y=sinx$, $\Delta y=sin(x+\Delta x)-sinx=2cos(x+\frac{\Delta x}{2})sin\frac{\Delta x}{2}$, 这种复杂性给我们计算 Δy 带来了困难.

4.1 微分的概念

设函数 $y=f(x)$ 在点 x 的某一邻域内有定义且在该点连续，于是，当点 x 的增量 Δx 趋于零时，对应函数增量 $y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 也趋于零. 但一般来说，增量 Δy 是 Δx 的很复杂的函数，例如 $y=sinx$, $\Delta y=sin(x+\Delta x)-sinx=2cos(x+\frac{\Delta x}{2})sin\frac{\Delta x}{2}$, 这种复杂性给我们计算 Δy 带来了困难.

为此，我们希望找到 Δx 的一个线性函数 $A\cdot\Delta x$(其中 A 与 Δx 无关) 来近似代替 Δy. 换言之，就是要找到 A 使得 Δy 与 $A\cdot\Delta x$ 之差是比 Δx 更高阶的无穷小，即 $\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$.

如果函数 $y = f(x)$ 在点 x 可导，此问题就可以得到很好的解决. 因为此时 $y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. 由极限性质有 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, 其中 $\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$. 所以 $\Delta y = y'\Delta x + \alpha \Delta x = y'\Delta x + o(\Delta x)$. 上式中，$y'$ 与 Δx 无关，而 Δx 的线性函数 $y'\Delta x$ 就是我们的答案，即可以取 $A = y'$.

定义：设函数 $y = f(x)$ 在点 x 的某一邻域内有定义，在该邻域内任给其增量 Δx. 如果函数相应的增量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 能表示成 $\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, 并且式中 A 与 Δx 无关 (可以与 x 相关), $o(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小量 (当 $\Delta x \to 0$), 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x 可微，并称 $A \cdot \Delta x$ 是 $f(x)$ 在点 x 的微分，记作 dy 或 $df(x)$, 即 $dy = A \cdot \Delta x$ 或 $df(x) = A \cdot \Delta x$. $A \cdot \Delta x$ 也称为函数增量 Δy 的线性主要部分，简称线性主部. 另外，若函数 $f(x)$ 在区间 I 上每一点可微则称函数 $f(x)$ 为区间 I 上的可微函数.

定义：设函数 $y = f(x)$ 在点 x 的某一邻域内有定义，在该邻域内任给其增量 Δx. 如果函数相应的增量 $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ 能表示成 $\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, 并且式中 A 与 Δx 无关 (可以与 x 相关), $o(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小量 (当 $\Delta x \to 0$), 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x 可微，并称 $A \cdot \Delta x$ 是 $f(x)$ 在点 x 的微分，记作 dy 或 $df(x)$, 即 $dy = A \cdot \Delta x$ 或 $df(x) = A \cdot \Delta x$. $A \cdot \Delta x$ 也称为函数增量 Δy 的线性主要部分，简称线性主部. 另外，若函数 $f(x)$ 在区间 I 上每一点可微则称函数 $f(x)$ 为区间 I 上的可微函数.

定理：函数 $y = f(x)$ 在点 x 可微的充分必要条件是它在点 x 可导，且 $A = f'(x)$.

4. 微分

导数也称为微商.

导数也称为微商.

例：求函数 $y = sinx$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 和 $dx = 0.001$ 时的微分.

4. 微分

导数也称为微商.

例：求函数 $y = sinx$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 和 $dx = 0.001$ 时的微分.

微分的几何意义?

导数也称为微商.

例：求函数 $y = sinx$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 和 $dx = 0.001$ 时的微分.

微分的几何意义?

4.2 微分基本公式与运算法则

导数也称为微商.

例：求函数 $y = sinx$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 和 $dx = 0.001$ 时的微分.

微分的几何意义?

4.2 微分基本公式与运算法则

因为函数的可导性与可微性是等价的，只要将函数的导数乘以自变量的微分就得到函数的微分，所以与导数基本公式相对应，便得到微分基本公式.

导数也称为微商.

例：求函数 $y = sinx$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 和 $dx = 0.001$ 时的微分.

微分的几何意义?

4.2 微分基本公式与运算法则
因为函数的可导性与可微性是等价的，只要将函数的导数乘以自变量的微分就得到函数的微分，所以与导数基本公式相对应，便得到微分基本公式.

一阶微分的形式不变性.

导数也称为微商.

例：求函数 $y = sinx$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 和 $dx = 0.001$ 时的微分.

微分的几何意义?

4.2 微分基本公式与运算法则
因为函数的可导性与可微性是等价的，只要将函数的导数乘以自变量的微分就得到函数的微分，所以与导数基本公式相对应，便得到微分基本公式.

一阶微分的形式不变性.

例：求 $y = \frac{e^{2x}}{x^2}$，求 dy.

4.3 高阶微分

4.3 高阶微分

在函数 $y=f(x)$ 的一阶微分 $dy=f'(x)dx$ 中，变量 x 与 dx 是相互独立的，将一阶微分看成 x 的函数，再求一次微分 $d(dy)$(如果存在的话)，称为函数 $f(x)$ 的二阶微分. 记为 d^2y, 即

$$\begin{aligned} d^2y = d(dy) &= d[f'(x)dx] = d(f'(x))dx \\ &= f''(x)dxdx = f''(x)dx^2, \end{aligned}$$

其中 $dx^2=(dx)^2$. 在求高阶微分时，注意其中 dx 是与 x 无关的，在对 x 微分时应将 dx 看作常数因子，这样 $d(dx)=0$.

4.3 高阶微分

在函数 $y = f(x)$ 的一阶微分 $dy = f'(x)dx$ 中，变量 x 与 dx 是相互独立的，将一阶微分看成 x 的函数，再求一次微分 $d(dy)$(如果存在的话)，称为函数 $f(x)$ 的二阶微分．记为 d^2y, 即

$$
\begin{aligned}
d^2y = d(dy) &= d[f'(x)dx] = d(f'(x))dx \\
&= f''(x)dxdx = f''(x)dx^2,
\end{aligned}
$$

其中 $dx^2 = (dx)^2$．在求高阶微分时，注意其中 dx 是与 x 无关的，在对 x 微分时应将 dx 看作常数因子，这样 $d(dx) = 0$.

例：求 $y = xe^x$ 的 n 阶微分.

练习：设函数 $f(x)$ 在 x_0 可微，$\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 为趋于零的正数列，试证：$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n} = f'(x_0)$.

练习：设函数 $f(x)$ 在 x_0 可微，$\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 为趋于零的正数列，试证：$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n} = f'(x_0)$.

练习：设函数 $y = [f(x^2)]^{\frac{1}{x}}$，$f$ 是可微的正值函数，求 dy.

练习：设函数 $f(x)$ 在 x_0 可微，$\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 为趋于零的正数列，试证：$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}=f'(x_0)$.

练习：设函数 $y=[f(x^2)]^{\frac{1}{x}}$，f 是可微的正值函数，求 dy.

练习：设 $f(0)=0$. 证明：$f(x)$ 在 $x=0$ 可微的充要条件是：存在函数 $g(x)$, 在 $x=0$ 连续，使得 $f(x)=xg(x)$，且此时 $f'(0)=g(0)$.