第七次作业 参考答案

11.13 - 11.19

习题 5.1 A 类

1

(2) 解:

作分割 $T: x_k=\frac{k}{n}$ ，则 $0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$.

取 $\xi_k=\frac{k}{n}$, 则 $\sum_{k=0}^n f\left(\xi_k\right) \Delta x_k=\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n}=\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^3}=\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

故 $\int_0^1 x^2 dx=\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f\left(\xi_k\right) \Delta x_k=\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\frac{1}{3}$.

2

(2) 解:

作 $y=|x-2|$ 图像，由定积分的几何意义:

$\int_1^3|x-2| dx=2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1=1$

3

(2) 解:

设 $f(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{1+x}, x \in[0.1]$.

则 $f^{\prime}(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2} \geqslant 0$, 仅当 $x=0$ 时等号成立,

故 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上严格单增。

当 $x>0$ 时, $f(x)>f(0)=0$. 故 $\ln(x+1)>\frac{x}{1+x}, x \in(0,1]$.

由定积分的保序性得 $\int_0^1 \frac{x}{1+x} dx<\int_0^1 \ln(x+1) dx$.

4

(1) 解:

当 $x \in[0,2\pi]$ 时, $\cos x \in[-1,1]$, 故 $\frac{1}{10+3\cos x} \in\left[\frac{1}{13}, \frac{1}{7}\right]$.

由定积分的估值定理得,

$$\frac{1}{13} \cdot 2\pi \leq \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x} \leqslant \frac{1}{7} \cdot 2\pi, \text{即} \frac{2}{13}\pi \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x} \leqslant \frac{2}{7}\pi.$$

5

解:

由积分中道定理，$\exists \xi_x$ 介于 a 和 x 之间，使 $\int_a^x f(t) dt=f\left(\xi_x\right)(x-a)$.

故

$$\lim_{x\to a}\frac{x}{x-a}\int_a^x f(t)dt=\lim_{x\to a}\frac{x}{x-a}\cdot f\left(\xi_x\right)(x-a)=\lim_{x\to a}xf\left(\xi_x\right)=af(a).$$

习题 5.2 A 类

1

(2) 解:

$F'(x)=(-\sin x)\cos\left(\pi\cos^2 x\right)-\cos x\cos\left(\pi\sin^2 x\right)=\cos\left(\pi\cos^2 x\right)(\cos x-\sin x).$

2

(2) 解:

由 L'Hospital 法则,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}&=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt\cdot e^{x^2}}{xe^{2x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{1+2x^2}\\&=2.\end{aligned}$$

3

(3) 解:

由于 $y=x\sqrt{|x|}$ 是奇函数, 故 $\int_{-1}^1 x\sqrt{|x|}dx=0$ 、

则

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 x\sqrt{|x|}dx&=\int_{-1}^1 x\sqrt{|x|}dx+\int_1^2 x\sqrt{|x|}dx\\&=\int_1^2 x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_1^2=\frac{2}{5}(4\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

5

解:

由 $\begin{cases}x=y^2\\y=x^2\end{cases}$ 得两抛物线交于 $(0,0)$ 和 $(1,1)$

故

$$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

6

解:

$\int_0^1\left(x^2+cx+c\right)^2dx=\int_0^1\left(x^4+2cx^3+\left(c^2+2c\right)x^2+2c^2x+c^2\right)dx$

$$= \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{c}{2}x^4 + \frac{c^2+2c}{3}x^3 + c^2x^2 + c^2x \right) \Bigg|_0^1$$

$$= \frac{7}{3}c^2 + \frac{7}{6}c + \frac{1}{5}$$

当 $C = -\frac{\frac{7}{6}}{2\times\frac{7}{3}} = -\frac{1}{4}$ 时，原积分取得最小.