南開大學 Nankai University

高等数学补充题（第9周）

(1). 求极限：

① $$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\ln(\arctan(x+1)) - \ln(\arctan(x))\right)$$

② $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\sqrt{\tan x - \sin x}\right)}{\sqrt[3]{1+x^3} - \sqrt[3]{1-x^3}}$$

③ $$\lim_{x\to 0} \frac{(3+2\sin x)^x - 3^x}{\tan^2 x}$$

(2) 求极限：

① $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}\right)$$

② $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n}\right)$$

③ $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+\nu)}$$ （这里 $\nu\in\mathbb{N}^*$）

(3) ① 求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right) = ?$$

（注：这里 x 为任意实数，极限表达式可以含 x）

② 由①证明：圆周率 π 有如下的无穷乘积表示：

$$\pi = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac12}\cdot\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac12}}\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac12}}}\cdots}$$

(4). 求导函数：

① $p(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_n) \quad (x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R})$

② $f(x) = x^{x^x} \quad (x>0)$

③ $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

(5) 求极限：　(Hint：可以考虑用导数定义式)

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+\tan x)^{10} - (1-\sin x)^{10}}{\sin x}$$

(6) 求出下列和式　(Hint：可以考虑求导)

① a) $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$

b) $1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}$

(Hint：考虑 $1+x+x^2+\cdots+x^n$)

② a) $\sum_{k=1}^{n} k\sin kx$

b) $\sum_{k=1}^{n} k\cos kx$

(Hint：考虑 $\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ 和 $\sum_{k=1}^{n}\sin kx$，这两个和式的紧凑形式可以尝试用三角公式，裂项得到)

(7) ① 证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{x_{2n}\}$ 和 $\{x_{2n-1}\}$ 都收敛

② 考虑斐波那契 (Fibonacci) 数列：$F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$　$n=1,2,\cdots$

证明：$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}$ 存在并求其值

(8) ① 设 $y=\tan x$，求证：$y'''=2(1+y^2)(1+3y^2)$

② 设 $y=(x+\sqrt{1+x^2})^m$，求证：$(1+x^2)y''+xy'=m^2y$

③ 对于 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$

求证：$$\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2=0$$

(注 以上三个证明题实际上是导数计算的练习)

(9) 设 $x_1=a$，$x_2=b$，$x_{n+2}=\dfrac{x_n+x_{n+1}}{2}$ $(n=1,2,\cdots)$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

(10) 对每个正整数 n，用 x_n 来表示方程：$x+x^2+\cdots+x^n=1$ 在 $[0,1]$ 的根。

说明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

(Hint：存在性可用单调有界定理说明)

(11) ① 设 $f(0)=0$，$f'(0)=a$

求数列 $x_n=f(\frac{1}{n^2})+f(\frac{2}{n^2})+\cdots+f(\frac{n}{n^2})$ $n=1,2,\cdots$

的极限

(Hint：从极限定义式入手)

(f 在 0 处导数)

② 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$