高等数学
第二章：导数与微分

张道平

南开大学数学科学学院 414

daopingzhang@nankai.edu.cn

1.1 导数问题举例

1.1 导数问题举例

例：求变速直线运动的瞬时速度. 设物体做变速直线运动，其运动规律是 $s = f(t)$, t 是时间，s 是对应于时间的运动距离，求该物体的瞬时速度 v.

1.1 导数问题举例

例：求变速直线运动的瞬时速度. 设物体做变速直线运动，其运动规律是 $s = f(t)$, t 是时间，s 是对应于时间的运动距离，求该物体的瞬时速度 v.

1.2 导数的定义

1.1 导数问题举例

例：求变速直线运动的瞬时速度. 设物体做变速直线运动，其运动规律是 $s=f(t)$, t 是时间，s 是对应于时间的运动距离，求该物体的瞬时速度 v.

1.2 导数的定义

定义：设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，当自变量有改变量 $\Delta x(\Delta x\neq 0$, 且 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内) 时，函数的相应的改变量为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点处的导数

(或微商)，记作 $f'(x_0)$, 即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

这时，称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导或具有导数，如果上述极限不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处不可导或没有导数.

(或微商)，记作 $f'(x_0)$, 即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

这时，称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可导或具有导数，如果上述极限不存在，则称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处不可导或没有导数.

如果记 $x = x_0 + \Delta x$, 则当 $\Delta x \to 0$ 时，即 $x \to x_0$, 于是函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的导数又可表示为

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

例：求函数 $f(x) = x^3$ 在 $x_0 = 2$ 处的导数 $f'(2)$.

例：求函数 $f(x)=x^3$ 在 $x_0=2$ 处的导数 $f'(2)$.

定义：设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

或者

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则分别称它们为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的右导数或左导数，记作 $f'_+(x_0)$ 或 $f'_-(x_0)$。

定理：设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，则 $f'(x_0)$ 存在的充分必要条件是 $f'_+(x_0)$ 和 $f'_-(x_0)$ 都存在且相等.

定理：设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，则 $f'(x_0)$ 存在的充分必要条件是 $f'_+(x_0)$ 和 $f'_-(x_0)$ 都存在且相等.

例：设

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x \leq 1 \\ 2x + b, x > 1 \end{cases},$$

试判断 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处是否可导.

定理：设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，则 $f'(x_0)$ 存在的充分必要条件是 $f'_+(x_0)$ 和 $f'_-(x_0)$ 都存在且相等.

例：设

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, x\le 1 \\ 2x+b, x>1 \end{cases},$$

试判断 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否可导.

例：证明函数 $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 连续，但在该点不可导.

例：设 $f'(x_0)$ 存在，试求极限 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$. 又问：如果 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ 存在，能否推出 $f'(x_0)$ 存在.

例：设 $f'(x_0)$ 存在，试求极限 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$. 又问：如果 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ 存在，能否推出 $f'(x_0)$ 存在.

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都可导，则称 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导；如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 都存在，则称函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导. (导函数)

例：设 $f'(x_0)$ 存在，试求极限 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$. 又问：如果 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ 存在，能否推出 $f'(x_0)$ 存在.

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都可导，则称 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导；如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 都存在，则称函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导. (导函数)

1.3 导数的几何意义

例：设 $f'(x_0)$ 存在，试求极限 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$. 又问：如果 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ 存在，能否推出 $f'(x_0)$ 存在.

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都可导，则称 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导；如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 都存在，则称函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导. (导函数)

1.3 导数的几何意义

几何意义：函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义就是曲线 $y=f(x)$ 在 (x_0,y_0) 点处切线的斜率.

切线方程：$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

切线方程： $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

法线方程： $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, $f'(x_0) \neq 0$.

切线方程：$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

法线方程：$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, $f'(x_0) \neq 0$.

例：曲线 $y = x^3$ 在哪一点的切线与直线 $y = 4x - 1$ 平行？并写出该切线方程.

切线方程：$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

法线方程：$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, $f'(x_0) \neq 0$.

例：曲线 $y = x^3$ 在哪一点的切线与直线 $y = 4x - 1$ 平行？并写出该切线方程.

1.4 可导与连续的关系

切线方程： $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

法线方程： $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, $f'(x_0) \neq 0$.

例： 曲线 $y = x^3$ 在哪一点的切线与直线 $y = 4x - 1$ 平行？ 并写出该切线方程.

1.4 可导与连续的关系

定理： 如果函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点可导，则它在 x_0 点连续.

切线方程：$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

法线方程：$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, $f'(x_0) \neq 0$.

例：曲线 $y = x^3$ 在哪一点的切线与直线 $y = 4x - 1$ 平行？并写出该切线方程.

1.4 可导与连续的关系

定理：如果函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点可导，则它在 x_0 点连续.

例：证明：若函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 连续，$f(a) \neq 0$，且 $[f(x)]^2$ 在点 $x = a$ 可导，则 $f(x)$ 在点 $x = a$ 也可导.

练习：讨论函数 $f(x)=x|x(x-2)|$ 在 $x=0$ 和 $x=2$ 的可导性.

练习：讨论函数 $f(x) = x|x(x-2)|$ 在 $x = 0$ 和 $x = 2$ 的可导性.

练习：设函数 $f(x)$ 在 $x = 2$ 连续，且 $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{sin(x-2)} = 4$, 求 $f'(2)$.

练习：讨论函数 $f(x) = x|x(x-2)|$ 在 $x = 0$ 和 $x = 2$ 的可导性.

练习：设函数 $f(x)$ 在 $x = 2$ 连续，且 $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{sin(x-2)} = 4$, 求 $f'(2)$.

练习：设对任一正数 x, 都有 $|f(x) + ln(x)| \leq sin^2 \pi x$, 证明 $f(x)$ 在 $x = 1$ 可导.

练习：讨论函数 $f(x) = x|x(x-2)|$ 在 $x = 0$ 和 $x = 2$ 的可导性.

练习：设函数 $f(x)$ 在 $x = 2$ 连续，且 $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{sin(x-2)} = 4$, 求 $f'(2)$.

练习：设对任一正数 x, 都有 $|f(x) + ln(x)| \le sin^2 \pi x$, 证明 $f(x)$ 在 $x = 1$ 可导.

练习：设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导且 $f'(0) = 1$，并对任意实数 $a, b(ab \neq 1)$ 总成立 $f(\frac{a+b}{1-ab}) = f(a) + f(b)$. 证明 $f(x)$ 在任一点都可导，且 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.