高等数学
习题

张道平

南开大学数学科学学院 414

daopingzhang@nankai.edu.cn

1. $\lim_{x\to\infty}(\frac{3x^2+4}{3x^2+2})^{x^2}$

2. 设 $a_i > 0(i = 1, 2, \cdots, k)$, 试证

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_k^n} = \max\{a_1, \cdots, a_k\}.$$

3. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) > g(a)$, $f(b) < g(b)$. 试证：至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = g(\xi)$.

4. 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，求 $\lim_{x\to 0} \frac{x}{f(x_0-x)-f(x_0+x)}(f'(x_0) \neq 0)$.

5. 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 1$, 求 $\lim_{n\to\infty} \frac{f(a+x_n)-f(a-y_n)}{x_n}$.

6. 已知 $xy - sin(\pi y^2) = 0$, 求 $y'|_{x=0,y=1}$ 及 $y''|_{x=0,y=1}$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导，$f(1) = 1$, $f(0) = \frac{1}{2}$, 证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $1 = (1+\xi)^2 f'(\xi)$.

8. 按 $(x-4)$ 的乘幂展开多项式 $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$.

9. 求 $\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x+x^2)+ln(1-x+x^2)}{xsinx}$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

11. $\int \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}dx$.

12. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足

$$f(1) = k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x}f(x)dx(k>1).$$

证明：至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使得
$f'(\xi) = (1-\xi^{-1})f(\xi)$.

13. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$.

14. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上可导，$f(0)=0$, 且其反函数为 $g(x)$, 若 $\int_0^{f(x)} g(t)dt = x^2e^x$, 求 $f(x)$.

15. 解方程 $f(x) = 2(e^x-1) + \int_0^x (x-t)f(t)dt$.