

第一次作业 参考答案

9.25 - 10.8

习题 1.1 A 类

1 求下列函数的定义域:

$$(4) y = \sqrt{1-2x} + \arcsin \frac{3x-1}{2}$$

解: 由 $\begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ -1 \leq \frac{3x-1}{2} \leq 1 \end{cases}$ 得 $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$. 定义域为 $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$.

2 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

$$(5) f(x) = x, g(x) = \sin(\arcsin x)$$

解: 不相同. $f(x)$ 定义域为 \mathbb{R} , $g(x)$ 定义域为 $[-1, 1]$. 故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同.

3 试求下列函数的所指定的函数值:

$$(4) \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} \arccos x, & -1 \leq x < 0 \\ 2^x, & x \geq 0 \end{cases}. \text{ 试求 } f(-1), f(-\frac{\sqrt{2}}{2}), f(0), f(3);$$

解:

$$f(-1) = \arccos(-1) = \pi$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi$$

$$f(0) = 2^0 = 1.$$

$$f(3) = 2^3 = 8$$

4 试求下列曲线在极坐标系下的方程:

$$(3) x^2 + y^2 = -4y;$$

解: 由 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ 得极坐标方程为 $r = -4 \sin \theta$.

解: $\forall M > 0, \exists x_m = \frac{\pi}{2} + 2M\pi \in [0, +\infty)$, 使得

$$f(x_m) = \frac{\pi}{2} + 2M\pi > M. \text{ 故 } f(x) \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 内无界.}$$

另外, $|g(x)| = \frac{1}{1+x^2} \leq 1, \forall x \in (-\infty, +\infty)$. 故 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界. 得证.

7 判断下列函数的奇偶性：

(4) $f(x) = \lg(x + \sqrt{1+x^2})$;

解：显然 $f(x) = f(-x)$ 不恒成立.

而 $f(x) + f(-x) = \lg(x + \sqrt{1+x^2}) + \lg(-x + \sqrt{1+x^2}) = \lg 1 = 0$.

故 $f(-x) = -f(x)$. 即 $f(x)$ 为奇函数。

(注：由于纸度/电子版本问题，该题按 $f(x) = \lg(x + \sqrt{a^2 + x^2})$ 分类讨论做也算对)

(5) $f(x) = x + \cos x$;

解： $f(x)$ 的定义域为 R 。

由 $f(0) = 1 \neq 0$ 知 $f(x)$ 不为奇函数。

由 $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2} = f(-\frac{\pi}{2})$ 知 $f(x)$ 不为偶函数。故 $f(x)$ 为非奇非偶函数。

9 求下列函数的反函数以及反函数的定义域：

(1) $y = 10^x - 1$;

解：由 $y = 10^x - 1$ 知值域为 $(-1, +\infty)$ 。

反解得 $x = \lg(1+y)$, $y \in (-1, +\infty)$. 故反函数为 $y = \lg(1+x)$ ，定义域为 $(-1, +\infty)$ 。

10 设 $f(x) = x^2 - x$, $\varphi(x) = \sin 2x$ ，试求 $f[f(x)]$, $f[\varphi(x)]$, $\varphi[f(x)]$

解： $f[f(x)] = (x^2 - x)^2 - (x^2 - x) = (x^2 - x)(x^2 - x - 1)$.

$$f[\varphi(x)] = \sin^2 2x - \sin 2x$$

$$\varphi[f(x)] = \sin(2x^2 - 2x)$$

11 试写出下列复合函数的复合过程：

(4) $y = \tan(\lg x^2)$

解： $y = \tan(\lg x^2)$ 由 $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \lg x$, $f_3(x) = \tan x$ 复合而成。

即 $y = \tan(\lg x^2) = f_3 \circ f_2 \circ f_1(x)$.