第七次作业 参考答案

11.13 - 11.19

习题 3.3 A 类

3

解:

$y' = (1+x)e^x, y'' = (2+x)e^x, \cdots, y^{(n)} = (n+x)e^x$.

故 $y = xe^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}x^k + \frac{(n+1+\xi)e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$

其中 ξ 介于 0 和 x 之间

5

解:

由 Taylor 公式 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)$.

故 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)}{x^2} = 0$.

6

解:

由 Taylor 公式,

$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o\left(x^4\right)$

$e^{x^2} = 1 + x^2 + o\left(x^2\right)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$

故

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{\left(\cos x - e^{x^2}\right)\sin x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2})x^2}. \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}x^4 + o\left(x^4\right)}{\left[-\frac{3}{2}x^2 + o\left(x^2\right)\right]x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}x^4 + o\left(x^4\right)}{-\frac{3}{2}x^4 + o\left(x^4\right)} \\
&= -\frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

习题 3.4 A 类

1

(6) 解:

$$y=\begin{cases}x+\sin 2x, & x\in\left[k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right], k\in Z\\ x-\sin 2x, & x\in\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\pi+k\pi\right), k\in Z\end{cases}$$

故

$$y'=\begin{cases}1+2\cos 2x, & x\in\left(k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right), k\in Z\\ 1-2\cos 2x, & x\in\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\pi+k\pi\right), k\in Z\end{cases}$$

令 $y'>0$ 得 $x\in\left(k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{5}{6}\pi+k\pi\right), k\in Z.$

令 $y'<0$ 得 $x\in\left(\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\cup\left(\frac{5}{6}\pi+k\pi,k\pi\right), k\in Z.$

即单增区间为 $\left(\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right), k\in Z.$

单减区间为 $\left(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2}\right), k\in Z$ 。

2

(5) 解:

$y'=\frac{1}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}=\frac{1-x}{1+x^2}.$

令 $y'=0$ 得 $x=1.$

当 $x\in(-\infty,1)$ 时, $y'>0$; 当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $y'<0.$

所以 $y_{极大}(x)=y(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}ln2.$

5

解:

设 $f(x)=x^2-x\sin x-\cos x.$

则 $f'(x)=2x-x\cos x=x(2-\cos x).$

由于 $2-\cos x\geqslant 1>0.$

故当 $x\in(-\infty,0)$ 时, $f'(x)<0.f(x)$ 严格单减.

当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $f'(x)>0.f(x)$ 严格单增.

又 $f(0)=-1<0, f(-\pi)=\pi^2+1>0, f(\pi)=\pi^2+1>0.$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $[0,+\infty)$ 上分别存在唯一零点.

即方程 $x^2=x\sin x+\cos x$ 恰好只有两个互异实根.

6

(3) 解:

只需求 $f(x)=\left(x^2-2x\right)^2$ 的最大最小值.

则 $f'(x)=2\left(x^2-2x\right)\cdot(2x-2)=4x(x-1)(x-2).$

当 $x\in(0,1)\cup(2,3)$ 时, $f'(x)>0.f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(2,3)$ 内严格单增.

当 $x\in(1,2)$ 时, $f'(x)<0.f(x)$ 在 $(1,2)$ 上严格单减。

故 $f_{\max}(x)=\max\{f(1),f(3)\}=9$ 。

$f_{\min}(x)=\min\{f(0),f(2)\}=0.$

故 $y_{\max}(x)=9^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{9},\quad y_{\min}(x)=0^{\frac{1}{3}}=0.$

习题 4.1 A 类

1

(10) 解:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{1+x^2}dx &= \int \left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)dx \\ &= \int x^2dx - \int 1dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C\end{aligned}$$

(12) 解:

令 $x-1=t$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}dx &= \int \frac{(t+1)^3}{t^{100}}dt \\ &= \int \left(t^{-97}+3t^{-98}+3t^{-99}+t^{-100}\right)dt \\ &= \int t^{-97}dt + \int 3t^{-98}dt + \int 3t^{-99}dt + \int t^{-100}dt \\ &= -\frac{1}{96}t^{-96} - \frac{3}{97}t^{-97} - \frac{3}{98}t^{-98} - \frac{1}{99}t^{-99} + C \\ &= -\frac{1}{96(x-1)^{96}} - \frac{3}{97(x-1)^{97}} - \frac{3}{98(x-1)^{98}} - \frac{1}{99(x-1)^{99}} + C\end{aligned}$$

3

解:

由题意，$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$ 。

由 $F(1) = \frac{3}{2}\pi$ 得 $\frac{\pi}{2} + C = \frac{3}{2}\pi$. 即 $C = \pi$.

故 $F(x) = \arcsin x + \pi, x \in [-1, 1]$.