第一章

真空中的静电场
（二）

§4. 静电场的环路定理　电势

静电场的两个基本特征：有源，无旋。

关于有源性是指：静电场不能脱离静止电荷而单独存在，静止电荷是静电场的源，高斯定理正是反应了静电场的这一特性。

关于无旋性是指：在静电场中，电场矢量的线积分与积分路径无关，即静电力为保守力，其本质就是环路定理。

除了环路定理外本节还要介绍几个概念：电势、电势差，电势能及电势梯度。

一、环路定理

1、定理内容：

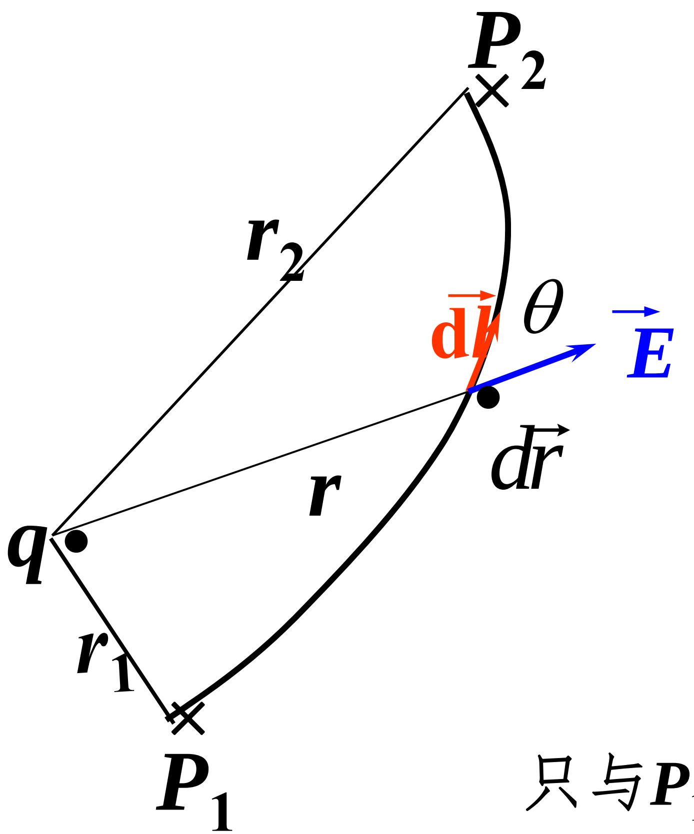
在静电场中，电场矢量的线积分与积分路径无关，或者，静电场中场强沿任意闭合环路的线积分恒等于零。这就是静电场的环路定理。即：

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}$ 称为静电场的“环流”，因此环路定理也可表述为：静电场的环流恒等于零。

证明：分两步进行

（1）一个点电荷产生的电场：



$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} E\cos\theta dl$$

$$= \int_{P_1}^{P_2} Edr$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} k\frac{q}{r^2}dr$$

$$= kq(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$$

只与P_1、P_2位置有关，而与路径无关。

（2）任意带电体产生的电场：

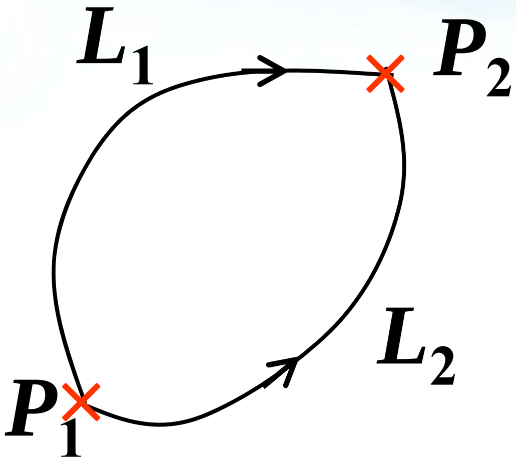
$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} (\sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i) \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^{n} \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$

$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$ 只与P_1、P_2位置有关，与路径无关。

$\therefore \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ 也只与P_1、P_2位置有关，与路径无关。

对于闭合环路：



$$\underset{(L_1)}{\int_{(P_1)}^{(P_2)}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \underset{(L_2)}{\int_{(P_1)}^{(P_2)}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= -\underset{(L_2)}{\int_{(P_2)}^{(P_1)}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\therefore \underset{(L_1)}{\int_{(P_1)}^{(P_2)}} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \underset{(L_2)}{\int_{(P_2)}^{(P_1)}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

$\therefore \quad \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ 环路定理成立。

2、物理意义：

设想静电场$\vec{E}$中，放入点电荷q，点电荷受到的电场力为：$\vec{F}=q\vec{E}$。

在该力的作用下，电荷由P点到Q点，静电力对点电荷所作的功：

$$A_{PQ}=\int_P^Q \vec{F}\cdot d\vec{l}=\int_P^Q q\vec{E}\cdot d\vec{l}=q\int_P^Q \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

（与路径无关）

说明：静电力做功与路径无关，静电力是保守力，静电场为保守场。

二、电势能

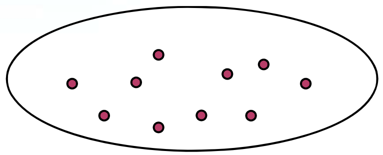
与万有引力及弹性力类似，静电力做功与路径无关，因此引入静静电势能，进而引入电势。

对于一个由很多点电荷构成的带点体系，在由无穷远聚拢到一起的过程中，需要克服电场力做功，即外界与体系间有能量的交换。由于静电力做功与路径无关，则带电体系所蕴藏的能量只与带电粒子间的位置有关，是一种势能，即电势能。

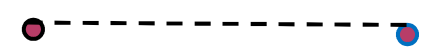
带电体系：
带电体 + 试探电荷q_0

q_0: 从P移动到Q

带电体



P Q



试探电荷q_0

在这个过程中，电力做功，或者说外力需要克服电力做功。即带电体与试探电荷构成的带电体系，与外界有能量交换，体系的电势能发生改变。由于静电力做功与路径无关，因此电势能的变化也只与位置有关。

用带电体对试探电荷所做的功来量度，由它们所构成的带电体系的电势能的变化：

$$W_{PQ} = W_P - W_Q = A_{PQ} = q_0 \int_P^Q \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

试探电荷在带电体所产生的静电场中存在势能，即电势能（电位能，静电能）。

$$W_P = \int_P^{参考点} q\vec{E}\cdot d\vec{l} = A_{P,参}$$

电荷在某一点的电势能，等于电荷从该点运动到参考点的过程中，静电力所做的功。

关于电势能的说明：

（1）电势能与参考点的选取有关，电势能差值与参考点选取无关。

（2）电荷在某一点P的电势能，等于电荷从P点运动到参考点，电场力对电荷作的功。

（3）电荷由P点运动到Q点，电场力对电荷所做的功等于电势能的减少。

（4）电势能的单位：焦耳 = 库仑·**伏特**。

（5）电势能与其它势能一样，属于系统。

三、电势

1、电势与电势差:

一个带电体系的电势能不仅取决于带电体，同时决定于试探电荷q_0，但电场$\vec{E}$仅为带电体所产生，与试探电荷无关。为此，如引入电场强度一样，需要引入一个能够描述带电体所产生的物理量，即除去q_0的影响:

电势差（电位差）
$$U_{PQ}=U_P-U_Q\overset{def}{=}\frac{W_{PQ}}{q_0}=\frac{A_{PQ}}{q_0}=\int_P^Q\vec{E}\bullet d\vec{l}$$

如选定一个参考点（电势零点），则:

$U_P=\int_P^{参考点}\vec{E}\cdot d\vec{l}$ 叫P点的电势（电位）。

电势差与电势存在如下关系：

$$U_{PQ}=\int_P^Q \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_P^{参}\vec{E}\cdot d\vec{l}+\int_{参}^{Q}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$=\int_P^{参}\vec{E}\cdot d\vec{l}-\int_Q^{参}\vec{E}\cdot d\vec{l}=U_P-U_Q$$

综上可知：静电场中，电势与参考点选取有关，但电势差与参考点的选择无关。

电势能则可表示为电荷的电量q与该电荷所在的位置（P点）静电场的电势U_P的乘积：

$$W_P = qU_P$$

注意： 电势能是带电体与试探电荷所构成的带电体系的能量，而电势或电势差是描绘带电体物理性质的物理量，与试探电荷无关。

说明：

（1）电势与电势差的单位：伏特（V），$\vec{E}$的另一单位是：伏特/米，V=(N/C)m；

（2）电势是标量，但有正负之分；

（3）电势与参考点选取有关，但电势差与参考点的选择无关；

（4）参考点选择：有限大小带电体产生的电场，一般选无穷远；无限大带电体，在有限空间选择。还可选地球、仪器外壳等为参考点。

例题

求点电荷q产生电场的电势分布。

例题

求点电荷q产生电场的电势分布。

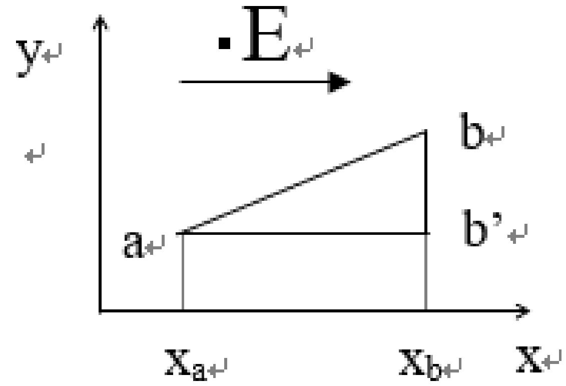
解：选无穷远点为电势参考点，因积分与路径无关，选与$\vec{E}$方向相同的路径积分。按电位定义，空间距离点电荷q为r的任一点P的电位为：

$$U_P = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_P^\infty \left(k\frac{q}{r^2}\hat{r}\right) \cdot d\vec{r} = kq\frac{1}{r}$$

点电荷的电势：$\boldsymbol{U = k\frac{q}{r}}$

例题

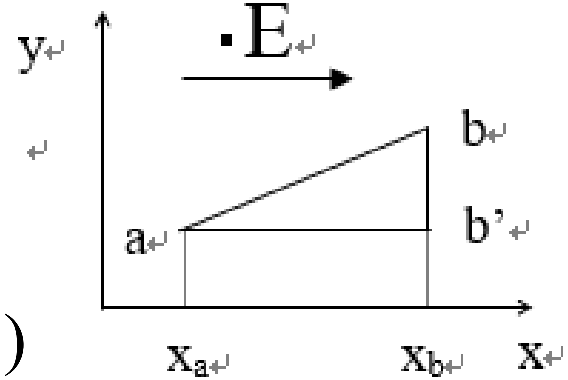
求均匀电场中任一点的电势及任意两点间的电势差。



例题

求均匀电场中任一点的电势及任意两点间的电势差。

解：均匀电场方向为x方向，沿x轴方向运动作功，沿y轴方向运动不作功，两点间的电势差为：



$$u_a - u_b = \int_a^b \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_a^b E dx = E(x_b - x_a)$$

选x＝0处的电势为u_0，则空间任意一点的电势为：

$$u_x - u_0 = \int_x^0 E dx = E(0 - x)$$

$u_x = u_0 - Ex$　　电势沿x方向线性减小。

四、电势叠加原理

1、离散状态：

N个点电荷产生的电场中一点P，

$$U_P=\int_P^{参}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_P^{参}\left(\sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i\right)\cdot d\vec{l}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\int_P^{参}\vec{E}_i\cdot d\vec{l}=\sum_{i=1}^{N}U_i=k\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i}$$

即$U_P=\sum_{i=1}^{N}U_i=k\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i}$

2、连续分布：

分割成电荷元；

每个电荷在P点产生的电势：

$$dU_P = k\frac{dq}{r}$$

$$\therefore U_p = \int dU_p = k\int \frac{dq}{r}$$

- 电荷系产生的电场中，某点的电势是各个点电荷单独存在时，在该点产生的电势的代数和。——电势叠加原理
- 因为电势是标量，求和只是代数运算。
- 电场是矢量，求和要用矢量求和运算。

例题

电偶极子在远处一点的电势

$$u_{+} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_{+}}$$

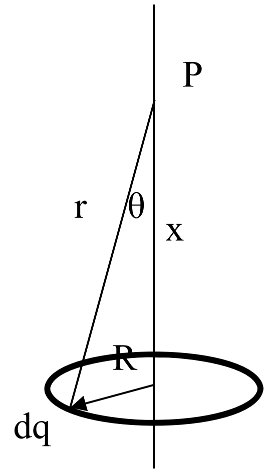
$$u_{-} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_{-}}$$

$$u = u_{+} + u_{-} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{+}} - \frac{1}{r_{-}}\right)$$

例题（重点）

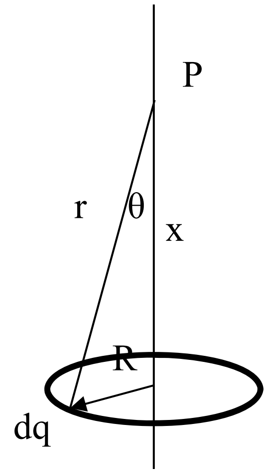
半径为R的均匀带电细圆环电量为q。

试计算圆轴线上任一点P的电势。



例题（重点）

半径为R的均匀带电细圆环电量为q。
试计算圆轴线上任一点P的电势。



解：这是电荷连续分布的问题。

取任一电荷元dq，它在P点产生的电势为du：

$$du = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

由电势叠加原理求整个圆环的电势：

$$u = \int du = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

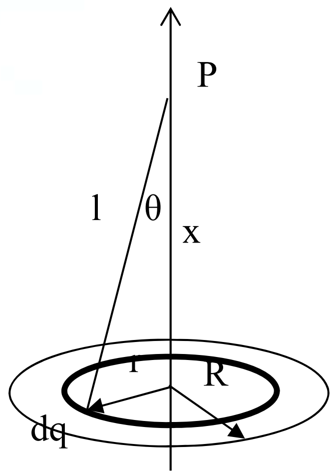
将 $r = \sqrt{R^2 + x^2}$ 代入

$$u = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{(R^2 + x^2)^{1/2}}$$

与求场强相比，没有投影问题，简单一些。

例题

计算半径为R，均匀带电量为q的圆形平面板轴线上任意一点电势。



解：把圆盘分割成无穷多个半径不同的同心细圆环，每个圆环在轴上产生的电场强度都可应用前一例题的结果，这时细圆环所带的电量相对整个圆盘来说是dq＝σ2πrdr

其中σ＝q /πR^2 是圆盘的面电荷密度。dq在P点产生的电势为：

$$du = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{(r^2+x^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma 2\pi r dr}{(r^2+x^2)^{1/2}}$$

从0到R积分，即得圆盘在P点的电势：

$$u_p = \int du = \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{rdr}{(r^2 + x^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sqrt{r^2 + x^2}\Big|_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2 + x^2} - x\right)$$

以上两例题都是由点电荷的电势经过积分得出空间的电势分布。

对于有对称性的物体可由高斯定理求出电场，再由电场积分得到电势

例题

半径为R，带电量为q的均匀带电球面，试求：球外任意一点产生的电势。

解：由高斯定理求出电场强度的分布：

$$E=0 \qquad (r<R)$$

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad (r>R)$$

南開大學 Nankai University

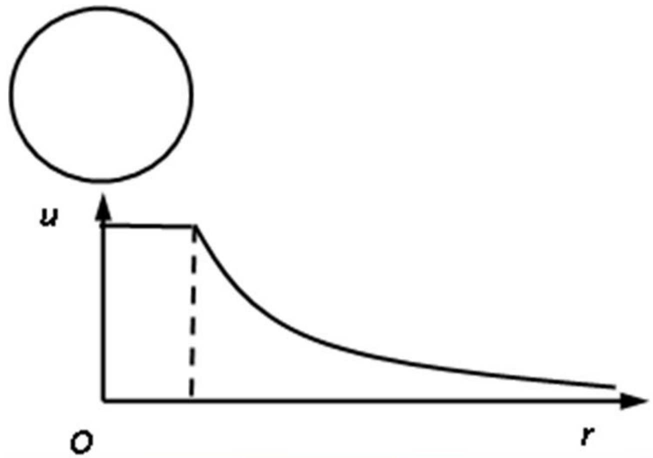
当r≥R时，电势为：

$$u_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_r^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$$

当r<R时，电势为：

$$u_P = \int_P^{\infty} \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_P^{R} \vec{E} \bullet d\vec{l} + \int_R^{\infty} \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

在球面内（r<R），E＝0，上式第一项积分为0，所以

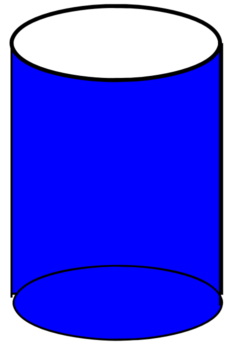


$$u_P = \int_R^{\infty} \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_R^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R}$$

南開大學 Nankai University

例题

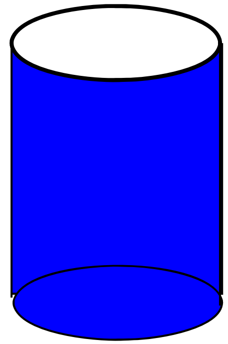
无限长均匀带电圆柱面的半径为R，单位长度上带电量为+λ，试求：相对空间P点的电势分布。



例题

无限长均匀带电圆柱面的半径为R，单位长度上带电量为+λ，试求：相对空间P点的电势分布。

解：由对称性用高斯定理可得电场分布为：



$$E=\frac{\lambda}{2\pi\xi_0 r}\qquad (r>R)$$

$$E=0\qquad (r<R)$$

当r > R时

$$u_P=\int_P^{P_0}\vec{E}\bullet d\vec{l}=\int_r^{r_0}\frac{\lambda}{2\pi\xi_0 r}dr=\frac{\lambda}{2\pi\xi_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

本例如果选无穷远为电势0点，则空间各点的电势为无穷大，没有意义。

当电荷分布延伸到无穷远时，不能取无穷远处为电势零参考点。只能选空间上的某一点作为电势的参考点。

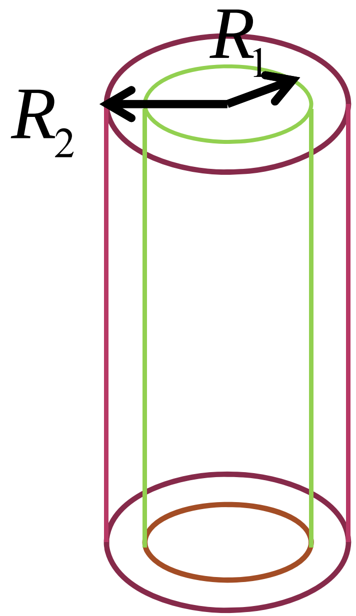
类似的例子还有无穷大带电平面的电势分布。

例题

两个无限长同轴圆柱薄直筒面，半径分别为R_1和R_2,两圆筒面都均匀带电，在外筒的内表面和内筒的外表面上，沿轴线方向单位长度的电量分别为λ_1和λ_2，试求：

（1）离轴线r处的电势，已知$r > R_2$。

（2）两圆筒面之间的电势差。

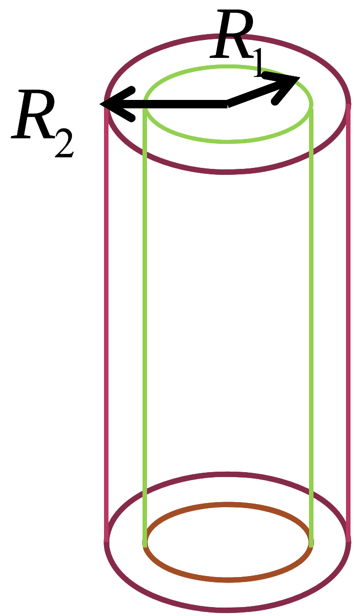


例题

两个无限长同轴圆柱薄直筒面，半径分别为R_1和R_2,两圆筒面都均匀带电，在外筒的内表面和内筒的外表面上，沿轴线方向单位长度的电量分别为λ_1和λ_2，试求：

（1）离轴线r处的电势，已知$r > R_2$。

（2）两圆筒面之间的电势差。



解：利用高斯定理，很容易求出

$$E_1 = 0 \quad (r<R_1)$$

$$E_2 = 2k\frac{\lambda_1}{r} \quad (R_1<r<R_2)$$

$$E_3 = 2k\frac{\lambda_1+\lambda_2}{r} \quad (r>R_2)$$

计算电势时，不能以$r=\infty$, 或$r=0$作为电位参考点。本题选外圆筒面为电位基准。

$$U_{外}=\int_{r}^{R_2}\vec{E}_3\cdot d\vec{r}=2k(\lambda_1+\lambda_2)\int_{r}^{R_2}\frac{d_r}{r}$$

$$=2k(\lambda_1+\lambda_2)ln\frac{R_2}{r}\ (r>R_2)$$

小圆柱面上的电位为：

$$U_1=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}_2\cdot d\vec{r}=\int_{R_1}^{R_2}2k\lambda_1\frac{dr}{r}=2k\lambda_1 ln\frac{R_2}{R_1}$$

因此内筒与外圆筒的电位差：

$$\Delta U=U_1-0=U_1$$

小结：

综上可知：计算电位有两种基本方法：

（1）**定义法**：已知的电场分布，求电位。

$$U_P = \int_P^{参考点} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

计算过程中应注意：

（A）积分区间内，不是单一表达式，应分段积分。

（B）充分利用$\vec{E}$的线积分与路径无关，选择最佳积分路线。

（C）参考点选取：有限大小，选取无穷远；无限大小，在有限空间内，但要使$\vec{E}$在该点有意义。

（2）**叠加法**：

电荷离散分布： $U_P = \sum_{i=1}^{n} U_i = k\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}$

电荷连续分布：$U_P = \int dU = k\int \frac{dq}{r}$

五、等势面

1. 定义：电势相等的点构成的面称为**等势面**。

2. 性质：

（1）电场矢量与等势面处处正交。

证明：沿等势面作一任意元位移**dl**，设一试探电荷q_0则电场力作功为：

$$dw=q_0du=q_0\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=q_0Edl\cos\theta=0$$

等势面上的电势差＝0）

其中q_0，E，dl均不为0，则$\cos\theta=0$，$\therefore\theta=\pi/2$

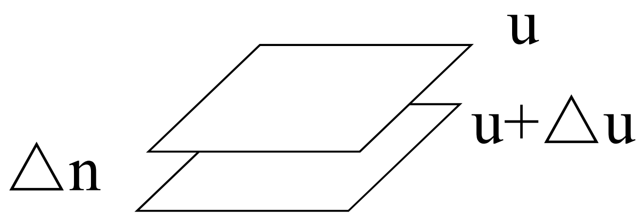
（2）电力线的方向总是由高电势指向低电势。

证明：

$$u_{ab}=u_a-u_b=\int_a^b \vec{E}\bullet d\vec{l}$$

沿电力线方向积分，则E与dl方向总是一致的。

（3）等势面密集的地方场强大，稀疏的地方场强小。



证明：△n与△u都是很小的量

△u=E△n

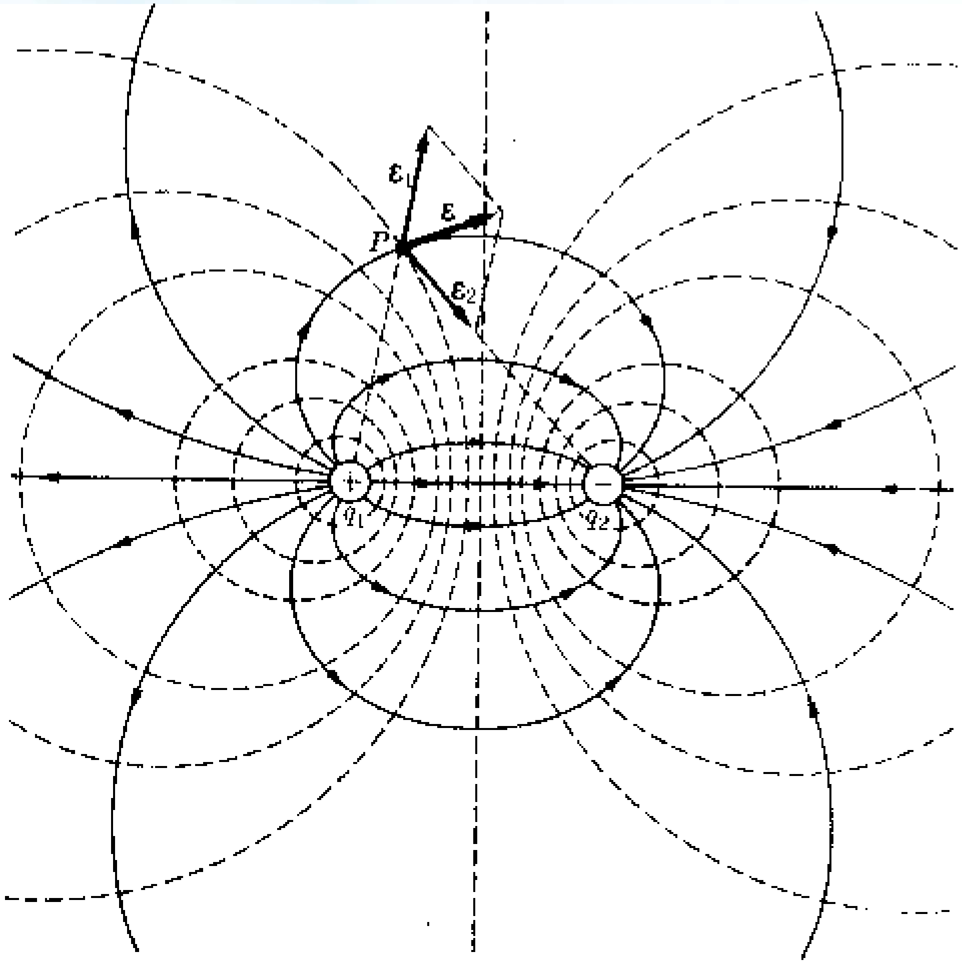
E＝|△u/△n|

在同一对邻近的等位面间，△u都相等；

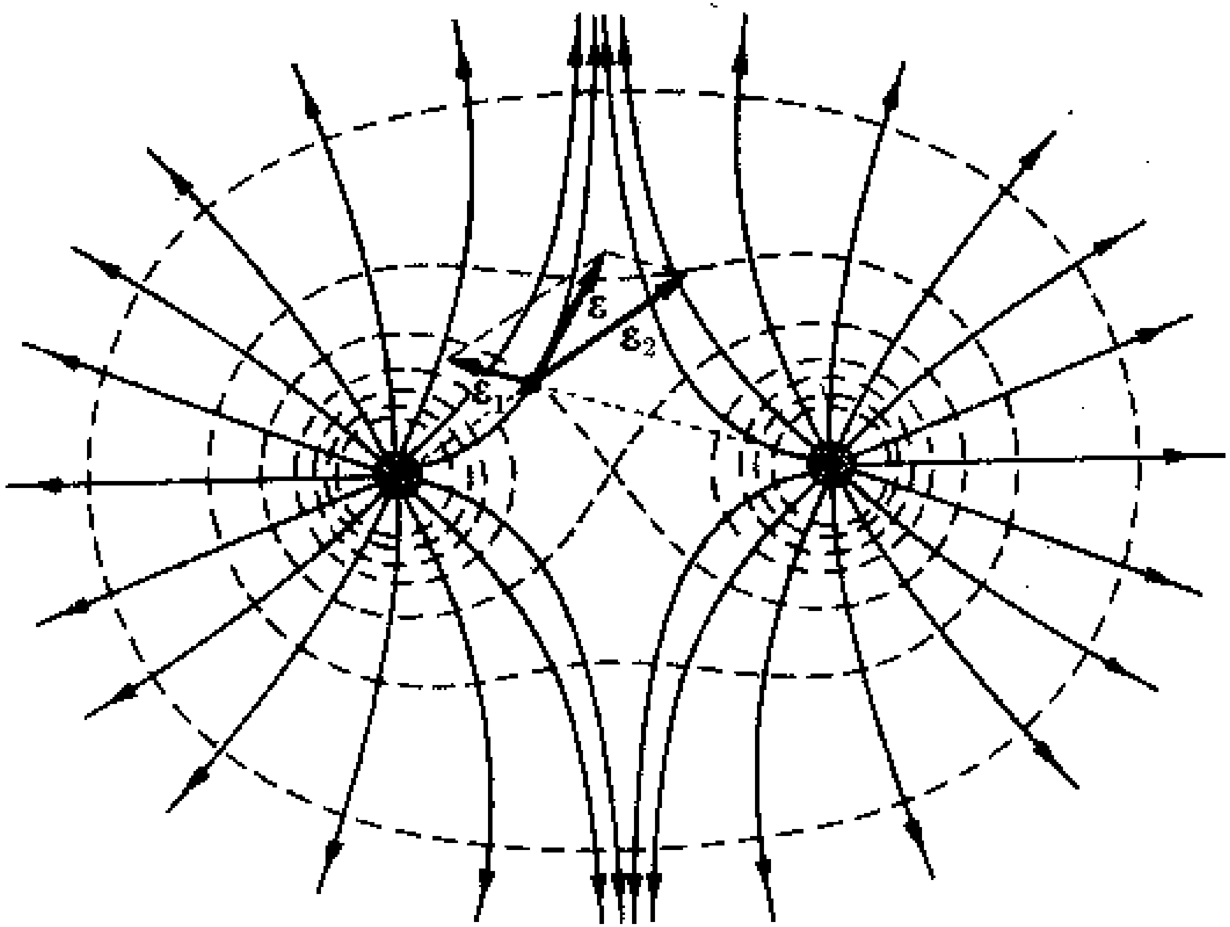
△ n小的地方（等势面密），E大；

△n大的地方（等势面稀），E小。

▲ 某些等势面：



电偶极子的电场线和等势面



两个等量的正电荷的电场线和等势面

六、电势梯度

定义：是一个矢量，方向是电位增加最快的方向，其数值等于电位在该方向上的变化率。

电场矢量与电位梯度的关系为：

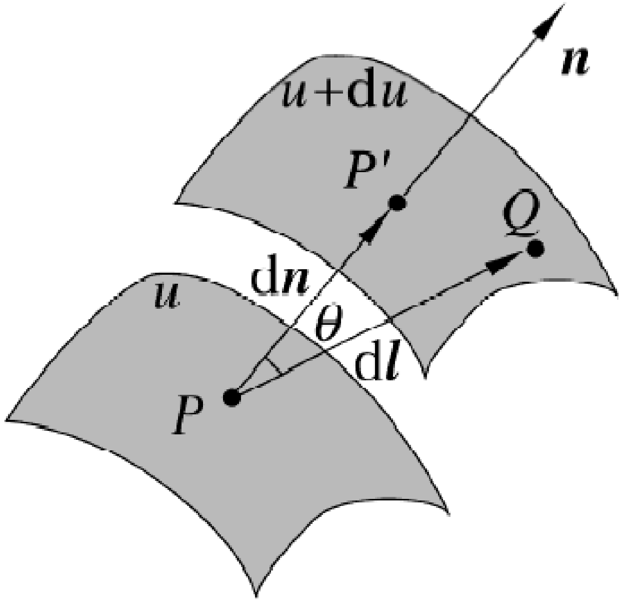
$$\boxed{\vec{E} = -\nabla U}$$

一维情况：u－（u＋du）＝**E·dl**

＝Ecosθdl＝Edn

其中dn＝cosθdl

$$E = -\frac{du}{dn}$$



其“－”表示电场的方向与电势增加方向相反。

电势的梯度

$$\text{电场强度}\mathbf{E}\text{（矢量）} \xrightarrow{\text{积分运算}} \text{电势（标量）}$$

$$\text{电场强度}\mathbf{E}\text{（矢量）} \xleftarrow[\text{梯度运算}]{} \text{电势（标量）}$$

$$\boxed{U = \int \vec{E} \bullet d\vec{l}}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla U}$$

$\boxed{\vec{E}=-\nabla U}$ 给出了求电场强度矢量的第三种方法：

电荷分布→电位分布函数→电位梯度→$\vec{E}$

梯度的表达式：

在直角坐标中：$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$

在柱坐标中：$\nabla=\frac{\partial}{\partial \rho}\hat{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$

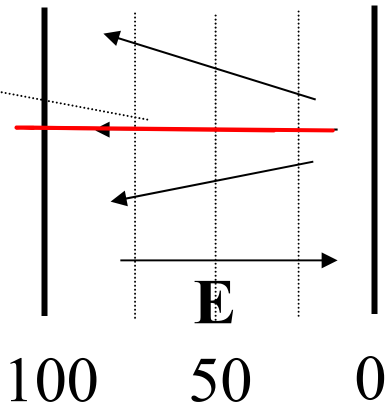
在球坐标中：$\nabla=\frac{\partial}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\hat{\phi}$

例如：无限大平行板，间距1米，电势100伏

E＝100伏/1米

＝100牛顿/库伦

电场增加最快的方向。



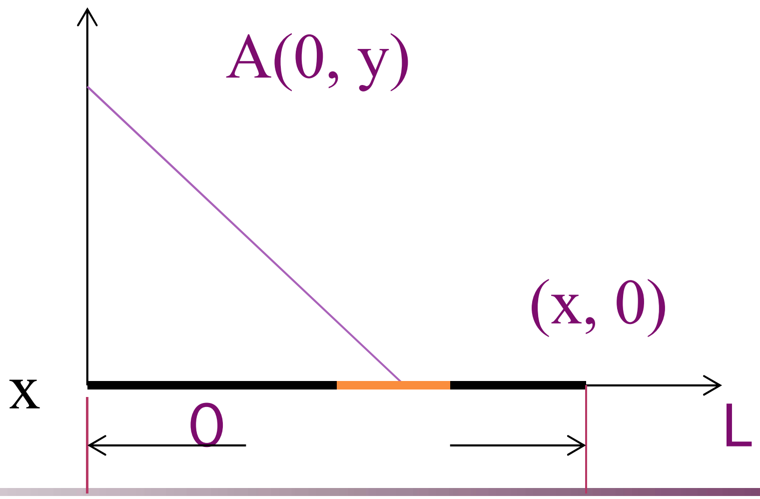
例题

如图，沿着x轴放置一根均匀带电细棒，棒两端的坐标分别为（0, 0）和（L, 0），电荷线密度为$\lambda = \beta x$，其中β为常数，试求：

（1）y轴上，坐标为（0, y)的A点电位U_A。

（2）A点电场矢量的y轴分量。

（3）能否由A点的电位值，求A点电场矢量的x轴分量E_x？



解（1）在（x,0）处，任取一线元dx，其电量为$dq = \lambda dx = \beta x dx$，选无穷远点为电位零点，则线元上电荷dq在A点产生的电位为：

$$dU = \frac{kdq}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

根据电位叠加原理，细棒上电荷在A点产生的总电位为：

$$U_A = \int_0^L dU = \int_0^L k\frac{\beta x dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \beta k(\sqrt{L^2 + y^2} - |y|)$$

（2）$E_y = -\frac{\partial U_A}{\partial y} = -\beta k y(\frac{1}{\sqrt{L^2+y^2}} - \frac{1}{|y|})$

（3）求U_A时，假设A点在x=0的y轴上，于是U_A表达式中未出现变量x，也就是说U_A没有反映电位沿x轴的变化规律，当然也就无法得到E_x了。

小结

一、内容要点：

库仑定律是静电场的基本规律,由此结合电场叠加原理导出了高斯定理和环路定理。

（1）库仑定律：电荷密度，点电荷，库仑定律，静电力叠加原理。

（2）高斯定理：电场矢量，电场叠加原理，电场矢量通量，高斯定理。

（3）环路定理：环路定理，电势，电势差，电势梯度，电势能。

二、基础性问题：

主要题型是求电场矢量及电势（已知电荷分布）。根据电荷分布类型可分为下列几种。

1、点电荷：

电场矢量：$\vec{E}=k\frac{Q}{r^2}\vec{r}$

电位：$U=k\frac{Q}{r}$ （参考点是∞）

2、线电荷：

如图所示带电直线在P点产生的电场矢量分下列两种情况

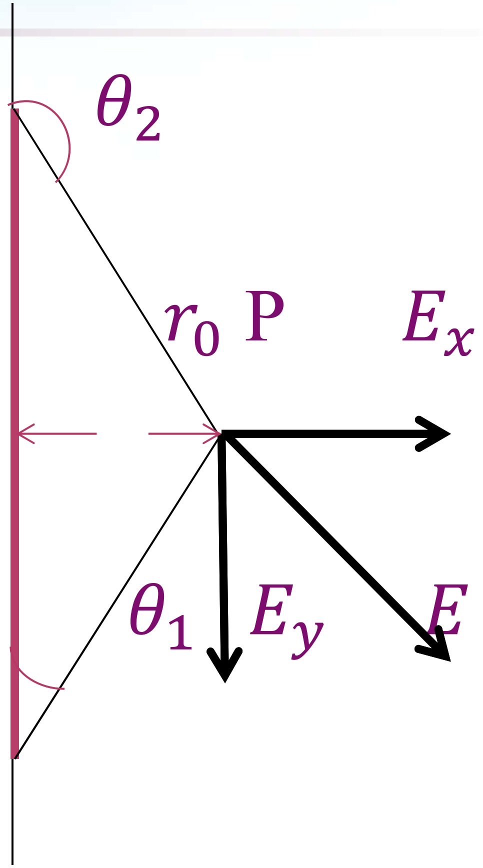
（1）直线无线长

$$\vec{E}_{\infty} = 2k\frac{\lambda}{r_0}\overrightarrow{r_0}$$

（2）当直线有限长时

$$E_x = k\frac{\lambda}{r_0}（\cos\theta_1 - \cos\theta_2）$$

$$E_y = -k\frac{\lambda}{r_0}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)$$



（3）、圆环（半径为R）。带电圆环在轴线上离环心为z处产生的电场为

$$E = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{Rz}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{z}$$

（4）、半圆（半径为R）。线电荷密度为λ的半圆在圆心处产生的电场为

$$E = 2k\lambda \frac{1}{R} \vec{n}$$

3、面电荷：

（1）无限大平面，$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$

（2）球面

球面内，$E = 0$ （r<R）

球面外，$E = k\frac{Q}{r^2}\vec{n}$ （r>R）

（3）柱面，$E = 2k\frac{\lambda}{r}\vec{r}$ （r>R）

（4）圆盘，$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{z}$

4、体电荷：

（1）球体

$$E = k\frac{Q}{r^2}\vec{r}$$ （r>R,球体外）

$$E = k\frac{\rho}{3\varepsilon_0}r$$ （r<R,球体内）

（2）柱体

$$E_\infty = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}r$$ （r<R,柱体内）

$$E_\infty = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{r}\vec{r}$$ （r>R,柱体外）

三、专题归纳：

　　这一章中的习题归纳起来，求解的物理量有：电场矢量，电势（差），静电力，电势能。

1、电场矢量：

方法有三种：

（1）叠加法：点电荷的电场公式，电场叠加原理。

（2）高斯定律，前提是电荷分布具有某种对称性。

（3）梯度法：当电位分布已知时，可以利用电位的梯度求电场矢量。

2、电势（或电势差）：

方法有两种：

（1）叠加法：点电荷电位公式，电位叠加原理。

（2）定义法：已知电场分布，利用电场线积分计算。

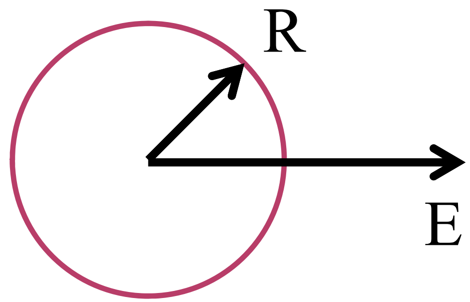
3、静电力：

库仑定律、静电力叠加原理、静电力与静电场的关系。

四、综合应用：

例题

均匀带电细棒被弯曲成半径为R的缺口圆环，缺口长度 $l \ll R$,求球心处电场矢量E，细棒电荷线密度为λ。

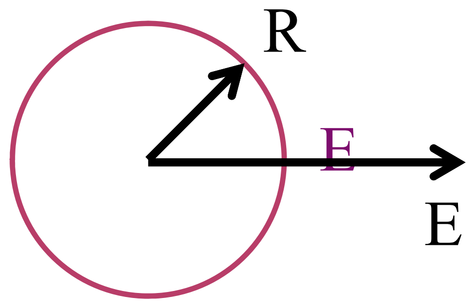


四、综合应用：

例题

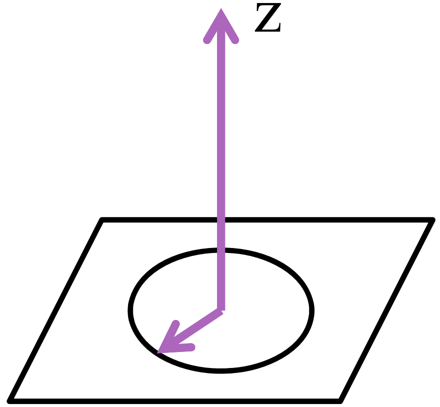
均匀带电细棒被弯曲成半径为R的缺口圆环，缺口长度$l \ll R$,求球心处电场矢量E，细棒电荷线密度为λ。

解：可近似看作完整圆环与带电为$-\lambda$细棒之和。又由于线长$l \ll R$，则l细棒可看作是点电荷，完整圆环在环心的场强为0，所以圆心的场强为$\vec{E} = -k\frac{\lambda l}{R^2}\vec{r}$



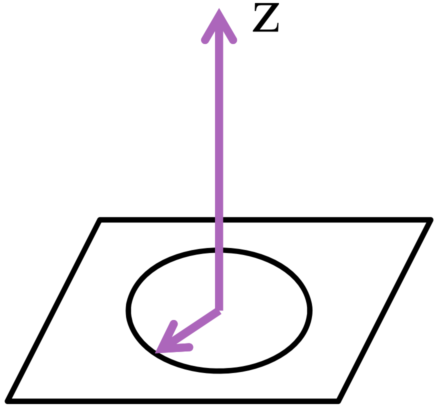
例题

无限大均匀带电平面上挖一个圆孔，当圆孔轴线上离孔心为z的点场强下降为完整带电平面场强的$\frac{1}{2}$时，问所挖圆孔的半径R为多少？



例题

无限大均匀带电平面上挖一个圆孔，当圆孔轴线上离孔心为z的点场强下降为完整带电平面场强的$\frac{1}{2}$时，问所挖圆孔的半径R为多少？



解：等效为完整平面与带异号电荷的圆盘。

$$\overrightarrow{E_{平}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n},$$

$$\overrightarrow{E_{盘}} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{n}$$

$$E_{平} + E_{盘} = \frac{1}{2} E_{平}$$

$$\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)\vec{n} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

可以推出$R = \sqrt{3}\mathrm{z}$