线性代数–欧式空间作业

黄申为

2022 年 12 月 3 日

1. 设V是由全体n阶对称矩阵关于通常矩阵的线性运算构成的实线性空间. 对于任意的矩阵$A, B \in V$, 定义
$$< A, B >:= \mathrm{Tr}(AB),$$
其中$\mathrm{Tr}(AB)$表示AB的迹. 证明函数$< \cdot, \cdot >$是V中的一个内积.

2. 设V是有限维欧氏空间. 证明三角不等式: $||\alpha + \beta|| \leq ||\alpha|| + ||\beta||$.

3. 试求满足如下条件的五维向量α和β:
   - α与β正交;
   - 它们均与矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$的各行向量正交.

4. 设$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$是$n$维欧氏空间$V$的一个标准正交基且由$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$到基$\eta_1, \ldots, \eta_n$的过渡矩阵为$Q$. 证明: $\eta_1, \ldots, \eta_n$为标准正交基的充要条件是Q为正交矩阵.

5. 设V是n维欧氏空间, α是V中的一个固定向量.
   (a) 证明$M = \{\beta \in V :< \beta, \alpha >= 0\}$是$V$的一个子空间.
   (b) 证明当$\alpha \neq 0$时, $\dim(M) = n - 1$.