线性代数-线性方程组

- 矩阵的初等变换
- 矩阵初等变换与矩阵乘法的联系
- 矩阵的秩
- 线性方程组有解判定定理
- 线性方程组的应用

3.1 矩阵的初等变换

矩阵的初等变换

引例：消元法求解线性方程组.

设有如下线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 & (1) \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (2) \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 & (3) \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 & (4) \end{cases} \qquad (B_0)$$

$$\xrightarrow[(3)\div 2]{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (1) \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 & (2) \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 & (3) \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 & (4) \end{cases} \qquad (B_1)$$

将x_1从后三个方程中消去：

$$\xrightarrow[\substack{(3)-2\times(1)\\(4)-3\times(1)}]{(2)-(3)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (1) \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 & (2) \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6 & (3) \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3 & (4) \end{cases} \qquad (B_2)$$

说明. 上面对方程组的三种操作(交换两个方程，将某个方程两边同乘一个非零实数，将某个方程的倍数加到另一个方程上)不改变方程组的解.

矩阵的初等变换

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (1) \\ \quad\ \ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 & (2) \\ \ \ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6 & (3) \\ \quad\ \ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3 & (4) \end{cases} \qquad (B_2)$$

再把x_2从后两个方程中消去:

$$\xrightarrow[\substack{(3)+5\times(2) \\ (4)\ -3\times(2)}]{(2)\times\frac{1}{2}} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (1) \\ \quad\ \ x_2 - x_3 + x_4 = 0 & (2) \\ \qquad\qquad 2x_4 = -6 & (3) \\ \qquad\qquad x_4 = -3 & (4) \end{cases} \qquad (B_3)$$

(这时x_3也已消去)

$$\xrightarrow[4-2\times(3)]{(3)\leftrightarrow(4)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (1) \\ \quad\ \ x_2 - x_3 + x_4 = 0 & (2) \\ \qquad\qquad x_4 = -3 & (3) \\ \qquad\qquad 0 = 0 & (4) \end{cases} \qquad (B_4)$$

矩阵的初等变换

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (1) \\ \quad\; x_2 - x_3 + x_4 = 0 & (2) \\ \quad\quad\quad\quad\; x_4 = -3 & (3) \\ \quad\quad\quad\quad\;\; 0 = 0 & (4) \end{cases} \qquad (B_4)$$

将x_4回代到前两个方程:

$$\xrightarrow[(2)-(3)]{(1)-(3)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 7 & (1) \\ \quad\; x_2 - x_3 = 3 & (2) \\ \quad\quad\quad\quad\; x_4 = -3 & (3) \\ \quad\quad\quad\quad\;\; 0 = 0 & (4) \end{cases} \qquad (B_5)$$

将x_2回代到第1个方程:

$$\xrightarrow{(1)-(2)} \begin{cases} x_1 - x_3 = 4 & (1) \\ \quad\; x_2 - x_3 = 3 & (2) \\ \quad\quad\quad\quad\; x_4 = -3 & (3) \\ \quad\quad\quad\quad\;\; 0 = 0 & (4) \end{cases} \qquad (B_6)$$

有效方程

无效方程

矩阵的初等变换

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad - x_3 = 4 & (1) \\ \quad x_2 - x_3 = 3 & (2) \\ \quad\quad\quad x_4 = -3 & (3) \\ \quad\quad\quad 0 = 0 & (4) \end{cases} \qquad (B_6)$$

(B_6)有3个有效方程，4个未知量，故某个未知量无法确定，这样的未知量称为**自由未知量**.

令x_3为自由未知量，原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=x_3+4 \\ x_2=x_3+3 \\ x_4=\quad -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{令}x_3=c\text{为任意实数}} \begin{cases} x_1=c+4 \\ x_2=c+3 \\ x_3=c+0 \\ x_4=0-3 \end{cases}.$$

于是方程组的解可写成**向量形式**:

$$x \triangleq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c+0 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$ 其中c是任意实数.

矩阵的初等变换

思考：是否能够取其他未知量为自由未知量?

令x_2为自由未知量，原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 1 \\ x_3 = x_2 - 3 \\ x_4 = \quad -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{令}x_2=c\text{为任意实数}} x = \begin{pmatrix} c+1 \\ c+0 \\ c-3 \\ 0-3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

思考：$c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$与上面的解是否是表示同一个集合?

$$x = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= (c+3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

当c取遍所有实数，$c+3$也取遍所有实数，因此两种形式表示的是同一个集合.

矩阵的初等变换

在上述消元过程中，实际上只有方程组的系数和常数进行运算，未知量并没有参与运算.

因此，对方程组所做的变换实际上是对其增广矩阵$B=(A,b)=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{pmatrix}$所做的变换.

将对方程组的三种同解变换翻译到矩阵上，就是矩阵的初等行变换.

定义(矩阵的初等行变换). 下面三种变换称为矩阵的初等行变换:

- 对换矩阵中的两行($r_i \leftrightarrow r_j$);
- 把某一非零数k乘以某一行的所有元素($r_i \times k$);
- 把某一行各元素的k倍加到另一行对应元素上去($r_i + kr_j$).

说明. 将上述定义中的”行”改成”列”，即得到矩阵的初等列变换的定义. 矩阵的初等行变换和初等列变换统称为初等变换.

矩阵的初等变换

定义(矩阵的相抵关系). 设A,B为同型矩阵，若A能够经过有限次初等行(列)变换变成B，则称A行(列)相抵于B，记作$A\sim_r B$($A\sim_c B$).

若A能够经过有限次初等变换变成B，则称A相抵于B，记作$A\sim B$.

相抵关系的性质. 相抵关系是一个**等价关系**，即它满足下列三个性质：

- **反身性** $A\sim A$.
- **对称性** 若$A\sim B$，则$B\sim A$.
- **传递性** 若$A\sim B$，$B\sim C$，则$A\sim C$.

证明. 反身性和传递性显然.

要证对称性，只需证明若A能够经过1次初等行变换变成B，则B也能够经过1次初等行变换变回A.

- 若$A\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}B$，则$B\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}A$.
- 若$A\xrightarrow{r_i\times k}B$, 则$B\xrightarrow{r_i\times\frac{1}{k}}A$.
- 若$A\xrightarrow{r_i+kr_j}B$，则$B\xrightarrow{r_i+(-k)r_j}A$. ■

行阶梯形矩阵

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (1) \\
\quad\quad\; x_2 - x_3 + x_4 = 0 & (2) \\
\quad\quad\quad\quad\quad\;\; x_4 = -3 & (3) \\
\quad\quad\quad\quad\quad\;\;\; 0 = 0 & (4)
\end{cases}
\qquad (B_4)
$$

$$
B_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

行阶梯形矩阵

定义(行阶梯形矩阵). 满足下面两个条件的矩阵称为行阶梯形矩阵:

- 非零行在零行的上面;
- 非零行的首非零元所在列在上一行(如果存在的话)的首非零元所在列的右面.

说明. 上述第2个条件可等价表述为:

若矩阵有r个非零行且第i行的首非零元出现在第j_i列$(1 \le i \le r)$, 则$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$.

$$\begin{array}{rc}
 & \begin{matrix} & j_1 & j_2 & j_r \end{matrix} \\
\begin{matrix} r\left\{\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right. \\ m-r\left\{\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right. \end{matrix} & \begin{pmatrix} & \$ & & \\ & & \$ & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \$ \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

行阶梯形矩阵

定义(行阶梯形矩阵). 满足下面两个条件的矩阵称为行阶梯形矩阵:

- 非零行在零行的上面;
- 非零行的首非零元所在列在上一行(如果存在的话)的首非零元所在列的右面.

例: $B_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

是一个有3个非零行的行阶梯形矩阵, 其第1行首非零元出现在第1列, 第2行首非零元出现在第2列, 第3行首非零元出现在第4列.

说明. 行阶梯形矩阵的特点是

- 阶梯线下方的元素全为0.
- 每个台阶是一行, 台阶数即非零行的行数.
- 阶梯线的竖线后面的第一个元素为相应行的首非零元.

思考: 上三角矩阵是否为行阶梯形矩阵?

行最简形矩阵

定义(行最简形矩阵). 满足下面两个条件的行阶梯形矩阵称为行最简形矩阵:

- 每个非零行的首非零元为1;
- 非零行的首非零元所在列的其余元素为0.

例: $B_6=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$是一个行最简形矩阵.

思考: 有4个非零行的4×4行最简形矩阵是什么矩阵?

行最简形矩阵

因为

线性方程组 $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 矩阵

线性方程组的三种同解变换 $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 矩阵的初等行变换

所以,

消元法求解线性方程组 $\Leftrightarrow$ 通过初等行变换将其增广矩阵化为行最简形矩阵.

行最简形矩阵

例: $$B_0=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{2}]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\2&-3&1&-1&2\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&2&-2&2&0\\0&-5&5&-3&-6\\0&3&-3&4&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3+2r_2\\r_4-3r_2}]{r_2\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&2&-6\\0&0&0&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_3]{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3}\begin{pmatrix}1&1&-2&0&7\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&0&-1&0&4\\0&\mathbf{1}&-1&0&3\\0&0&0&\mathbf{1}&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

练习: 将$\begin{pmatrix}0&2&-3&1\\0&3&-4&3\\0&4&-7&1\end{pmatrix}$通过初等行变换化为行最简形矩阵.

行最简形矩阵

定理(初等行变换化行最简). **任何$\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$矩阵都能经过有限次初等行变换化为行最简形矩阵.**

证明. 对$m+n$用数学归纳法（习题）. ■

3.2 初等变换与矩阵乘法

初等变换与矩阵乘法

定义(初等矩阵). 由单位阵E经过1次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

- $E \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} E(i,j)$
- $E \xrightarrow{r_i \times k} E(i(k))$
- $E \xrightarrow{r_i + k r_j} E(ij(k))$

说明. 这里只考虑初等行变换，初等列变换是对称的.

定义(标准单位向量). 称n维列向量$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← **第i个分量** 为标准单位向量.

性质. **设A为$n \times m$矩阵，则$e_i^T A = A$的第i行.**

证明. 根据矩阵乘法的定义直接验证. ∎

初等变换与矩阵乘法

引理(初等矩阵与矩阵乘法的联系). **设$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$矩阵，则对$\boldsymbol{A}$施行1次初等行变换等价于在$\boldsymbol{A}$的左边乘上相应的$\boldsymbol{m}$阶初等矩阵，即**

(1) 若$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}\boldsymbol{B}$, 则$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})\boldsymbol{A}$.

(2) 若$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\times k}\boldsymbol{B}$, 则$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}\big(\boldsymbol{i}(\boldsymbol{k})\big)\boldsymbol{A}$.

(3) 若$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i+kr_j}\boldsymbol{B}$, 则$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}\big(\boldsymbol{ij}(\boldsymbol{k})\big)\boldsymbol{A}$.

证明. 对A按行分块有$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}$，其中$\alpha_i$为$A$的第$i$行.

(1) 设$A\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}B$，对$E(i,j)$按行分块计算$E(i,j)A$：

$$E(i,j)A=\begin{array}{r}\\ \text{第}i\text{个分量}\rightarrow\\ \\ \text{第}j\text{个分量}\rightarrow\\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}e_1^T\\ \vdots\\ e_j^T\\ \vdots\\ e_i^T\\ \vdots\\ e_m^T\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}e_1^TA\\ \vdots\\ e_j^TA\\ \vdots\\ e_i^TA\\ \vdots\\ e_m^TA\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=B.$$

(2)和(3)类似可证(练习). ■

初等变换与矩阵乘法

定理(通过初等矩阵刻画可逆矩阵). **方阵A可逆当且仅当A可表示成有限个初等矩阵的乘积.**

证明. **充分性.** 假设$A = P_1 P_2 \cdots P_\ell$，其中$P_i\,(1 \le i \le \ell)$为初等矩阵.

注意到初等矩阵是可逆的:

$$E(i,j)^{-1} = E(i,j),$$
$$E\big(i(k)\big)^{-1} = E(i(\tfrac{1}{k})),$$
$$E\big(ij(k)\big)^{-1} = E(ij(-k)).$$

故A可逆.

必要性. 假设A为n阶可逆矩阵. 设A经过初等行变换后化为行最简形矩阵B.

由**初等矩阵与矩阵乘法引理**，存在初等矩阵$P_1, \ldots, P_\ell$使得

$$(P_\ell \cdots P_1)A = B.$$

因为A可逆且初等矩阵可逆，B可逆.

因此，B有n个非零行，从而$B = E_n$. 于是，

$$A = P_1^{-1} \cdots P_\ell^{-1}$$

为初等矩阵的乘积. ■

初等变换与矩阵乘法

定理(初等变换与矩阵乘法的联系). **设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$矩阵. 则$\boldsymbol{A}\sim_r\boldsymbol{B}$当且仅当存在$\boldsymbol{m}$阶可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使得$\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$.**

证明. $A\sim_r B \overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow}$ A经过有限次初等变换化为B

$\overset{\text{引理}}{\Longleftrightarrow}$ 存在有限个初等矩阵$P_1,\dots,P_\ell$使得$(P_\ell\cdots P_1)A=B$

$\overset{\text{定理}}{\Longleftrightarrow}$ 存在可逆阵P使得$PA=B$.

从而定理得证. ■

说明.

- 对初等列变换有：$A\sim_c B$当且仅当存在n阶可逆矩阵Q使得$AQ=B$.
- 对初等变换有：$A\sim B$当且仅当存在可逆矩阵P,Q使得$PAQ=B$.

推论. **$\boldsymbol{n}$阶方阵$\boldsymbol{A}$可逆 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}\sim_r\boldsymbol{E_n}$.**

证明. A可逆 $\Leftrightarrow$ 存在可逆阵P使得$PA=E_n$ **可逆的定义**

$\Leftrightarrow$ $A\sim_r E_n$. **初等变换与矩阵乘法的联系**

推论得证. ■

初等变换的应用

应用 1：求解矩阵方程$AX = B$，其中A为m阶可逆矩阵.

方法 1. 先求出A^{-1}，再计算$A^{-1}B$.

方法 2. 利用初等行变换.

- 将A, B做成一个分块矩阵(A, B)：由于A为m阶方阵， X必为$m \times s$矩阵（s为某个正整数），从而B为$m \times s$矩阵. 因此，(A, B)是一个$m \times (m+s)$矩阵，其中前m列为A，后s列为B.
- 对(A, B)作初等行变换，当对应A的子块变为E_m时，对应B的子块即为$A^{-1}B$.

证明. 设$(A, B) \sim_r (E_m, Y)$. 由**初等变换与矩阵乘法的联系**，存在可逆矩阵P使得

$$P(A, B) = (E_m, Y),$$

即$\begin{cases} PA &= & E_m \\ PB &= & Y \end{cases}$. 故$Y = PB = A^{-1}B$. ■

初等变换的应用

应用 1：求解矩阵方程$AX=B$，其中A为m阶可逆矩阵.

- 当$B=E_m$时，$X=A^{-1}$.
- 当$B=b$为m维列向量时，$X=A^{-1}b$为线性方程组$AX=b$的解.

例：求$A=\begin{pmatrix}0&-2&1\\3&0&-2\\-2&3&0\end{pmatrix}$的逆矩阵.

解：$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&-2&1&1&0&0\\3&0&-2&0&1&0\\-2&3&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}3&0&-2&0&1&0\\0&-2&1&1&0&0\\-2&3&0&0&0&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow{r_1\times\frac{1}{3}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2/3&0&1/3&0\\0&-2&1&1&0&0\\-2&3&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2/3&0&1/3&0\\0&-2&1&1&0&0\\0&3&-4/3&0&2/3&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow{r_2\times-\frac{1}{2}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2/3&0&1/3&0\\0&1&-1/2&-1/2&0&0\\0&3&-4/3&0&2/3&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-3r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2/3&0&1/3&0\\0&1&-1/2&-1/2&0&0\\0&0&1/6&3/2&2/3&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow{r_3\times 6}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2/3&0&1/3&0\\0&1&-1/2&-1/2&0&0\\0&0&1&9&4&6\end{array}\right)\xrightarrow[r_1+\frac{2}{3}r_3]{r_2+\frac{1}{2}r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&6&3&4\\0&1&0&4&2&3\\0&0&1&9&4&6\end{array}\right).$

故$A^{-1}=\begin{pmatrix}6&3&4\\4&2&3\\9&4&6\end{pmatrix}$.

初等变换的应用

应用 2：给定$m\times n$矩阵A，求可逆矩阵P使得PA为行最简形矩阵.

- 将A,E_m做成分块矩阵(A,E_m)：(A,E_m)是一个$m\times(m+n)$矩阵，其中前n列为A，后m列为E_m.
- 对(A,E_m)作初等行变换，当对应A的子块变为行最简形矩阵时，对应E_m的子块即为所求.

证明. 设$(A,E_m)\sim_r(R,Y)$，其中R为行最简形矩阵. 由**初等变换与矩阵乘法的联系**，存在可逆矩阵P使得

$$P(A,E_m)=(R,Y),$$

即$\begin{cases} PA & = & R \\ PE_m & = & Y \end{cases}$. 故$Y=PE_m=P$即为所求. ■

初等变换的应用

应用 2：给定$m\times n$矩阵A，求可逆矩阵P使得PA为行最简形矩阵.

例：求$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -2\\ 4 & -6 & 2\end{pmatrix}$. 求可逆矩阵$P$使得$PA$为行最简形矩阵.

解：
$$(A,E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 3 & 1 & -2 & 0\\ 0 & -10 & 10 & 0 & -4 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\times -\frac{1}{3}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1/3 & 2/3 & 0\\ 0 & -10 & 10 & 0 & -4 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+10r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1/3 & 2/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -10/3 & 8/3 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & -1 & 1/3 & 1/3 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1/3 & 2/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -10/3 & 8/3 & 1\end{array}\right).$$

故A的行最简形矩阵为$R=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，而$P=\begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & 0\\ -1/3 & 2/3 & 0\\ -10/3 & 8/3 & 1\end{pmatrix}$满足$PA=R$.

说明. 满足条件的矩阵P不唯一.

初等变换的应用

练习：

1. 设$A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\2&2&1\\3&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-3\\2&2\\3&-1\end{pmatrix}$, 求$X$使得$AX=B$.

2. 设$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\5&4&3&2\end{pmatrix}$. 求可逆矩阵$P$使得$PA$为行最简形矩阵.

3.3 矩阵的秩

矩阵的秩

- 问题：给定$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$A$的任何两个行阶梯形矩阵是否一定有相同的非零行行数?

矩阵的秩

定义(k阶子式). 任取$A=(a_{ij})_{m\times n}$的k行k列($k\le m, k\le n$), 位于这些行列交叉点上的k^2个元素, 不改变它们在A所处的位置次序而得到的k阶行列式称为A的k阶子式. 不为零的子式称为A的非零子式.

例: 取$B_4=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的1, 2, 3行以及1, 2, 4列得到一个3阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0.$$

该子式是一个非零子式.

矩阵的秩

定义(矩阵的秩). 若矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$有一个不为0的$r$阶子式$D$且$A$的所有$r+1$阶子式都为0，那么$D$称为$A$的最高阶非零子式且$r$称为$A$的秩，记作$R(A)$.

规定零矩阵的秩为0.

例：$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$的秩为?

思考.

- n阶方阵A可逆 $\Leftrightarrow$?
- 若n阶方阵A有$R(A)\leq n-2$，则$A^*=O$. 为什么?
- 若A为行阶梯形矩阵，则$R(A)=$ A的非零行行数. 为什么?

矩阵的秩

引理(初等行变换不改变矩阵的秩). 若$A \sim_r B$，则$R(A) = R(B)$.

证明. 只需证明若B由A经过1次初等行变换而得到，则$R(A) = R(B)$.

另外根据$\sim_r$的对称性，只需证明$R(B) \geq R(A)$.

设D是A的最高阶非零子式，其阶数为r. 下面证明B有1个r阶非零子式.

情况 1. $A \xrightarrow{r_i \times k} B$. 令$D'$取$D$的行和列.

- 若D不含r_i，则$D' = D \neq 0$.
- 若D包含r_i，则$D' = kD \neq 0$. 行列式性质 3

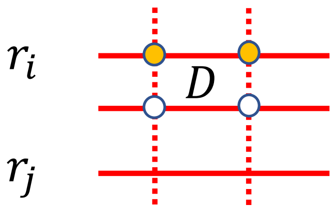
矩阵的秩

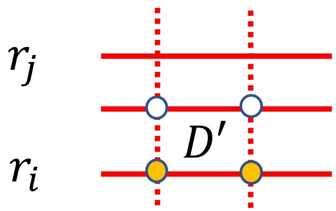
证明(续).

情况 2. $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$. 根据$D$是否包含$r_i$与$r_j$分情况讨论.

- D不包含r_i和r_j. 则D也是B的非零子式.
- D包含r_i和r_j. 令D'取D的行和列, 则$D' = -D \neq 0$. 行列式性质 2
- D包含r_i但不含r_j(不含r_i但包含r_j的情况是对称的).

令D'取D的列, 除第i行外的所有行以及第j行. 则D'是由D经过若干次行交换而得到的. 故$D' = \pm D \neq 0$.





矩阵的秩

证明(续). **情况 3.** $A \xrightarrow{r_i+kr_j} B$. 不妨假设$r_i = r_1$, $r_j = r_2$. 令D'取D的行和列.

若D不含第1行, 则$D' = D \neq 0$.

若D包含第1行, 则

$$D' = \begin{vmatrix} r_1 + kr_2 \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} r_2 \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix} = D + k \begin{vmatrix} r_2 \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix},$$

这里所有的行都是限制在D的列上的.

- 若$p = 2$, 即D包含第2行, 则$D^* \triangleq \begin{vmatrix} r_2 \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix} = 0$, 故$D' = D \neq 0$.
- 若$p \neq 2$, 则D^*也是B的r阶子式. 由假设$0 \neq D = D' - kD^*$.

  故D'与D^*不能同时为零, 从而B有一个r阶子式. ■

矩阵的秩

推论(初等变换不改变矩阵的秩). 若$A \sim B$，则$R(A) = R(B)$.

证明. 因为**初等行变换不改变矩阵的秩**，只需证初等列变换不改变矩阵的秩. 假设$A \sim_c B$.

$$A \sim_c B \iff A\text{可经过初等列变换化为}B$$

$$\iff A^T\text{可经过初等行变换化为}B^T.$$

故$R(A^T) = R(B^T)$.

注意到对任意矩阵X有$R(X^T) = R(X)$. 从而$R(A) = R(B)$. ■

矩阵的秩

问题：给定$A=(a_{ij})_{m\times n}$，A的任何两个行阶梯形矩阵是否一定有相同的非零行行数?

定理(行阶梯形矩阵的非零行行数是矩阵的不变量). 设A_1,A_2是矩阵A的两个不同的行阶梯形矩阵. 则A_1的非零行行数 $=$ A_2的非零行行数.

证明. 由**行阶梯形矩阵秩的性质**以及**初等行变换不改变矩阵的秩**,

$$A_1\text{的非零行行数} = R(A_1)=R(A)=R(A_2) = A_2\text{的非零行行数}. \qquad \blacksquare$$

思考：这个定理与之前学过的哪个定理有异曲同工之妙?

矩阵的秩

求秩的方法. 通过初等行变换化为阶梯形矩阵，其非零行行数即为秩.

例：设$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\3&2&\lambda&-1\\5&6&3&\mu\end{pmatrix}$. 已知$R(A)=2$，求$\lambda$和$\mu$.

解. $A\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&\lambda+3&-4\\0&-4&8&\mu-5\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&\lambda+3&-4\\0&0&5-\lambda&\mu-1\end{pmatrix}.$$

因为$R(A)=2, A$的最后一行必定为零行, 即

$\begin{cases}5-\lambda&=&0\\\mu-1&=&0\end{cases}$, 所以$\lambda=5,\mu=1$.

练习：设$A=\begin{pmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{pmatrix}$. 问$k$为何值时可分别使$R(A)=1,2,3$?

矩阵的秩

- 问题：已证若$A \sim B$，则$R(A) = R(B)$．逆命题是否成立?

矩阵的秩

相抵标准形.

$$B_0=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}B_6=\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

欲把红色元素变为0且保持行最简，初等行变换能否做到?

需要初等列变换!

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_5+3c_4}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3+c_2]{c_5-3c_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3+c_1]{c_5-4c_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3\leftrightarrow c_4}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_3&O_{3\times 2}\\O_{1\times 3}&O_{1\times 2}\end{pmatrix}.$$

B_0的相抵标准形

矩阵的秩

练习:

通过初等变换将$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$化为相抵标准形.

矩阵的秩

定理(相抵标准形). 任何$m \times n$矩阵A都能经过有限次初等变换化为相抵标准形$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 其中$r = R(A)$. 因而相抵标准形由$A$唯一确定.

证明. 对$m+n$用数学归纳法可以证明A都能经过有限次初等变换化为相抵标准形$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$. 因为初等变换不改变矩阵的秩,

$$r = R\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = R(A). \qquad \blacksquare$$

矩阵的秩

定理(初等变换与矩阵秩的联系). 设A, B为$m \times n$矩阵. 则

$$A \sim B \Leftrightarrow R(A) = R(B).$$

证明. 必要性已证.

充分性. 设$R(A) = R(B) = r$.

由**相抵标准形定理**,

$$A \sim \begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix} 且 B \sim \begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}.$$

因为~是等价关系，$A \sim B$. ■

矩阵的秩

秩的性质.

性质 1: $0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m,n\}$.

性质 2: 若$A \sim B$, 则$R(A) = R(B)$.

性质 3: 若P,Q可逆, 则$R(PAQ) = R(A)$.

性质 4: $R(A^T) = R(A)$.

性质 5: 若A为n阶可逆矩阵, 则$R(A^{-1}) = R(A) = n$.

性质 6: $R(kA) = \begin{cases} R(A) & k \ne 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$.

性质 7: $\max\{R(A),R(B)\} \le R(A,B) \le R(A) + R(B)$.

性质 8: $R(A+B) \le R(A) + R(B)$.

性质 9: $R(AB) \le \min\{R(A),R(B)\}$.

矩阵的秩

性质 7：$\max\{R(A),R(B)\} \le R(A,B) \le R(A)+R(B)$.

证明. 因为所有A和B的k阶子式都是(A,B)的k阶子式，所以$R(A,B) \ge \max\{R(A),R(B)\}$.

下证$R(A,B) \le R(A)+R(B)$. 首先，

$$R(A,B) = R(A,B)^T = R\begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix}.$$

对A^T作初等行变换化为行阶梯形矩阵$\tilde{A}$, 对B^T作初等行变换化为行阶梯形矩阵$\tilde{B}$. 从而

$$\begin{pmatrix} A^T \\ B^T \end{pmatrix} \sim_r \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{pmatrix}.$$

设$R(A)=s, R(B)=t$. 则$\tilde{A}$和$\tilde{B}$分别有s个和t个非零行，从而$\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{pmatrix}$有$s+t$个非零行.

因此$\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{pmatrix}$的所有$s+t+1$阶子式为0，即$R\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{pmatrix} \le s+t$. 故

$$R(A,B) = R\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{pmatrix} \le s+t = R(A)+R(B). \qquad \blacksquare$$

说明. $\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{pmatrix}$不一定是行阶梯形矩阵.

矩阵的秩

性质 7: $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B)$.

$$\max\{R(A), R(B)\} \leq R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq R(A) + R(B).$$

性质 8: $R(A+B) \leq R(A) + R(B)$.

证明. 对$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$作初等行变换化为$\begin{pmatrix} A \\ A+B \end{pmatrix}$.

由**性质 7**,

$$R(A+B) \leq R\begin{pmatrix} A \\ A+B \end{pmatrix}$$

$$= R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$\leq R(A) + R(B). \quad \blacksquare$$

矩阵的秩

定理(矩阵方程). **矩阵方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$有解** $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{R(A)=R(A,B)}$.

性质 9: $R(AB)\le \min\{R(A),R(B)\}$.

证明. 令$C=AB$. 则矩阵方程$AX=C$有解. 从而

$$R(A)=R(A,C) \qquad \text{矩阵方程定理}$$

$$\ge R(C). \qquad \text{秩的性质 7}$$

$R(C)\le R(B)$类似可证(考虑$C^T=B^TA^T$). ■

矩阵的秩

例 1：设A为n阶方阵．证明$R(A+E)+R(A-E)\geq n$.

证明.

$$\begin{aligned} R(A+E)+R(A-E) &= R(A+E)+R(E-A) \\ &\geq R(2E) \qquad \text{性质 8} \\ &= n. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

矩阵的秩

例 2：证明：若$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s}=\boldsymbol{C}$且$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{n}$，则$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{C})$.

证明．因为$R(A)=n$，A的行最简形矩阵为$\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}$．故存在$m$阶可逆矩阵$P$使得

$$PA=\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}.$$

初等变换与矩阵乘法的联系

于是$PC=P(AB)=(PA)B=\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}B\\O\end{pmatrix}$.

由于左乘可逆矩阵不改变矩阵的秩（**性质 3**），

$$R(C)=R(PC)=R\begin{pmatrix}B\\O\end{pmatrix}=R(B).$$ ■

说明.

- 若矩阵A的秩等于其列数，则称A为列满秩矩阵．例题的结论说左乘列满秩矩阵不改变矩阵的秩，这是**性质 3**的推广.
- 若$C=O$，则本题结论为$AB=O$且A列满秩，则$B=O$这被称为矩阵乘法的消去律.

矩阵的秩

练习： 设有分块矩阵$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$，其中$A$和$B$为非零方阵.

(a) 若A和B分别为2阶和1阶方阵，证明$R\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \leq R(A) + R(B)$.

(b) 上述结论对一般方阵A, B是否成立?

3.4 线性方程组有解判定定理

线性方程组有解判定定理

定理(线性方程组有解判定定理).
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \quad Ax = b$$

- 有解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, b)$.
- 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, b) = n$.
- 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, b) < n$.

证明思路.

- 通过初等行变换将增广矩阵$B = (A, b)$化为行最简形矩阵$\tilde{B}$.
- 分析$\tilde{B}$的结构.
- 写出$\tilde{B}$对应的线性方程组并讨论有解的充要条件，将该条件用矩阵秩的语言表述.

线性方程组有解判定定理

定理(线性方程组有解判定定理). $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \quad Ax = b$

- 有解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, b)$.
- 有唯一解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, b) = n$.
- 有无穷解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, b) < n$.

证明. 通过初等行变换将增广矩阵$B = (A, b)$化为行最简形矩阵$\tilde{B} = (\tilde{A}, \tilde{b})$.

断言 1. **$\tilde{A}$是A的行最简形矩阵.**

- 由行最简形矩阵的定义，行最简形矩阵去掉最后一列仍然是行最简形矩阵，故$\tilde{A}$是行最简形矩阵.
- 对B作初等行变换的时候，相应地对A作了同样的初等行变换，即$\tilde{A}$是A经过初等行变换而得到的.

从而，断言 1 成立.

线性方程组有解判定定理

证明(续).

断言 1. **$\tilde{A}$是A的行最简形矩阵.**

假设$R(A) = r$，$\tilde{b} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}$.

- 则$R(\tilde{A}) = r$.
- $\tilde{B} = (\tilde{A}, \tilde{b}) =$

$$\begin{array}{r} r\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ m-r\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array} \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & d_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_m \end{pmatrix}$$

断言 2. $\boldsymbol{d_{r+2} = \cdots = d_m = 0}$.

假设$d_j \neq 0, r + 2 \leq j \leq m$.

- 若$d_{r+1} = 0$，则零行位于非零行上方.
- 若$d_{r+1} \neq 0$，则第$r+1$行与第j行的首非零元均位于最后一列.

无论那种情况，均与$\tilde{B}$是行最简形矩阵矛盾.

线性方程组有解判定定理

证明(续). 假设$\tilde{A}$中第i行$(1 \le i \le r)$首非零元出现在j_i列.

则$\tilde{A}$中取前r行与$j_1, j_2, \ldots, j_r$列可得r阶子矩阵$E_r = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

断言 3. **不妨假设$\boldsymbol{E_r}$出现在$\tilde{\boldsymbol{A}}$的左上角，即$\boldsymbol{j_i = i, i = 1, 2, \ldots, r}$.**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases}$$

把张三叫李四
把李四叫张三

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_4 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 + x_3 = 4 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_4 - 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_4 + 7x_3 = 9 \end{cases}$$

变量从小
到大排列

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ 4x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 9x_4 = 9 \end{cases}$$

线性方程组有解判定定理

证明(续).

断言 3. **不妨假设$\boldsymbol{E_r}$出现在$\tilde{A}$的左上角，即$\boldsymbol{j_i = i, i = 1, 2, \dots, r}$.**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ 4x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 9x_4 = 9 \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{交换3,4列}} B' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & 2 \\ 1 & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{-2} & 4 \\ 4 & -6 & \mathbf{-2} & \mathbf{2} & 4 \\ 3 & 6 & \mathbf{-7} & \mathbf{-9} & 9 \end{pmatrix}$$

B ⇓ 初等行变换　　　　B' ⇓ 作B到$\tilde{B}$同样的初等行变换

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{交换3,4列}} \tilde{B}' = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

线性方程组有解判定定理

证明(续).

由断言1，2，3,

$$
\begin{array}{c}
\\ r \\ \\ \\ \\ m-r \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\{ \\
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\{
\end{array}
\quad
\tilde{B} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{r+1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \text{第}\boldsymbol{r+1}\text{行} \\ \longleftarrow \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

故原方程组等价于

$$
\begin{cases}
x_1 + b_{11}x_{r+1} + b_{12}x_{r+2} + \cdots + b_{1,n-r}x_n = d_1 \\
x_2 + b_{21}x_{r+1} + b_{22}x_{r+2} + \cdots + b_{2,n-r}x_n = d_2 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
x_r + b_{r1}x_{r+1} + b_{r2}x_{r+2} + \cdots + b_{r,n-r}x_n = d_r \\
0 = d_{r+1}` \\
0 = 0 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
0 = 0
\end{cases}
$$

线性方程组有解判定定理

证明(续).

故原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 & + & b_{11}x_{r+1} & + & b_{12}x_{r+2} & + & \cdots & + b_{1,n-r}x_n & = & d_1 \\ x_2 & + & b_{21}x_{r+1} & + & b_{22}x_{r+2} & + & \cdots & + b_{2,n-r}x_n & = & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_r & + & b_{r1}x_{r+1} & + & b_{r2}x_{r+2} & + & \cdots & + b_{r,n-r}x_n & = & d_r \\ \mathbf{0} & \mathbf{=} & \boldsymbol{d_{r+1}} & & & & & & & \\ 0 & = & 0 & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & \\ 0 & = & 0 & & & & & & & \end{cases}$$

- 若$d_{r+1}=0$，则方程组有解；否则第$r+1$个方程为矛盾方程$0=1$，方程组无解.

$$\text{故方程组有解} \Leftrightarrow d_{r+1}=0 \Leftrightarrow R(A)=r=R\left(\tilde{B}\right)=R(B)$$

- 若$R(A)=R(B)=n$，则方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1 & = & d_1 \\ x_2 & = & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & d_n \end{cases}$$

- 若$R(A)=R(B)<n$，则方程组有无穷解(取$x_{r+1},\ldots,x_n$为自由未知量). ■

线性方程组有解判定定理

定义(齐次线性方程组). 称$Ax=0$是齐次线性方程组.

推论 1. $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$有非零解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A})<\boldsymbol{n}$.

推论 2. 若$\boldsymbol{m}<\boldsymbol{n}$, 则$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$有非零解.

线性方程组有解判定定理

例 1：求解线性方程组$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2. \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$

解：该方程组的增广矩阵为$B = (A, b) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$B \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

故$R(A) = 2$，$R(B) = 3$．方程组无解.

线性方程组有解判定定理

例 2：求解线性方程组$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0. \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

解：该方程组的系数矩阵为$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

$$A \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

故$R(A) = 2 < 4$，方程组有无穷解.

化行最简：$\xrightarrow{r_2\times(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -5/3 \\ 0 & 1 & 2 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

所以原方程组等价于$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - \frac{5}{3}x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_2 = -2x_3 - \frac{4}{3}x_4 \end{cases}$.

线性方程组有解判定定理

所以原方程组等价于$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_2 = -2x_3 - \frac{4}{3}x_4 \end{cases}.$

令$x_3 = c_1, x_4 = c_2$, 则

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + \frac{5}{3}c_2 \\ -2c_1 - \frac{4}{3}c_2 \\ 1c_1 + 0c_2 \\ 0c_1 + 1c_2 \end{pmatrix}$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5/3 \\ -4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

矩阵的初等变换

说明.

- 定理证明中假设E_r出现在左上角的位置，是为了能够方便写下$\tilde{B}$对应的线性方程组.
- 求解具体的线性方程组时，只需要取首非零元所在列的变量为非自由未知量即可.

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad - x_3 = 4 & (1) \\ \quad x_2 - x_3 = 3 & (2) \\ \quad\quad\quad x_4 = -3 & (3) \\ \quad\quad\quad 0 = 0 & (4) \end{cases} \qquad (B_6)$$

令x_3为自由未知量，原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 + 3 \\ x_4 = \quad -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{令}x_3=c\text{为任意实数}} \begin{cases} x_1 = c + 4 \\ x_2 = c + 3 \\ x_3 = c + 0 \\ x_4 = 0 - 3 \end{cases}.$$

线性方程组有解判定定理

例 3：设有线性方程组$\begin{cases}(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0\\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3\\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda\end{cases}$. 问$\lambda$取何值时方程组有唯一解? 无解? 无穷解?

解法 1：初等变换法

$$B=(A,b)=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-(1+\lambda)r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & -\lambda & -\lambda^2-2\lambda & -\lambda(1+\lambda)\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda+3) & -(\lambda+3)(\lambda-1)\end{pmatrix}\triangleq B'.$$

当$-\lambda(\lambda+3)\neq 0$，即$\lambda\neq 0$且$\lambda\neq -3$时，$R(A)=R(B)=3$，方程组有唯一解.

线性方程组有解判定定理

例 3：设有线性方程组$\begin{cases}(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda\end{cases}$. 问$\lambda$取何值时方程组有唯一解? 无解? 无穷解?

解法 1: 初等变换法 (续)

$$\boldsymbol{B'} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}+\boldsymbol{\lambda} & \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda} & -\boldsymbol{\lambda} & \mathbf{3}-\boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{3}) & -(\boldsymbol{\lambda}+\mathbf{3})(\boldsymbol{\lambda}-\mathbf{1}) \end{pmatrix}$$

- 当$\lambda = 0, B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

从而$R(A) = 1, R(B) = 2$. 方程组无解.

- 当$\lambda = -3, B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 从而$R(A) = R(B) = 2 < 3$, 方程组有无穷解.

线性方程组有解判定定理

例 3：设有线性方程组$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda \end{cases}$. 问$\lambda$取何值时方程组有唯一解? 无解? 无穷解?

解法 2: 行列式法

因为$R(A) \le R(B) \le 3$,

$$\text{方程组有唯一解} \iff R(A) = R(B) = 3 \iff |A| \ne 0.$$

计算

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+3).$$

故当$\lambda \ne 0$且$\lambda \ne -3$时, 方程组有唯一解.

方法比较.

- 行列式法更简洁, 但只适用于系数矩阵为方阵的情况.
- 初等变换法适用所有情况, 但要注意不能将某行乘以带参数的表达式, 计算也相对复杂.

线性方程组有解判定定理

练习：

- 设有线性方程组$\begin{cases} x_1 + (\lambda-1)x_2 - 2x_3 = 1 \\ (\lambda-2)x_2 + (\lambda+1)x_3 = 3 \\ (2\lambda+1)x_3 = 5 \end{cases}$. 问$\lambda$取何值时方

程组有唯一解? 无解? 无穷解?

线性方程组有解判定定理

定理(矩阵方程). **矩阵方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$有解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{R(A)}=\boldsymbol{R(A,B)}$.**

证明. 设A为$m\times n$矩阵，X为$n\times s$矩阵. 则B为$m\times s$矩阵. 对X以及B按列分块有：

$$A(x_1,\dots,x_s)=(b_1,\dots,b_s),$$

其中x_i为n维列向量，b_i为m维列向量.

根据分块矩阵乘法，有$Ax_i=b_i$，$1\le i\le s$. 故$AX=B$有解 $\Leftrightarrow$ $Ax_i=b_i$有解，$1\le i\le s$.

充分性. 假设$R(A)=R(A,B)$. 则由**秩的性质 7**，$R(A)=R(A,B)\ge R(A,b_i)$且$R(A)\le R(A,b_i)$. 故$R(A)=R(A,b_i)$.

必要性. 假设$Ax_i=b_i$有解，$1\le i\le s$. 设$R(A)=r$.

对A作初等行变换化为行最简形矩阵$\tilde{A}$，则同样的初等行变换将$(A,B)=(A,b_1,\dots,b_s)$化为$(\tilde{A},\tilde{B})=(\tilde{A},\widetilde{b_1},\dots,\widetilde{b_s})$. 因此$(A,b_i)\sim_r(\tilde{A},\widetilde{b_i})$. 故

$$R(\tilde{A},\widetilde{b_i})=R(A,b_i)=R(A)=r.$$

从而$\widetilde{b_i}$的后$m-r$个分量为0.

所以，$(\tilde{A},\tilde{B})$的后$m-r$行为零行. 故$R(A,B)=R(\tilde{A},\tilde{B})=r=R(A)$. ■

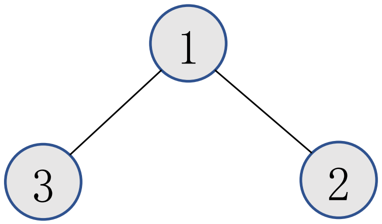
3.5 线性方程组的应用

线性方程组的应用

定义(无向图). 一个无向图G是一个二元组$(V(G), E(G))$,

- $V(G)$称为G的顶点集.
- $E(G)$是若干$V(G)$的二元子集组成的集合，称为G的边集.

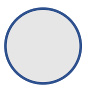
例. $G = (\{1,2,3\}, \{\{1,2\}, \{1,3\}\})$是一个图.



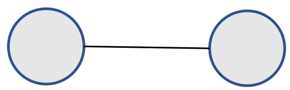
说明. 连接顶点之间的线的形状可以是任意的.

线性方程组的应用

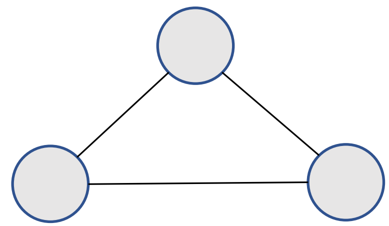
定义(完全图). 若一个图中的任何两个顶点都有边连接，则称该图是完全图. 有n个顶点的完全图记作K_n.



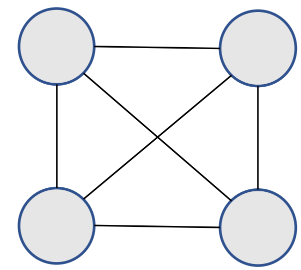
K_1



K_2



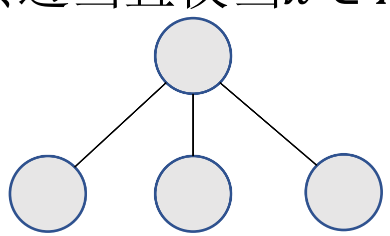
K_3



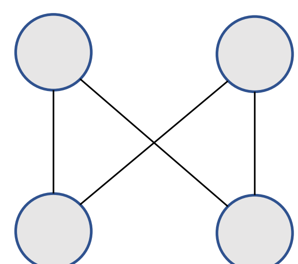
K_4

定义(完全二部图). 完全二部图$K_{m,n}$:

- 顶点集是一个大小为m的集合X与一个大小为n的集合Y的并
- $\{x, y\}$是一条边当且仅当$x \in X$且$y \in Y$.



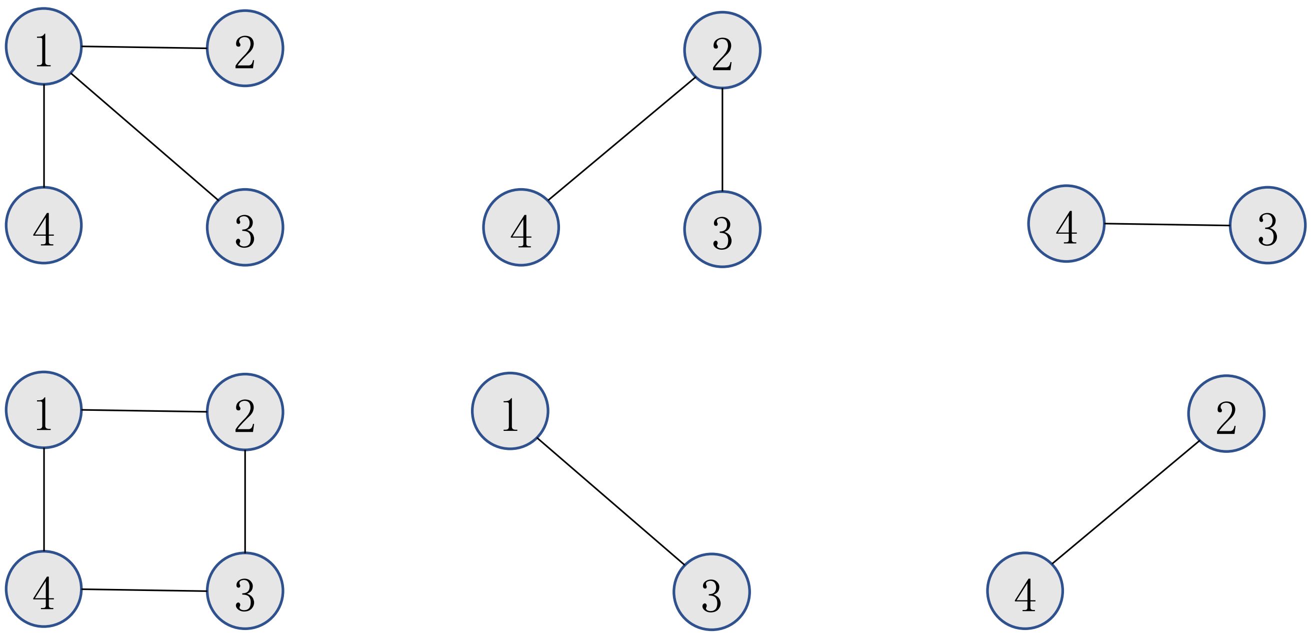
$K_{1,3}$



$K_{2,2}$

线性方程组的应用

定义(图分解). 假设$K_n = (V, E)$. 若完全二部图$G_i = (X_i, Y_i, E_i), 1 \le i \le k$满足$E_i \cap E_j = \emptyset$且$\bigcup_{i=1}^{k} E_i = E$，则称$G_1, G_2, \dots, G_k$是$K_n$的一个分解.



问题： K_n 分解成完全二部图的分解方式中，最少需要多少个完全二部图?

线性方程组的应用

问题： K_n 分解成完全二部图的分解方式中，最少需要多少个完全二部图?

n	完全二部图最小个数
2	

线性方程组的应用

问题： K_n 分解成完全二部图的分解方式中，最少需要多少个完全二部图?

n	完全二部图最小个数
2	1

线性方程组的应用

问题： K_n 分解成完全二部图的分解方式中，最少需要多少个完全二部图?

n	完全二部图最小个数
2	1
3	

线性方程组的应用

问题： K_n 分解成完全二部图的分解方式中，最少需要多少个完全二部图?

n	完全二部图最小个数
2	1
3	2

线性方程组的应用

问题： K_n 分解成完全二部图的分解方式中，最少需要多少个完全二部图?

n	完全二部图最小个数
2	1
3	2
4	

线性方程组的应用

问题： K_n 分解成完全二部图的分解方式中，最少需要多少个完全二部图?

n	完全二部图最小个数
2	1
3	2
4	3

线性方程组的应用

问题： K_n 分解成完全二部图的分解方式中，最少需要多少个完全二部图?

n	完全二部图最小个数
2	1
3	2
4	3
⋮	⋮

猜测： K_n分解成完全二部图的分解方式中最少需要$n-1$个完全二部图?

线性方程组的应用

定理(Graham & Pollak 1971). 在任何一种将K_n分解成完全二部图的分解方式中至少需要$n-1$个完全二部图.

说明. $K_n = K_{1,n-1} + K_{1,n-2} + \cdots + K_{1,1}$，因此$n-1$是最好可能的.

证明思路(Tverberg 1982): 反证法.

- 假设存在K_n的一种分解方式只需要k个完全二部图，其中$k < n-1$.
- 构造由这个分解所对应的一个齐次线性方程组，这个方程组中有$k+1$个方程以及n个未知量.
- 因$k < n-1$，故$k < n$. 由线性方程组理论，该方程组有非零解.
- 最后根据分解的定义，通过简单计算可以推出$0 > 0$这个矛盾.

难点：齐次线性方程组的构造.

线性方程组的应用

定理(Graham & Pollak 1971). 在任何一种将K_n分解成完全二部图的分解方式中至少需要$n-1$个完全二部图.

证明(Tverberg 1982). 假设$K_n=(V,E)$分解成k个完全二部图$G_i=(X_i,Y_i,E_i), 1\le i\le k$, 其中$E_i\cap E_j=\emptyset$且$\bigcup_{i=1}^{k}E_i=E$.

假设$k<n-1$. 考虑如下线性方程组:

$$\begin{cases}\sum\limits_{v\in V}x_v=0\\ \sum\limits_{v\in X_i}x_v=0 \qquad\qquad i=1,2,\dots k\end{cases}$$

其中x_v是对应顶点v的变量.

线性方程组的应用

证明(续).

$$\begin{cases} \sum_{v\in V} x_v = 0 \\ \sum_{v\in X_i} x_v = 0 \end{cases}$$

- 上述线性方程组有$k+1$个方程以及n个未知量.
- 因为$k+1<n$，故线性方程组有非零解$c_v, v\in V$，其中至少一个$c_v\neq 0$.
- 从而

$$0=\left(\sum_{v\in V} c_v\right)^2=\sum_{v\in V} c_v^2+2\sum_{\{u,v\}\in E} c_v c_u \quad =\sum_{v\in V} c_v^2>0$$

- 因为$G_i=(X_i,Y_i,E_i), 1\leq i\leq k$是$K_n$的一个分解,

$$\sum_{\{u,v\}\in E} c_v c_u=\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{u\in X_i} c_u \sum_{v\in Y_i} c_v\right) \\ =0.$$

- 代入上式，这是一个矛盾. ■

线性方程组总结

线性方程组总结

难点.

- 秩的定义：最高阶非零子式的阶数.
- 秩的性质：
  - $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B)$.
  - $R(A+B) \leq R(A) + R(B)$.
  - $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$.
- 线性方程组有解判定定理的证明.

重点.

- 矩阵的初等变换及其与矩阵乘法之间的联系.
- 初等行变换求矩阵的逆.
- 求解一般的线性方程组并且在有无穷多个解的情况下写出所有的解.

线性方程组总结

1. 证明对矩阵A作1次初等列变换等价于在A的右边乘上一个相应的初等矩阵.
2. 求解线性方程组$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$.
3. 求$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.
4. 若同型矩阵A, B满足$R(A) = R(B)$，是否一定有$A \sim_r B$?
5. 证明$R(A) = 1$的充分必要条件是存在非零向量a以及非零向量b使得$A = ab^T$.

扩展阅读

加性组合

问题：给定方程$a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = 0$, 其中$a_1, \ldots, a_k$都是整数. 如果S ⊆ $[N]$不包含方程的非平凡解, $|S|$可以多大?

- $x_1 + x_2 = 2x_3$:   三项等差数列.

  - Behrend 构造(1946): $|S| \geq \frac{N}{e^{\alpha\sqrt{\ln N}}}$

  - Kelley-Meka (2023): $|S| \leq \frac{N}{e^{\alpha(\ln N)^{1/9}}}$ (组合学的重大突破)

加性组合

问题：给定方程$a_1x_1+\cdots+a_kx_k=0$, 其中$a_1,\ldots,a_k$都是整数. 如果$S\subseteq[N]$不包含方程的非平凡解, $|S|$可以多大?

- $x_1+x_2=x_3+x_4$:   Sidon Set
  - 有限域构造: $|S|\geq\sqrt{N}$
  - Erdős-Turán (1941): $|S|\leq O(\sqrt{N})$
  - Lindström (1969): $|S|\leq N^{\frac{1}{2}}+N^{\frac{1}{4}}+1$
  - Balogh-Füredi-Roy (2021): $|S|\leq N^{\frac{1}{2}}+0.998N^{\frac{1}{4}}$

思考: 进一步改进Sidon Set的上界.