

线性代数-矩阵

- 矩阵的概念及其应用
 - 矩阵的概念
 - 矩阵的应用
- 矩阵的运算
 - 加法与数乘
 - 乘法与方幂
 - 转置
 - 方阵的行列式
- 可逆矩阵
- 分块矩阵

2.1 矩阵的概念及其应用

矩阵的基本概念

定义(矩阵). 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做一个 $m \times n$ 矩阵, 其中 a_{ij} 称为矩阵的第*i*行第*j*列元素或者(*i,j*)-元.

记号.

- 通常用 A, B, C 或 X, Y, Z 等大写英文字母表示矩阵.
- $m \times n$ 矩阵通常简记为 $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

例: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ -9 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 是一个 3×4 矩阵.

说明. 矩阵是矩形的阵列的简称.

矩阵相等

定义(同型矩阵). 若两个矩阵行数相等且列数相等, 则称这两个矩阵为同型矩阵.

定义(矩阵相等). 若矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 和 $B = (b_{ij})_{m \times n}$ 对应元素相等, 即对任何 $i = 1, 2, \dots, m$ 和 $j = 1, 2, \dots, n$ 有 $a_{ij} = b_{ij}$, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A = B$.

例:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

↔

$$a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5, f = 6.$$

特殊矩阵

下面介绍几类常用的特殊矩阵.

(1) 行矩阵和列矩阵.

- 只有一行的矩阵称为行矩阵或行向量

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

- 只有一列的矩阵称为列矩阵或列向量

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

(2) 零矩阵: 所有元素都为零的矩阵. $m \times n$ 零矩阵记为 $O_{m \times n}$.

特殊矩阵

(3) 方阵：行数和列数相等的矩阵.

说明. $n \times n$ 方阵通常称为 n 阶方阵，方阵是正方形的阵列的简称.

(4) 对角矩阵：除主对角线上的元素外其他元素都为零的方阵.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

通常简记为 $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

思考：零矩阵是否为对角矩阵？

特殊矩阵

(5) 单位矩阵: 主对角线上元素都为1的对角矩阵.

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

为 n 阶单位矩阵.

说明. E_n 的作用与1在实数运算中的作用类似: $EA = AE = A$.

(6) 上(下)三角矩阵: 主对角线下(上)方的元素全为零的方阵.

上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

下三角矩阵

特殊矩阵

(7) 对称矩阵和反对称矩阵. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$.

- 若对任何 $i, j = 1, 2 \dots, n$, 都有 $a_{ij} = a_{ji}$, 则称 A 为对称矩阵.
- 若对任何 $i, j = 1, 2 \dots, n$, 都有 $a_{ij} = -a_{ji}$, 则称 A 为反对称矩阵.

例:

- $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ 是一个3阶对称矩阵.
- $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \\ 3 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ 是一个3阶反对称矩阵.

思考: 什么矩阵既是对称矩阵又是反对称矩阵?

矩阵应用举例

应用 1：产品发送量矩阵.

- 某厂向三个商店发送四种不同产品的数量可以由矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

表示, 其中 a_{ij} 是工厂向第*i*个商店发送第*j*种产品的数量.

- 这四种产品的单价以及单件重量可以由矩阵

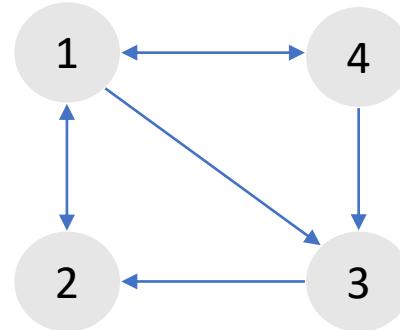
$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}$$

其中 b_{i1} 为第*i*种产品的单价, b_{i2} 为第*i*种产品的单件重量.

矩阵应用举例

应用 2: 图的邻接矩阵.

四个城市间的单向航线图如右图所示



则该航线图可用一个4阶方阵 $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$ 表示:

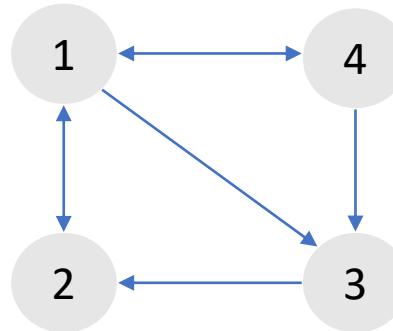
- A 的第*i*行对应城市*i*, A 的第*j*列对应城市*j*;
- $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若 } i \text{ 市到 } j \text{ 市有1条单向航线} \\ 0, & \text{若 } i \text{ 市到 } j \text{ 市无1条单向航线} \end{cases}$

从而 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

矩阵应用举例

应用 2(续): 图的邻接矩阵.

四个城市间的单向航线图



$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

一般地, n 个城市之间的单向航线图可以用一个 n 阶方阵表示, 这个矩阵称为图的邻接矩阵.

思考: 写出 \overleftrightarrow{K}_n 的邻接矩阵.

矩阵应用举例

应用 3: 线性变换的矩阵.

n 个变量 x_1, x_2, \dots, x_n 与 m 个变量 y_1, y_2, \dots, y_m 之间的关系

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} (*)$$

表示从变量 x_1, x_2, \dots, x_n 到变量 y_1, y_2, \dots, y_m 的线性变换, 其中 a_{ij} 为常数.

- 由(*)确定的线性变换可以由 a_{ij} 构成的矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 来描述.
- 反之, 给定一个 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ij})$, A 对应了由(*)确定的线性变换.



矩阵应用举例

应用 3：线性变换的矩阵.

例 1：

- 线性变换 $\begin{cases} y_1 = 3x_1 + 6x_3 \\ y_2 = 2x_1 - x_2 + x_3 \end{cases}$ 对应矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 单位矩阵 $E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ 对应

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}.$$

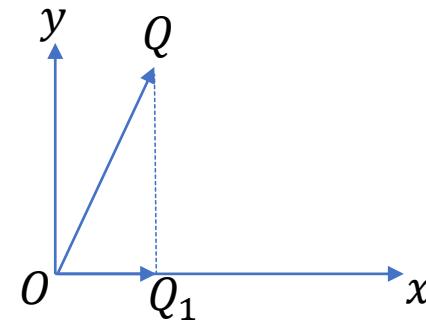
矩阵应用举例

应用 3: 线性变换的矩阵.

例 2: 矩阵 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 对应从变量 x, y 到 x_1, y_1 的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 1x + 0y = x \\ y_1 = 0x + 0y = 0 \end{cases}.$$

若把 x, y 看作平面上某点 Q 的坐标, x_1, y_1 看作平面上某点 Q_1 的坐标, 则矩阵 P 对应把点 Q 变为点 Q_1 的变换.



几何意义. P 是一个投影变换, 即将平面上的点投影到 x 轴上的变换.

矩阵应用举例

应用 3: 线性变换的矩阵.

例 3: 矩阵 $R_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$ 对应从变量 x, y 到 x_1, y_1 的线性变换

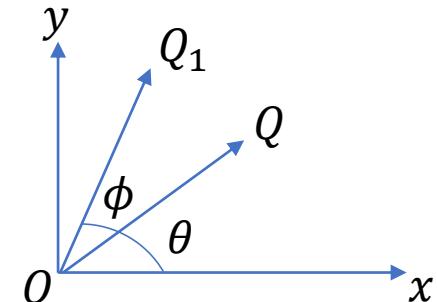
$$\begin{cases} x_1 = \cos \phi x - \sin \phi y \\ y_1 = \sin \phi x + \cos \phi y \end{cases} \quad (1)$$

令 $Q(x, y)$ 和 $Q_1(x_1, y_1)$ 是 xOy 平面上的两个点.

- 设 Q 的极坐标为 (r, θ) , 则 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (2)$
- 将(2)代入(1)得:

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \phi \cos \theta - r \sin \phi \sin \theta = r \cos(\phi + \theta) \\ y_1 = r \sin \phi \cos \theta + r \cos \phi \sin \theta = r \sin(\phi + \theta) \end{cases}$$

故 Q_1 的极坐标为 $(r, \theta + \phi)$.



几何意义. R_ϕ 是将给定平面向量 \overrightarrow{OQ} 逆时针旋转角度 ϕ 的变换.

矩阵应用举例

练习：

1. 写出将 xOy 平面中给定点投影到 y 轴上的变换所对应的矩阵.
2. 写出将 xOy 平面给定向量逆时针旋转 90° 的变换所对应的矩阵.

矩阵应用举例

应用 4: 线性方程组.

设有 n 个变量与 m 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (*)$$

其中 a_{ij} 与 b_k 为常数.

• $A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 称为(*)的系数矩阵.

• $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ 称为(*)的增广矩阵.

线性方程组 $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 矩阵

2.2 矩阵的运算

矩阵的运算-加法

定义(矩阵的和差). 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 和 $B = (b_{ij})_{m \times n}$ 是两个矩阵.

- 称 $m \times n$ 矩阵 $C = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$ 为 A 与 B 的和, 记作 $A + B$.
- $-A \triangleq (-a_{ij})_{m \times n}$ 称为 A 的负矩阵.
- A 和 B 的差定义为 $A - B \triangleq A + (-B)$.

例: 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. 则

$$-B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

矩阵的运算-加法

矩阵加法运算规律. 设 A, B, C 是同型矩阵, O 为与 A 同型的零矩阵. 则

- $A + B = B + A$ 加法交换律
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ 加法结合律
- $A + O = O + A = A$ 零矩阵
- $A + (-A) = O$ 负矩阵

矩阵的运算-数乘

定义(数乘). 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 且 k 是实数, 则称矩阵

$$(ka_{ij})_{m \times n} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

为数 k 与 A 的数乘, 记作 kA .

运算规律.

- $1A = A$ $(k\ell)A = k(\ell A)$
- $k(A + B) = kA + kB$ $(k + \ell)A = kA + \ell A$

例: 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 且 $2A - 3X = B$, 求 X .

解: $2A - 3X = B \Leftrightarrow 3X = 2A - B$. 从而 $X = \frac{1}{3}(2A - B) = \begin{pmatrix} 8/3 & -1/3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

矩阵的运算-乘法

引例 1：总收入与总利润.

三个工厂甲、乙、丙生产四类产品的年销量由下表给出：

	1	2	3	4
甲	20	30	10	45
乙	15	10	70	20
丙	20	15	35	25

另外，每种产品的单价和单位利润如下：

	单价	单位利润
1	100	20
2	150	45
3	300	120
4	200	60

求各工厂的总收入和总利润.

矩阵的运算-乘法

引例 1：总收入与总利润.

解：分别计算甲的总收入和总利润.

甲的总收入 = 甲的各类产品收入之和

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^4 \text{甲的 } i \text{ 类产品销量} \times i \text{ 类产品单价} \\ &= 20 \times 100 + 30 \times 150 + 10 \times 300 + 45 \times 200 \\ &= 18500. \end{aligned}$$

	1	2	3	4
甲	20	30	10	45
乙	15	10	70	20
丙	20	15	35	25

	单价	单位利润
1	100	20
2	150	45
3	300	120
4	200	60

矩阵的运算-乘法

引例 1：总收入与总利润.

解(续)：分别计算甲的总收入和总利润.

甲的总利润 = 甲的各类产品利润之和

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^4 \text{甲的 } i \text{ 类产品销量} \times i \text{ 类产品单位利润} \\ &= 20 \times 20 + 30 \times 45 + 10 \times 120 + 45 \times 60 \\ &= 5650. \end{aligned}$$

	1	2	3	4
甲	20	30	10	45
乙	15	10	70	20
丙	20	15	35	25

	单价	单位利润
1	100	20
2	150	45
3	300	120
4	200	60

矩阵的运算-乘法

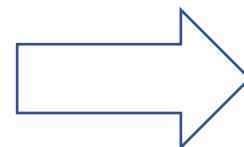
引例 1：总收入与总利润.

解(续)：乙和丙的总收入和总利润可以类似计算.

	总收入	总利润
甲	18500	5650
乙	28000	10350
丙	19750	6775

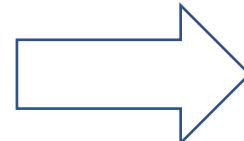
矩阵的运算-乘法

	1	2	3	4
甲	20	30	10	45
乙	15	10	70	20
丙	20	15	35	25



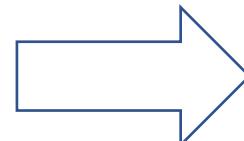
$$A = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 & 45 \\ 15 & 10 & 70 & 20 \\ 20 & 15 & 35 & 25 \end{pmatrix}$$

	单价	单位利润
1	100	20
2	150	45
3	300	120
4	200	60



$$B = \begin{pmatrix} 100 & 20 \\ 150 & 45 \\ 300 & 120 \\ 200 & 60 \end{pmatrix}$$

	总收入	总利润
甲	18500	5650
乙	28000	10350
丙	19750	6775



$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\forall i = 1, 2, 3; j = 1, 2,$$

矩阵的运算-乘法

引例 2：线性变换的复合

现有三组变量 x_1, x_2, x_3, x_4 、 y_1, y_2, y_3 、 z_1, z_2 满足

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \\ x_4 = a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 \end{cases} \quad (\text{I})$$

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2 \end{cases} \quad (\text{II})$$

(I) 和 (II) 隐含了从 z_1, z_2 到 x_1, x_2, x_3, x_4 的线性变换：

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 \\ x_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 \\ x_3 = c_{31}z_1 + c_{32}z_2 \\ x_4 = c_{41}z_1 + c_{42}z_2 \end{cases} \quad (\text{III})$$

求 c_{ij} .

矩阵的运算-乘法

引例 2: 线性变换的复合

解: 求 c_{ij} 只需将(II)代入(I).

$$x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3$$

$$= a_{11}(b_{11}z_1 + b_{12}z_2) + a_{12}(b_{21}z_1 + b_{22}z_2) + a_{13}(b_{31}z_1 + b_{32}z_2)$$

$$= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})z_2$$

$$x_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})z_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})z_2$$

$$x_3 = (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31})z_1 + (a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32})z_2$$

$$x_4 = (a_{41}b_{11} + a_{42}b_{21} + a_{43}b_{31})z_1 + (a_{41}b_{12} + a_{42}b_{22} + a_{43}b_{32})z_2$$

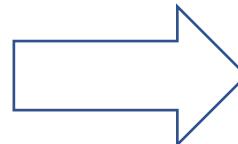
$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \\ x_4 = a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2 \end{cases} \quad (II)$$

矩阵的运算-乘法

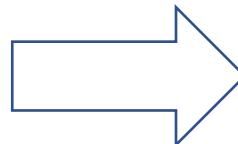
引例 2: 线性变换的复合

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \\ x_4 = a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 \end{cases}$$



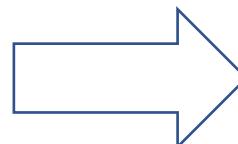
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2 \end{cases}$$



$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 \\ x_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 \\ x_3 = c_{31}z_1 + c_{32}z_2 \\ x_4 = c_{41}z_1 + c_{42}z_2 \end{cases}$$



$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix}$$

$$x_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})z_2$$

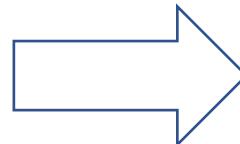
c_{11}

c_{12}

矩阵的运算-乘法

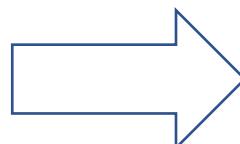
引例 2: 线性变换的复合

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \\ x_4 = a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 \end{cases}$$



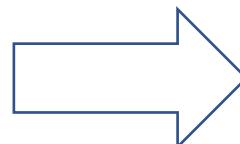
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2 \end{cases}$$



$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 \\ x_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 \\ x_3 = c_{31}z_1 + c_{32}z_2 \\ x_4 = c_{41}z_1 + c_{42}z_2 \end{cases}$$



$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix}$$

$$\forall i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2,$$

$c_{ij} = A$ 的第*i*行与*B*的第*j*列对应元素乘积之和.

矩阵的运算-乘法

定义(矩阵的乘法). 给定矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times s}$ 和 $B = (b_{ij})_{s \times n}$, 定义 A 与 B 的乘积为

$$AB = (c_{ij})_{m \times n},$$

其中 $c_{ij} = A$ 的第*i*行与 B 的第*j*列对应元素乘积之和.

理解.

- AB 有定义的必要条件为 A 的列数 = B 的行数.
- 如何用数学表达式表示 c_{ij} ?

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj}.$$

- 如何记忆?

高中时所学的向量的数量积.

矩阵的运算-乘法

例 1: 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 4}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{4 \times 3}$, 求 AB .

解: $AB = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -1 \\ 9 & 9 & 11 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$.

例 2: 矩阵 $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$, 求 AB 和 BA .

解: $AB = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$.

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

矩阵的运算-乘法

注意事项.

- AB 有定义, BA 不一定有定义. 即使 AB 和 BA 都有定义, 两者也不一定相等, 即矩阵乘法不满足交换律!

AB 读作“ A 左乘 B ”或“ B 右乘 A ”

- $AB = O \Rightarrow A = O$ 或 $B = O$.
- 矩阵乘法不满足消去律: $AB = CB$ 且 $B \neq O \Rightarrow A = C$.

矩阵的运算-乘法

运算规律.

- $O_{m \times s} A_{s \times n} = O_{m \times n}, \quad A_{m \times s} O_{s \times n} = O_{m \times n}.$
- 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则 $AE_n = A, \quad E_m A = A.$
- $(AB)C = A(BC).$ 乘法结合律
- $A(B + C) = AB + AC, \quad (B + C)A = BA + CA.$ 乘法关于加法的分配律
- $k(AB) = (kA)B = A(kB).$

矩阵的运算-乘法

性质：设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则 $AE_n = A$, $E_m A = A$.

证明：设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$. 下面证明 $AE_n = A$. 根据矩阵相等的定义，只需证明 AE_n 的 (i,j) -元为 a_{ij} 即可.

AE_n 的 (i,j) -元 = A 的第*i*行与 E_n 的第*j*列对应元素乘积之和

$$\begin{aligned} &= (a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{in}) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xleftarrow{\text{第} j \text{个分量}} \\ &= a_{ij}. \end{aligned}$$

■

练习：证明矩阵乘法的结合律.

矩阵的运算-方幂

定义(矩阵的方幂). 设 A 是 n 阶方阵, m 是一个正整数. 称 m 个 A 相乘为 A 的 m 次幂, 记为 A^m . 即

$$A^m = \underbrace{AA \cdots A}_{m\text{个}}$$

另外规定 $A^0 = E_n$.

运算法则. 设 A 是 n 阶方阵, k, ℓ 是正整数. 则

$$A^k A^\ell = A^{k+\ell}, \quad (A^k)^\ell = A^{k\ell}.$$

说明. $(AB)^k \neq A^k B^k$; $(A + B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB$.

思考: A, B 满足什么条件等式成立?

矩阵的运算-方幂

例 1: 设 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 P^n .

解 1: $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P.$

$$P^3 = P^2 P = P^2 = P.$$

⋮

$$P^n = P.$$

解 2: P 是将 xOy 平面上的点投影到 x 轴上的变换.

- P^2 的效果是先将平面上任何一点 Q 投影到 x 轴上得到点 Q_1 , 再将 Q_1 投影到 x 轴上, 投影点仍为 Q_1 .
- 因此 P^2 的效果和 P 的效果完全相同, 故 $P^2 = P$.
- 同理当 $n \geq 2$, $P^n = P$.

矩阵的运算-方幂

例 2: 设 $R_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$, 求 R_ϕ^n .

解 1: 回忆 R_ϕ 是将平面给定向量 \overrightarrow{OQ} 逆时针旋转角度 ϕ 的变换.

- R_ϕ^n 的效果是将给定向量 \overrightarrow{OQ} 逆时针旋转角度 ϕn 次;
- 这个变换所对应的矩阵为 $R_{n\phi} = \begin{pmatrix} \cos n\phi & -\sin n\phi \\ \sin n\phi & \cos n\phi \end{pmatrix}$.

解 2: 首先计算 R_ϕ^2 以及 R_ϕ^3 猜出结果, 再对 n 用数学归纳法证明.

动手尝试!

矩阵的运算-转置

定义(矩阵的转置). 把矩阵 A 的行换成同序数的列而得到的新矩阵称为 A 的转置, 记作 A^T .

等价地, 若 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 则 $A^T = (b_{ij})_{n \times m}$, 其中 $b_{ij} = a_{ji}, 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m$.

例: 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 8 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \\ 2 & -1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$.

思考: 如何用转置的语言描述对称矩阵和反对称矩阵?

运算法则.

- $(A^T)^T = A$.
- $(A + B)^T = A^T + B^T$.
- $(kA)^T = kA^T$.
- $(AB)^T = B^T A^T$.
- 若 A 为 n 阶方阵, $(A^m)^T = (A^T)^m$.

矩阵的运算-转置

性质： $(AB)^T = B^T A^T$.

证明. 设 $A = (a_{ij})_{m \times s}$, $B = (b_{ij})_{s \times n}$.

- $(AB)^T$ 与 $B^T A^T$ 是同型矩阵.
- 根据矩阵相等的定义，只需证这两个矩阵对应元素相等即可.

$$\begin{aligned}(AB)^T \text{ 的 } (i,j)-\text{元} &= (AB) \text{ 的 } (j,i)-\text{元} \\ &= A \text{ 的第 } j \text{ 行与 } B \text{ 的第 } i \text{ 列对应元素乘积之和.}\end{aligned}$$

转置定义
乘法定义

$$\begin{aligned}B^T A^T \text{ 的 } (i,j)-\text{元} &= B^T \text{ 的第 } i \text{ 行与 } A^T \text{ 的第 } j \text{ 列对应元素乘积之和} \\ &= B \text{ 的第 } i \text{ 列与 } A \text{ 的第 } j \text{ 行对应元素乘积之和.}\end{aligned}$$

乘法定义
转置定义

所以， $(AB)^T = B^T A^T$.

■

练习：证明第五个性质 $(A^m)^T = (A^T)^m$.

矩阵的运算-转置

例 1：设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $(AB)^T$.

解 1：先乘积再转置.

解 2：先转置再乘积.

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

例 2：设 A 为 $n \times 1$ 矩阵且 $A^T A = 1$. 证明 $B = E_n - 2AA^T$ 为对称矩阵且 $B^2 = E_n$.

证明. $B^T = (E_n - 2AA^T)^T = E_n^T - (2AA^T)^T$
 $= E_n - 2(AA^T)^T = E_n - 2(A^T)^T A^T$
 $= E_n - 2AA^T = B.$

故 B 为对称矩阵.

$$\begin{aligned} B^2 &= (E_n - 2AA^T)(E_n - 2AA^T) \\ &= E_n - 4AA^T + 4A(A^T A)A^T \\ &= E_n. \end{aligned}$$

假设条件 $A^T A = 1$ ■

矩阵的运算-行列式

定义(方阵的行列式). 设 A 为 n 阶方阵, 用 $|A|$ 表示 A 的行列式.

运算法则. 设 A, B 为 n 阶方阵.

- $|A^T| = |A|$. 行列式性质 1
- $|kA| = k^n|A|$. 矩阵数乘定义 + 行列式性质 3
- $|AB| = |A||B|$.

第三个性质的证明. 只证 $n = 2$ 的情况. 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. 令

$$D = \begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = |A||B|.$$

思想: 通过行列式对行和列的操作使得 AB 出现.

矩阵的运算-行列式

第1步：将 b_{11} 乘以第1列以及 b_{21} 乘以第2列加到第3列上.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & -1 & 0 & b_{22} \end{vmatrix}.$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

第2步：将 b_{12} 乘以第1列以及 b_{22} 乘以第2列加到第4列上.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & AB \\ -E & O \end{vmatrix}.$$

第3步：交换1, 3行以及2, 4行.

$$\begin{aligned} D &= (-1)^2 \begin{vmatrix} -E & O \\ A & AB \end{vmatrix} \\ &= (-1)^2 |-E| |AB| \quad \text{分块行列式定理} \\ &= (-1)^2 (-1)^2 |AB| = |AB|. \end{aligned}$$

■

思考：对 n 阶方阵，证明哪些地方需要改动？

矩阵的运算-行列式

定义(伴随矩阵). 设 A 为 n 阶方阵, 行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所组成的如下方

$$\text{阵 } A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \text{称为方阵 } A \text{ 的伴随矩阵.}$$

性质: 设 A 为 n 阶方阵. 则 $AA^* = A^*A = |A|E_n$.

证明. 我们证 $AA^* = |A|E_n$.

AA^* 的 (i,j) -元 = A 的第 i 行与 A^* 的第 j 列对应元素乘积之和

$$\begin{aligned} &= (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}) \begin{pmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \vdots \\ A_{jn} \end{pmatrix} \\ &= a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} |A|, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

代数余子式线性组合定理

因此, $AA^* = |A|E_n$. ■

矩阵的运算-练习

1. 写出 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵. $A^* = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$
2. 设 $A = \frac{1}{2}(B + E)$. 证明 $A^2 = A \Leftrightarrow B^2 = E$.
3. 设 $A^2 = A$ 且 $B^2 = B$. 证明 $(A + B)^2 = A + B \Leftrightarrow AB = BA = O$.
4. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. 求 A^{50} 和 A^{51} .
5. 设 A 为 n 阶方阵. 若 $AA^T = E_n$ 且 $|A| = -1$, 证明 $|A + E| = 0$.

2.3 可逆矩阵

可逆矩阵

定义(可逆矩阵). 设 A 为 n 阶方阵. 若存在 n 阶方阵 B 使得

$$AB = BA = E_n,$$

则称矩阵 A 可逆且称 B 是 A 的逆矩阵.

思考: 给出一个不可逆矩阵.

唯一性. 设 B, C 都是 A 的逆矩阵, 则 $B = C$.

证明. 根据定义, $AB = BA = E_n$ 且 $AC = CA = E_n$. 则

$$\begin{aligned} B &= BE = B(AC) \\ &= (BA)C = EC \\ &= C. \end{aligned}$$

■

由可逆矩阵的唯一性, 用 A^{-1} 表示 A 的逆矩阵.

可逆矩阵

定理(可逆矩阵的判定). n 阶方阵 A 可逆当且仅当 $|A| \neq 0$.

证明. 必要性. 假设 A 可逆, 则存在 n 阶方阵 B 使得 $AB = BA = E_n$. 等式两边取行列式有 $|A||B| = |AB| = |E_n| = 1$. 故 $|A| \neq 0$.

充分性. 假设 $|A| \neq 0$. 由伴随矩阵的性质, $AA^* = A^*A = |A|E_n$. 因为 $|A| \neq 0$, 故

$$A \frac{A^*}{|A|} = \frac{A^*}{|A|} A = E_n.$$

从而 A 可逆且 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$. ■

推论(简化判定). 设 A, B 为 n 阶方阵. 若 $AB = E_n$ (或 $BA = E_n$), 则 $B = A^{-1}$.

证明. 在 $AB = E_n$ 两边取行列式可得 $|A| \neq 0$, 从而由判定定理 A^{-1} 存在. 从而,

$$\begin{aligned} B &= EB = (A^{-1}A)B \\ &= A^{-1}(AB) \\ &= A^{-1}. \end{aligned}$$
 ■

可逆矩阵

可逆矩阵的性质. 设 A, B 为 n 阶可逆阵.

- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 若 $k \neq 0$, 则 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.
- AB 可逆且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

证明. $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = E_n$. ■

记忆. 倒脱靴.

- $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$.
- A^T 可逆且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

可逆矩阵

例 1：求 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中 $ad - bc \neq 0$.

解：因为 $|A| = ad - bc \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

例 2：设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. 求矩阵 X 满足 $AXB = C$.

解：若 A, B 可逆，则在方程两边同时左乘 A^{-1} 且右乘 B^{-1} ，有

$$A^{-1}(AXB)B^{-1} = A^{-1}CB^{-1},$$

即 $X = A^{-1}CB^{-1}$. 经计算得 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$. 故

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

可逆矩阵

例 3：设 $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 且 $AP = P\Lambda$. 求 A^n .

解：因为 $|P| = 2 \neq 0$, P 可逆. 故 $A = P\Lambda P^{-1}$. 则

$$\begin{aligned} A^n &= \underbrace{(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1}) \cdots (P\Lambda P^{-1})}_{n \uparrow (P\Lambda P^{-1})} \\ &= P\Lambda^n P^{-1}. \end{aligned} \quad \text{乘法结合律}$$

因为 $\Lambda^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, 从而

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}.$$

可逆矩阵

练习：

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 且 $AB = A + 2B$, 求 B .

2. 设 n 阶方阵 $A, B, A + B$ 均可逆. 证明

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B = B(B + A)^{-1}A.$$

可逆矩阵

定理(克拉默法则). 若线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (*)$$

的系数矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 的行列式不为零, 则(*)有唯一解 $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$, 其中 A_i 是将

$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix}$ 替换 A 的第 i 列所得到的矩阵.

证明. 令 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 则(*)可写为 $Ax = b$.

因为 $|A| \neq 0$, A^{-1} 存在. 在(*)两边同时左乘 A^{-1} 得 $x = A^{-1}b$.

由于逆矩阵是唯一的, $x = A^{-1}b$ 是唯一解.

可逆矩阵

证明(续). $x = A^{-1}b = \frac{A^*b}{|A|}$.

$$A^*b \text{的第 } i \text{ 个分量} = (A_{1i}, A_{2i}, \dots, A_{ni}) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n$$

$$= |A_i|. \blacksquare$$

可逆矩阵

例：设曲线 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ 通过四点 $(1,3), (2,4), (3,3), (4, -3)$. 求 a_0, a_1, a_2, a_3 .

解： a_0, a_1, a_2, a_3 是如下线性方程组的解：

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 4 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 3 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = -3 \end{cases}$$

其系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} \neq 0$ (为什么?).

故可由 **克拉默法则** 求解. 计算从略.

说明. 克拉默法则在理论上是一个漂亮的结果，但是在实际中并不实用.

可逆矩阵

矩阵是线性函数.

- 一元函数 $y = f(x)$: 牛顿第二定律.
- 多元函数 $y = f(x_1, x_2, x_3)$: 考试成绩取决于努力程度、运气、老师水平.
- 多值函数 $\begin{cases} T = f(x, y, z) \\ P = g(x, y, z) \end{cases}$: 教室的温度和压强随空间位置而改变.

可逆矩阵是反函数.

- $BA = E_n \Leftrightarrow$ 对任何 n 维向量 x , $BA(x) = E_n x = x$.
- 解读: 输入 n 维向量 x , A 将 x 变为某个向量 $y \triangleq Ax$. 而 B 的作用是把 y 变回 x , 即抵消 A 的作用.

类比: Word中的撤销键.

批判性思维

注意到，可逆矩阵定义中要求 A 是 n 阶方阵.

- 如果 A 是一个 $m \times n$ 矩阵，是否可以按照同样的方式定义可逆性？
- 如果将 $A_{m \times n}$ 可逆定义为存在 $B_{n \times m}$ 使得 $BA = E_n$ ，是否存在 A “可逆”的充分必要条件？

质疑是打开未知世界大门的钥匙！

批判性思维

A Note on the Upper Bound for the Paired-Domination Number of a Graph with Minimum Degree At Least Two

Shenwei Huang and Erfang Shan

Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, China

In this note, we give a counter example to show that the proof of a main result obtained by Haynes and Slater (Networks 32 (1998), 199–206, Theorem 12) is inaccurate. Here, we give a complete proof of the result. © 2010 Wiley Periodicals, Inc. NETWORKS, Vol. 57(2), 115–116 2011

Keywords: paired-domination number; upper bound; minimum degree

where u_i and v_i are paired in S . Afterward, X is defined to be the set of vertices in $V - S$ that are adjacent to some vertex in D , that is, $X = N(D) \cap (V - S)$. To prove the theorem, the authors use the claim $|X| \geq \frac{|D|}{2}$. But in fact, this may not hold for some minimum PDS of G . We give the graph F in Figure 1 as a counter example.

Clearly, $\nu_p(F) = 6$. Let $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7\}$ be a

矩阵总结

矩阵总结

难点.

- 矩阵的乘法

$$A_{m \times s} B_{s \times n} = (c_{ij})_{m \times n},$$

其中 $c_{ij} = A$ 的第 i 行与 B 的第 j 列对应元素乘积之和.

- 分块矩阵的乘法

$$A = (A_{ij})_{r \times s}, B = (B_{ij})_{s \times t}$$

且对 A 列的分法与对 B 行的分法完全一致. 则

$$AB = (C_{ij})_{r \times t},$$

其中 $C_{ij} = A$ 中第 i 行与 B 中第 j 列对应子块乘积之和 $= \sum_{k=1}^s A_{ik} B_{kj}$.

重点.

- 矩阵的运算: 加法, 数乘, 乘法, 方幂, 转置, 方阵的行列式.
- 可逆矩阵: 定义, 判定, 性质.

矩阵总结

1. 证明两个 n 阶上三角形矩阵的乘积仍为一上三角形矩阵.
2. 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.
3. 设 A 为 n 阶对称矩阵, B 为 n 阶反对称矩阵. 证明: AB 是反对称矩阵的充要条件为 $AB = BA$.
4. 利用 $|AB| = |A||B|$ 计算 n 阶行列式
$$\begin{vmatrix} 1 + x_1y_1 & 1 + x_1y_2 & \cdots & 1 + x_1y_n \\ 1 + x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \cdots & 1 + x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 + x_ny_1 & 1 + x_ny_2 & \cdots & 1 + x_ny_n \end{vmatrix}.$$
5. 已知 n 阶方阵 A, B, C 满足 $ABC = E_n$. 是否一定有 $BCA = E_n$?
6. 证明不存在奇数阶的可逆反对称矩阵.

扩展阅读

扩展阅读-哈达马矩阵

定义(哈达马矩阵). 若 n 阶方阵 A 满足任何元素都是 $+1$ 或 -1 且 $AA^T = nE_n$, 则称 A 为 n 阶哈达马矩阵.

例: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 是一个2阶的哈达马矩阵.

哈达马猜想. 对于任何正整数 $k \geq 1$, 存在 $4k$ 阶的哈达马矩阵.

截至目前, 2000以内还不知道是否存在下面阶数的哈达马矩阵:

668, 716, 892, 1132, 1244, 1388, 1436, 1676, 1772, 1916, 1948, 1964.