高等数学
第三章：微分学基本定理及其应用

张道平

南开大学数学科学学院 414

daopingzhang@nankai.edu.cn

极值的概念：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内有定义. 若对任何 $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, 有不等式 $f(x) \le f(x_0)$(或 $f(x) \ge f(x_0)$), 则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的极大值 (或极小值)，点 x_0 称为 $f(x)$ 的极大值点 (或极小值点). 函数的极大值、极小值统称为极值; 极大值点、极小值点统称为极值点. 若 $f'(x_0)=0$，则点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的驻点.

极值的概念：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内有定义. 若对任何 $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, 有不等式 $f(x)\le f(x_0)$(或 $f(x)\ge f(x_0)$), 则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的极大值 (或极小值)，点 x_0 称为 $f(x)$ 的极大值点 (或极小值点). 函数的极大值、极小值统称为极值; 极大值点、极小值点统称为极值点. 若 $f'(x_0)=0$，则点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的驻点.

费马 (Fermat) 定理：设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，且在该邻域内对任意的一点 x 均有 $f(x)\le f(x_0)$(或 $f(x)\ge f(x_0)$), 若 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x_0)=0$. (几何意义?)

罗尔 (Rolle) 定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导，且 $f(a) = f(b)$，则在区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi) = 0$. (几何意义?)

罗尔 (Rolle) 定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导，且 $f(a) = f(b)$，则在区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi) = 0$. (几何意义?)

例：设函数 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$，证明方程 $f'(x) = 0$ 有两个实根，并指出他们所在区间.

罗尔 (Rolle) 定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导，且 $f(a) = f(b)$，则在区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi) = 0$. (几何意义?)

例：设函数 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$，证明方程 $f'(x) = 0$ 有两个实根，并指出他们所在区间.

例：若函数 $f(x)$ 可导，试证在函数 $f(x)$ 的两个互异零点之间一定有方程 $f(x) + f'(x) = 0$ 的根.

罗尔 (Rolle) 定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则在区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi)=0$. (几何意义?)

例：设函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$，证明方程 $f'(x)=0$ 有两个实根，并指出他们所在区间.

例：若函数 $f(x)$ 可导，试证在函数 $f(x)$ 的两个互异零点之间一定有方程 $f(x)+f'(x)=0$ 的根.

拉格朗日 (Lagrange) 中值定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则在区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

拉格朗日中值定理的结论也常写为 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a), \xi\in(a,b)$. 如果令 $\xi=a+\theta(b-a)(0<\theta<1)$, 则上式又可写为 $f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a), \theta\in(0,1)$. 若记 a 为 x, $b-a$ 为 Δx, 则拉格朗日中值定理可写为更便于应用的形式 $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x, \theta\in(0,1)$. 或记为 $\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x, \theta\in(0,1)$. 容易明白，上述各公式对于 $a<b$ 或者 $a>b$ 均成立.

拉格朗日中值定理的结论也常写为
$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\xi\in(a,b)$. 如果令
$\xi=a+\theta(b-a)(0<\theta<1)$, 则上式又可写为
$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a),\theta\in(0,1)$. 若记 a 为 x, $b-a$ 为 Δx, 则拉格朗日中值定理可写为更便于应用的形式 $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\theta\in(0,1)$.
或记为 $\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\theta\in(0,1)$. 容易明白，上述各公式对于 $a<b$ 或者 $a>b$ 均成立.

推论：若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 可导，且恒有 $f'(x)=0$, 则 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内恒为一个常数.

推论：若两个函数 $f(x), g(x)$ 均在开区间 (a, b) 内可导，且恒有 $f'(x) = g'(x)$, 则在区间 (a, b) 内成立
$f(x) = g(x) + C$, C 为常数.

推论：若两个函数 $f(x), g(x)$ 均在开区间 (a, b) 内可导，且恒有 $f'(x) = g'(x)$, 则在区间 (a, b) 内成立 $f(x) = g(x) + C$, C 为常数.

例：证明：当 $0 < a < b$ 时，如下不等式成立:

$$\frac{b-a}{1+b^2} < arctanb - arctana < \frac{b-a}{1+a^2}.$$

推论：若两个函数 $f(x), g(x)$ 均在开区间 (a, b) 内可导，且恒有 $f'(x) = g'(x)$, 则在区间 (a, b) 内成立 $f(x) = g(x) + C$, C 为常数.

例：证明：当 $0 < a < b$ 时，如下不等式成立:

$$\frac{b-a}{1+b^2} < arctanb - arctana < \frac{b-a}{1+a^2}.$$

例：函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f'(x) \neq 1 (0 < x < 1)$, 且 $0 < f(x) < 1$. 试证在 $(0,1)$ 内存在唯一的 x_0, 使得 $f(x_0) = x_0$.

例：证明恒等式 $arcsinx + arccosx = \frac{\pi}{2}, x \in [-1, 1]$.

例：证明恒等式 $arcsinx + arccosx = \frac{\pi}{2}, x \in [-1, 1]$.

例：设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内有二阶导数，且 $f(a) = f(b) = 0$, $f(c) > 0(a < c < b)$. 试证：在 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f''(\xi) < 0$.

例：证明恒等式 $arcsinx + arccosx = \frac{\pi}{2}, x \in [-1, 1]$.

例：设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内有二阶导数，且 $f(a) = f(b) = 0$，$f(c) > 0(a < c < b)$. 试证：在 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f''(\xi) < 0$.

例：设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 试证：在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ, 使得 $e^{\xi-1}[f(\xi) + f'(\xi)] = 1$.

柯西 (Cauchy) 中值定理：设函数 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 可导，且对任意 $x \in (a, b)$, $g'(x) \neq 0$, 则在区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

柯西 (Cauchy) 中值定理：设函数 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 可导，且对任意 $x \in (a, b)$, $g'(x) \neq 0$, 则在区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

例：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可导，且 $0 < a < b$. 试证：在 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使 $f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) ln\frac{b}{a}$.

柯西 (Cauchy) 中值定理：设函数 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 可导，且对任意 $x \in (a, b)$, $g'(x) \neq 0$, 则在区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

例：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可导，且 $0 < a < b$. 试证：在 (a, b) 内至少存在一点 ξ, 使 $f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) ln\frac{b}{a}$.

练习：设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明：至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0$.

练习：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)$. 证明对任意正的常数 λ, 总至少存在互异点 $\xi,\eta\in(a,b)$，使 $f'(\xi)+\lambda f'(\eta)=0$.

练习：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)$. 证明对任意正的常数 λ, 总至少存在互异点 $\xi,\eta\in(a,b)$，使 $f'(\xi)+\lambda f'(\eta)=0$.

练习：求 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{arcsin3x}-e^{3arcsinx}}{\sqrt{9+arcsin3x}-\sqrt{9+3arcsinx}}$.

练习：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)$. 证明对任意正的常数 λ, 总至少存在互异点 $\xi,\eta\in(a,b)$，使 $f'(\xi)+\lambda f'(\eta)=0$.

练习：求 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{arcsin3x}-e^{3arcsinx}}{\sqrt{9+arcsin3x}-\sqrt{9+3arcsinx}}$.

练习：设 $a>e, 0<x<y<\frac{\pi}{2}$, 试证: $a^y-a^x>(cosx-cosy)a^x lna$.