第五章

刚体运动学

§1. 刚体和自由度的概念

质点是作为抽象模型引入的，如问题不涉及转动，或物体的大小对于研究问题并不重要，可以将实际的物体抽象为质点。

“质点”，这就根本谈不上空间中的取向，也根本谈不上转动。问题如涉及转动，就不能不考虑到物体的大小和形状，不能再将物体抽象为质点，不能再采用质点这一模型。当然，我们可以将物体细分成很多部分，每一部分都看成是一个质点，利用各部分之间的位置关系来描述物体的形状和转动，即我们可以利用“质点组”这一模型。但是，一般的质点组力学问题并不能严格解决，我们只能了解其运动的总趋势和某些特征。

- 几种特殊的质点组：

1. 刚体
2. 弹性体
3. 流体

如果需要研究物体的转动，就不能忽略它的形状和大小而把它简化为质点来处理。但如果物体的形状和转动不能忽略，而形变可以忽略，我们就得到实际物体的另外一个抽象模型——刚体（rigid body），即形状和大小完全不变的物体。刚体的这一特点使刚体力学大大不同于一般的质点组力学，刚体力学问题虽不是每个都能解决，但有不少是能解决的。于是我们定义：刚体是这样一种质点组，组内任意两质点间的距离保持不变。

◻刚体模型：

- 刚体是一种理想模型，有形状和大小，但当它受到外力作用时，其各部分的相对位置保持不变——即无形变。

- 实际上就是排除了形状、大小的变化及发生振动的可能性。现实中，很多物体的形变及振动在所研究的问题中可以忽略。因此这一模型具有广泛的现实意义。

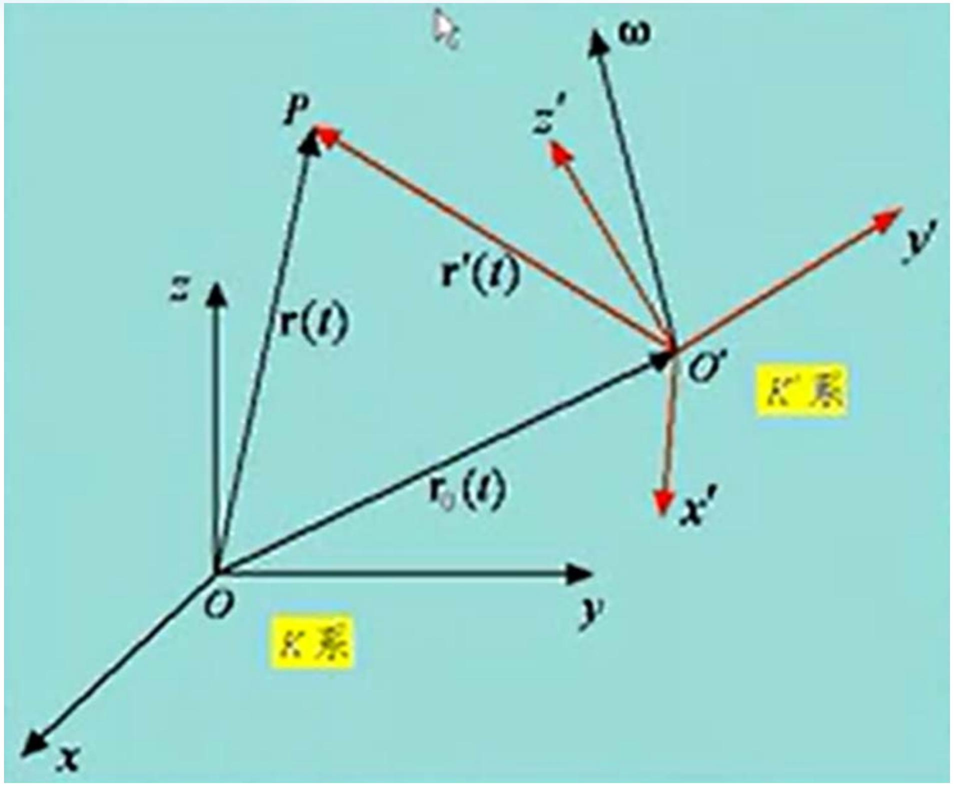
- 我们把确定一个力学体系在空间的几何位形所需要的独立变量的个数称为**自由度**。
- 一个自由的质点显然有三个自由度，n个自由的质点组成的质点组显然有3n个自由度。每个质点有一个矢量的运动方程，n个质点共有n个矢量的运动方程，亦即3n个分量的运动方程，方程的个数与自由度数符合。
- 从原则上讲， 可以从运动方程组解出质点组的运动情况。但大多数的微分方程所组成的微分方程组是很难解出的。质点组力学问题之所以一般不能严格解出，就是由于微分方程个数太多，换句话说，质点组力学的困难在于自由度数太大。

自由度：确定一个物体的位置所需要的独立坐标数。

质点的位置：x，y，z三个空间坐标，3个自由度。

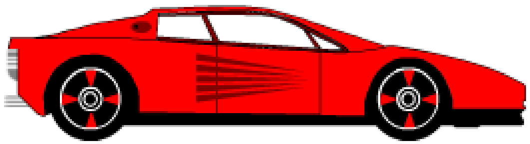
刚体的运动：任意点(质心)的平动＋绕该点的转动

点的平动：3个自由度；绕定点转动：3个自由度（2个取向，1个方位），6个自由度。



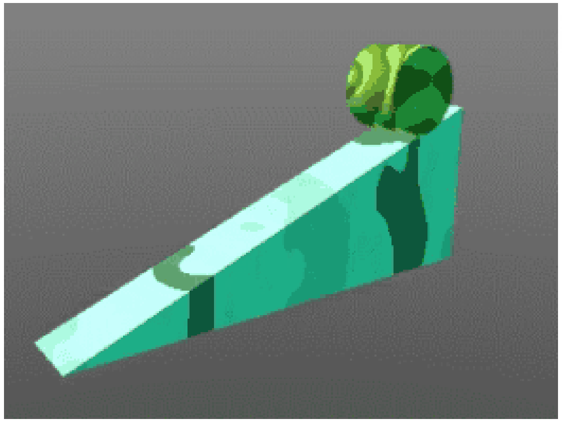
三个平动自由度　　三个转动自由度(2个取向，1个方位)

§ 2. 刚体运动分类

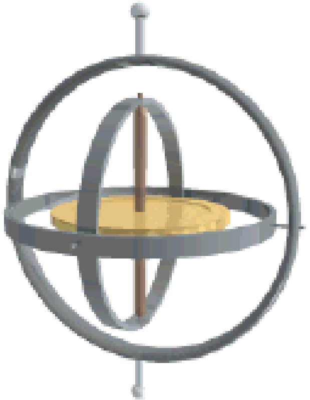


平动：3个平动自由度

定轴转动：1个转动自由度



平面平行滚动：2个平动自由度+1个转动自由度



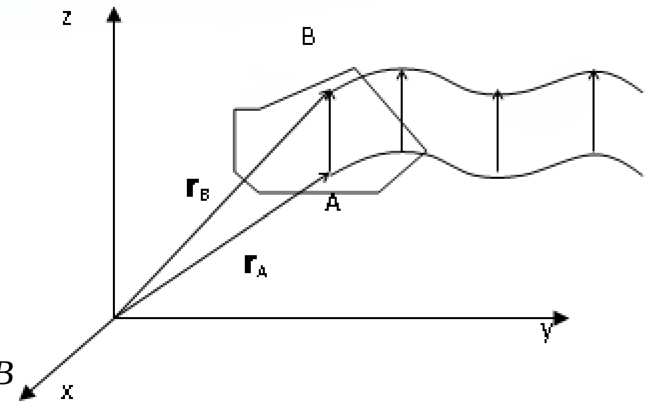
定点运动：3个转动自由度

§ 2. 刚体的平动

- 平动运动过程中，刚体上任意一条直线始终保持和自身平行。
- 平动时，刚体上各点的运动轨迹都相同。因此只要知道某一点的运动状态就知道了整个刚体的运动状态。

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB}$$

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\,\overline{AB}}{dt}$$



$\overline{AB}$ 为常矢量：
$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A, \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{v}_B$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B$$

再对时间求导得：
$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{v}_B}{dt} \qquad \vec{a}_A = \vec{a}_B$$

刚体作平动时，各点的速度和加速度都相同。

- 刚体是由连续分布的质点所组成的质点组，刚体的质心为：

$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r}\, dm}{m} = \frac{\int \vec{r} \rho dv}{\int \rho dv}$$

$$x_C = \frac{\int x dm}{m} = \frac{\int x \rho dv}{\int \rho dv}$$

$$y_C = \frac{\int y dm}{m} = \frac{\int y \rho dv}{\int \rho dv}$$

$$z_C = \frac{\int z dm}{m} = \frac{\int z \rho dv}{\int \rho dv}$$

南开大学 Nankai University

- 说明：

① 刚体的质心相对于刚体，位置不变。只与刚体的形状、大小、质量分布有关。

② 质量均匀分布的对称形状的刚体，其质心在几何中心。

③ 不太大的物体，重力场均匀情况下，质心与重心重合。

④ 质心可能不在刚体上。

- 刚体质心的运动等同于全部质量集中于质心，所受合外力全部作用于质心的质点运动。

- **刚体动量：**

$$\vec{P} = \sum_i \Delta m_i \vec{v}_i = \sum_i \Delta m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

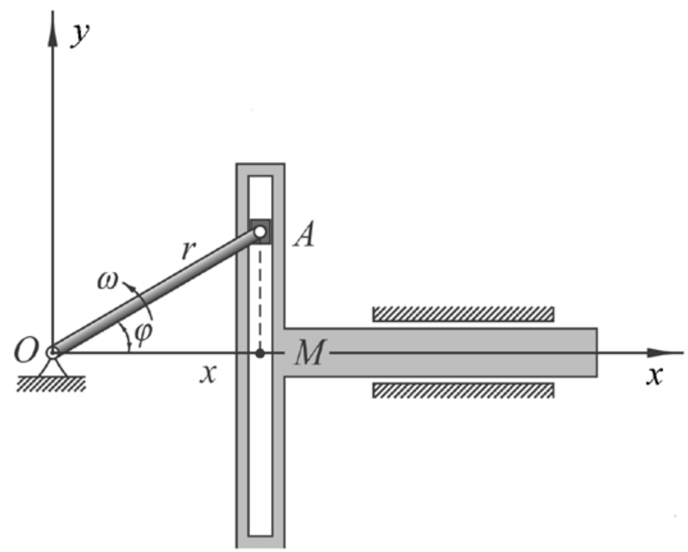
$$= m\frac{d}{dt}(\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i / m) = m\frac{d\vec{r}_C}{dt} = m\vec{v}_C$$

Nankai University

书中例题5.1(P.182)

装置如图，曲柄长度为r，与x轴的夹角 $\varphi=\omega t$，其中 ω 为常量。

求：T形连杆在t时刻的速度和加速度。



书中例题5.1(P.182)

装置如图，曲柄长度为r，与x轴的夹角φ＝ωt，其中ω为常量。

求：T形连杆在t时刻的速度和加速度。

解：T形连杆的运动为平动，

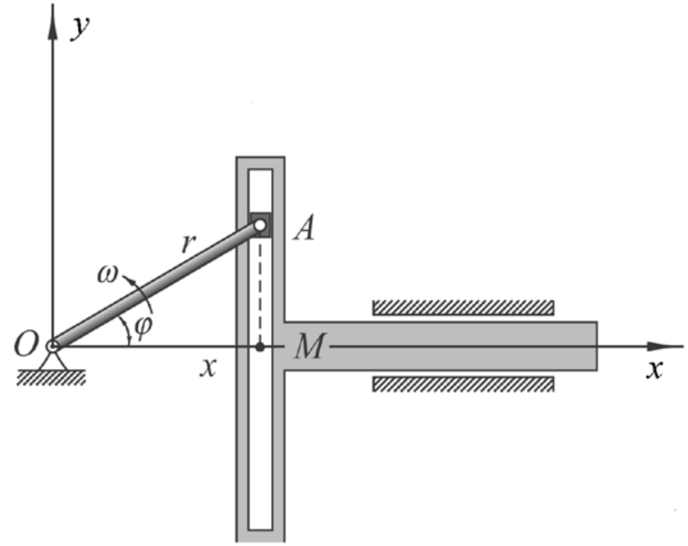
∴连杆上任意点的速度和加速度都相同。以杆上M点为研究对象：

$$x = r\cos\omega t$$

对时间t求导得速度和加速度：

$$v = -r\omega\sin\omega t$$

$$a = -r\omega^2\cos\omega t$$



§3. 刚体绕定轴转动

定轴转动的实例很多：电机转动，开关门，等等。

刚体绕一固定轴转动，转过的角度 θ 称为角位移。

角位移的单位：rad（弧度）；<u>角位移为代数量</u>，

角位移的方向：转动方向右手定则，

符合右手定则的方向为“＋”；反之为“－”

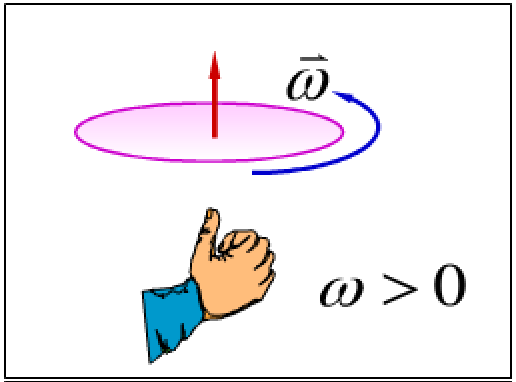
角位移随时间的变化关系表示为：　$\theta = f(t)$

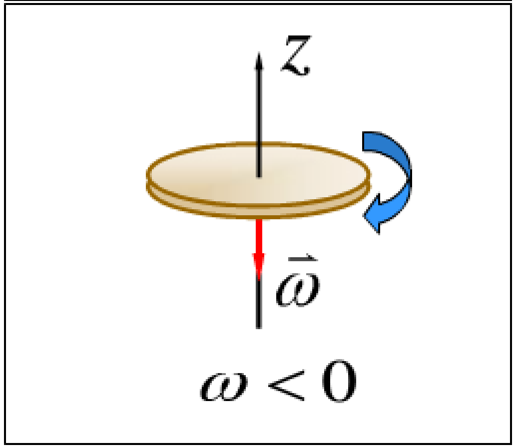
角速度：描述刚体转动快慢的物理量。

单位：rad/s　（弧度/秒）；方向：右手定则，<u>代数量可用矢量标示</u>

角速度是角位移随时间的变化率：

$$\omega = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{df(t)}{dt}$$





角加速度：描述刚体角速度变化快慢的物理量。

单位：rad/s²　（弧度/秒²）；方向：右手定则，<u>代数量可用矢量标示</u>

角加速度是角速度随时间的变化率：

$$\beta = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$$

定轴转动是一维运动，当函数给定后，和直线运动的情况基本相同。

生活中描述转动方向按顺时针(-)和逆时针方向(+)。

物理中描述转动方向按右手定则。

工程上转速的单位经常用：转/分钟 （r/min）

最常用的电机转速为：3000转/分钟

发电机的转速：50转/秒＝3000转/分钟

匀变速转动：

质点匀变速直线运动	刚体绕定轴作匀变速转动
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

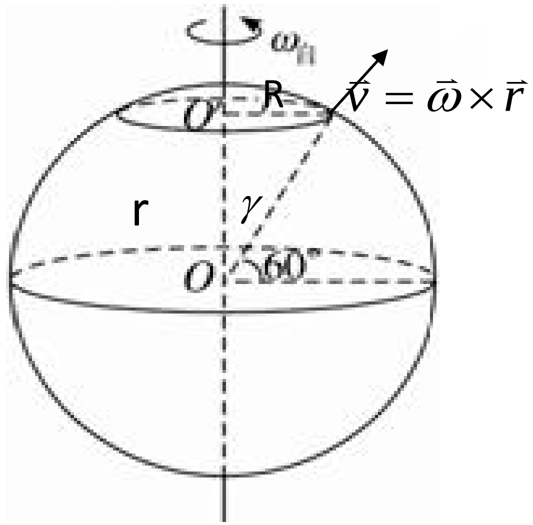
§ 4. 角量与线量的关系

$$\vec{\omega}=\omega\vec{k}$$

$$\vec{\beta}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\frac{d\omega}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\left|\vec{\omega}\times\vec{r}\right|=r\omega\sin\gamma=R\omega$$

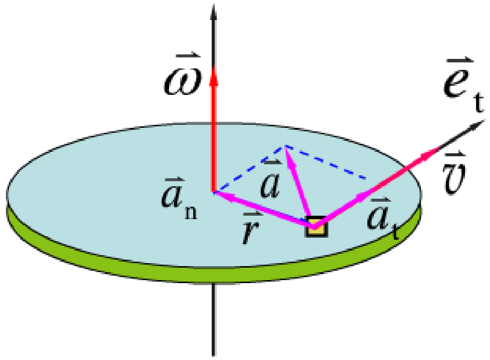


$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a}=\vec{\beta}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n$$

$$a_\tau=\left|\vec{\beta}\times\vec{r}\right|=\beta r\sin\gamma=R\beta$$

$$a_n=\left|\vec{\omega}\times\vec{v}\right|=\omega v=\omega^2 r\sin\gamma=R\omega^2$$



由于刚体没有形变，所以刚体的法向加速度不重要。

考虑方向后：

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \vec{\beta} \times \vec{r}$$

书中例题5.2(P.184)

飞轮的角速度在12s内由1200r/min均匀地增加到3000r/min。

求：（1）飞轮的的角加速度；（2）在这段时间飞轮转过的圈数。

书中例题5.2(P.184)

飞轮的角速度在12s内由1200r/min均匀地增加到3000r/min。

求：（1）飞轮的的角加速度；（2）在这段时间飞轮转过的圈数。

解：先将单位由 转/分 换成 弧度/秒

$\omega_1 = 1200 \times 2\pi/60 = 40\pi$ （rad/s）

$\omega_2 = 3000 \times 2\pi/60 = 100\pi$ （rad/s）

∵匀加速，t＝12s，

∴ $\beta = (\omega_2 - \omega_1)/t = (100-40)\pi/12 = 5\pi$ ＝15.7(rad/s2)

角速度随时间的变化关系可通过β积分和初条件求得：

$$\omega = \int \beta dt = \beta t + c$$

当t＝0时， ω＝ω1

∴ω＝ω1＋βt

角位移随时间的变化关系可通过ω积分和初条件求得：

$$\theta = \int (\omega_1 + \beta t)dt = \omega_1 t + \frac{1}{2}\beta t^2 + c'$$

其中c’由初条件确定。 因为要求的是12s内转过的角度，可令t＝0时， θ＝0，代入得c’＝0

∴

$$\theta = \omega_1 t + \frac{1}{2}\beta t^2 = 40\pi \times 12 + \frac{1}{2} \times 5 \times \pi \times 12^2 = 840\pi (rad)$$

换算成圈数为： $N = \dfrac{840\pi}{2\pi} = 420$ （圈）

作业：P. 191　5.6; 5.7; 5.8; 5.9; 5.10

补充例题一：

一飞轮绕定轴转动，其角坐标与时间的关系为

$\theta = a + bt + ct^3$ 式中，a 、b 、c 均为常量.

试求

（1）飞轮的角速度和角加速度；

（2）距转轴r 处的质点的切向加速度和法向加速度.

解 由角速度的定义，有

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = b + 3ct^2$$

由角加速度的定义，有

$$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 6ct$$

距转轴 r 处的质点的切向加速度为

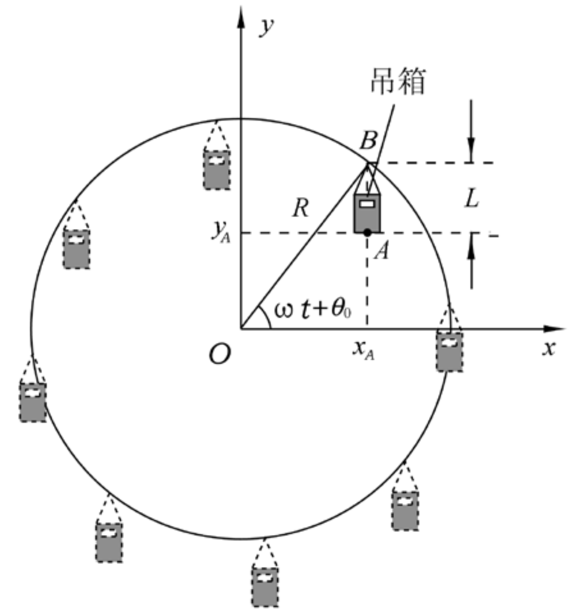
$$a_\tau = r\beta = 6crt$$

法向加速度为

$$a_n = r\omega^2 = r(b + 3ct^2)^2$$

补充例题二：

一大型回转类“观览圆盘”如图所示．圆盘的半径R ＝ ２５ ｍ，供人乘坐的吊箱高度L ＝ ２ ｍ．若大圆盘绕水平轴均速转动，转速为0.1 r/min ．试求：吊箱底部A 点的轨迹及A 点的速度和加速度的大小．

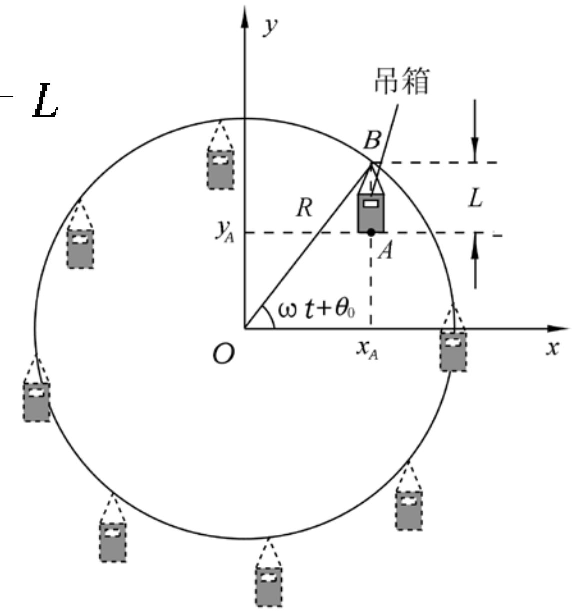


解　建立如图 5-1 所示的坐标系，设 $t=0$ 时，$\overline{OB}$与 x 轴的夹角为 θ_0，则 t 时刻$\overline{OB}$与 x 轴的夹角为 $\omega t+\theta_0$，其中 ω 等于

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{10\times 60}=\frac{\pi}{300}$$

由图示的几何关系有

$$x_A=x_B=R\cos(\omega t+\theta_0)$$
$$y_A=y_B-L=R\sin(\omega t+\theta_0)-L$$



所以，A 点的轨迹为

$$x_A^2 + (y_A + L)^2 = R^2$$

即 A 点的轨迹为半径是 R 的圆，圆心在$(0, -L)$处．

A 点的速度为

$$v_{Ax} = \frac{\mathrm{d}x_A}{\mathrm{d}t} = -R\omega\sin(\omega t + \theta_0)$$

$$v_{Ay} = \frac{\mathrm{d}y_A}{\mathrm{d}t} = R\omega\cos(\omega t + \theta_0)$$

其大小为

$$v_A = \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2} = R\omega = \frac{25\pi}{300} = 0.26\ (\mathrm{m/s})$$

A 点的加速度为

$$a_{Ax} = \frac{\mathrm{d}v_{Ax}}{\mathrm{d}t} = -R\omega^2\cos(\omega t + \theta_0)$$

$$a_{Ay} = \frac{\mathrm{d}v_{Ay}}{\mathrm{d}t} = -R\omega^2\cos(\omega t + \theta_0)$$

其大小为

$$a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2} = R\omega^2 = \frac{25\pi^2}{300^2} = 2.7\times 10^{-3}\,(\mathrm{m/s^2})$$

补充例题三：

一刚体以每分钟６０ 转，绕Z 轴的正方向做匀速转动．设刚体上一点P的位置矢量为$\mathbf{r} = 0.3\,\mathbf{i} + 0.4\,\mathbf{j} + 0.9\,\mathbf{k}$ m
试求P 点的速度和加速度．

解　依题意，该刚体的角速度矢量为

$$\boldsymbol{\omega} = 2\pi \boldsymbol{k}$$

由定轴转动刚体上一点的速度和加速度公式，有

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = 2\pi \boldsymbol{k} \times (0.3\boldsymbol{i} + 0.4\boldsymbol{j} + 0.9\boldsymbol{k})$$

$$= -0.8\pi \boldsymbol{i} + 0.6\pi \boldsymbol{j} \quad (\mathrm{m/s})$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$$

因刚体作匀速转动，$\beta=0$ 代入上式，有

$$\boldsymbol{a} = 2\pi \boldsymbol{k} \times (-0.8\pi \boldsymbol{i} + 0.6\pi \boldsymbol{j})$$

$$= -(1.2\boldsymbol{i} + 1.6\boldsymbol{j})\pi^2$$