# 线性代数-课程总结

- 行列式
- 矩阵
- 线性方程组
- 向量组
- 线性空间
- 线性变换
- 欧式空间
- 二次型

# 1 行列式

# 行列式总结

## 行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \triangleq \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

> 思考：如何用行列式定义说明含有零行的行列式等于0?

## 行列式的性质.

## 行列式按行(列)展开

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \qquad i = 1,2,\cdots n,$$

$$D = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni}, \qquad i = 1,2,\cdots n.$$

行列式的计算：定义、化三角法、按行(列)展开.

# 2 矩阵

# 矩阵总结

## 矩阵的定义与特殊矩阵

- 对称矩阵和反对称矩阵
- 正交矩阵

## 矩阵的运算：加法，数乘，乘法，方幂，转置，方阵行列式.

- 乘法 $A_{m\times s}B_{s\times n} = \left(c_{ij}\right)_{m\times n}$,

  其中$\boldsymbol{c_{ij}} =$ **$\boldsymbol{A}$的第$\boldsymbol{i}$行与$\boldsymbol{B}$的第$\boldsymbol{j}$列对应元素乘积之和.**

- 转置 $(AB)^T = B^T A^T$.
- 行列式 $|AB| = |A||B|$.

思考:为什么$|kA| \neq k|A|$?

# 矩阵总结

可逆矩阵：定义，判定，性质，应用(克拉默法则).

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

分块矩阵：定义，运算(加法，数乘，乘法，转置，分块对角矩阵).

- 乘法 $A = (A_{ij})_{r\times s}, B = (B_{ij})_{s\times t}$且**对$A$列的分法与对$B$行的分法完全一致**. 则

$$AB = (C_{ij})_{r\times t}, \qquad 其中C_{ij} = \sum_{k=1}^{s} A_{ik}B_{kj}.$$

- 列图片. $Ax = (a_1, a_2, \dots, a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$

# 3 线性方程组

# 线性方程组总结

## 矩阵的初等变换

消元法求解线性方程组

$$\Leftrightarrow \text{增广矩阵} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{行阶梯形矩阵} \qquad \text{(消元)}$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{行最简形矩阵} \qquad \text{(回代)}$$

## 矩阵初等变换与矩阵乘法的联系

- 对给定矩阵作一次初(列)等行变换等价于在其左(右)边乘上一个相应的初等矩阵.
- 方阵$A$可逆 $\Leftrightarrow$ $A$可表示成有限个初等矩阵的乘积.
- 同型矩阵$A,B$行相抵 $\Leftrightarrow$ 存在可逆阵$P$使得$B = PA$.
- 初等行变换的应用：求矩阵的逆.

# 线性方程组总结

## 矩阵的秩

- 初等变换不改变矩阵的秩.
- 同型矩阵$A, B$相抵 $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(B)$. （通过相抵标准形证明）
- 秩的9条性质.

$$\max\{R(A), R(B)\} \le R(A, B) \le R(A) + R(B).$$

$$R(A + B) \le R(A) + R(B).$$

$$R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}.$$

## 线性方程组有解判定定理 $Ax = b$

- 有解 $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, b)$.
- 有唯一解 $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, b) = n$.
- 有无穷解 $\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, b) < n$.

思考：$A_{n\times n}x = 0$有非零解 $\Leftrightarrow$ $|A|$?

# 4 向量组的线性相关性

# 向量组的线性相关性总结

## 向量组的线性表示

$$\text{向量组}b_1,\dots,b_n\text{能够由向量组}a_1,\dots,a_m\text{线性表示}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{存在}m\times n\text{矩阵}K\text{使得}B=AK$$

$$\Updownarrow$$

$$R(A)=R(A,B).$$

## 向量组的线性相关性

思考：含有零向量的向量组是否一定线性相关?

- 定义与等价定义.
- 判定定理：$a_1,\dots,a_m$线性相关 $\Leftrightarrow$ $R(a_1,\dots,a_m)<m$.
- 三条重要性质
  - 部分相关，则整体相关.
  - 个数大于维数必相关.
  - 无关变相关，表示必唯一.

# 向量组的线性相关性总结

## 向量组的秩

- 向量组的最大无关组和秩的定义.
- 最大无关组 $\Leftrightarrow$ 极大无关组

  $\Longrightarrow$ 任何两个极大无关组所含向量个数相等.
- **向量组的秩等于矩阵的秩** $\Longrightarrow$ 矩阵的行秩等于矩阵的列秩.
- 初等行变换求向量组的秩以及线性表示关系.

思考：如何利用向量组的秩解释$R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$?

## 线性方程组解的结构

- $A_{m\times n}x = 0$：基础解系的线性组合. $\Longrightarrow$ $R_S = n - R(A)$.
- $A_{m\times n}x = b$：特解 $+$ $Ax = 0$的通解.

# 5 线性空间

# 线性空间总结

## 线性空间的定义和性质

- 1个集合，2种运算(封闭)，8条公理.
- 6条性质.

思考：两个元素的集合能否构成$\mathbb{R}$上的线性空间?

## 基、维数、坐标

- 基 $\Leftrightarrow$ 极大无关组.
- 维数 $\Leftrightarrow$ 极大无关组所含向量个数.
- 坐标 $\Leftrightarrow$ 线性表示的系数.

## 坐标变换

- $P$和$P^{-1}$不要记混!

## 线性子空间

- 子空间判定定理：对加法和数乘封闭.

# 6 线性变换

# 线性变换总结

## 线性变换的定义和性质

- 保持线性运算的变换：$T(kx+\ell y)=kTx+\ell Ty.$
- 像空间Im($T$)与零空间$N_T$.
- Counting Theorem.

## 线性变换的矩阵

- 线性变换与矩阵的一一对应.

思考：什么线性变换在某个基下的矩阵是单位阵?

## 线性变换在不同基下的矩阵

- 同一线性变换在不同基下的矩阵是相似的.
- 反之亦然：两个相似的矩阵必然是某个线性变换在两个不同基下的矩阵.

# 线性变换总结

## 矩阵的特征值和特征向量

- 定义及其几何解释.

> 思考：属于某个特征值的特征向量是唯一的吗?

- 计算方法.
- 性质：$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{Tr}(A)$，$\lambda_1 \cdots \lambda_n = |A|$.
- 属于不同特征值的特征向量必线性无关.
- 应用.
  - 矩阵相似对角化.
  - 人口迁移.
  - 敏感度猜想

# 7 欧式空间

# 欧式空间总结

欧式空间的定义

- 非负性中要求$< \alpha,\alpha > = 0$ 当且仅当 $\alpha = 0_V$.
- Cauchy-Schwarz不等式：$< \alpha,\beta >^2 \leq < \alpha,\alpha > < \beta,\beta >$.

正交向量组

- 两两正交的非零向量称为正交向量组.
- 标准正交基
    - 将内积转化为$\mathbb{R}^n$中的内积.
    - 下的坐标可由内积表达.

Schmidt正交化过程

- 三个向量的情况.

# 欧式空间总结

## 正交矩阵与正交变换

- $AA^T = A^TA = E \iff A$的列向量为标准正交基.
- 正交变换的等价刻画.

思考：在某个基下的矩阵是正交矩阵的变换一定是正交变换吗?

## 实对称矩阵正交对角化

- 谱定理.

# 8 二次型

# 二次型总结

## 二次型的定义

- 二次齐次函数$f(x) = x^T Ax$, 其中$A^T = A$.
- 合同关系.

## 标准形

- Lagrange配方法以及正交对角化法.
- 平方项数与正平方项数唯一.

## 正定二次型

- 定义: $f(x) = x^T Ax > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.
- 等价刻画: 特征值, 正惯性指数, 合同关系, 顺序主子式.

思考：当$t$充分大时，$A + tE$一定是正定二次型吗?

# 二次型总结

二次型的类型

- 负定二次型.
- 半正定二次型.
- 半负定二次型.
- 不定二次型.

思考：为什么所有顺序主子式大于等于0不能保证半正定性?

# 可逆矩阵的刻画

定理(可逆矩阵的充要条件). $n$阶方阵$A$可逆的充要条件:

1. $|A| \neq 0$.
2. $R(A) = n$.
3. $A$的行最简矩阵为$E_n$.
4. $A$能表示成有限个初等矩阵的乘积.
5. $Ax = \mathbf{0}$只有零解.
6. $\forall b \in \mathbb{R}^n$, $Ax = b$都有唯一解.
7. $A$的行(列)向量组线性无关.
8. $A$的行(列)空间为$\mathbb{R}^n$.
9. $A$的所有特征值非0.
10. $A^T A$为正定矩阵.