第二次作业 参考答案

10.9 - 10.15

习题 1.2 A 类

2

（2）解：$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$. $\forall\varepsilon>0$. 取 $N=\left[\frac{1}{4\varepsilon^2}\right]+1$ ，
当 $n>N$ 时，$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon$.
故 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$. 得证。

3

解：由于 $||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|$.
由 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ 知 $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in N^*$ 当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 。
此时有 $||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|<\varepsilon$.
故 $\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|$. 得证。

4

（4）解：$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$.

（6）解：$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{(n+1)(n^2-n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)}{6(n^2-n+1)}$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{6\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{1}{3}$.

5

(1) 解：

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant\frac{1}{|x|}.$$

$$\forall\varepsilon>0,\ 取X=\frac{1}{\varepsilon}>0,\ 当|x|>X\ 时,$$

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leq\frac{1}{|x|}<\varepsilon.$$

$$故\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

(6) 解：

$$|\sqrt{x}-2| = \frac{|x-4|}{\sqrt{x}+2} < \frac{|x-4|}{2}.$$

$\forall \varepsilon > 0,$取$\delta = 2\varepsilon > 0(\delta < 4),$则当$|x-4| < \delta$时,

$|\sqrt{x}-2| < \dfrac{|x-4|}{2} < \varepsilon.$

故 $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x} = 2.$

6

(6) 解：$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}.$

(7) 解：$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(1+x+...+x^{m-1})}{(x-1)(1+x+...+x^{n-1})} = \lim_{x\to 1}\frac{1+x+...+x^{m-1}}{1+x+...+x^{n-1}} = \frac{m}{n}.$

7

(2) 解：

$f(0-0) = \lim_{x\to 0^-}(3x+1) = 1, \quad f(0+0) = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{2x+1} = 1.$

$f(0-0) = f(0+0) = 1,$

故 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 存在, $\lim_{x\to 0} f(x) = 1.$

(4) 解：

$f(0-0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2}.$

$f(0+0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2-\sqrt{4-x}} = \lim_{x\to 0^+}(2+\sqrt{4-x}) = 4.$

$f(0-0) \neq f(0+0)$. 故 $\lim_{x\to 0} f(x)$ 不存在.