线性代数-线性空间

- 线性空间的定义和性质
- 基、维数、坐标
- 坐标变换
- 线性子空间

5.1 线性空间的定义和性质

线性空间的定义

定义(线性空间). 设V是一个非空集合，$\mathbb{R}$是实数域. 定义V上的运算“加法”和“数乘”：

- 加法 $+$ ：$\forall \alpha, \beta \in V$，$\exists$唯一的$\gamma \in V$与之对应，称作$\alpha$与$\beta$的和，记作$\gamma = \alpha + \beta$；
- 数乘 $\cdot$ ：$\forall \alpha \in V, k \in \mathbb{R}$，$\exists$唯一的$\delta \in V$与之对应，称作$k$与$\alpha$的数量积，记作$\delta = k \cdot \alpha$；

若“$+$”和“$\cdot$”满足下面8条公理，则称V关于“$+$”和“$\cdot$”构成$\mathbb{R}$上的线性空间.

- $\forall \alpha, \beta \in V$，$\alpha + \beta = \beta + \alpha$ 加法交换律
- $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$，$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ 加法结合律
- 存在V中的一个元素(记作0)使得$\forall \alpha \in V$，$\alpha + 0 = \alpha$ 零元
- $\forall \alpha \in V$，存在$\beta \in V$使得$\alpha + \beta = 0$ 负元
- $\forall \alpha \in V$，$1 \cdot \alpha = \alpha$ 单位元
- $\forall k, \ell \in \mathbb{R}, \alpha \in V$，$(k\ell) \cdot \alpha = k \cdot (\ell \cdot \alpha)$ 数乘结合律
- $\forall k, \ell \in \mathbb{R}, \alpha \in V$，$(k + \ell) \cdot \alpha = k \cdot \alpha + \ell \cdot \alpha$ 分配律
- $\forall k \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in V$，$k \cdot (\alpha + \beta) = k \cdot \alpha + k \cdot \beta$ 数乘关于加法的分配律

隐含要求：V关于加法和数乘运算封闭.

线性空间的定义

例 1：所有次数不超过n的一元多项式的全体

$$P[x]_n=\{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n|a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}\}$$

关于多项式的加法和数乘构成一个线性空间.

解：给定多项式$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$和$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$,

$$f(x)+g(x)\triangleq(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n.$$

$$k\cdot f(x)\triangleq(ka_0)+(ka_1)x_1+\cdots+(ka_n)x^n.$$

- $P[x]_n$关于多项式的加法和数乘是封闭的.
- 多项式的加法和数乘归结到了实数的加法和乘法，因此满足线性空间的8条公理.

线性空间的定义

例 2：全体$m\times n$实矩阵$\mathbb{R}^{m\times n}$关于矩阵的加法和数乘构成一个线性空间.

解：给定矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}, B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$以及实数$k$,

$$A+B\triangleq\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n}.$$

$$kA\triangleq\left(ka_{ij}\right)_{m\times n}.$$

- 显然$\mathbb{R}^{m\times n}$关于矩阵的加法和数乘是封闭的.
- 根据矩阵加法和数乘的性质，满足线性空间的8条公理.

说明. 当$n=1$时, $\mathbb{R}^{m\times 1}$简记为

$$\mathbb{R}^m=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}\middle| a_1,\dots,a_m\in\mathbb{R}\right\}$$

关于向量的加法和数乘构成一个线性空间.

线性空间的定义

例 3：全体正实数的集合$\mathbb{R}^+=\{a\in\mathbb{R}|a>0\}$上定义如下加法和数乘运算：

- $\forall a,b\in\mathbb{R}^+,\quad a\oplus b=ab.$
- $\forall a\in\mathbb{R}^+,k\in\mathbb{R},\quad k\circ a=a^k.$

则$\mathbb{R}^+$关于$\oplus$与$\circ$构成一个$\mathbb{R}$上的线性空间.

解：

- $a\oplus b=ab=ba=b\oplus a.$
- $(a\oplus b)\oplus c=(ab)\oplus c=abc=a\oplus(bc)=a\oplus(b\oplus c).$
- $a\oplus 1=a.$
- $a\oplus\frac{1}{a}=1.$

线性空间的定义

例 3：全体正实数的集合$\mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} | a > 0\}$上定义如下加法和数乘运算：

解(续)：

- $1 \circ a = a^1 = a$.
- $(k\ell) \circ a = a^{k\ell} = \left(a^\ell\right)^k = k \circ a^\ell = k \circ (\ell \circ a)$.
- $(k+\ell) \circ a = a^{k+\ell} = a^k a^\ell = a^k \oplus a^\ell = (k \circ a) \oplus (\ell \circ a)$.
- $k \circ (a \oplus b) = k \circ (ab) = (ab)^k = a^k b^k = a^k \oplus b^k = (k \circ a) \oplus (k \circ b)$.

说明. 这个例子表明线性空间中的运算不一定是实数的加法和乘法，可以是任何运算规则.

线性空间的定义

例 4：所有$n(\geq 1)$次一元多项式的全体

$$Q[x]_n = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n | a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0\}$$

关于多项式的加法和数乘不构成一个线性空间.

解：$Q[x]_n$关于多项式的加法和数乘不封闭：

$$0 \cdot (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = 0a_0 + (0a_1)x + \cdots + (0a_n)x^n$$

$$= \mathbf{0} \notin Q[x]_n.$$

零多项式

线性空间的定义

例 5: $\mathbb{R}^m=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}\middle| a_1,\dots,a_m\in\mathbb{R}\right\}$关于向量的加法和如下数乘运算∘不构成一个线性空间.

$$k\circ\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\forall\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m.$$

解:数乘运算∘不满足单位元公理:

$$\forall\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m\setminus\{\mathbf{0}\},1\circ\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}=\mathbf{0}\neq\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}.$$

说明. 某个集合关于给定运算是否构成线性空间既取决于给定集合也取决于给定运算.

- 例 1与例 4: 相同的运算, 但集合不同.
- 例 2与例 5: 相同的集合, 但运算不同.

线性空间的定义

总结：1个集合，2种运算，8条公理.

练习.

1. 证明复数集$\mathbb{C}=\{a+bi|a,b\in\mathbb{R}\}$关于复数的加法和数乘构成实数域$\mathbb{R}$上的线性空间.
2. 证明闭区间$[a,b]$上所有连续函数的全体$C[a,b]$关于函数的加法和数乘构成实数域$\mathbb{R}$上的线性空间.

$$(f+g)x \triangleq f(x)+g(x).$$

$$(k\cdot f)x \triangleq kf(x).$$

线性空间的性质

性质 1: **零元是唯一的.**

证明. 设V有两个零元0_1和0_2. 则对任何$\alpha \in V$, 有

$$\alpha + 0_1 = \alpha \quad (1)$$

$$\alpha + 0_2 = \alpha \quad (2)$$

特别地,

- (1)式对$\alpha = 0_2$成立: $0_2 + 0_1 = 0_2$
- (2)式对$\alpha = 0_1$成立: $0_1 + 0_2 = 0_1$

故$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2$. ■

线性空间的性质

性质 2: **负元是唯一的.**

证明. 设$\beta,\gamma \in V$都是$\alpha \in V$的负元. 则

$$\alpha+\beta=0 \text{且} \alpha+\gamma=0.$$

故

$$\begin{aligned}\beta &= \beta+0=\beta+(\alpha+\gamma) && \text{假设和零元}\\ &=(\beta+\alpha)+\gamma && \text{加法结合律}\\ &=(\alpha+\beta)+\gamma && \text{加法交换律}\\ &=0+\gamma=\gamma. && \text{假设和零元}\end{aligned}$$

性质得证. ■

记号. 用$-\alpha$表示α的负元.

线性空间的性质

性质 3： $\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}, -\boldsymbol{\alpha}=(-\mathbf{1})\cdot\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{k}\cdot\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}=\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}$.

证明.

$$\begin{aligned}\alpha+0\cdot\alpha &= 1\cdot\alpha+0\cdot\alpha && \text{单位元}\\ &=(1+0)\cdot\alpha && \text{分配律}\\ &=1\cdot\alpha\\ &=\alpha. && \text{单位元}\end{aligned}$$

两边同时加上$-\alpha$得

$$0\cdot\alpha=0_V.$$

线性空间的性质

性质 3： $\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}_V$， $-\boldsymbol{\alpha}=(-\mathbf{1})\cdot\boldsymbol{\alpha}$， $\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{0}_V=\mathbf{0}_V$.

证明.

$$\begin{aligned}\alpha+(-1)\cdot\alpha &= 1\cdot\alpha+(-1)\cdot\alpha && \text{单位元}\\ &= \big(1+(-1)\big)\cdot\alpha && \text{分配律}\\ &= 0\cdot\alpha\\ &= 0_V.\end{aligned}$$

由负元的唯一性,

$$-\alpha=(-1)\cdot\alpha.$$

线性空间的性质

性质 3: $\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}_V, -\boldsymbol{\alpha}=(-\mathbf{1})\cdot\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{k}\cdot\mathbf{0}_V=\mathbf{0}_V$.

证明. 取$\alpha\in V$. 则

$$
\begin{aligned}
k\cdot 0_V &= k\cdot(0\cdot\alpha) && \text{性质 3}\\
&= (k0)\cdot\alpha && \text{结合律}\\
&= 0\cdot\alpha\\
&= 0_V. && \blacksquare
\end{aligned}
$$

线性空间的性质

性质 4：$\boldsymbol{k\cdot\alpha = 0_V}$，则$\boldsymbol{k = 0}$或$\boldsymbol{\alpha = 0_V}$.

证明. 若$k = 0$，则结论成立，故假设$k \neq 0$.

$$在k\cdot\alpha = 0_V两边同时用\frac{1}{k}数乘:$$

$$\frac{1}{k}\cdot(k\cdot\alpha) = \frac{1}{k}\cdot 0_V$$

由性质 3,

$$\alpha = 0_V. \qquad \blacksquare$$

线性空间的性质

定义(减法). 设V是一个线性空间. 任给$\alpha, \beta \in V$,

定义α与β的差为

$$\alpha - \beta \triangleq \alpha + (-\beta),$$

其中$-\beta$为β的负元.

线性空间的性质

性质 5: $(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\ell})\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{\alpha}.$

证明.

$$
\begin{aligned}
(k-\ell)\cdot\alpha &= \big(k+(-\ell)\big)\cdot\alpha \\
&= k\cdot\alpha+(-\ell)\cdot\alpha && \text{分配律} \\
&= k\cdot\alpha+(-1\ell)\cdot\alpha \\
&= k\cdot\alpha+(-1)\cdot(\ell\cdot\alpha) && \text{数乘结合律} \\
&= k\cdot\alpha+(-(\ell\cdot\alpha)) && \text{负元性质} \\
&= k\cdot\alpha-\ell\cdot\alpha. && \text{减法定义}
\end{aligned}
$$

性质得证. ■

线性空间的性质

性质 6：$\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\beta}.$

证明. 练习. ■

5.2 基、维数、坐标

基、维数、坐标

定义(线性空间中的线性相关性). 设V是一个线性空间，$\alpha_1, \dots, \alpha_r \in V$. 若存在不全为0的实数$k_1, \dots, k_r$使得$k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r = 0_V$，则称$\alpha_1, \dots, \alpha_r$线性相关；否则称$\alpha_1, \dots, \alpha_r$线性无关.

说明.

- $k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r = 0_V$中+是$V$中的加法，$k_i\alpha_i$是$V$中的数乘.
- $\alpha_1, \dots, \alpha_r$线性无关：$k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r = 0_V \Longrightarrow k_1 = \cdots = k_r = 0$.

例 1：$C[0,2\pi]$中函数$1, \cos 2t, \cos^2 t$线性相关.

解：根据三角公式，$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$. 故

$$1 + \cos 2t - 2\cos^2 t = \mathbf{0}.$$

所以，$1, \cos 2t, \cos^2 t$线性相关.

基、维数、坐标

例 2：$P[x]_2$中

（1） 多项式$1, x, x^2$线性无关.

（2） 多项式$1, 1+x, 2x^2$线性无关.

解：（1）设$a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2 = \mathbf{0}$. $\Rightarrow$ $a_0 = a_1 = a_2 = 0$.

零多项式

（2）令$a_0 1 + a_1(1+x) + a_2(2x^2) = \mathbf{0}$. 则

$$(a_0+a_1)1 + a_1 x + 2a_2 x^2 = \mathbf{0}.$$

由（1），$a_0 + a_1 = 0, a_1 = 0, 2a_2 = 0,$

$$从而 a_0 = a_1 = a_2 = 0.$$

说明. 向量组之间的线性表示与等价也可以完全类似地推广到抽象的线性空间中去.

基、维数、坐标

定义(基与维数). 设V是一个线性空间. 若$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V$满足

- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$线性无关;
- V中任一元素均可由$\alpha_1, \dots, \alpha_n$线性表示;

则称$\alpha_1, \dots, \alpha_n$是$V$的一个基; 而$n$称为$V$的维数, 记为$\dim(V) = n$.

例 1: 标准单位向量$e_1, \dots, e_n$是$\mathbb{R}^n$的一个基, 从而$\mathbb{R}^n$是n维的.

例 2: 多项式$1, x, x^2$是$P[x]_2$的一个基, 从而$P[x]_2$是3维的.

思考: $\dim(P[x]_n) =?$

基、维数、坐标

例 3：矩阵$A_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},A_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},A_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},A_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$是$\mathbb{R}^{2\times 2}$的一个基，从而$\mathbb{R}^{2\times 2}$是4维的.

解:

- $k_{11}A_{11}+k_{12}A_{12}+k_{21}A_{21}+k_{22}A_{22}=O_{2\times 2}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}\\k_{21}&k_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow k_{ij}=0,1\le i,j\le 2.$$

故$A_{11},A_{12},A_{21},A_{22}$线性无关.

- 任一矩阵$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$有$A=aA_{11}+bA_{12}+cA_{21}+dA_{22}$.

思考：$\dim(\mathbb{R}^{m\times n})=?$

基、维数、坐标

定义(坐标). 设V是一个线性空间，$\alpha_1,\dots,\alpha_n \in V$是$V$的基. 任何$\alpha \in V$可由$\alpha_1,\dots,\alpha_n$线性表示:

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n.$$

从而α对应n维向量$x \triangleq \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. 称$x$为$\alpha$在$\alpha_1,\dots,\alpha_n$下的坐标.

说明. **坐标是唯一的.**

设$\begin{cases} \alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n \\ \alpha = y_1\alpha_1 + \cdots + y_n\alpha_n \end{cases}$. 则$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = y_1\alpha_1 + \cdots + y_n\alpha_n \quad (*)$

在(*)两边同时加上$-y_1\alpha_1,\dots,-y_n\alpha_n$得:

$$[x_1\alpha_1 + (-y_1\alpha_1)] + \cdots + [x_n\alpha_n + (-y_n\alpha_n)] = \mathbf{0}.$$

由**线性空间性质 5**,

$$(x_1 - y_1)\alpha_1 + \cdots + (x_n - y_n)\alpha_n = \mathbf{0}.$$

因$\alpha_1,\dots,\alpha_n$线性无关，$x_i = y_i, 1 \le i \le n$.

基、维数、坐标

例 1: $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$在$e_1,\dots,e_n$的坐标为$x$.

例 2: $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$在$A_{11},A_{12},A_{21},A_{22}$的坐标为$\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}$.

例 3: $f=a_0+a_1x+a_2x^2\in P[x]_2$在

- 基$1,x,x^2$下的坐标为$\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix}$.
- 基$1,1+x,2x^2$下的坐标为: $\begin{pmatrix}a_0-a_1\\ a_1\\ a_2/2\end{pmatrix}$

$$f=a_0+a_1x+a_2x^2=(a_0-a_1)+a_1(1+x)+\frac{a_2}{2}(2x^2).$$

基、维数、坐标

练习：$P[x]_3$中

（1）证明$2, 2+x, x+x^2, x^2+x^3$是$P[x]_3$的一个基.

（2）求$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$在$2, 2+x, x+x^2, x^2+x^3$下的坐标.

基、维数、坐标

直观理解.

- 基是坐标轴.
- 维数是坐标轴的个数.
- 坐标是向量在坐标轴上的分量大小.

5.3 坐标变换

坐标变换

$$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in P[x]_2 \text{在}$$

- 基$1, x, x^2$下的坐标为 $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

- 基$1, 1 + x, 2x^2$下的坐标为 $\begin{pmatrix} a_0 - a_1 \\ a_1 \\ a_2/2 \end{pmatrix}$.

问题: 同一向量在不同基下的坐标有怎么样的联系?

坐标变换

定义(过渡矩阵). 设$\alpha_1,\alpha_2 \dots,\alpha_n$与$\beta_1,\beta_2 \dots,\beta_n$是线性空间$V$的两个基. 则每个$\beta_i$可由$\alpha_1,\dots,\alpha_n$线性表示:

$$\begin{cases}\beta_1 = p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + \cdots + p_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + \cdots + p_{n2}\alpha_n \\ \qquad\qquad\vdots \\ \beta_n = p_{1n}\alpha_1 + p_{2n}\alpha_2 + \cdots + p_{nn}\alpha_n\end{cases}.$$

称$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}$为由基$\alpha_1,\alpha_2 \dots,\alpha_n$到基$\beta_1,\beta_2 \dots,\beta_n$的过渡矩阵.

说明. P的第i列是β_i由$\alpha_1,\dots,\alpha_n$线性表示的系数.

坐标变换

定义(过渡矩阵). 设$\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$与$\beta_1, \beta_2 \dots, \beta_n$是线性空间$V$的两个基. 则每个$\beta_i$可由$\alpha_1, \dots, \alpha_n$线性表示:

$$\begin{cases} \beta_1 = p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + \cdots + p_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + \cdots + p_{n2}\alpha_n \\ \qquad \vdots \\ \beta_n = p_{1n}\alpha_1 + p_{2n}\alpha_2 + \cdots + p_{nn}\alpha_n \end{cases}.$$

将$\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$作成形式行向量$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$，$\beta_1, \beta_2 \dots, \beta_n$作成形式行向量$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$，则上式可写成

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)P. \qquad (*)$$

坐标变换

形式等式$(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)P$可以按照普通矩阵等式使用：

设$\gamma\in V$. 则γ可由$\beta_1,\dots,\beta_n$线性表示为

$$\begin{aligned}\gamma &= x_1\beta_1+\cdots+x_n\beta_n\\ &=(\beta_1,\dots,\beta_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\\ &=[(\alpha_1,\dots,\alpha_n)P]\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\\ &=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\left[P\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right].\end{aligned}$$

利用形式等式替换

含义. **若$\boldsymbol{\gamma}$在$\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_n$下的坐标为$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_n\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{\gamma}$在$\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标为$\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$.**

坐标变换

含义. **若$\boldsymbol{\gamma}$在$\boldsymbol{\beta_1, \dots, \beta_n}$下的坐标为$\boldsymbol{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$, 则$\boldsymbol{\gamma}$在$\boldsymbol{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$下的坐标为$\boldsymbol{Px}$.**

证明.
$$\begin{aligned}\gamma &= x_1\beta_1 + \cdots + x_n\beta_n \\ &= x_1(p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + \cdots + p_{n1}\alpha_n) + \cdots + x_n(p_{1n}\alpha_1 + p_{2n}\alpha_2 + \cdots + p_{nn}\alpha_n) \\ &= (x_1p_{11} + \cdots + x_np_{1n})\alpha_1 + \cdots + (x_1p_{n1} + \cdots + x_np_{nn})\alpha_n.\end{aligned}$$

因此γ在$\alpha_1, \dots, \alpha_n$下的坐标为

$$\begin{pmatrix} x_1p_{11} + \cdots + x_np_{1n} \\ \vdots \\ x_1p_{n1} + \cdots + x_np_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (p_{11}, \dots, p_{1n})\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \vdots \\ (p_{n1}, \dots, p_{nn})\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Px. \qquad \blacksquare$$

坐标变换

性质. **过渡矩阵是可逆的.**

证明. 注意到$x_1\beta_1+\cdots+x_n\beta_n=(\beta_1,\ldots,\beta_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)Px.$

- $x_1\beta_1+\cdots+x_n\beta_n=0 \Leftrightarrow (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)Px=0$

  $\Leftrightarrow \ Px=0$ **$\boldsymbol{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$线性无关**

- 因$\beta_1,\ldots,\beta_n$线性无关， $x_1\beta_1+\cdots+x_n\beta_n=0 \Leftrightarrow x_1=\cdots=x_n=0.$

  从而， $Px=0$只有零解， 即P可逆. ■

思考：若$\alpha_1,\alpha_2\ldots,\alpha_n$到$\beta_1,\beta_2\ldots,\beta_n$的过渡矩阵为$P$， $\beta_1,\beta_2\ldots,\beta_n$到$\alpha_1,\alpha_2\ldots,\alpha_n$的过渡矩阵是什么?

坐标变换

定理(坐标变换公式). 设$\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n}$与$\boldsymbol{\beta_1, \beta_2 \dots, \beta_n}$是线性空间$\boldsymbol{V}$的两个基且$\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n}$到$\boldsymbol{\beta_1, \beta_2 \dots, \beta_n}$的过渡矩阵为$\boldsymbol{P}$. 若$\boldsymbol{\gamma} \in \boldsymbol{V}$在$\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n}$下的坐标为$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_n} \end{pmatrix}$, 在$\boldsymbol{\beta_1, \beta_2 \dots, \beta_n}$下的坐标为$\boldsymbol{x'} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x'_n} \end{pmatrix}$.

则

$$\boldsymbol{x' = P^{-1}x} \ \text{或} \ \boldsymbol{x = Px'}.$$

证明. $\gamma = x'_1\beta_1 + \cdots + x'_n\beta_n = (\beta_1, \dots, \beta_n)\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$

$= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)Px'.$

由**坐标唯一性**, $x = Px'.$

因P可逆, $x' = P^{-1}x$ ■

坐标变换

例 1：求$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in P[x]_2$在基$1, 1 + x, 2x^2$下的坐标.

解：$f = a_0 + a_1x + a_2x^2$在基$1, x, x^2$下的坐标为$x = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

- 基$1, x, x^2$到基$1, 1 + x, 2x^2$的过渡矩阵为$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，从而

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|}P^* = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 由**坐标变换公式**，f在基$1, 1 + x, 2x^2$下的坐标为$P^{-1}x = \begin{pmatrix} a_0 - a_1 \\ a_1 \\ a_2/2 \end{pmatrix}$.

说明. 该题使用坐标变换比“凑系数”方法复杂，但坐标变换给出了系统的方法，可用于更复杂的情况.

坐标变换

例 2：设$\mathbb{R}^3$中有两个基：$a_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$与$b_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, b_2=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}, b_3=\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}$.

(a) 求a_1,a_2,a_3到b_1,b_2,b_3的过渡矩阵.

(b) 设α在a_1,a_2,a_3下的坐标为$\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$，求$\alpha$在$b_1,b_2,b_3$下的坐标.

解：(a) 利用自然基e_1,e_2,e_3作为桥梁.

$$(a_1,a_2,a_3)=(e_1,e_2,e_3)A,\ \text{其中}A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}. \tag{1}$$

$$(b_1,b_2,b_3)=(e_1,e_2,e_3)B,\ \text{其中}B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix}. \tag{2}$$

在(1)式两边同时右乘A^{-1}：$(e_1,e_2,e_3)=(a_1,a_2,a_3)A^{-1}$ (3)

将(3)式代入(2)得

$$(b_1,b_2,b_3)=(a_1,a_2,a_3)A^{-1}B.$$

故a_1,a_2,a_3到b_1,b_2,b_3的过渡矩阵为$P=A^{-1}B$.

坐标变换

例 2：设$\mathbb{R}^3$中有两个基: $a_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$与$b_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, b_2=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}, b_3=\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}$.

(a) 求a_1,a_2,a_3到b_1,b_2,b_3的过渡矩阵.

(b) 设α在a_1,a_2,a_3下的坐标为$\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$, 求$\alpha$在$b_1,b_2,b_3$下的坐标.

解(续)：(a) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix}$.

$$(A,B)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&3\\0&1&1&2&3&7\\0&0&1&1&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&-1&-1&-4\\0&1&0&1&0&6\\0&0&1&1&3&1\end{pmatrix}.$$

故$P=\begin{pmatrix}-1&-1&-4\\1&0&6\\1&3&1\end{pmatrix}$.

(b) $P^{-1}=\begin{pmatrix}-18&-11&-6\\5&3&2\\3&2&1\end{pmatrix}$. 由坐标变换公式，$\alpha$在$b_1,b_2,b_3$下的坐标为$P^{-1}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\-3\\-2\end{pmatrix}$.

坐标变换

练习：求$\gamma=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$在基$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$下的坐标.

5.4 线性子空间

线性子空间

定义(线性子空间). 设V是一个线性空间, $\emptyset \neq W \subseteq V$. 若$W$关于$V$的加法和数乘运算也构成一个线性空间，则称$W$是$V$的子空间.

定理(线性子空间判定定理). **设$\boldsymbol{V}$是一个线性空间，$\emptyset \neq \boldsymbol{W} \subseteq \boldsymbol{V}$.**

$\boldsymbol{W}$是$\boldsymbol{V}$的子空间 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{W}$关于$\boldsymbol{V}$的加法和数乘运算封闭.

证明. 必要性显然. 下证充分性.

假设W关于V的加法和数乘运算封闭.

- 线性空间定义中的8条公理除零元和负元外都具有遗传性.
- 负元：因W关于数乘封闭，对于任意$\alpha \in W$，$-\alpha = (-1)\alpha \in W$.
- 零元：因W非空，可以选取$\alpha \in W$. 又W关于加法封闭,

$$0_V = \alpha + (-\alpha) \in W.$$

故W是V的子空间. ■

线性子空间

例 1：设V是一个线性空间．则V和$\{0_V\}$是V的子空间(称为V的平凡子空间)．

思考：$\mathbb{R}^2$的非平凡子空间是什么?

例 2：设A是$m \times n$矩阵．则$S = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$是$\mathbb{R}^n$的子空间(为什么?)．

线性子空间

例 3：设V是一个线性空间，$\alpha_1, \dots, \alpha_r \in V$． 则

$$L = \{k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r | k_1, \dots, k_r \in \mathbb{R}\}.$$

是V的子空间，称作由$\alpha_1, \dots, \alpha_r$生成的子空间，记作$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$.

证明. 由**线性子空间判定定理**，验证L对加法和数乘封闭.

- 设$\beta = k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r \in L$，$\gamma = \ell_1\alpha_1 + \cdots + \ell_r\alpha_r \in L$. 则

$$\beta + \gamma = (k_1 + \ell_1)\alpha_1 + \cdots + (k_r + \ell_r)\alpha_r \in L.$$

- 任给$\lambda \in \mathbb{R}$，$\lambda\beta = (\lambda k_1)\alpha_1 + \cdots + (\lambda k_r)\alpha_r \in L$. ■

特别地，$S = \{A_{m\times n}x | x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$是$\mathbb{R}^m$的子空间：$S$是由$A$的列向量生成的子空间.

线性子空间

定理(生成子空间相等判定). **设$\boldsymbol{V}$是一个线性空间，$\boldsymbol{\alpha_1, \dots, \alpha_r \in V}$且$\boldsymbol{\beta_1, \dots, \beta_s \in V}$. 则**

$$\boldsymbol{L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = L(\beta_1, \dots, \beta_s) \iff \alpha_1, \dots, \alpha_r}\text{与}\boldsymbol{\beta_1, \dots, \beta_s}\text{等价}.$$

证明. **必要性.** 任何$\alpha_i \in L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = L(\beta_1, \dots, \beta_s)$, 即$\alpha_i$可由$\beta_1, \dots, \beta_s$线性表示. 同理，$\beta_j$可由$\alpha_1, \dots, \alpha_r$线性表示. 所以$\alpha_1, \dots, \alpha_r$与$\beta_1, \dots, \beta_s$等价.

充分性. 任取$\gamma \in L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. 则$\gamma$可由$\alpha_1, \dots, \alpha_r$线性表示，又$\alpha_1, \dots, \alpha_r$可由$\beta_1, \dots, \beta_s$线性表示，故由**线性表示的传递性**, γ可由$\beta_1, \dots, \beta_s$线性表示. 这表明$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \subseteq L(\beta_1, \dots, \beta_s)$. 同理，$L(\beta_1, \dots, \beta_s) \subseteq L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. ■

线性子空间

定理(生成子空间维数公式). **设$\boldsymbol{V}$是一个线性空间，$\boldsymbol{\alpha_1,\dots,\alpha_r}\in\boldsymbol{V}$. 则**

$$\mathbf{dim}\big(\boldsymbol{L(\alpha_1,\dots,\alpha_r)}\big)=\ \boldsymbol{\alpha_1,\dots,\alpha_r}\text{**的秩**}.$$

证明. 令$\beta_1,\dots,\beta_s$是$\alpha_1,\dots,\alpha_r$的最大无关组.

- 则$\beta_1,\dots,\beta_s$与$\alpha_1,\dots,\alpha_r$等价.
- 由**生成子空间相等判定定理**，$L(\alpha_1,\dots,\alpha_r)=L(\beta_1,\dots,\beta_s)$.
- 由基和维数的定义，$\dim\big(L(\beta_1,\dots,\beta_s)\big)=s$.
- 故$\dim\big(L(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\big)=\dim\big(L(\beta_1,\dots,\beta_s)\big)=s$. ■

练习. 设$a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$; $b_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\3\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

证明 $L(a_1,a_2)=L(b_1,b_2)$.

线性空间总结

线性空间总结

难点.

- 线性空间的定义：1个集合，2种运算，8条公理.
- 线性空间的性质.
- 生成子空间维数公式.

重点.

- 线性空间以及子空间的判定.
- 基、维数、坐标的概念.
- 利用坐标变换公式求坐标.

线性空间总结

1. 设S_n是所有n阶对称阵的集合．证明S_n关于矩阵的加法和数乘构成一个线性空间并求$\dim(S_n)$.
2. 给定$\mathbb{R}^3$中的3个向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$满足什么条件时$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$是2维的?用几何语言描述该条件.
3. 在$P[x]_3$中有两个基:

$$\alpha_1 = x^3 + 2x^2 - x, \alpha_2 = x^3 - x^2 + x + 1,$$

$$\alpha_3 = -x^3 + 2x^2 + x + 1, \alpha_4 = -x^3 - x^2 + 1;$$

$$\beta_1 = 2x^3 + x^2 + 1, \beta_2 = x^2 + 2x + 2,$$

$$\beta_3 = -2x^3 + x^2 + x + 2, \beta_4 = x^3 + 3x^2 + x + 2.$$

已知$f \in P[x]_3$在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，求$f$在$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$下的坐标.