高等数学
第三章：微分学基本定理及其应用

张道平

南开大学数学科学学院 414

daopingzhang@nankai.edu.cn

3. 泰勒 (Taylor) 公式

3.1 泰勒公式及麦克劳林公式

3.1 泰勒公式及麦克劳林公式

泰勒 (Taylor) 定理：若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有 n 阶导数，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=o[(x-x_0)^n](x\to x_0)$. 即 $R_n(x)$ 是比 $(x-x_0)^n$ 高阶的无穷小, 称为佩亚诺 (Peano) 余项.

3.1 泰勒公式及麦克劳林公式

泰勒 (Taylor) 定理：若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有 n 阶导数，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=o[(x-x_0)^n](x\to x_0)$. 即 $R_n(x)$ 是比 $(x-x_0)^n$ 高阶的无穷小, 称为佩亚诺 (Peano) 余项.

当 $x_0=0$ 时，有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n),$$

此式称为 n 阶带佩亚诺余项的麦克劳林 (Maclaurin) 公式.

注：带佩亚诺余项的泰勒展开是唯一的. n 次多项式在点 x_0 处的 n 阶 (带佩亚诺余项的) 泰勒公式.

注：带佩亚诺余项的泰勒展开是唯一的. n 次多项式在点 x_0 处的 n 阶 (带佩亚诺余项的) 泰勒公式.

泰勒中值定理：若函数 $f(x)$ 在 x_0 点某个开区间 (a,b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数，则对任一 $x \in (a,b)$，$f(x)$ 可表示为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x).$$

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$($\xi$ 介于 x 与 x_0 之间)，称为拉格朗日余项.

3. 泰勒 (Taylor) 公式

注：带佩亚诺余项的泰勒展开是唯一的. n 次多项式在点 x_0 处的 n 阶 (带佩亚诺余项的) 泰勒公式.

泰勒中值定理：若函数 $f(x)$ 在 x_0 点某个开区间 (a, b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数，则对任一 $x \in (a, b)$，$f(x)$ 可表示为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x).$$

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$($\xi$ 介于 x 与 x_0 之间)，称为拉格朗日余项.

泰勒中值定理是拉格朗日中值定理的推广.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

这里，$(0 < \theta < 1)$. 此式称为 n 阶带拉格朗日余项的麦克劳林公式. 误差估计.

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

这里，$(0<\theta<1)$. 此式称为 n 阶带拉格朗日余项的麦克劳林公式. 误差估计.

3.2 函数展开成泰勒公式的直接法和间接法

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

这里，$(0 < \theta < 1)$. 此式称为 n 阶带拉格朗日余项的麦克劳林公式. 误差估计.

3.2 函数展开成泰勒公式的直接法和间接法

典型函数的麦克劳林展开.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

这里，$(0 < \theta < 1)$. 此式称为 n 阶带拉格朗日余项的麦克劳林公式. 误差估计.

3.2 函数展开成泰勒公式的直接法和间接法

典型函数的麦克劳林展开.

例：求 e^{-x^2} 的麦克劳林展开式.

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

这里，$(0<\theta<1)$. 此式称为 n 阶带拉格朗日余项的麦克劳林公式. 误差估计.

3.2 函数展开成泰勒公式的直接法和间接法

典型函数的麦克劳林展开.

例：求 e^{-x^2} 的麦克劳林展开式.

例：求 $ln(2-3x+x^2)$ 的麦克劳林展开式.

3.3 泰勒公式的应用

3.3 泰勒公式的应用

例：求 $\lim_{x\to 0} \frac{cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

3.3 泰勒公式的应用

例：求 $\lim_{x\to 0} \frac{cosx - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

例：试计算 $sin10^o$ 的近似值，要求精确到 10^{-4}.

3.3 泰勒公式的应用

例：求 $\lim_{x\to 0} \frac{cosx-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

例：试计算 $sin 10^o$ 的近似值，要求精确到 10^{-4}.

例：求 $f(x) = x^2 ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 100 阶导数值.

3.3 泰勒公式的应用

例：求 $\lim_{x\to 0}\frac{cosx-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

例：试计算 $sin 10^o$ 的近似值，要求精确到 10^{-4}.

例：求 $f(x)=x^2 ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 100 阶导数值.

例：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且其最大值在 $(0,1)$ 内达到，$max_{x\in[0,1]}f(x)=\frac{1}{4}$, $|f''(x)|\le 1$. 试证 $|f(0)|+|f(1)|<1$.

例：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，$f'(a)=f'(b)=0$,
试证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

例：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，$f'(a)=f'(b)=0$，试证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

练习：用泰勒公式求 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{sin^6 2x}$.