

近五年全国硕士研究生招生考试 概率统计简答题练习

1. 2020-22(数学一) 设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, 其中 X_1, X_2 均服从标准正态分布, X_3 的概率分布为

$$P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\frac{1}{2},$$

$$Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2.$$

- (1) 求二维随机变量 (X_1, Y) 的分布函数, 结果用标准正态分布 $\Phi(x)$ 表示;
(2) 证明随机变量 Y 服从标准正态分布.

2. 2020-22(数学三) 二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D=\{(x, y)|0 < y < \sqrt{1-x^2}\}$ 上服从均匀分布, 且

$$Z_1=\begin{cases} 1, & X-Y>0 \\ 0, & X-Y\leq 0 \end{cases} \quad Z_2=\begin{cases} 1, & X+Y>0 \\ 0, & X+Y\leq 0 \end{cases}$$

- (1) 求二维随机变量 (Z_1, Z_2) 的概率分布;
(2) 求 Z_1, Z_2 的相关系数.

3. 2020-23(数学一、三) 设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases} 1-e^{-(t/\theta)^m}, & t\geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ, m 为参数且均大于零.

- (1) 求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>s+t|T>s\}$, 其中 $s>0, t>0$;
(2) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得它们的寿命分别为 t_1, t_2, \dots, t_n , 若 m 已知, 求 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}$.

4. 2021-22 (数学一、三) 在区间 $(0, 2)$ 上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短的一段的长度记作 X , 较长的一段记作 Y , 令 $Z=\frac{Y}{X}$.

- (1) 求 X 的概率密度;
(2) 求 Z 的概率密度;
(3) 求 $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.

5. 2022-22 (数学一、三) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自均值为 θ 的指数分布的简单随机样本, Y_1, Y_2, \dots, Y_m 为来自均值为 2θ 的指数分布总体的简单随机样本, 且两样本相互独立, 其中 $\theta(\theta>0)$ 为未知参数. 利用样本 $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_m$, 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$, 并求 $D(\hat{\theta})$.

6. 2023-22 (数学一) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

- (I) 求 X 与 Y 的协方差;
- (II) 判断 X 与 Y 是否相互独立;
- (III) 求 $Z = X^2 + Y^2$ 的概率密度.

7. 2023-22 (数学三) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}, -\infty < x < +\infty$,

令 $Y = e^X$.

- (I) 求 X 的分布函数;
- (II) 求 Y 的概率密度;
- (III) Y 的期望是否存在?

8. 2024-22 (数学一、三) 设总体 X 服从 $[0, \theta]$ 上的均匀分布, 其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本, 记

$$X(n) = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}, T_c = cX(n).$$

- (1) 求 c , 使得 T_c 是 θ 的无偏估计;
- (2) 记 $h(c) = E(T_c - \theta)^2$, 求 c 使得 $h(c)$ 最小.