线性代数-矩阵

- 矩阵的概念及其应用
  - 矩阵的概念
  - 矩阵的应用
- 矩阵的运算
  - 加法与数乘
  - 乘法与方幂
  - 转置
  - 方阵的行列式
- 可逆矩阵
- 分块矩阵

2.1 矩阵的概念及其应用

矩阵的基本概念

定义(矩阵). 由$m\times n$个数$a_{ij}\,(1\le i\le m,1\le j\le n)$排成的$m$行$n$列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

叫做一个$m\times n$矩阵，其中a_{ij}称为矩阵的第i行第j列元素或者(i,j)-元.

记号.

- 通常用A,B,C或X,Y,Z等大写英文字母表示矩阵.
- $m\times n$矩阵通常简记为$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$.

例：$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ -9 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$是一个$3\times 4$矩阵.

说明. 矩阵是矩形的阵列的简称.

矩阵相等

定义(同型矩阵). 若两个矩阵行数相等且列数相等, 则称这两个矩阵为同型矩阵.

定义(矩阵相等). 若矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$和$B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$对应元素相等, 即对任何$i=1,2,\dots,m$和$j=1,2,\dots,n$有$a_{ij}=b_{ij}$, 则称$A$与$B$相等, 记为$A=B$.

例:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$a=1, b=2, c=3, d=4, e=5, f=6.$$

特殊矩阵

下面介绍几类常用的特殊矩阵.

（1）行矩阵和列矩阵.

- 只有一行的矩阵称为行矩阵或行向量

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

- 只有一列的矩阵称为列矩阵或列向量

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

（2）零矩阵：所有元素都为零的矩阵. $m \times n$零矩阵记为$O_{m\times n}$.

特殊矩阵

（3）方阵：行数和列数相等的矩阵.

说明. $n \times n$方阵通常称为n阶方阵，方阵是正方形的阵列的简称.

（4）对角矩阵：除主对角线上的元素外其他元素都为零的方阵.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

通常简记为$A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

思考：零矩阵是否为对角矩阵?

特殊矩阵

（5） 单位矩阵： 主对角线上元素都为1的对角矩阵.

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

为n阶单位矩阵.

说明. E_n的作用与1在实数运算中的作用类似: $EA = AE = A$.

（6） 上(下)三角矩阵： 主对角线下(上)方的元素全为零的方阵.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

上三角矩阵

下三角矩阵

特殊矩阵

（7）对称矩阵和反对称矩阵．设$A=(a_{ij})_{n\times n}$.

- 若对任何$i,j=1,2\ldots,n$, 都有$a_{ij}=a_{ji}$, 则称A为对称矩阵.
- 若对任何$i,j=1,2\ldots,n$, 都有$a_{ij}=-a_{ji}$, 则称A为反对称矩阵.

例:

- $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$是一个3阶对称矩阵.
- $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \\ 3 & -7 & 0 \end{pmatrix}$是一个3阶反对称矩阵.

思考: 什么矩阵既是对称矩阵又是反对称矩阵?

矩阵应用举例

应用 1：产品发送量矩阵.

- 某厂向三个商店发送四种不同产品的数量可以由矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

表示, 其中a_{ij}是工厂向第i个商店发送第j种产品的数量.

- 这四种产品的单价以及单件重量可以由矩阵

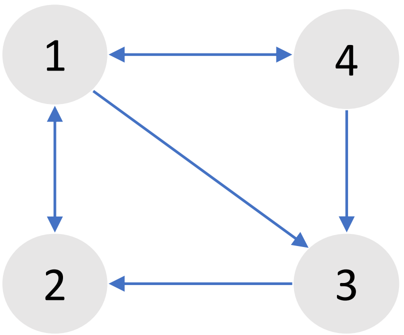
$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}$$

其中b_{i1}为第i种产品的单价, b_{i2}为第i种产品的单件重量.

矩阵应用举例

应用 2：图的邻接矩阵.

四个城市间的单向航线图如右图所示



则该航线图可用一个4阶方阵$A=(a_{ij})_{4\times4}$表示:

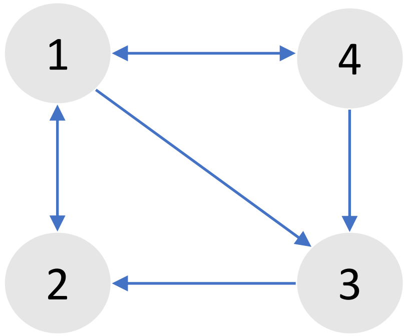
- A的第i行对应城市i, A的第j列对应城市j;
- $a_{ij}=\begin{cases}1, & 若i市到j市有1条单向航线\\0, & 若i市到j市无1条单向航线\end{cases}$.

$$从而A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}.$$

矩阵应用举例

应用 2(续)：图的邻接矩阵.

四个城市间的单向航线图



$$\Leftrightarrow \quad A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}.$$

一般地, n个城市之间的单向航线图可以用一个n阶方阵表示, 这个矩阵称为图的邻接矩阵.

思考：写出$\overleftrightarrow{K_n}$的邻接矩阵.

矩阵应用举例

应用 3：线性变换的矩阵.

n个变量$x_1, x_2, \dots, x_n$与m个变量$y_1, y_2, \dots, y_m$之间的关系

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \qquad \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \qquad (*)$$

表示从变量$x_1, x_2, \dots, x_n$到变量$y_1, y_2, \dots, y_m$的线性变换, 其中a_{ij}为常数.

- 由$(*)$确定的线性变换可以由a_{ij}构成的矩阵$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$来描述.
- 反之, 给定一个$m \times n$矩阵$A = (a_{ij})$, A对应了由$(*)$确定的线性变换.

矩阵 $\xLeftrightarrow{\text{一一对应}}$ **线性变换**

矩阵应用举例

应用 3：线性变换的矩阵.

例 1：

- 线性变换 $\begin{cases} y_1 = 3x_1 \qquad\quad + 6x_3 \\ y_2 = 2x_1 - x_2 + x_3 \end{cases}$ 对应矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 单位矩阵 $E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ 对应

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ \qquad \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}.$$

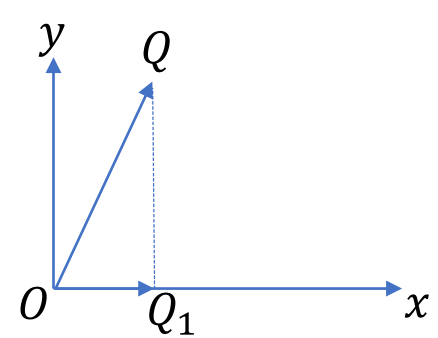
矩阵应用举例

应用 3：线性变换的矩阵.

例 2：矩阵$P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$对应从变量$x,y$到$x_1,y_1$的线性变换

$$\begin{cases}x_1=1x+0y=x\\ y_1=0x+0y=0\end{cases}.$$

若把x,y看作平面上某点Q的坐标，x_1,y_1看作平面上某点Q_1的坐标，则矩阵P对应把点Q变为点Q_1的变换.



几何意义. P是一个投影变换，即将平面上的点投影到x轴上的变换.

矩阵应用举例

应用 3：线性变换的矩阵.

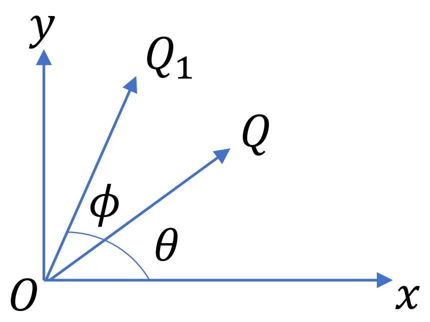
例 3：矩阵$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$对应从变量$x, y$到$x_1, y_1$的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = \cos\phi\, x - \sin\phi\, y \\ y_1 = \sin\phi\, x + \cos\phi\, y \end{cases} \qquad (1)$$

令$Q(x, y)$和$Q_1(x_1, y_1)$是xOy平面上的两个点.

- 设Q的极坐标为(r, θ)，则$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (2)$
- 将(2)代入(1)得:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta = r\cos(\phi+\theta) \\ y_1 = r\sin\phi\cos\theta + r\cos\phi\sin\theta = r\sin(\phi+\theta) \end{cases},$$



故Q_1的极坐标为$(r, \theta+\phi)$.

几何意义. R_ϕ是将给定平面向量$\overrightarrow{OQ}$逆时针旋转角度ϕ的变换.

矩阵应用举例

练习：

1. 写出将xOy平面中给定点投影到y轴上的变换所对应的矩阵.

2. 写出将xOy平面给定向量逆时针旋转90°的变换所对应的矩阵.

矩阵应用举例

应用 4：线性方程组.

设有n个变量与m个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (*)$$

其中a_{ij}与b_k为常数.

- $A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$称为$(*)$的**系数矩阵**.
- $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$称为$(*)$的**增广矩阵**.

线性方程组 $\xLeftrightarrow{\text{一一对应}}$ **矩阵**

2.2 矩阵的运算

矩阵的运算-加法

定义(矩阵的和差)． 设$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$和$B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$是两个矩阵.

- 称$m\times n$矩阵$C=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n}$为$A$与$B$的和，记作$A+B$.
- $-A\triangleq\left(-a_{ij}\right)_{m\times n}$称为$A$的负矩阵.
- A和B的差定义为$A-B\triangleq A+(-B)$.

例：设$A=\begin{pmatrix}3&0&6\\2&-1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&5&4\end{pmatrix}$. 则

$$-B=\begin{pmatrix}-1&0&-2\\1&-5&-4\end{pmatrix},$$

$$A-B=\begin{pmatrix}2&0&4\\3&-6&-3\end{pmatrix}.$$

矩阵的运算-加法

矩阵加法运算规律. 设A, B, C是同型矩阵, O为与A同型的零矩阵. 则

- $A + B = B + A$ **加法交换律**
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ **加法结合律**
- $A + O = O + A = A$ **零矩阵**
- $A + (-A) = O$ **负矩阵**

矩阵的运算−数乘

定义(数乘). 设$A=(a_{ij})_{m\times n}$且k是实数，则称矩阵

$$(ka_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

为数k与A的数乘，记作kA.

运算规律.

- $1A=A$ $\qquad (k\ell)A=k(\ell A)$
- $k(A+B)=kA+kB$ $\qquad (k+\ell)A=kA+\ell A$

例：设$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$且$2A-3X=B$，求$X$.

解: $2A-3X=B \quad \Leftrightarrow \quad 3X=2A-B$. 从而$X=\frac{1}{3}(2A-B)=\begin{pmatrix} 8/3 & -1/3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

矩阵的运算-乘法

引例 1：总收入与总利润.

三个工厂甲、乙、丙生产四类产品的年销量由下表给出：

	1	2	3	4
甲	20	30	10	45
乙	15	10	70	20
丙	20	15	35	25

另外，每种产品的单价和单位利润如下：

	单价	单位利润
1	100	20
2	150	45
3	300	120
4	200	60

求各工厂的总收入和总利润.

矩阵的运算-乘法

引例 1：总收入与总利润.

解：分别计算甲的总收入和总利润.

甲的总收入 ＝ 甲的各类产品收入之和

$$= \sum_{i=1}^{4} \text{甲的}i\text{类产品销量} \times i\text{类产品单价}$$

$$= 20 \times 100 + 30 \times 150 + 10 \times 300 + 45 \times 200$$

$$= 18500.$$

	1	2	3	4
甲	**20**	**30**	**10**	**45**
乙	15	10	70	20
丙	20	15	35	25

	单价	单位利润
1	**100**	20
2	**150**	45
3	**300**	120
4	**200**	60

矩阵的运算-乘法

引例 1：总收入与总利润.

解(续)：分别计算甲的总收入和总利润.

甲的总利润 $=$ 甲的各类产品利润之和

$$= \sum_{i=1}^{4} \text{甲的}i\text{类产品销量} \times i\text{类产品单位利润}$$

$$= 20 \times 20 + 30 \times 45 + 10 \times 120 + 45 \times 60$$

$$= 5650.$$

	1	2	3	4
甲	**20**	**30**	**10**	**45**
乙	15	10	70	20
丙	20	15	35	25

	单价	单位利润
1	100	**20**
2	150	**45**
3	300	**120**
4	200	**60**

矩阵的运算-乘法

引例 1：总收入与总利润.

解(续)：乙和丙的总收入和总利润可以类似计算.

	总收入	总利润
甲	18500	5650
乙	28000	10350
丙	19750	6775

矩阵的运算-乘法

	1	2	3	4
甲	20	30	10	45
乙	15	10	70	20
丙	20	15	35	25

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 & 45 \\ 15 & 10 & 70 & 20 \\ 20 & 15 & 35 & 25 \end{pmatrix}$$

	单价	单位利润
1	100	20
2	150	45
3	300	120
4	200	60

$$B = \begin{pmatrix} 100 & 20 \\ 150 & 45 \\ 300 & 120 \\ 200 & 60 \end{pmatrix}$$

	总收入	总利润
甲	18500	5650
乙	28000	10350
丙	19750	6775

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} c_{12} \\ c_{21} c_{22} \\ c_{31} c_{32} \end{pmatrix}$$

$\forall i = 1,2,3; j = 1,2,$

$\boldsymbol{c_{ij} = A}$**的第**$\boldsymbol{i}$**行与**$\boldsymbol{B}$**的第**$\boldsymbol{j}$**列对应元素乘积之和.**

矩阵的运算-乘法

引例 2：线性变换的复合

现有三组变量x_1,x_2,x_3,x_4、y_1,y_2,y_3、z_1,z_2满足

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \\ x_4 = a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

(I)和(II)隐含了从z_1,z_2到x_1,x_2,x_3,x_4的线性变换:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 \\ x_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 \\ x_3 = c_{31}z_1 + c_{32}z_2 \\ x_4 = c_{41}z_1 + c_{42}z_2 \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

求c_{ij}.

矩阵的运算-乘法

引例 2：线性变换的复合

解：求c_{ij}只需将(II)代入(I).

$$x_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3$$

$$=a_{11}(b_{11}z_1+b_{12}z_2)+a_{12}(b_{21}z_1+b_{22}z_2)+a_{13}(b_{31}z_1+b_{32}z_2)$$

$$=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31})z_1+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32})z_2$$

$$x_2=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31})z_1+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32})z_2$$

$$x_3=(a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31})z_1+(a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32})z_2$$

$$x_4=(a_{41}b_{11}+a_{42}b_{21}+a_{43}b_{31})z_1+(a_{41}b_{12}+a_{42}b_{22}+a_{43}b_{32})z_2$$

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \\ x_4 = a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

矩阵的运算-乘法

引例 2：线性变换的复合

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \\ x_4 = a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2 \end{cases} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 \\ x_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 \\ x_3 = c_{31}z_1 + c_{32}z_2 \\ x_4 = c_{41}z_1 + c_{42}z_2 \end{cases} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \underbrace{(\boldsymbol{a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}})}_{c_{11}}z_1 + \underbrace{(\boldsymbol{a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}})}_{c_{12}}z_2$$

矩阵的运算-乘法

引例 2：线性变换的复合

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \\ x_4 = a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2 \end{cases} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 \\ x_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 \\ x_3 = c_{31}z_1 + c_{32}z_2 \\ x_4 = c_{41}z_1 + c_{42}z_2 \end{cases} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix}$$

$\forall i = 1,2,3,4; j = 1,2,$

$c_{ij} = A$的第i行与B的第j列对应元素乘积之和.

矩阵的运算-乘法

定义(矩阵的乘法). 给定矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times s}$和$B=\left(b_{ij}\right)_{s\times n}$, 定义$A$与$B$的乘积为

$$AB=\left(c_{ij}\right)_{m\times n},$$

其中$c_{ij}=A$的第i行与B的第j列对应元素乘积之和.

理解.

- AB有定义的必要条件为A的列数 $=$ B的行数.
- 如何用数学表达式表示c_{ij}?

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\,.$$

- 如何记忆?

高中时所学的向量的数量积.

矩阵的运算-乘法

例 1：矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&3&-1\\2&1&0&2\end{pmatrix}_{2\times4}$，$B=\begin{pmatrix}4&1&0\\-1&1&3\\2&0&1\\1&3&4\end{pmatrix}_{4\times3}$，求$AB$.

解：$AB=\begin{pmatrix}9&-2&-1\\9&9&11\end{pmatrix}_{2\times3}$.

例 2：矩阵$A=\begin{pmatrix}-2&4\\1&-2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&4\\-3&-6\end{pmatrix}$，求$AB$和$BA$.

解：$AB=\begin{pmatrix}-16&-32\\8&16\end{pmatrix}$.

$BA=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

矩阵的运算-乘法

注意事项.

- AB有定义，BA不一定有定义．即使AB和BA都有定义，两者也不一定相等，即矩阵乘法不满足交换律！

$$AB\text{读作“}A\text{左乘}B\text{”或“}B\text{右乘}A\text{”}$$

- $AB = O \nRightarrow A = O$或$B = O$.
- 矩阵乘法不满足消去律：$AB = CB$且$B \neq O \ \nRightarrow\ A = C$.

矩阵的运算-乘法

运算规律.

- $O_{m\times s}A_{s\times n}=O_{m\times n}$，$A_{m\times s}O_{s\times n}=O_{m\times n}$.
- 设A是$m\times n$矩阵，则$AE_n=A$，$E_mA=A$.
- $(AB)C=A(BC)$. **乘法结合律**
- $A(B+C)=AB+AC$，$(B+C)A=BA+CA$. **乘法关于加法的分配律**
- $k(AB)=(kA)B=A(kB)$.

矩阵的运算-乘法

性质：**设A是$m \times n$矩阵，则$AE_n = A$，$E_m A = A$.**

证明：设$A = (a_{ij})_{m\times n}$. 下面证明$AE_n = A$. 根据矩阵相等的定义，只需证明AE_n的(i,j)-元为a_{ij}即可.

$$AE_n\text{的}(i,j)\text{-元} = A\text{的第}i\text{行与}E_n\text{的第}j\text{列对应元素乘积之和}$$

$$= (a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{in}) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xleftarrow{\text{第}j\text{个分量}}$$

$$= a_{ij}.$$ ■

练习：证明矩阵乘法的结合律.

矩阵的运算–方幂

定义(矩阵的方幂). 设A是n阶方阵，m是一个正整数. 称m个A相乘为A的m次幂，记为A^m. 即

$$A^m = \underbrace{AA\cdots A}_{m个}.$$

另外规定$A^0 = E_n$.

运算法则. 设A是n阶方阵，k,ℓ是正整数. 则

$$A^k A^\ell = A^{k+\ell}, \qquad \left(A^k\right)^\ell = A^{k\ell}.$$

说明. $(AB)^k \neq A^k B^k$；$(A+B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB$.

思考：A,B满足什么条件等式成立?

矩阵的运算-方幂

例 1：设$P=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，求$P^n$.

解 1：$P^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=P.$

$$P^3=P^2P=P^2=P.$$

$$\vdots$$

$$P^n=P.$$

解 2：P是将xOy平面上的点投影到x轴上的变换.

- P^2的效果是先将平面上任何一点Q投影到x轴上得到点Q_1，再将Q_1投影到x轴上，投影点仍为Q_1.
- 因此P^2的效果和P的效果完全相同，故$P^2=P$.
- 同理当$n\geq 2$，$P^n=P$.

矩阵的运算-方幂

例 2：设$R_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$，求${R_\phi}^n$.

解 1：回忆R_ϕ是将平面给定向量$\overrightarrow{OQ}$逆时针旋转角度ϕ的变换.

- ${R_\phi}^n$的效果是将给定向量$\overrightarrow{OQ}$逆时针旋转角度ϕ n次；
- 这个变换所对应的矩阵为$R_{n\phi} = \begin{pmatrix} \cos n\phi & -\sin n\phi \\ \sin n\phi & \cos n\phi \end{pmatrix}$.

解 2：首先计算${R_\phi}^2$以及${R_\phi}^3$猜出结果，再对n用数学归纳法证明.

动手尝试！

矩阵的运算-转置

定义(矩阵的转置). 把矩阵A的行换成同序数的列而得到的新矩阵称为A的转置，记作A^T.

等价地，若$A=(a_{ij})_{m\times n}$，则$A^T=(b_{ij})_{n\times m}$，其中$b_{ij}=a_{ji}, 1\le i\le n; 1\le j\le m$.

例：若$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 8\\ 5 & 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$, 则$A^T=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -3 & 2\\ 2 & -1\\ 8 & 0\end{pmatrix}$.

思考：如何用转置的语言描述对称矩阵和反对称矩阵?

运算法则.

- $(A^T)^T=A$.
- $(A+B)^T=A^T+B^T$.
- $(kA)^T=kA^T$.
- $(AB)^T=B^TA^T$.
- 若A为n阶方阵，$(A^m)^T=(A^T)^m$.

矩阵的运算-转置

性质： $(AB)^T = B^T A^T$.

证明. 设$A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$.

- $(AB)^T$与$B^T A^T$是同型矩阵.
- 根据矩阵相等的定义，只需证这两个矩阵对应元素相等即可.

$(AB)^T$ 的(i,j)-元 $=$ (AB) 的(j,i)-元 转置定义

$=$ A的第j行与B的第i列对应元素乘积之和. 乘法定义

$B^T A^T$ 的(i,j)-元 $=$ B^T的第i行与A^T的第j列对应元素乘积之和 乘法定义

$=$ B的第i列与A的第j行对应元素乘积之和. 转置定义

所以，$(AB)^T = B^T A^T$. ■

练习：证明第五个性质$(A^m)^T = (A^T)^m$.

矩阵的运算-转置

例 1：设$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求$(AB)^T$.

解 1：先乘积再转置.

解 2：先转置再乘积.

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

例 2：设A为$n \times 1$矩阵且$A^T A = 1$. 证明$B = E_n - 2AA^T$为对称矩阵且$B^2 = E_n$.

证明. $B^T = (E_n - 2AA^T)^T = E_n^T - (2AA^T)^T$

$$= E_n - 2(AA^T)^T = E_n - 2(A^T)^T A^T$$

$$= E_n - 2AA^T = B.$$

故B为对称矩阵.

$$B^2 = (E_n - 2AA^T)(E_n - 2AA^T)$$

$$= E_n - 4AA^T + 4A(A^T A)A^T$$

假设条件$A^T A = 1$

$$= E_n.$$

■

矩阵的运算-行列式

定义(方阵的行列式). 设A为n阶方阵, 用$|A|$表示A的行列式.

运算法则. 设A,B为n阶方阵.

- $|A^T|=|A|$. 行列式性质 1
- $|kA|=k^n|A|$. 矩阵数乘定义 + 行列式性质 3
- $|AB|=|A||B|$.

第三个性质的证明. 只证$n=2$的情况. 设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. 令

$$D=\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}=|A||B|.$$

思想: 通过行列式对行和列的操作使得AB出现.

矩阵的运算-行列式

第1步：将b_{11}乘以第1列以及b_{21}乘以第2列加到第3列上.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boldsymbol{a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \boldsymbol{a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}} & 0 \\ -1 & 0 & \mathbf{0} & b_{12} \\ 0 & -1 & \mathbf{0} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{b_{11}} & \boldsymbol{b_{12}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \boldsymbol{b_{21}} & \boldsymbol{b_{22}} \end{vmatrix}$$

第2步:将b_{12}乘以第1列以及b_{22}乘以第2列加到第4列上.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & \boldsymbol{a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{1}+a_{22}b_{21} & \boldsymbol{a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}} \\ -1 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & -1 & 0 & \mathbf{0} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & \boldsymbol{AB} \\ -E & O \end{vmatrix}.$$

第3步：交换1, 3行以及2, 4行.

$$D=(-1)^2\begin{vmatrix} -E & O \\ A & AB \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^2|-E||AB| \qquad \text{分块行列式定理}$$

$$=(-1)^2(-1)^2|AB|=|AB|. \qquad \blacksquare$$

思考：对n阶方阵，证明哪些地方需要改动?

矩阵的运算-行列式

定义(伴随矩阵). 设A为n阶方阵, 行列式$|A|$的各个元素的代数余子式A_{ij}所组成的如下方阵$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots A_{nn} \end{pmatrix}$称为方阵$A$的伴随矩阵.

性质: **设$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{n}$阶方阵. 则$\boldsymbol{AA^* = A^*A = |A|E_n}$.**

证明. 我们证$AA^* = |A|E_n$.

$$
\begin{aligned}
AA^* \text{ 的}(i,j)\text{-元} &= A\text{的第}i\text{行与}A^*\text{的第}j\text{列对应元素乘积之和} \\
&= (a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{in}) \begin{pmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \vdots \\ A_{jn} \end{pmatrix} \\
&= a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} \\
&= \begin{cases} |A|, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.
\end{aligned}
$$

代数余子式线性组合定理

因此, $AA^* = |A|E_n$. ■

矩阵的运算-练习

1. 写出$A=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$的伴随矩阵.

$$A^*=\begin{pmatrix}-3&6&-3\\6&-12&6\\-3&6&-3\end{pmatrix}$$

2. 设$A=\frac{1}{2}(B+E)$. 证明$A^2=A\Leftrightarrow B^2=E$.

3. 设$A^2=A$且$B^2=B$. 证明$(A+B)^2=A+B\Leftrightarrow AB=BA=O$.

4. 设$A=\begin{pmatrix}3&1\\1&-3\end{pmatrix}$. 求$A^{50}$和$A^{51}$.

5. 设A为n阶方阵. 若$AA^T=E_n$且$|A|=-1$, 证明$|A+E|=0$.

2.3 可逆矩阵

可逆矩阵

定义(可逆矩阵). 设A为n阶方阵. 若存在n阶方阵B使得

$$AB = BA = E_n,$$

则称矩阵A可逆且称B是A的逆矩阵.

思考: 给出一个不可逆矩阵.

唯一性. 设B, C都是A的逆矩阵, 则$B = C$.

证明. 根据定义, $AB = BA = E_n$且$AC = CA = E_n$. 则

$$\begin{aligned} B = BE &= B(AC) \\ &= (BA)C = EC \\ &= C. \end{aligned}$$

■

由可逆矩阵的唯一性, 用$\boldsymbol{A^{-1}}$表示A的逆矩阵.

可逆矩阵

定理(可逆矩阵的判定)．**$\boldsymbol{n}$阶方阵$\boldsymbol{A}$可逆当且仅当$|\boldsymbol{A}| \neq \boldsymbol{0}$.**

证明．**必要性.** 假设A可逆，则存在n阶方阵B使得$AB = BA = E_n$．等式两边取行列式有$|A||B| = |AB| = |E_n| = 1$．故$|A| \neq 0$.

充分性. 假设$|A| \neq 0$．由伴随矩阵的性质，$AA^* = A^*A = |A|E_n$.

因为$|A| \neq 0$，故

$$A\frac{A^*}{|A|} = \frac{A^*}{|A|}A = E_n.$$

从而A可逆且$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$. ■

推论(简化判定)．设A, B为n阶方阵．若$AB = E_n$（或$BA = E_n$），则$B = A^{-1}$.

证明．在$AB = E_n$两边取行列式可得$|A| \neq 0$，从而由**判定定理**A^{-1}存在．从而，

$$\begin{aligned} B &= EB = (A^{-1}A)B \\ &= A^{-1}(AB) \\ &= A^{-1}. \end{aligned}$$

■

可逆矩阵

可逆矩阵的性质. 设A,B为n阶可逆阵.

- $(A^{-1})^{-1}=A$.
- 若$k\neq 0$，则$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$.
- AB可逆且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

证明. $B^{-1}A^{-1}AB=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}B=E_n$. ■

记忆. 倒脱靴.

- $(A^m)^{-1}=(A^{-1})^m$.
- A^T可逆且$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.
- $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$.

可逆矩阵

例 1：求$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$的逆矩阵，其中$ad-bc\neq 0$.

解：因为$|A|=ad-bc\neq 0$,

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

例 2：设$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. 求矩阵$X$满足 $AXB=C$.

解: 若A,B可逆, 则在方程两边同时左乘A^{-1}且右乘B^{-1}, 有

$$A^{-1}(AXB)B^{-1}=A^{-1}CB^{-1},$$

即$X=A^{-1}CB^{-1}$. 经计算得$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$. 故

$$X=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

可逆矩阵

例 3：设$P=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，且$AP=P\Lambda$．求$A^n$.

解：因为$|P|=2\neq 0$，P可逆．故$A=P\Lambda P^{-1}$．则

$$A^n=\underbrace{(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})}_{n个(P\Lambda P^{-1})}$$

$$=P\Lambda^n P^{-1}.$$

乘法结合律

因为$\Lambda^n=\begin{pmatrix}1^n&0\\0&2^n\end{pmatrix}$，$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}$，从而

$$A^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^n&0\\0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n&2^n-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{pmatrix}.$$

可逆矩阵

练习：

1. 设$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$且$AB=A+2B$，求$B$.

2. 设n阶方阵$A,B,A+B$均可逆. 证明

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B=B(B+A)^{-1}A.$$

可逆矩阵

定理(克拉默法则). 若线性方程组 $\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n} \end{cases}$ $(*)$

的系数矩阵$\boldsymbol{A=(a_{ij})_{n\times n}}$的行列式不为零，则$(*)$有唯一解$\boldsymbol{x_i=\frac{|A_i|}{|A|}}$，其中$\boldsymbol{A_i}$是将$\boldsymbol{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}$替换$\boldsymbol{A}$的第$\boldsymbol{i}$列所得到的矩阵.

证明. 令$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 则$(*)$可写为$Ax=b$.

因为$|A|\neq 0$，A^{-1}存在. 在$(*)$两边同时左乘A^{-1}得$x=A^{-1}b$.

由于逆矩阵是唯一的，$x=A^{-1}b$是唯一解.

可逆矩阵

证明(续). $x = A^{-1}b = \frac{A^*b}{|A|}.$

$$A^*b\text{的第}i\text{个分量} = (A_{1i}, A_{2i}, \dots, A_{ni})\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n$$

$$= |A_i|. \qquad \blacksquare$$

可逆矩阵

例： 设曲线$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$通过四点$(1,3),(2,4),(3,3),(4,-3)$. 求a_0,a_1,a_2,a_3.

解： a_0,a_1,a_2,a_3是如下线性方程组的解：

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 4 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 3 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = -3 \end{cases}.$$

其系数行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} \neq 0$(为什么?).

故可由**克拉默法则**求解. 计算从略.

说明. 克拉默法则在理论上是一个漂亮的结果，但是在实际中并不实用.

可逆矩阵

矩阵是线性函数.

- 一元函数$y = f(x)$：牛顿第二定律.
- 多元函数$y = f(x_1, x_2, x_3)$：考试成绩取决于努力程度、运气、老师水平.
- 多值函数$\begin{cases} T = f(x,y,z) \\ P = g(x,y,z) \end{cases}$：教室的温度和压强随空间位置而改变.

可逆矩阵是反函数.

- $BA = E_n \iff$ 对任何n维向量x，$BA(x) = E_n x = x$.
- 解读：输入n维向量x，A将x变为某个向量$y \triangleq Ax$. 而B的作用是把y变回x，即抵消A的作用.

类比：Word中的撤销键.

批判性思维

注意到，可逆矩阵定义中要求A是n阶方阵.

- 如果A是一个$m \times n$矩阵，是否可以按照同样的方式定义可逆性?

- 如果将$A_{m\times n}$可逆定义为存在$B_{n\times m}$使得$BA = E_n$，是否存在A“可逆”的充分必要条件?

质疑是打开未知世界大门的钥匙!

批判性思维

A Note on the Upper Bound for the Paired-Domination Number of a Graph with Minimum Degree At Least Two

Shenwei Huang and Erfang Shan
Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, China

In this note, we give a counter example to show that the proof of a main result obtained by Haynes and Slater (Networks 32 (1998), 199–206, Theorem 12) is inaccurate. Here, we give a complete proof of the result. **NETWORKS, Vol. 57(2), 115–116 2011**

Keywords: paired-domination number; upper bound; minimum degree

where u_i and v_i are paired in S. Afterward, X is defined to be the set of vertices in $V - S$ that are adjacent to some vertex in D, that is, $X = N(D) \cap (V - S)$. To prove the theorem, the authors use the claim $|X| \geq \frac{|D|}{2}$. But in fact, this may not hold for some minimum PDS of G. We give the graph F in Figure 1 as a counter example.

Clearly, $\gamma_p(F) = 6$. Let $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7\}$ be a

2.4 分块矩阵

分块矩阵

定义(分块矩阵). 将给定矩阵A用若干条纵线和横线分割成许多小矩阵，每个小矩阵称为A的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

例： $A=\left(\begin{array}{cc:ccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hdashline 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}\right)_{4\times 5} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2}$,

其中$A_{11}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_{12}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, A_{21}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A_{22}=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

练习: 给出A的另一种分块方式并写出相应的子块.

分块矩阵

三种常用的分块方法. 设$A=(a_{ij})_{m\times n}$.

1. 平凡分块. $A=(A)_{1\times1}$, 即把所有的行和所有的列分为一块.
2. 按列分块. 把矩阵的每一列作为一个子块.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n),$$

其中$\alpha_i=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$.

3. 按行分块. 把矩阵的每一行作为一个子块.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix},$$

其中$\beta_i=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in})$.

分块矩阵

分块矩阵加法. 设A,B为同型矩阵并按相同方式分块为

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{s1} & \cdots & A_{sr}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_{11} & \cdots & B_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ B_{s1} & \cdots & B_{sr}\end{pmatrix},$$

即A_{ij}和B_{ij}为同型矩阵. 则

$$A+B=\begin{pmatrix}A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr}\end{pmatrix}.$$

记忆：对应子块相加.

分块矩阵数乘. 设$A=\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{s1} & \cdots & A_{sr}\end{pmatrix}$, k是一个常数. 则

$$kA=\begin{pmatrix}kA_{11} & \cdots & kA_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ kA_{s1} & \cdots & kA_{sr}\end{pmatrix}.$$

分块矩阵

分块矩阵转置. 设$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, 则

$$A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}.$$

即先将A看作$r\times s$分块矩阵转置，再对每个子块A_{ij}转置.

例：$A=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hdashline 9 & 10 & 11 & 12 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$,

其中$A_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$，$A_{12}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$，$A_{21}=(9 \quad 10)$，$A_{22}=(11 \quad 12)$. 则

$$A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ \hdashline 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{array}\right).$$

分块矩阵

分块矩阵乘法. 设$A=(a_{ij})_{m\times k}, B=(b_{ij})_{k\times n}$. 现将$A, B$分块如下:

$$A=(A_{ij})_{r\times s}=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}, B=(B_{ij})_{s\times t}=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix}$$

且**对A列的分法与对B行的分法完全一致**. 则

$$AB=(C_{ij})_{r\times t}=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{r1} & \cdots & C_{rt} \end{pmatrix},$$

其中$C_{ij}=A$中第i行与B中第j列对应子块乘积之和$=\sum_{k=1}^{s} A_{ik}B_{kj}$.

理解.

- 分块矩阵的乘法规则与普通矩阵的乘法规则完全一致.
- 对A列的分法与对B行的分法完全一致保证了对应子块A_{ik}与B_{kj}可以相乘.

分块矩阵

对A列的分法与对B行的分法完全一致:

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots\cdots & n_s \end{array}\\ \left(\begin{array}{c|c|c|c} \overbrace{A_{i1}} & \overbrace{A_{i2}} & \cdots\cdots & \overbrace{A_{is}} \end{array}\right)\end{array} \qquad B=\begin{array}{cc}\left(\begin{array}{c} B_{1j} \\ \hline B_{2j} \\ \hline \vdots \\ \vdots \\ \hline B_{sj} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}\, n_1 \\ \}\, n_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \}\, n_s \end{array}\end{array}$$

⇨ **对应子块A_{ik}与B_{kj}可以相乘.**

分块矩阵

例 1：设$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{pmatrix}$, 求$AB$.

解: 我们利用分块矩阵乘法.

难点: 找到一种能够简化计算的分块方式.

因为零矩阵和单位矩阵计算相对容易, 将A按如下方式分块:

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hdashline -1&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}E&O\\A_1&E\end{pmatrix}.$$

对B按照同样的方式分块: $B=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\\hdashline 1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}B_{11}&E\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}.$

分块矩阵

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad B=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

根据分块矩阵乘法规则,

$$AB=\begin{pmatrix} E & O \\ A_1 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} B_{11} & E \\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22} \end{pmatrix}.$$

经计算$A_1B_{11}+B_{21}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_1+B_{22}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. 故

$$AB=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hdashline -2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

分块矩阵

例 2：设$A=(a_{ij})_{m\times n}$为实矩阵．证明$A=O\Leftrightarrow A^TA=O$.

证明．必要性显然，下面证充分性.

对A按列分块: $A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, 其中$\alpha_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}$. 则

$$A^TA=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\vdots\\\alpha_n^T\end{pmatrix}_{n\times 1}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)_{1\times n}=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\\alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\\vdots & \vdots & & \vdots\\\alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix}.$$

因$A^TA=O$, $\alpha_i^T\alpha_j=0\ (i,j=1,2,\dots,n)$. 特别地,

$$0=\alpha_j^T\alpha_j=a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{mj}^2.$$

由于A为实矩阵, $a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{mj}=0$.

故$A=O$. ■

分块矩阵

利用分块矩阵乘法理解普通矩阵的乘法. 设$A=(a_{ij})_{m\times s}$, $B=(b_{ij})_{s\times n}$.

- 对A按行分块:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \hdashline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hdashline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}, \text{其中}\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{is}).$$

- 对B按列分块:

$$B=\left(\begin{array}{c:c:c:c} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{array}\right)=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n), \text{其中}\beta_j=\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix}.$$

- 根据分块矩阵乘法规则计算AB:

$$AB=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)=\begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \cdots & \alpha_1\beta_n \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \cdots & \alpha_2\beta_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_m\beta_1 & \alpha_m\beta_2 & \cdots & \alpha_m\beta_n \end{pmatrix}=(\alpha_i\beta_j)_{m\times n},$$

其中$\alpha_i\beta_j=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$.

分块矩阵

利用分块矩阵乘法理解矩阵与向量的乘法. 设$A=(a_{ij})_{m\times n}$, $x=(x_i)_{n\times 1}$.

对A按列分块: $A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, 其中$\alpha_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}$.

对x按行分块: $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$.

$$Ax=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n.$$

例: $\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}.$

分块矩阵

分块对角矩阵. 若$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$, 其中$A_i$均为方阵, 则称$A$为分块对角矩阵.

性质 1. $|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$.

性质 2. 若$|A_i|\neq 0\ (i=1,2,\dots,s)$, 则$A$可逆且$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$.

例 1: 求$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$的逆.

解: 注意到$A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$, 其中$A_1=(5)$, $A_2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix}$$ 性质 2

$$=\begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

分块矩阵

例 2：设$T=\begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}$, 其中$A$和$D$可逆. 求$T^{-1}$.

解：设$T^{-1}=\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$. 则

$$TT^{-1}=\begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AX & AY \\ CX+DZ & CY+DW \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}.$$

$$\text{故}\begin{cases} AX=E & \Rightarrow \quad X=A^{-1} \\ AY=O & \Rightarrow \quad Y=O \\ CX+DZ=O & \Rightarrow \quad DZ=-CX=-CA^{-1} \quad \Rightarrow \quad Z=-D^{-1}CA^{-1} \\ CY+DW=E & \Rightarrow \quad DW=E \quad \Rightarrow \quad W=D^{-1} \end{cases}$$

所以, $T^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$.

说明. T的可逆性与C无关.

分块矩阵

练习:

1. 设对$A=\left(a_{ij}\right)_{4\times 5}$分块如下: 将$A$的前2行分为一块, 后2行分为一块; 将$A$的前3列分为一块, 后2列分为一块. 问有多少种对$B=\left(b_{ij}\right)_{5\times 3}$的分块方式能够通过分块矩阵乘法规则计算$AB$?

2. 设A_1和A_2为可逆方阵. 求$\begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}^{-1}$.

矩阵总结

矩阵总结

难点.

- 矩阵的乘法

$$A_{m\times s}B_{s\times n} = \left(c_{ij}\right)_{m\times n},$$

其中$\boldsymbol{c_{ij}} =$ **$\boldsymbol{A}$的第$\boldsymbol{i}$行与$\boldsymbol{B}$的第$\boldsymbol{j}$列对应元素乘积之和.**

- 分块矩阵的乘法

$$A = \left(A_{ij}\right)_{r\times s}, B = \left(B_{ij}\right)_{s\times t}$$

且**对$\boldsymbol{A}$列的分法与对$\boldsymbol{B}$行的分法完全一致**. 则

$$AB = \left(C_{ij}\right)_{r\times t},$$

其中$C_{ij} = A$中第i行与B中第j列对应子块乘积之和 $= \sum_{k=1}^{s} A_{ik}B_{kj}$.

重点.

- 矩阵的运算：**加法，数乘，乘法，方幂，转置，方阵的行列式.**
- 可逆矩阵：**定义，判定，性质.**

矩阵总结

1. 证明两个n阶上三角形矩阵的乘积仍为一上三角形矩阵.

2. 求$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

3. 设A为n阶对称矩阵，B为n阶反对称矩阵. 证明：AB是反对称矩阵的充要条件为$AB = BA$.

4. 利用$|AB| = |A||B|$计算n阶行列式 $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$.

5. 已知n阶方阵A, B, C满足$ABC = E_n$. 是否一定有$BCA = E_n$?

6. 证明不存在奇数阶的可逆反对称矩阵.

扩展阅读

扩展阅读-哈达马矩阵

定义(哈达马矩阵). 若n阶方阵A满足任何元素都是$+1$或-1且$AA^T = nE_n$，则称A为n阶哈达马矩阵.

例：$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$是一个2阶的哈达马矩阵.

哈达马猜想. 对于任何正整数$k \geq 1$，存在$4k$阶的哈达马矩阵.

截至目前, 2000以内还不知道是否存在下面阶数的哈达马矩阵:

668, 716, 892, 1132, 1244, 1388, 1436, 1676, 1772, 1916, 1948, 1964.