高等数学
第一章：函数、极限与连续函数

张道平

南开大学数学科学学院 414

daopingzhang@nankai.edu.cn

2.1 数列的极限

2.1 数列的极限

2.1.1. 数列的概念

2.1 数列的极限

2.1.1. 数列的概念

定义：定义域为自然数集合的函数 $f: N^* \to R$ 称为数列（又叫序列），按自变量递增次序把 n 对应的函数值 $x_n = f(n)$ 排成一列数，数列可写为 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$. 通常将数列简记为 $\{x_n\}$，其中 $x_n = f(n)$ 的表达式称为该数列的通项公式 (或称为一般项).

2.1 数列的极限

2.1.1. 数列的概念

定义：定义域为自然数集合的函数 $f: N^* \to R$ 称为数列（又叫序列），按自变量递增次序把 n 对应的函数值 $x_n = f(n)$ 排成一列数，数列可写为 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$. 通常将数列简记为 $\{x_n\}$，其中 $x_n = f(n)$ 的表达式称为该数列的通项公式 (或称为一般项).

例：设数列 $\{x_n\}$ 为 $-1, 4, -9, 16, \cdots$, 则其通项公式为?

2.1 数列的极限

2.1.1. 数列的概念

定义：定义域为自然数集合的函数 $f: N^* \to R$ 称为数列（又叫序列），按自变量递增次序把 n 对应的函数值 $x_n = f(n)$ 排成一列数，数列可写为 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$. 通常将数列简记为 $\{x_n\}$，其中 $x_n = f(n)$ 的表达式称为该数列的通项公式 (或称为一般项).

例：设数列 $\{x_n\}$ 为 $-1, 4, -9, 16, \cdots$, 则其通项公式为?

如果数列 $\{x_n\}$ 的各项均为常数 c, 即 $c, c, c, \cdots, c, \cdots$, 则称它为常数数列.

在数列 $\{x_n\}$ 中，在保持原有顺序的情况下，从左到右任取其中无穷多项所构成的新数列，称为数列 $\{x_n\}$ 的子数列，简称为子列，记作

$$\{x_{k_n}\}: x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_n}, \cdots.$$

在数列 $\{x_n\}$ 中，在保持原有顺序的情况下，从左到右任取其中无穷多项所构成的新数列，称为数列 $\{x_n\}$ 的子数列，简称为子列，记作

$\{x_{k_n}\}: x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_n}, \cdots$.举个例子，解释一下.

在数列 $\{x_n\}$ 中，在保持原有顺序的情况下，从左到右任取其中无穷多项所构成的新数列，称为数列 $\{x_n\}$ 的子数列，简称为子列，记作
$\{x_{k_n}\}: x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_n}, \cdots$.举个例子，解释一下.

对于数列 $\{x_n\}$, 如果存在常数 A, 使得对每一个 n, 都有 $x_n \le A\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$, 则称数列 $\{x_n\}$ 有上界;

在数列 $\{x_n\}$ 中，在保持原有顺序的情况下，从左到右任取其中无穷多项所构成的新数列，称为数列 $\{x_n\}$ 的子数列，简称为子列，记作
$\{x_{k_n}\}: x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_n}, \cdots$.举个例子，解释一下.

对于数列 $\{x_n\}$, 如果存在常数 A, 使得对每一个 n, 都有 $x_n \le A$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 则称数列 $\{x_n\}$ 有上界；如果存在常数 B, 使得对每一个 n，都有 $x_n \ge B$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 则称数列 $\{x_n\}$ 有下界.

在数列 $\{x_n\}$ 中，在保持原有顺序的情况下，从左到右任取其中无穷多项所构成的新数列，称为数列 $\{x_n\}$ 的子数列，简称为子列，记作
$\{x_{k_n}\}: x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_n}, \cdots$.举个例子，解释一下.

对于数列 $\{x_n\}$, 如果存在常数 A, 使得对每一个 n, 都有 $x_n \le A$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 则称数列 $\{x_n\}$ 有上界；如果存在常数 B, 使得对每一个 n，都有 $x_n \ge B$
$(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 则称数列 $\{x_n\}$ 有下界.同时有上、下界的数列称为有界数列，也就是说 $\exists M > 0$, 使得
$\forall n \in N^*$, 都有 $|x_n| \le M$.

在数列 $\{x_n\}$ 中，在保持原有顺序的情况下，从左到右任取其中无穷多项所构成的新数列，称为数列 $\{x_n\}$ 的子数列，简称为子列，记作
$\{x_{k_n}\}: x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_n}, \cdots$.举个例子，解释一下.

对于数列 $\{x_n\}$, 如果存在常数 A, 使得对每一个 n, 都有 $x_n \leq A$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 则称数列 $\{x_n\}$ 有上界；如果存在常数 B, 使得对每一个 n，都有 $x_n \geq B$
$(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 则称数列 $\{x_n\}$ 有下界.同时有上、下界的数列称为有界数列，也就是说 $\exists M > 0$, 使得
$\forall n \in N^*$, 都有 $|x_n| \leq M$.这两种定义是等价的.

在数列 $\{x_n\}$ 中，在保持原有顺序的情况下，从左到右任取其中无穷多项所构成的新数列，称为数列 $\{x_n\}$ 的子数列，简称为子列，记作
$\{x_{k_n}\}: x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_n}, \cdots$.举个例子，解释一下.

对于数列 $\{x_n\}$, 如果存在常数 A, 使得对每一个 n, 都有 $x_n \le A$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 则称数列 $\{x_n\}$ 有上界；如果存在常数 B, 使得对每一个 n，都有 $x_n \ge B$
$(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 则称数列 $\{x_n\}$ 有下界.同时有上、下界的数列称为有界数列，也就是说 $\exists M > 0$, 使得
$\forall n \in N^*$, 都有 $|x_n| \le M$.这两种定义是等价的.不是有界的数列称为无界数列.

在数列 $\{x_n\}$ 中，在保持原有顺序的情况下，从左到右任取其中无穷多项所构成的新数列，称为数列 $\{x_n\}$ 的子数列，简称为子列，记作
$\{x_{k_n}\}: x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_n}, \cdots$.举个例子，解释一下.

对于数列 $\{x_n\}$, 如果存在常数 A, 使得对每一个 n, 都有 $x_n \le A$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 则称数列 $\{x_n\}$ 有上界；如果存在常数 B, 使得对每一个 n，都有 $x_n \ge B$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 则称数列 $\{x_n\}$ 有下界.同时有上、下界的数列称为有界数列，也就是说 $\exists M > 0$, 使得 $\forall n \in N^*$, 都有 $|x_n| \le M$.这两种定义是等价的.不是有界的数列称为无界数列.举几个例子.

2.1.2 数列极限的定义

2.1.2 数列极限的定义

设 $\{x_n\}$ 为一数列，如果存在常数 a, 对于任意给定的正数 $\epsilon > 0$ (无论它多小)，总存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时，不等式 $|x_n - a| < \epsilon$ 都成立，那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 记作 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a(n \to \infty)$.

2.1.2 数列极限的定义

设 $\{x_n\}$ 为一数列，如果存在常数 a, 对于任意给定的正数 $\epsilon > 0$ (无论它多小)，总存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时，不等式 $|x_n - a| < \epsilon$ 都成立，那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 记作 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a(n \to \infty)$. ϵ 的任意选，需要注意!

2.1.2 数列极限的定义

设 $\{x_n\}$ 为一数列，如果存在常数 a, 对于任意给定的正数 $\epsilon > 0$ (无论它多小)，总存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时，不等式 $|x_n - a| < \epsilon$ 都成立，那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 记作 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a(n \to \infty)$. ϵ 的任意选，需要注意！

$\epsilon - N$ 语言. $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| < \epsilon$.

2.1.2 数列极限的定义

设 $\{x_n\}$ 为一数列，如果存在常数 a, 对于任意给定的正数 $\epsilon > 0$ (无论它多小)，总存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时，不等式 $|x_n - a| < \epsilon$ 都成立，那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 记作 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a(n \to \infty)$. ϵ 的任意选，需要注意!

$\epsilon - N$ 语言. $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| < \epsilon$.

几何意义： a 的 $\epsilon-$ 邻域.

2.1.2 数列极限的定义

设 $\{x_n\}$ 为一数列，如果存在常数 a, 对于任意给定的正数 $\epsilon > 0$ (无论它多小)，总存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时，不等式 $|x_n - a| < \epsilon$ 都成立，那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 记作 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a(n \to \infty)$. ϵ 的任意选，需要注意!

$\epsilon - N$ 语言. $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| < \epsilon$.

几何意义： a 的 $\epsilon-$ 邻域.

收敛数列、发散数列 ($\epsilon - N$ 语言).

例：试证 $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

例：试证 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$

例：数列 $\{(-1)^{n-1}\}$ 没有极限.

例：试证 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$.

例：数列 $\{(-1)^{n-1}\}$ 没有极限.

例：试证 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0(p>0)$.

例：试证 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$.

例：数列 $\{(-1)^{n-1}\}$ 没有极限.

例：试证 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0(p>0)$.

例：试证 $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+4n+3}{2n^2+n+1}=\frac{5}{2}$.

例：试证 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$.

例：数列 $\{(-1)^{n-1}\}$ 没有极限.

例：试证 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0(p>0)$.

例：试证 $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+4n+3}{2n^2+n+1}=\frac{5}{2}$.

2.2 数列极限的性质与运算

例：试证 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$.

例：数列 $\{(-1)^{n-1}\}$ 没有极限.

例：试证 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0(p>0)$.

例：试证 $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+4n+3}{2n^2+n+1}=\frac{5}{2}$.

2.2 数列极限的性质与运算

唯一性: 如果数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，则它的极限值是唯一的.

例：试证 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$

例：数列 $\{(-1)^{n-1}\}$ 没有极限.

例：试证 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0(p>0).$

例：试证 $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+4n+3}{2n^2+n+1}=\frac{5}{2}.$

2.2 数列极限的性质与运算

唯一性: 如果数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，则它的极限值是唯一的.

有界性：收敛数列必为有界数列.

2. 极限

例：试证 $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

例：数列 $\{(-1)^{n-1}\}$ 没有极限.

例：试证 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0(p > 0)$.

例：试证 $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+4n+3}{2n^2+n+1} = \frac{5}{2}$.

2.2 数列极限的性质与运算

唯一性: 如果数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，则它的极限值是唯一的.

有界性：收敛数列必为有界数列. 无界数列一定是发散的. 数列有界是数列收敛的必要条件，但不是充分条件.

2. 极限

例：试证 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$.

例：数列 $\{(-1)^{n-1}\}$ 没有极限.

例：试证 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0(p>0)$.

例：试证 $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+4n+3}{2n^2+n+1}=\frac{5}{2}$.

2.2 数列极限的性质与运算

唯一性：如果数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，则它的极限值是唯一的.

有界性：收敛数列必为有界数列. 无界数列一定是发散的. 数列有界是数列收敛的必要条件，但不是充分条件. 发散于无穷. 定义.

证 $\lim_{n\to\infty} n^p = +\infty (p > 0)$.

证 $\lim_{n\to\infty} n^p = +\infty (p > 0)$.

数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的充分必要条件是它的任意子数列 $\{x_{n_k}\}$ 都收敛于同一个极限 a.

证 $\lim_{n\to\infty} n^p = +\infty (p > 0)$.

数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的充分必要条件是它的任意子数列 $\{x_{n_k}\}$ 都收敛于同一个极限 a. 如果数列 $\{x_n\}$ 有两个具有不同极限的子列，则该数列 $\{x_n\}$ 必发散.

证 $\lim_{n\to\infty} n^p = +\infty (p > 0)$.

数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的充分必要条件是它的任意子数列 $\{x_{n_k}\}$ 都收敛于同一个极限 a. 如果数列 $\{x_n\}$ 有两个具有不同极限的子列，则该数列 $\{x_n\}$ 必发散.

保序性：如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, 且 $b < a$. 则 $\exists N$, 当 $n > N$ 时，就有 $y_n < x_n$.

证 $\lim_{n\to\infty} n^p = +\infty (p > 0)$.

数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的充分必要条件是它的任意子数列 $\{x_{n_k}\}$ 都收敛于同一个极限 a. 如果数列 $\{x_n\}$ 有两个具有不同极限的子列，则该数列 $\{x_n\}$ 必发散.

保序性：如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, 且 $b < a$. 则 $\exists N$, 当 $n > N$ 时，就有 $y_n < x_n$.

保号性：设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a (a \neq 0)$, 则 $\exists N$, 当 $n > N$ 时，就有 $|x_n| > \frac{|a|}{2}$. 如果 $a > 0$(或 $a < 0$), 则当 $n > N$ 时，就有 $x_n > 0$(或 $x_n < 0$).

如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起都有 $x_n \geq 0$(或 $x_n \leq 0$), 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $a \geq 0$(或 $a \leq 0$).

如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起都有 $x_n \geq 0$(或 $x_n \leq 0$), 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $a \geq 0$(或 $a \leq 0$).

数列极限的四则运算法则：如果数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都收敛，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, 则数列 $\{x_n \pm y_n\}$, $\{cx_n\}$(其中 c 为常数)，$\{x_n y_n\}$ 也都收敛；又若 $b \neq 0$, 则数列 $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ 也收敛.

如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起都有 $x_n \geq 0$(或 $x_n \leq 0$), 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $a \geq 0$(或 $a \leq 0$).

数列极限的四则运算法则：如果数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都收敛，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, 则数列 $\{x_n \pm y_n\}$, $\{cx_n\}$(其中 c 为常数)，$\{x_n y_n\}$ 也都收敛；又若 $b \neq 0$, 则数列 $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ 也收敛.

例：求极限 $\lim_{n\to\infty}(1 + q + q^2 + \cdots + q^n)$, 其中常数 q 有 $|q| < 1$.

如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起都有 $x_n \geq 0$(或 $x_n \leq 0$), 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $a \geq 0$(或 $a \leq 0$).

数列极限的四则运算法则：如果数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都收敛，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, 则数列 $\{x_n \pm y_n\}$, $\{cx_n\}$(其中 c 为常数)，$\{x_n y_n\}$ 也都收敛；又若 $b \neq 0$, 则数列 $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ 也收敛.

例：求极限 $\lim_{n\to\infty}(1 + q + q^2 + \cdots + q^n)$, 其中常数 q 有 $|q| < 1$.

例：求极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - n + 4}{2n^3 + 3}$.

如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起都有 $x_n \geq 0$(或 $x_n \leq 0$), 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $a \geq 0$(或 $a \leq 0$).

数列极限的四则运算法则：如果数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都收敛，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, 则数列 $\{x_n \pm y_n\}$, $\{cx_n\}$(其中 c 为常数)，$\{x_n y_n\}$ 也都收敛；又若 $b \neq 0$, 则数列 $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ 也收敛.

例：求极限 $\lim_{n\to\infty}(1 + q + q^2 + \cdots + q^n)$, 其中常数 q 有 $|q| < 1$.

例：求极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3 - n + 4}{2n^3 + 3}$.

例：求极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+2}$.

例：试证 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, 其中常数 $a > 0$.

例：试证 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, 其中常数 $a > 0$.

2.3 函数的极限

例：试证 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, 其中常数 $a>0$.

2.3 函数的极限

现在以数列极限为基础，我们来讨论函数 $f(x)$ 的极限. 主要研究两种情形:

1. 自变量 x 任意地接近有限值 x_0 时，或者说 x 趋于有限值 x_0(记作 $x\to x_0$) 时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化趋势;
2. 自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大，即 x 趋于无穷大 (记作 $x\to\infty$) 时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化趋势.

2.3.1. 当 $x \to \infty$ 时函数的极限

2.3.1. 当 $x \to \infty$ 时函数的极限

定义：设 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义. 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 $\epsilon > 0$，无论它多么小，总存在正数 X, 使得当 $|x| > X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称 A 为 x 趋于无穷大时 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A$(当 $x \to \infty$).

2.3.1. 当 $x \to \infty$ 时函数的极限

定义：设 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义. 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 $\epsilon > 0$，无论它多么小，总存在正数 X, 使得当 $|x| > X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称 A 为 x 趋于无穷大时 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A$(当 $x \to \infty$).

$\epsilon - X$ 语言：$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时，就有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ 的几何意义?

$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ 的几何意义?

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$ 和 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ 的关系.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ 的几何意义?

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$ 和 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ 的关系.

例：试证 $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2x+1}{2x^2+x+1} = \frac{3}{2}$.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ 的几何意义?

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$ 和 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ 的关系.

例: 试证 $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2x+1}{2x^2+x+1} = \frac{3}{2}$.

$\lim_{x\to\infty} c = c$, $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0 (p > 0)$;
$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 (0 < a < 1)$; $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 (a > 1)$.

2.3.2 当 $x \to x_0$ 时函数的极限

2.3.2 当 $x \to x_0$ 时函数的极限

定义：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义 (在点 $x = x_0$ 处可以没有定义). 如果存在常数 A, 对于任意给定的正数 $\epsilon > 0$, 无论它多么小，总存在正数 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，就有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称当 x 趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的极限为 A(或称 x 趋于 x_0 时, $f(x)$ 收敛于 A; 又称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极限 A), 记作 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A$(当 $x \to x_0$).

2. 极限

$\epsilon - \delta$ 语言： $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，就有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

$\epsilon - \delta$ 语言：$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，就有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

几何意义?

$\epsilon-\delta$ 语言：$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\epsilon>0, \exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，就有 $|f(x)-A|<\epsilon$.

几何意义?

例：证明 $\lim_{x\to x_0} cosx = cosx_0$.

$\epsilon - \delta$ 语言：$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，就有 $|f(x) - A| < \epsilon$.

几何意义?

例：证明 $\lim_{x\to x_0} cosx = cosx_0$.

例：试证 $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{4}$.

2.3.3 单侧极限

2.3.3 单侧极限

定义：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某左邻域 (或某右邻域) 有定义 (在点 x_0 处可以没有定义), 如果存在常数 A, $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$, 当 $-\delta < x - x_0 < 0$(或 $0 < x - x_0 < \delta$) 时，就有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称 A 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限 (或右极限)，记作 $f(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} = A$, 或 $f(x) \to A($当 $x \to x_0^-)$, (或 $f(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} = A$, 或 $f(x) \to A($当 $x \to x_0^+))$.

定理：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有 (双侧) 极限 A 的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限均存在且都等于 A, 即

$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A.$

定理：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有 (双侧) 极限 A 的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限均存在且都等于 A, 即
$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A.$

例：设

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1, x>2 \\ 2x+3, x<2 \end{cases}$$

试证 $\lim_{x\to 2} f(x)$ 不存在.

2.4 函数极限的性质与运算

2.4 函数极限的性质与运算

极限的唯一性: 如果极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则其极限唯一.

2.4 函数极限的性质与运算

极限的唯一性: 如果极限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则其极限唯一.

局部有界性：如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则存在点 x_0 的去心 δ 邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$, 使得 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有界，即存在正数 $M>0$，使得 $|f(x)|\le M$, $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$.

局部保序性：如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, 且 $A > B$, 则存在点 x_0 的去心 δ 邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$, 使得 $g(x) < f(x), x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$.

局部保序性：如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, 且 $A > B$, 则存在点 x_0 的去心 δ 邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta) = \{x|0 < |x - x_0| < \delta\}$, 使得 $g(x) < f(x), x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$.

推论：设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A(A \neq 0)$, 则存在点 x_0 的去心 δ 邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta) = \{x|0 < |x - x_0| < \delta\}$, 使得 $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$, $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$. 如果 $A > 0$(或 $A < 0$)，则当 $x \in \mathring{U}$ 时，就有 $f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$).

推论：设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ 存在. 如果存在点 x_0 的去心 δ 邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta) = \{x|0 < |x - x_0| < \delta\}$, 使得当 $x \in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，有 $f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$), 则 $A \geq 0$(或 $A \leq 0$).

推论：设 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在. 如果存在点 x_0 的去心 δ 邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$, 使得当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$), 则 $A\geq 0$(或 $A\leq 0$).

极限的四则运算法则：如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=B$, 则 $\lim_{x\to x_0} f(x)\pm g(x)=A\pm B$, $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=AB$, $\lim_{x\to x_0} cf(x)=cA$, $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$.

例：求极限 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}$.

例：求极限 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}$.

例：求极限 $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3+2x+1}{3x^3+5x^2+6}$.

例：求极限 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}$.

例：求极限 $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3+2x+1}{3x^3+5x^2+6}$.

复合函数的极限运算法则：设函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 可构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$, $f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)=\{x|0<|x-x_0|<\delta_0\}$ 内有定义. 如果 $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$, $\lim_{u\to u_0}f(u)=A$, 且 $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 都有 $\varphi(x)\neq u_0$, 则 $\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A$.

应当指出，当 $\lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0), \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$ 时，$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)] = f(\varphi(x_0))$.

应当指出，当 $\lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0), \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$ 时，$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x\to x_0} \varphi(x)] = f(\varphi(x_0))$.

例：证明 $\lim_{x\to x_0} log_a x = log_a x_0 (a > 0$ 且 $a \neq 1)$.

应当指出，当 $\lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0), \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$ 时，$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]=f(\varphi(x_0))$.

例：证明 $\lim_{x\to x_0} log_a x = log_a x_0 (a>0$ 且 $a\neq 1)$.

例：设 $\lim_{x\to x_0} u(x)=A>0$, $\lim_{x\to x_0} v(x)=B$, 试证：$\lim_{x\to x_0}[u(x)]^{v(x)}=A^B$.

2.5 数列极限与函数极限的关系

2.5 数列极限与函数极限的关系
海涅定理：设 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)=\{x|0<|x-x_0|<\delta_0\}$ 内有定义. 则 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是：对于任何包含与 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 且收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$, 都有 $\lim_{x\to\infty} f(x_n)=A$. (推论?)

2.5 数列极限与函数极限的关系

海涅定理：设 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)=\{x|0<|x-x_0|<\delta_0\}$ 内有定义. 则 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是：对于任何包含与 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 且收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$, 都有 $\lim_{x\to\infty} f(x_n)=A$. (推论?)

例：试证极限 $\lim_{x\to 0} sin\frac{1}{x}$ 不存在。(几何意义?)

2.5 数列极限与函数极限的关系

海涅定理：设 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)=\{x|0<|x-x_0|<\delta_0\}$ 内有定义. 则 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是：对于任何包含与 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 且收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$, 都有 $\lim_{x\to\infty} f(x_n)=A$. (推论?)

例：试证极限 $\lim_{x\to 0} sin\frac{1}{x}$ 不存在。(几何意义?)

例：试求 $\lim_{n\to\infty} log_a\frac{2n^2+n+1}{n^2+1}(a>0$ 且 $a\neq 1)$.

2.5 数列极限与函数极限的关系

海涅定理：设 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta_0) = \{x|0 < |x - x_0| < \delta_0\}$ 内有定义. 则 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是：对于任何包含与 $\mathring{U}(x_0, \delta_0)$ 且收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$, 都有 $\lim_{x\to\infty} f(x_n) = A$. (推论?)

例：试证极限 $\lim_{x\to 0} sin\frac{1}{x}$ 不存在。(几何意义?)

例：试求 $\lim_{n\to\infty} log_a\frac{2n^2+n+1}{n^2+1}(a > 0$ 且 $a \neq 1)$.

练习：如果数列 $\{x_n\}$ 的两个子列 $\{x_{2n}\}$ 与 $\{x_{2n-1}\}$ 都收敛于 a, 试证数列 $\{x_n\}$ 也收敛于 a.

练习：试用数列极限定义证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0(a>1)$.

练习：设 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$, 试用数列极限定义证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$.

练习：设 $x_n>0(n=1,2,3,\cdots)$, 且 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$. 试证：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a$.