第四章

动量和冲量

§1. 质点动量定理

➢ 动量

牛顿第二定律：
$$\vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (1)$$

质量改变：
$$\vec{F}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}=\frac{d\vec{P}}{dt} \qquad (2)$$

(2)式的写法比(1)式的写法更具有普遍性。

当m为常数时，(2)式由导数运算可得(1)式;

当m为变量时，(1)式解决不了问题，但(2)式能解决。

P＝mv就是大家非常熟悉的物理量——动量

(2)式可解释成：力的效果是使质点的动量发生变化。

力＝质点动量的变化率

➤ 冲量

$$\vec{F}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}=\frac{d\vec{P}}{dt}$$

两边同乘dt可得： $\vec{F}dt=d\vec{P}$

等式两边同时积分得： $\int_{t_0}^{t_1}\vec{F}dt=\int_{P_0}^{P_1}d\vec{P}=P_1-P_0=\Delta\vec{P}$

冲量的定义： $\vec{I}=\int_{t_0}^{t_1}\vec{F}dt$

- 注意：

➢ 冲量是矢量。冲量的方向：与力F的方向没有必然联系，它由F对时间的积分决定。

元冲量$dI = Fdt$的方向与F的方向相同。

➢ 冲量与力的作用过程有关，是过程量。

冲量的大小：即与$F(t)$函数形式有关，还与时间间隔（积分限）有关。

➢ 动量定理

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt = \int_{P_0}^{P_1} d\vec{P} = P_1 - P_0 = \Delta \vec{P} \qquad （3） \qquad 微分形式$$

$$\vec{I} = \int \vec{F}(t) dt = \vec{P}_1 - \vec{P}_0 \qquad （4） \qquad 积分形式$$

(4)式左边与力的作用过程有关，即与F(t)和t0、t1有关；

(4)式右边与作用过程毫不相关——状态量

动量只与质点的运动状态有关，与力的作用过程无关，故称其为状态量。

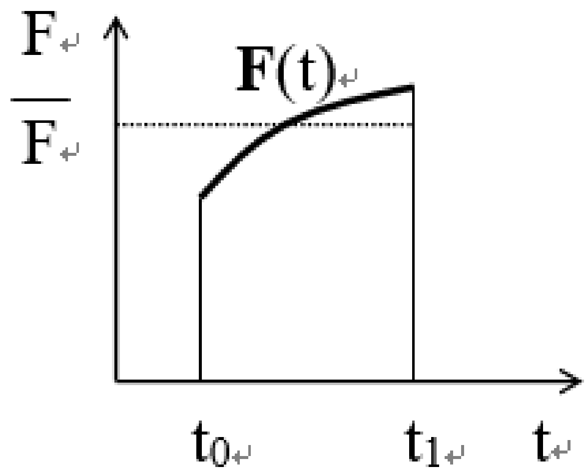
力对质点的作用过程的结果＝质点运动状态的变化

南開大學 Nankai University

- 如 $\vec{F}$ 是一恒量，则 $\vec{I} = \vec{F}(t - t_0)$
- 在许多实际问题中，往往不知道F（t）的函数形式，或者F（t）根本不能用解析式表达出来，这时常用力对时间的平均值（平均力）来表示冲量。

$$\bar{\vec{F}} = \frac{\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)dt}{t_1 - t_0}$$

$$\vec{I} = \bar{\vec{F}}(t_1 - t_0)$$



这实质是利用了数学分析中的中值定理。

- 而平均值又可由动量的变化表示：

$$\overline{\vec{F}} = \frac{\vec{I}}{\Delta t} = \frac{m\vec{v} - m\vec{v}_0}{\Delta t}$$

- 在研究短暂的冲击，碰撞问题时，动量定理非常有用。在这类问题中，这种作用时间短，数值非常大的变力——称作冲力。

- 应用：榔头、从高处跳下、掉在地面的物体等等。

- 动量定理矢量表示为直角坐标系下的标量形式：

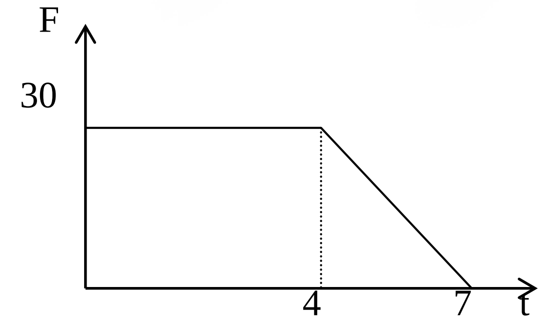
$$\begin{cases} \int_{t_0}^{t} F_x dt = P_x - P_{0x} \\ \int_{t_0}^{t} F_y dt = P_y - P_{0y} \\ \int_{t_0}^{t} F_z dt = P_z - P_{0z} \end{cases}$$

- 也就是说，冲量及动量关系，对于各自在直角坐标系下的分量，动量定理仍成立。

例题

已知：m＝10kg，F大小如图，摩擦系数μ＝0.2，$v_0=0$

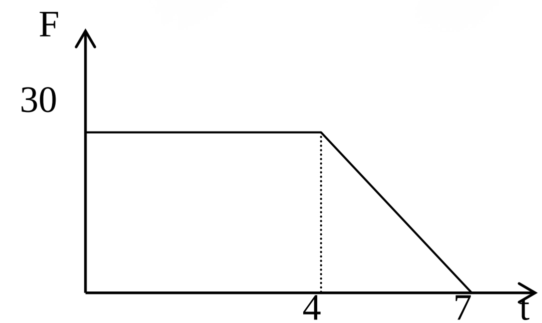
求： t＝6s时木箱的速度。



例题

已知：m＝10kg，F大小如图，摩擦系数μ＝0.2，$v_0=0$

求：　t＝6s时木箱的速度。



解：F的表达式：

$t_0=0$到$t_1=4s$，F＝30N，

t＝4s到7s，F＝70－10t。

$t_2=6s$时，木箱的速度为v

根据质点动量定理：

$$(F-\mu mg)(t_1-t_0)+\int_{t_1}^{t_2}(70-10t)dt-\mu mg(t_2-t_1)=mv-0$$

$$(F-\mu mg)(t_1-t_0)+70(t_2-t_1)-5(t_2^2-t_1^2)-\mu mg(t_2-t_1)=mv$$

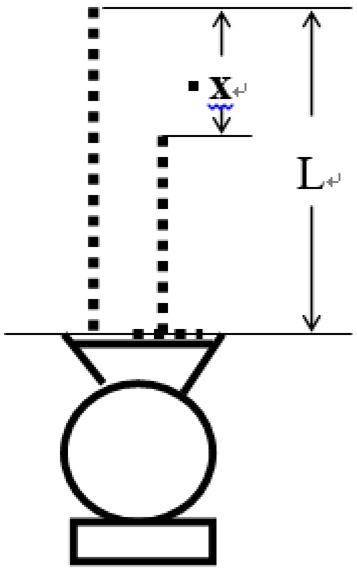
$$v=\frac{(30-19.6)\times 4+(70-19.6)\times 2-5(36-16)}{10}=4.24 \quad （m/s）$$

南开大学 Nankai University

例题

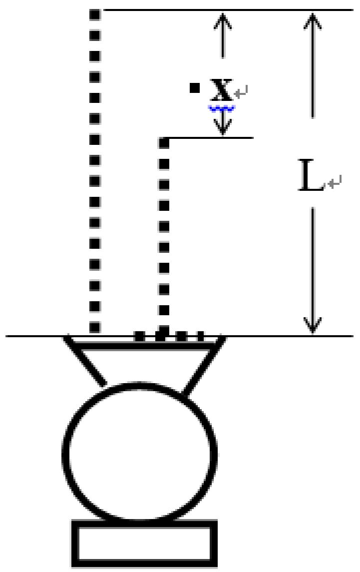
已知：质量为M，长为L的匀质链条，上端悬挂，下端刚和称盘接触，使链条自由下落。

求：下落长度x时，称的读数。



例题

已知：质量为M，长为L的匀质链条，上端悬挂，下端刚和称盘接触，使链条自由下落。



求：下落长度x时，称的读数。

解法1： 称的读数 N＝mg＋F

mg是落在称上的链条的重量，F是链条下落时具有速度v的一小段与称盘碰撞，速度由v变成0时给称盘的冲力。

根据动量定理： $Fdt = dmv - dm0$

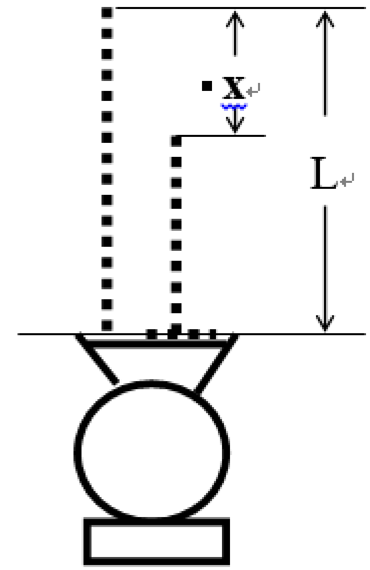
$$dm = M / Ldx, \quad v^2 = 2gx$$

$$F = \frac{dm}{dt}v = \frac{M}{L}\frac{dx}{dt}v = \frac{M}{L}v^2 = \frac{M}{L}2gx$$

$$N = \frac{M}{L}gx + 2\frac{M}{L}gx = 3\frac{M}{L}gx$$

称的读数是落在称盘上链条质量的3倍。

解法2：　上边的链条：



$$F_1 = m_1 g = \frac{M}{L} xg$$

下边的链条：

$$m_2 g - F_2 = \frac{dP}{dt}$$

$$P = \frac{M}{L}(L-x)\frac{dx}{dt} = \frac{M}{L}(L-x)\sqrt{2gx}$$

$$F_2 = m_2 g - \frac{dp}{dt} = \frac{M}{L}(L-x)g - \frac{d}{dt}\left[\frac{M}{L}(L-x)\sqrt{2gx}\right] = \frac{M}{L}(L-x)g - \frac{Mg}{L}(L-3x) = \frac{Mg}{L}2x$$

对整根链条：

$$F = F_1 + F_2 = 3\frac{M}{L}gx$$

§2. 质点系动量定理

➢ 系统（质点系）的动量：

系统内各个质点动量的矢量和：$\sum \vec{P}_i$

对于由n个质点组成的系统中，每个质点所受的力有内力（质点间的相互作用力）f_{ij}和外力F_i。

✓ 假定质点系由两个质点m_1和m_2组成，

- m_1所受外力为$\overrightarrow{F_1}$，受m_2的力为： $\overrightarrow{f_{21}}$
- m_2所受外力为$\overrightarrow{F_2}$，受m_1的力为： $\overrightarrow{f_{12}}$

□由质点动量定理可知：

$$m_1: \quad \int_{t_0}^{t} \vec{F}_1 dt + \int_{t_0}^{t} \vec{f}_{21} dt = m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_{10}$$

$$m_2: \quad \int_{t_0}^{t} \vec{F}_2 dt + \int_{t_0}^{t} \vec{f}_{12} dt = m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_{20}$$

- 两式相加： $$\int_{t_0}^{t}(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\ dt+\int_{t_0}^{t}(\vec{f}_{21}+\vec{f}_{12})\ dt$$
$$=(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)-(m_1\vec{v}_{10}+m_2\vec{v}_{20})$$
- 由牛三定律知： $\vec{f}_{21}=-\vec{f}_{12}$
- 故： $\int_{t_0}^{t}(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\ dt=(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)-(m_1\vec{v}_{10}+m_2\vec{v}_{20})$
- 即物体系总动量的改变等于合外力的冲量，与内力无关。

➢ 推广到任意多个质点组成的系统：

每个质点的动力学方程（牛顿第二定律）为：

$$\vec{f}_{12}+\vec{f}_{13}+\cdots+\vec{f}_{1n}+\vec{F}_1=\frac{d\vec{P}_1}{dt}$$

$$\vec{f}_{21}+\vec{f}_{23}+\cdots+\vec{f}_{2n}+\vec{F}_2=\frac{d\vec{P}_2}{dt}$$

……

$$\vec{f}_{n2}+\vec{f}_{n3}+\cdots+\vec{f}_{n(n-1)}+\vec{F}_n=\frac{d\vec{P}_n}{dt}$$

将上式两边相加得：

左：根据牛顿第三定律，$f_{12}=f_{21}$，…… ，$f_{1n}=f_{n1}$

内力总是成对出现的，并且为一对作用力与反作用力

所以内力相加的结果为0。

左＝ $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots\ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$

右= $\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i$ 此为系统的动量

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i\right)$$

$\int_{t_0}^{t_1} (\sum \overrightarrow{F_i}) dt = \sum \overline{P_{i1}} - \sum \overline{P_{i0}}$ 内力不改变系统的动量

和外力的冲量＝系统动量的变化

质点系的动量定理

作用在质点系上所有外力在一段时间内的总冲量等于质点系动能的增量。

$$\vec{F}_{ex}dt = d\vec{P}$$ 微分形式

$$\int_{t_0}^{t} \vec{F}_{ex}dt = \vec{P} - \vec{P}_0$$ 积分形式

内力不改变系统的动量

质点系的动量定理分量表示：

$$\begin{cases} \int_{t_0}^{t} \sum F_x dt = \sum P_x - \sum P_{0x} \\ \int_{t_0}^{t} \sum F_y dt = \sum P_y - \sum P_{0y} \\ \int_{t_0}^{t} \sum F_z dt = \sum P_z - \sum P_{0z} \end{cases}$$

- 即：质点系所受合外力在某一坐标轴上的分量的冲量，等于各质点在该方向的动量分量之和的变化量。
- 质点系动量定理由牛二、牛三定律导出，适合于惯性参照系。

§3. 质点系动量守恒定理

- 如果整个质点系所受的合外力为零，则质点系的总动量保持不变。

即，如果$\sum \vec{F}=0$，则$\sum \vec{\mathrm{P}}$不变。

- 一般情况下，外力为0的情况很少，但如果在某个方向上的投影为0的情况很多，根据动量的矢量性，在这个方向上质点系动量守恒。

如：$\sum_i F_{ix}=0$

则：$\sum_i P_{ix}=\sum_i m_i v_{ix}=$常量

也可用动量守恒定律的分量表达式:

$$\begin{cases} 当\sum F_{\mathrm{x}}=0时,\sum P_{x}=\sum P_{0x} \\ 当\sum F_{\mathrm{y}}=0时,\sum P_{y}=\sum P_{0y} \\ 当\sum F_{\mathrm{z}}=0时,\sum P_{z}=\sum P_{0z} \end{cases}$$

□注意：

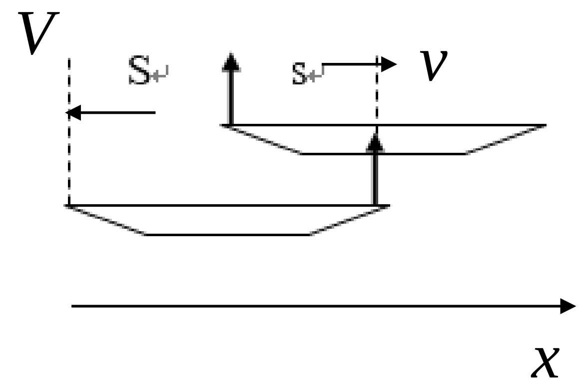
1）这里要注意的是，尽管整个质点系的总动量不变，但各质点的动量则有可能改变，因为内力可以使各个质点的动量发生变化。

2）质点系的总动量指各质点动量的矢量和。

例题

已知：长L＝4m，质量M＝150kg的船静止在湖面上，人的质量m＝50kg，人从船头走到船尾。不计水的阻力。

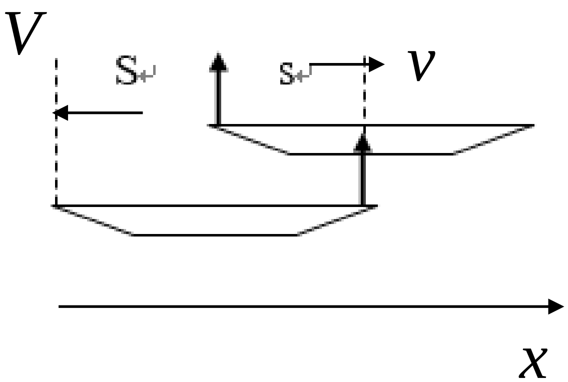
求：人和船相对岸各移动的距离。



例题

已知：长L＝4m，质量M＝150kg的船静止在湖面上，人的质量m＝50kg，人从船头走到船尾。不计水的阻力。

求：人和船相对岸各移动的距离。



解：人与船组成系统。

$$mv - MV = 0$$

$$mv = MV$$

$$m\int_0^t v\,dt = M\int_0^t V\,dt$$

S和s分别表示船和人相对岸移动的距离

$$S = \int_0^t V\,dt \qquad s = \int_0^t v\,dt$$

得：MS＝sm

∵　S＋s＝L　将 S＝L－s　代入　得

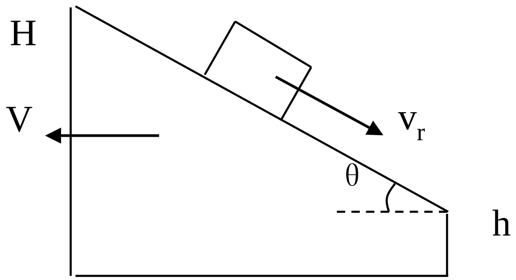
$$S=\frac{m}{M+m}L=\frac{50}{150+50}\times 4=1(m)$$

s＝L－S＝4－1＝3（m）

例题

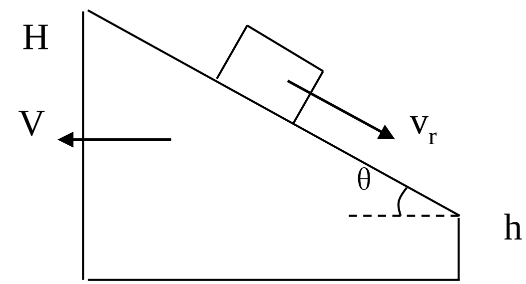
已知：一个质量为M的劈形物体置于水平面上，一个质量为m的物体自斜面顶端由静止开始下滑，接触面间的摩擦均忽略不计。

求：m相对于M的速度。



例题

已知：一个质量为M的劈形物体置于水平面上，一个质量为m的物体自斜面顶端由静止开始下滑，接触面间的摩擦均忽略不计。



求：m相对于M的速度。

解：在水平方向外力为0，水平方向的动量守恒：

$$mv_x - MV = 0$$

系统没有耗散力，机械能守恒。选水平面为重力势能0点：

$$mgH = mgh + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right)$$

南開大學 Nankai University

$$\begin{cases} v_x = v_r\cos\theta - V \\ v_y = v_r\sin\theta \end{cases}$$

可得：

$$V = m\sqrt{\frac{2g(H-h)\cos^2\theta}{(M+m)(M+m\sin^2\theta)}}$$

$$v_r = \sqrt{\frac{2g(H-h)(M+m)}{M+m\sin^2\theta}}$$

§4. 碰撞

- 物体间互相以冲力作用于对方而扰乱对方运动状态的现象——碰撞。（广泛存在：宏观、微观、接触、非接触）

一、碰撞物体总动量守恒

对于碰撞，Δt 很小, 内力一般很大， 碰撞时经常受外力作用的影响（如重力、弹力、摩擦力），但外力比起内力很小，有时外力还与运动平面垂直，常可忽略不计。

内力不改变系统总动量，故总动量守恒（适合各种碰撞）。

- 大部分情况下，碰撞时的相互作用力是弹力，因双方的形变引起的，如碰撞后，

✓ 形变完全恢复——**完全弹性碰撞（动量守恒，动能守恒）**

✓ 形变部分恢复——**非完全弹性碰撞（动量守恒，动能不守恒）**

✓ 形变完全不能恢复——**完全非弹性碰撞（动量守恒，动能不守恒）**

二、完全弹性碰撞

- 碰撞分为两个阶段：压缩阶段，恢复阶段
- 从能量角度看：压缩阶段，动能转换为弹性势能；恢复阶段，弹性势能转换为动能。
- 对于完全弹性碰撞，因动能和势能之间的转化是彻底的，因此，碰撞前后质点系的动能相等。

- 如 两质点m_1、m_2碰撞前的速度分别为u_1、u_2，碰撞后的速度分别为v_1、v_2
- 则 $$\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2 \qquad ——(1)$$
- 由动量守恒：

$$m_1u_1+m_2u_2=m_1v_1+m_2v_2 \qquad ——(2)$$

- 由（1）得：

$$m_1(u_1^2 - {v_1}^2) = m_2(v_2^2 - {u_2}^2) \qquad ——(3)$$

- 由（2）得：

$$m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2) \qquad ——(4)$$

- （3）/（4）：

$$u_1 + v_1 = v_2 + u_2$$

或$\mathrm{u}_1 - \mathrm{u}_2 = v_2 - v_1$

- 定义：

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2}$$

——碰撞的**恢复系数**

Nankai University 南開大學

- 完全弹性碰撞：e=1
- 完全非弹性碰撞：e=0
- 非完全弹性碰撞：e=0~1

- e完全由碰撞物体的弹性确定：
- 如玻璃——玻璃：e=0.93
- 铝——玻璃：e=0.20
- 铁——铝：e=0.12

对e的测量：

小球与固定在地球上的物体碰撞：

地球质量很大：$v_2 = 0 \quad u_2 = 0$

则 $e = \dfrac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} \Rightarrow e = -\dfrac{v_1}{u_1}$

$$m_1(u_1^2 - v_1{}^2) = m_2(v_2^2 - u_2{}^2)$$

$$m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2)$$

$$v_2 = v_1 + \mu_1 - \mu_2$$

由（1）（2）得

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 \\ v_2 = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2 + \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 \end{cases}$$

- **讨论：**

① 如 $m_1 = m_2$ 则 $v_1 = u_2$ $v_2 = u_1$ 速度互换

② 如 $u_2 = 0$

1) $m_1 = m_2$ $v_1 = 0$ $v_2 = u_1$

2) $m_2 >> m_1$ $v_1 = -u_1$ $v_2 = 0$

3) $m_2 << m_1$ $v_1 = u_1$ $v_2 = 2u_1$

三、完全非弹性碰撞

- 形变完全不能恢复，碰撞后不再分开，以同一速度运动，即 $v_1 = v_2 = v$

- 动量守恒：$m_1 u_1 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2) v$

$$v = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} \qquad \Delta E_k = -\frac{m_1 m_2 (u_1 - u_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

四、非完全弹性碰撞

✓ 形变部分恢复

动量守恒：$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$

恢复系数：

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = u_1 - \dfrac{(1+e)m_2(u_1 - u_2)}{m_1 + m_2} \\ v_2 = u_2 + \dfrac{(1+e)m_1(u_1 - u_2)}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

损失的能量：

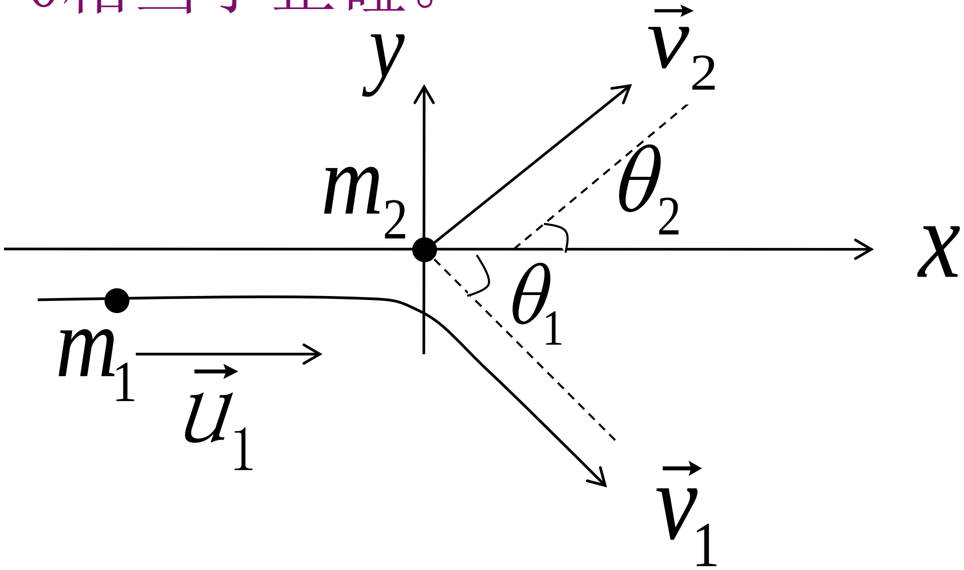
$$\Delta E_k = -\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(u_1-u_2)^2$$

五、两维碰撞

- 以上我们研究的是正碰（对心碰撞）
- 入射质点 m_1 的运动路线和通过靶质点 m_2 且平行于入射运动路线的直线距离为b——碰撞参量(或瞄准距离）。

b表示瞄准的程度，b=0相当于正碰。

设 $u_2 = 0$



- 假定为完全弹性碰撞。
- 由动量守恒：

$$x: m_1u_1 = m_1v_1\cos\theta_1 + m_2v_2\cos\theta_2$$

$$y: 0 = m_2v_2\sin\theta_2 - m_1v_1\sin\theta_1$$

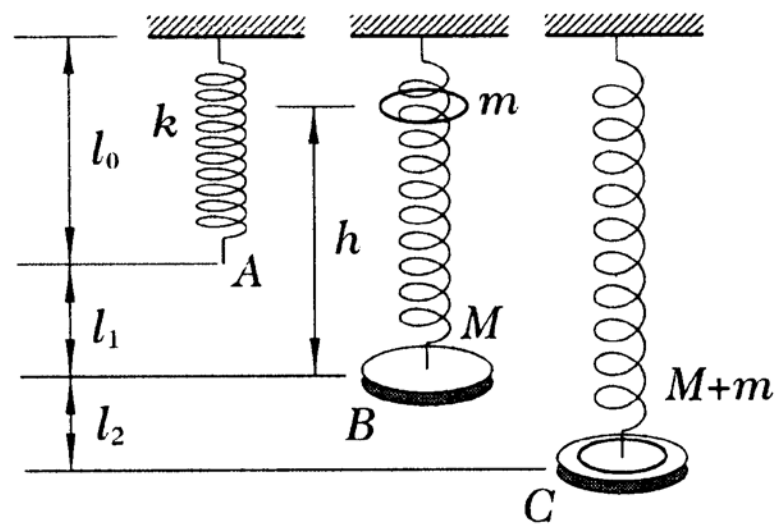
- 动能守恒：

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

- 四个未知量，三个关系。事实上，另一个与作用过程有关，比较复杂。经常通过实验测量出一个角度即可。

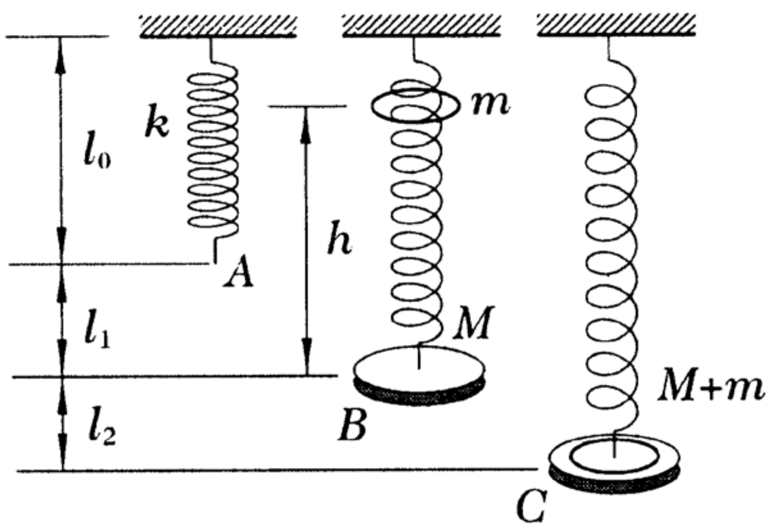
例题

质量为M的圆盘，悬挂在弹性系数为k的轻弹簧下端，有一质量为m的圆环从离圆盘高h处自由下落，与圆盘做完全非弹性碰撞，碰撞时间很短，此后盘与环一起下降，试求下降的最大距离l_2 .



例题

质量为M的圆盘，悬挂在弹性系数为k的轻弹簧下端，有一质量为m的圆环从离圆盘高h处自由下落，与圆盘做完全非弹性碰撞，碰撞时间很短，此后盘与环一起下降，试求下降的最大距离l_2.



解：因为有完全非弹性碰撞过程，所以整个过程机械能不守恒。

整个过程分为3个过程：

（1）圆环自由下落（势能变动能）；

（2）完全非弹性碰撞（动量守恒）；

（3）共同下落（机械能守恒）。

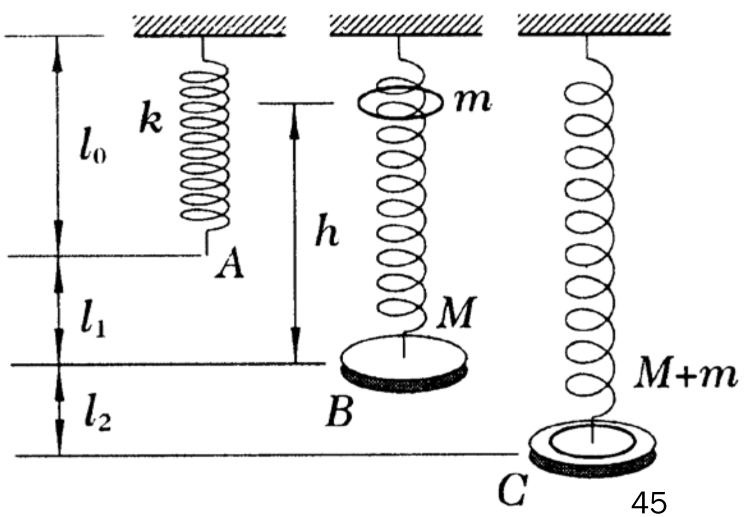
第一过程：自由下落

碰前的速度：　　mgh＝1/2 mv^2　，　$v=\sqrt{2gh}$

第二过程：完全非弹性碰撞

圆盘受重力（M＋m）g和弹簧的弹性力F，这两个力都是有限大小的力，碰撞过程的作用时间极短△t→0，这两个力的冲量（M＋m）g△t→0；F△t→0，因此满足动量守恒条件。

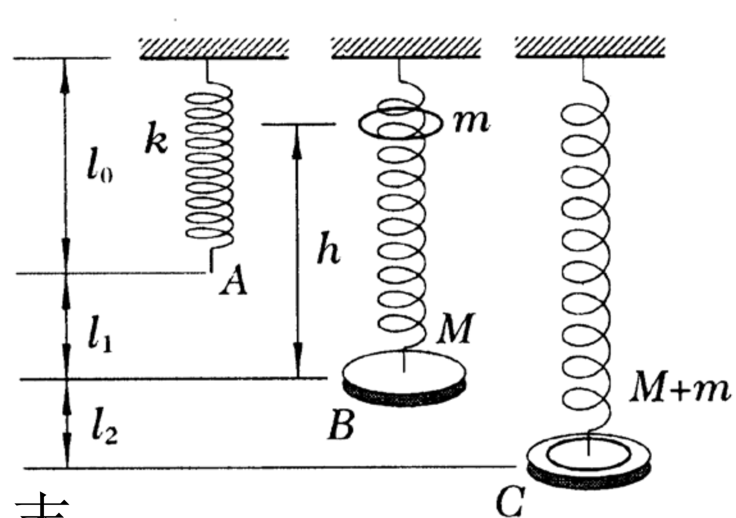
$$mv = (m+M)V$$



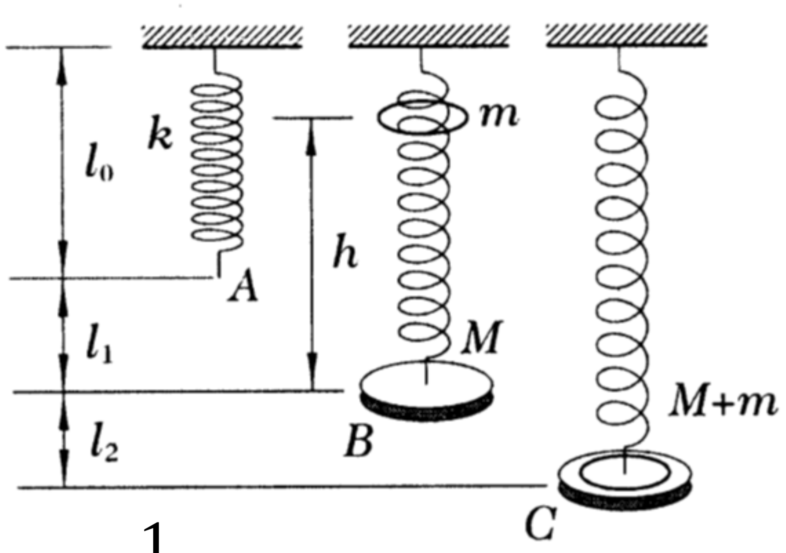
第三过程：共同下落（机械能守恒）

弹簧的势能0点选弹簧的原长l_0。

重力势能0点选最大拉伸长度l_2。



	始		末
碰前拉伸长度：	$Mg=kl_1$	；	(l_1+l_2)
弹性势能：	$1/2\,k\,l_1^2$	；	$1/2\,k(l_1+l_2)^2$；
重力势能：	$(m+M)\,g\,l_2$	；	0
动能：	$1/2(m+M)V^2$	；	0



根据机械能守恒定律：

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2+(m+M)gl_2+\frac{1}{2}kl_1^2=\frac{1}{2}k(l_1+l_2)^2$$

将l1和V的值代入解得l_2：

$$l_2=\frac{mg}{k}+\sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2}+\frac{2m^2gh}{k(m+M)}}$$

南開大學 Nankai University

§5. 反冲现象及火箭原理

- 关于动量定理及动量守恒定律可应用于碰撞问题及反冲现象中。
- 反冲现象，可以应用动量守恒定理予以解释。
- 在研究火箭时，通常忽略空气阻力及重力的作用。

- 设t时刻，火箭的质量为M，速度为 $\vec{v}$，单位时间喷出气体的质量为 ω，气体相对于火箭的速度为 $\vec{u}$，气体的绝对速度为：$\vec{u}+\vec{v}$
- 因二者反向，沿同一直线，火箭前进方向为正方向 $\vec{i}$，则气体的绝对速度可表示为： $(v-u)\vec{i}$，这样就可用代数式表示。

dt时间后：

火箭： $M-\omega dt$，(v+dv)

气体： ωdt，(v+dv-u)

由动量守恒可知：

$$Mv=(M-\omega dt)(v+dv)+\omega dt(v+dv-u)$$

忽略二级无穷子项（dvdt）： $Mdv-u\omega dt=0$

dt时间内，火箭质量的变化为： $dM=-\omega dt$

代入上式， $Mdv+udM=0$ 或 $dv=-u\dfrac{dM}{M}$

设t=0时，火箭质量为 M_0 ，速度为 v_0

$$\int_{v_0}^{v}dv=\int_{M_0}^{M}(-u\frac{dM}{M})$$

有u不随时间 变化，是一常量 $v - v_0 = u \ln \frac{M_0}{M}$

即 $$v = v_0 + u \ln \frac{M_0}{M}$$

- 设火箭喷气结束时，质量为 M_s，火箭初始速率为0，则有：

火箭的最后可达到的速率为： $v_s = u \ln \frac{M_0}{M_s}$

$\frac{M_0}{M_s}$ ——火箭的质量比

齐奥尔科夫斯基公式

这一结果是忽略空气阻力及重力的影响，故实际最终速率要小于此值，但具有指导意义：

1）最终速率与喷气相对速率成正比

喷气速率：要求高温、高压、喷口抗高速、高效能燃料，一般　2500 m/s　（40大气压，3000° C）

2）最终速率与燃料燃烧前后质量比的自然对数成正比

质量比M_s：提高较难。火箭包括外壳、发动机、仪器、卫星、故　　　较大。一般在10以下。

Nankai University 南開大學

- 以喷气速度为2500 m/s，质量比为6，为例，

  v_s =4500 m/s

- 这小于第一宇宙速度：7900 m/s，故采用多级火箭，外壳自动脱离，提高质量比。

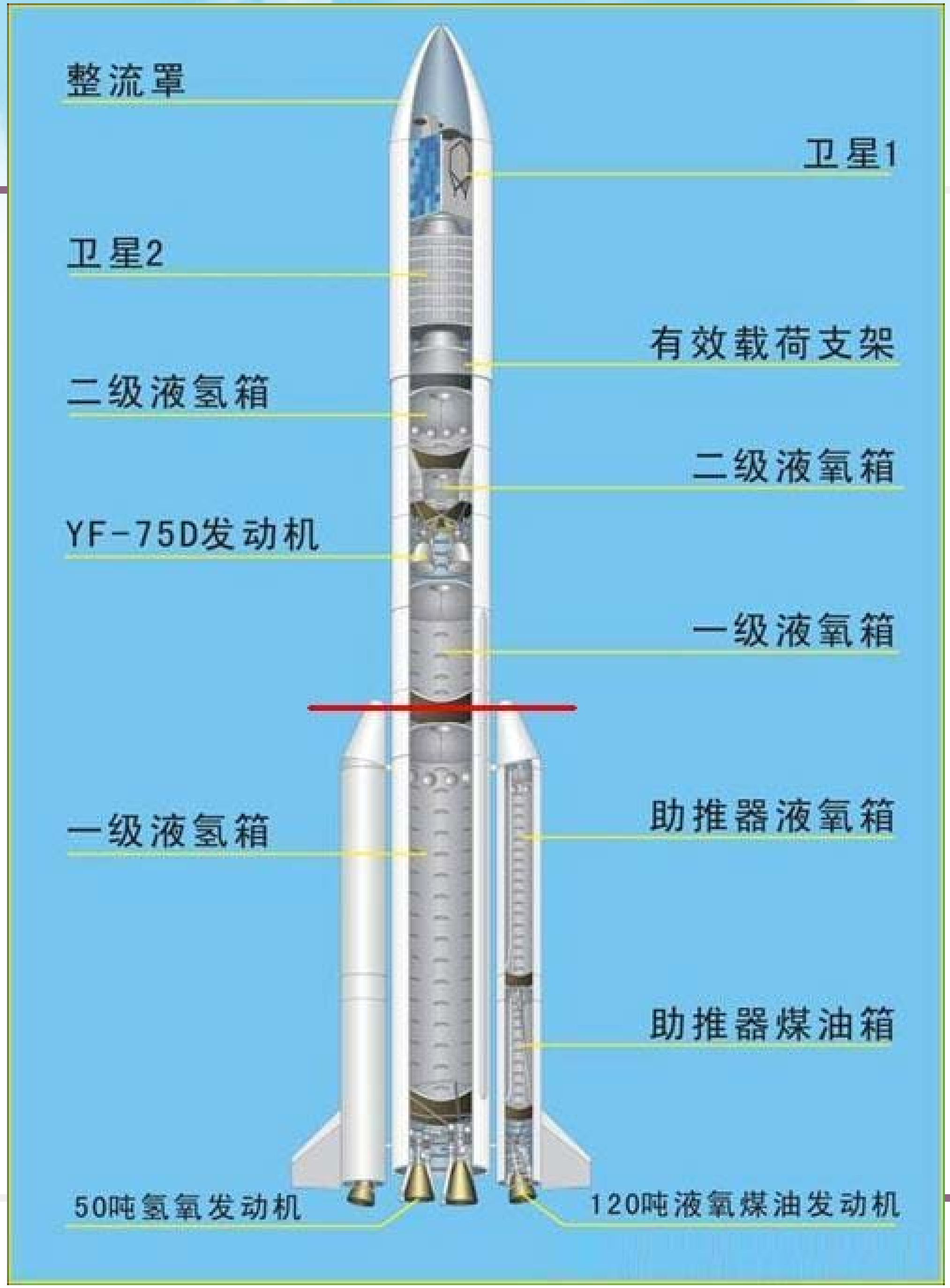
$$v_s = u \ln \frac{M_0}{M_s}$$

此式称为齐奥尔科夫斯基公式。
火箭之父，航天之父。

1898年他写了《用于空间研究的反作用飞行器》的论文，提出了计算火箭速度的齐奥科夫斯基公式，并建议使用液体推进剂和多级火箭。

（1857－1935）

为了宣传他的理论，齐奥科夫斯基在1929年出版了他的著名科幻小说《在地球之外》，描写2017年以后的年代里，一群来自不同国家的科学家和工程师们乘坐火箭驱动的飞船到太空旅行，他们先绕地球飞行，然后降落在月球上，随后继续飞行到火星附近，最后返回地球。



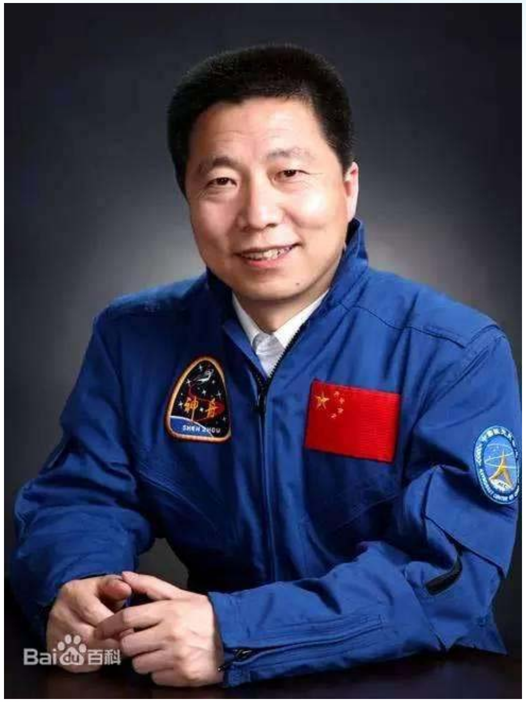
南開大學
Nankai University


长征五号系列运载火箭六种构型
构型A
构型B
构型C
构型D
（基本型）
构型E
构型F


ROCKETS OF THE
WORLD
SKRABEK

1961年4月12日第一位航天员加加林进入太空

1969年7月21日“阿波罗11号”阿姆斯特朗登月

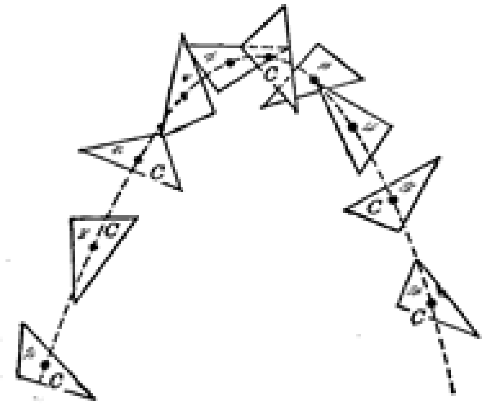


2003年10月15日北京时间9时，杨利伟乘由长征二号F火箭运载的神舟五号飞船首次进入太空，象征着中国太空事业向前迈进一大步，起到了里程碑的作用。

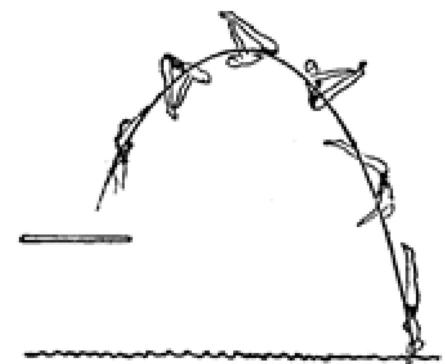
天宫一号目标飞行器是中国首个自主研制的载人空间试验平台，于2011年9月29日21时16分03秒从酒泉卫星发射中心发射，全长10.4米，最大直径3.35米，内部有效使用空间约15立方米，可满足3名航天员在舱内工作和生活需要，设计在轨寿命两年。

§6. 质心与质心运动定理

对质点系而言，存在一个特殊点，这一点从图上可以看得很清楚，尽管物体在上抛运动的同时还在旋转，物体（质点系）上各点的运动比较复杂，但物体上的某一点（中间的小孔处）的运动就简单得像一个质点的上抛一样，沿着抛物线的轨迹运动。于是我们可以定义该特殊点为**质心**，并认为体系的总质量都集中在质心处。



(a)



(b)

一、质心的定义

$$\begin{cases} m_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \\ \vec{r}_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m_c} \end{cases}$$

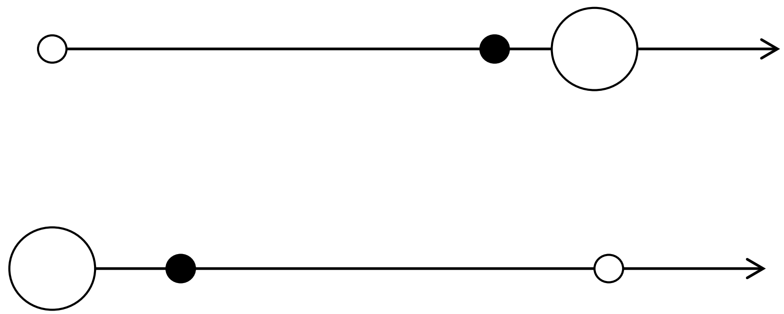
在直角坐标系中的投影为：

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M}$$

$$y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M}$$

$$z_c = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

例：由m1和m2组成的质点组（系统），坐标分别为x1，y1；x2，y2；其质心坐标为：



$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$$

代入具体数值：

$m_1=1$，$m_2=9$；$x_1=0$，$y_1=0$，$x_2=10$，$y_2=0$

$x_c=(1\times0+9\times10)/(1+9)=9$

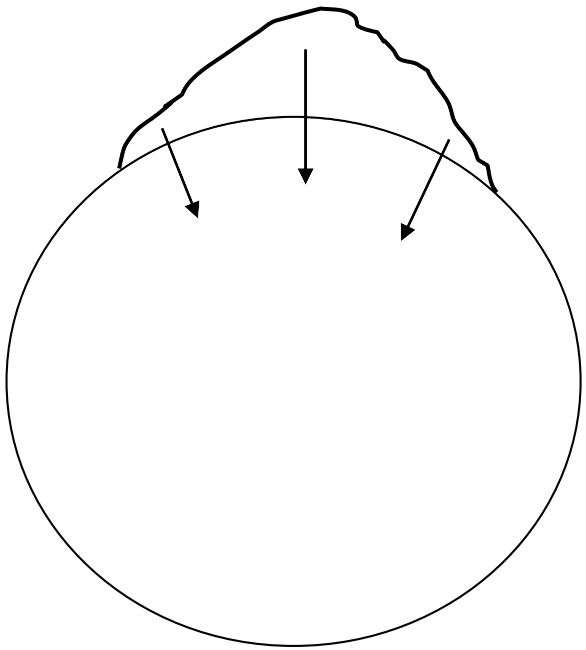
$m_1=9$，$m_2=1$；$x_1=0$，$y_1=0$，$x_2=10$，$y_2=0$

$x_c=(9\times0+1\times10)/(1+9)=1$

由此可直观地看到，质心靠近质量大的质点一侧。质心不限于质点组，连续的物体可看成是有无限多的质点组成，这时求和变成了积分。

➢ 质心与重心：

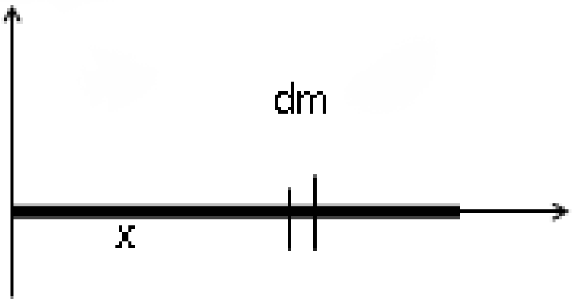
在地球表面附近的小物体，质心和重心是一致的；在太空中有质心的概念，没有重心的概念；



对于一座大山，各处的重力加速度的大小和方向都不能看成常量，这时质心和重心就不重合了。

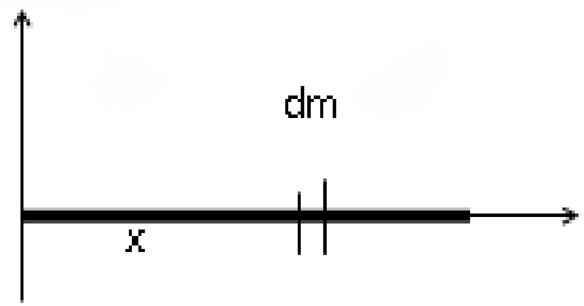
例题

质量为M，长为L的匀质细杆的质心



例题

质量为M，长为L的匀质细杆的质心



解：在连续的杆上取一体元dm

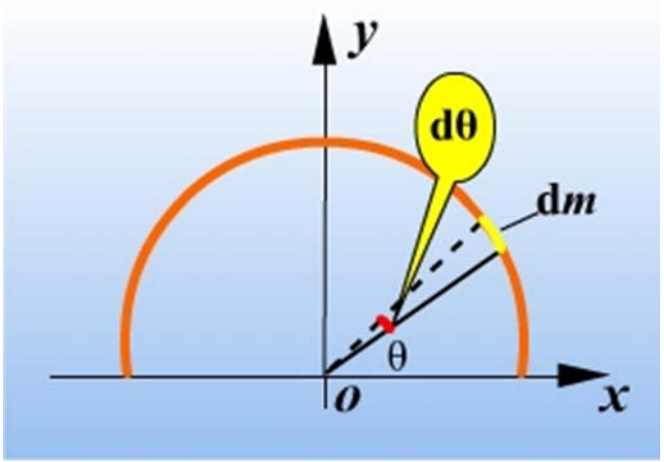
$$dm = M/L\ dx$$

根据质心的定义：

$$x_c = \frac{\int xdm}{M} = \frac{\int_0^L x\frac{M}{L}dx}{M} = \frac{\frac{M}{L}\int_0^L xdx}{M} = \frac{1}{2}L$$

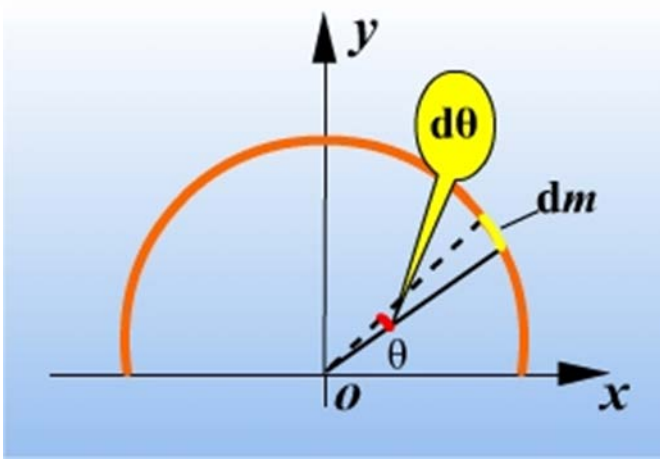
例题

已知半圆环质量为M，半径为R
求：它的质心位置？



例题

已知半圆环质量为M，半径为R
求：它的质心位置？



解： 由对称性 $x_c = 0$

线密度 $\lambda = \dfrac{M}{\pi R}$

$$dm = \frac{M}{\pi R} R d\theta \qquad y = R\sin\theta$$

$$y_c = \frac{\int y dm}{M} = \frac{\int R\sin\theta \frac{M}{\pi R} R d\theta}{M} = \frac{R\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta}{\pi}$$

$$= \frac{R}{\pi}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} = \frac{2R}{\pi}$$

二、质心运动定理

由质点系的动量定理：

$$\sum \vec{F}_{外} = \frac{d}{dt}(\sum m_i \vec{v}_i) = \frac{d^2}{dt^2}(\sum m_i \vec{r}_i)$$

分子分母同乘总质量m得：

$$\sum \vec{F}_{外} = m\frac{d^2}{dt^2}(\frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}) = m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_c$$

也可写成：

$$\sum \vec{F}_{外} = m\vec{a}_c$$

此式与质点的动力学方程形式完全一样。

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i = m_c \vec{v}_c$$

动量形式完全一样。

质点系的动能：柯尼希定理

质点系的动能可分解成质心动能与质点系相对质心的动能之和

$$E_k = E_{kc} + \frac{1}{2} m_c v_c^2$$

推导：

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ci}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ci}$$

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_c + \vec{v}_{ci}\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_c^{\,2} + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_c \vec{v}_{ci} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{ci}^{\,2}$$

$$= \frac{1}{2} m_c \vec{v}_c^{\,2} + \vec{v} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{ci} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{ci}^{\,2}$$

$$= \frac{1}{2} m_c \vec{v}_c^{\,2} + E_{kc}$$

- 说明质心的运动规律，相当于将系统中所有质点的质量都集中在质心，所有的外力（无论作用在哪个质点上）也都集中在质心上的一个质点的运动规律。
- 质心运动定理表明牛顿定律具有一种独特的性质，即如果它在某一小尺度范围内是正确的，那么在大尺度范围内也将是正确的。
- 一个系统中，只有质心具有这个特性，其它点没有这个特性。这正是质心的特殊之处。
- 内力对质心的运动状态不产生任何影响。

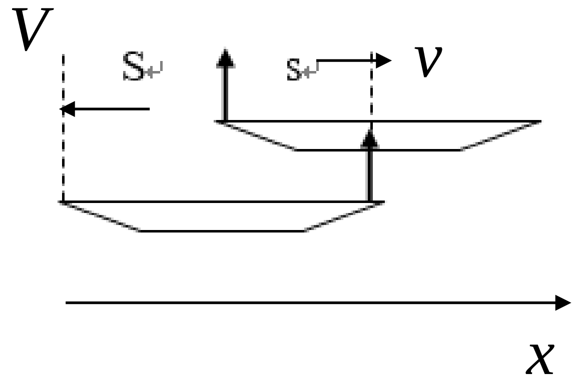
在相对论中，质量与速度有关，且速度和动量不服从经典力学的变换，而质点的质量在不同的参考系中看来是不同的。所以，“质心”这个概念在相对论中已没有多大意义。在相对论中用“动量中心系”来取代质心系。

例题

用质心运动定理解题

已知：长L＝4m，质量M＝150kg的船静止在湖面上，人的质量m＝50kg，人从船头走到船尾。不计水的阻力。

求：人和船相对岸各移动的距离。

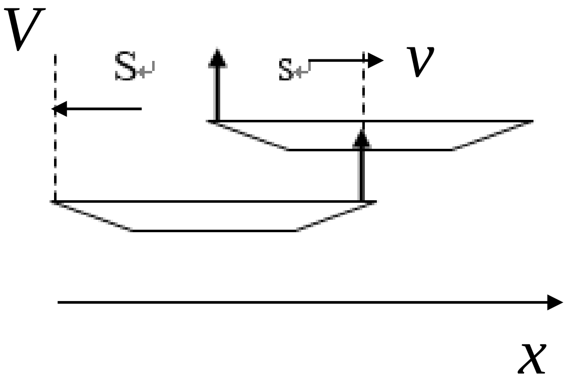


例题

用质心运动定理解题

已知：长L＝4m，质量M＝150kg的船静止在湖面上，人的质量m＝50kg，人从船头走到船尾。不计水的阻力。

求：人和船相对岸各移动的距离。



解：人和船组成质点系，在水平方向上外力为0。

根据质心运动定理，系统质心的加速度$a_c=0$。

系统原来处于静止状态，人走动后，质心依然保持不变。

	走动前		走动后
人相对岸的位置坐标：	x1	；	x1’
船的质心坐标：	x2	；	x2’
质心：	$x_c = \dfrac{mx_1 + Mx_2}{m+M}$	；	$x_c{}' = \dfrac{mx_1{}' + Mx_2{}'}{m+M}$

走动后的位置变化：

船相对岸移动了－S， x2’ ＝x2－S

人相对船移动了1，

人相对岸移动了1－S，x1’ ＝x1＋1－S

质心坐标保持不变：xc＝xc’

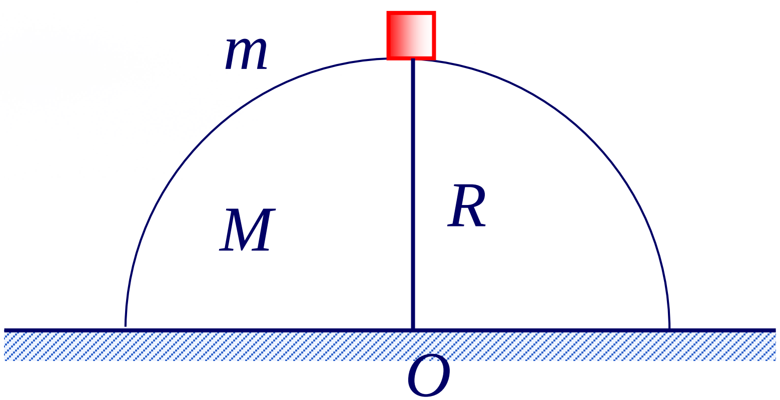
$$\frac{mx_1+Mx_2}{m+M}=\frac{m(x_1+l-S)+M(x_2-S)}{m+M}$$

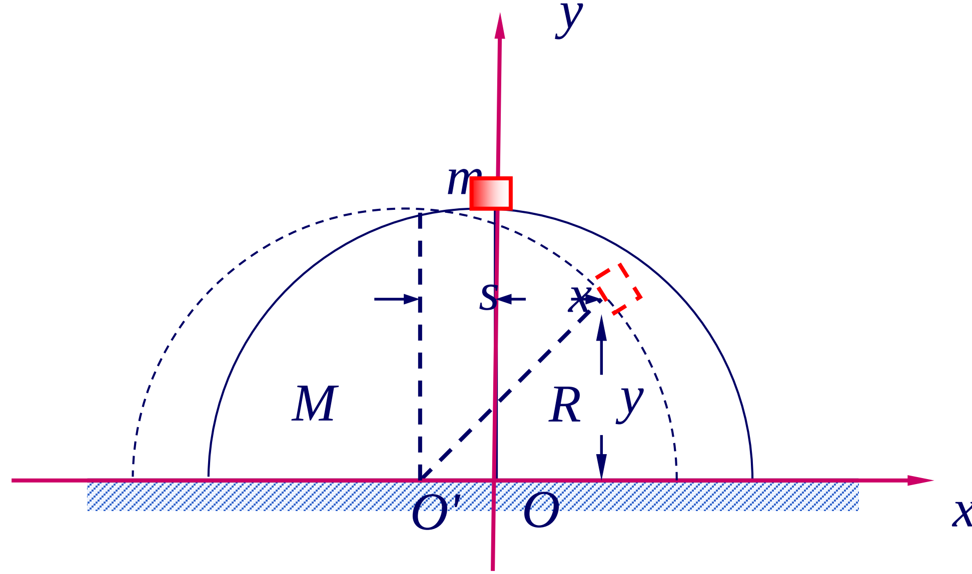
$$S=\frac{ml}{m+M}=\frac{50\times 4}{50+150}=1(m)$$

人相对岸的距离：l－S＝4－1＝3

例题

如图所示，半径为R、质量为M、表面光滑的半球放在光滑的水平面上，在其顶部有一质量为m的小滑块，从静止开始沿球面下滑。试求：小滑块脱离球面之前的轨迹。





解:

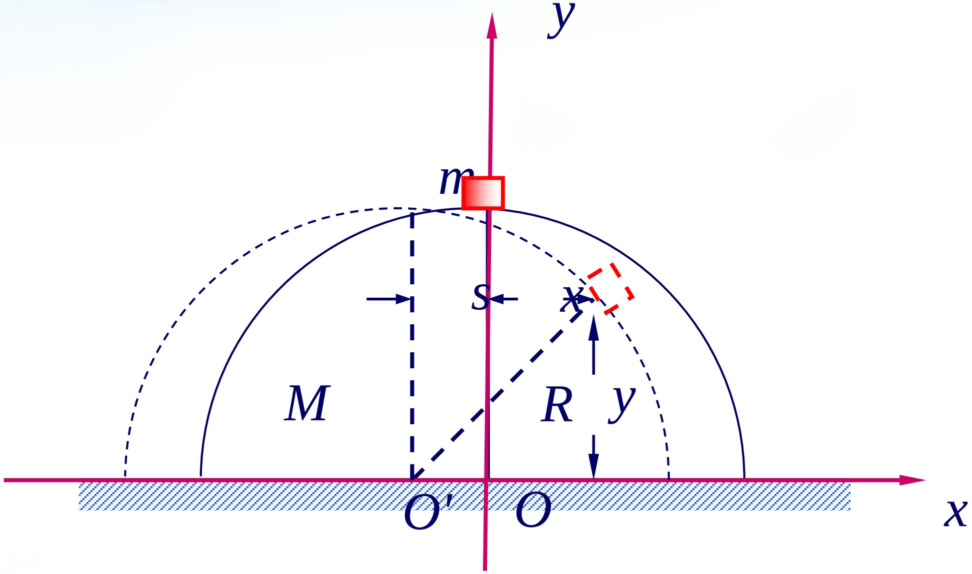
x方向受力为0

$$x_{C0} = 0$$

$$x_C = \frac{mx + M(-s)}{m+M}$$

由 $x_{C1} = x_{C_2}$ 得:

$$s = \frac{m}{M}x$$



根据 $(s+x)^2 + y^2 = R^2$ 可得

$$\frac{x^2}{\left(\frac{M}{m+M}R\right)^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$$

三、质心坐标系

把原点取在质心上，坐标轴的方向始终与某固定参考系（惯性系）的坐标轴保持平行的平动坐标系叫质心坐标系（或质心参考系），简称质心系。

质心坐标系在讨论质点系的力学问题中，十分有用。对于不受外力作用的体系（孤立体系）或所受外力的矢量和为零的体系，其质心坐标系是惯性系。对于受外力作用的体系，其质心系是非惯性系。

质心系：零动量参考系

$$\begin{cases} \vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ci} \\ \vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ci} \\ \vec{a}_i = \vec{a}_c + \vec{a}_{ci} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{ci} = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{ci} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{v}_c + \vec{v}_{ci} \right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_c + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{ci} = m_c \vec{v}_c$$

质点系的动量等于质心的动量

质点系相对质心的动量总是为零

$$dW_{内} + dW_{外} = dE_k$$

质心系中质点系动能定理

$$E_k(t) - E_k(t_0) = A_{外} + A_{内} + A_{惯}$$

$$dA_{惯i} = \vec{f}_i \cdot d\vec{r}_{ci}$$

$$A_{惯i} = \int_{t_0}^{t} \vec{f}_i \cdot d\vec{r}_{ci}$$

$$A_{惯} = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} (-m_i \vec{a}_c) \cdot d\vec{r}_{ci} = -\int_{t_0}^{t} \vec{a}_c \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i d\vec{r}_{ci}$$

$$= -\int_{t_0}^{t} \vec{a}_c \cdot d\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{ci}\right) = -\int_{t_0}^{t} \vec{a}_c \cdot d(m_c \vec{r}_{cc}) = 0$$

其中r_{cc}为在质心系中所求的质心的位矢，它当然为零。

于是结论为：

只要我们选择质心系，即使它不是惯性系，也不需要考虑惯性力所作的功。

质心系中质点系角动量定理

$$\vec{M}_{外} + \vec{M}_{惯} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{M}_{惯} = \sum_i \vec{r}_i \times (-m_i \vec{a}_c) = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) \times (-\vec{a}_c) = \vec{r}_c \times (-m\vec{a}_c)$$

选质心为参考点　$\vec{r}_c = 0 \Rightarrow \vec{M}_{惯} = 0$

质心系中质点系角动量定理 $\boxed{\vec{M}_{外} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}}$

与惯性系完全相同

- 动能定理，功能原理，机械能守恒定律适用范围：惯性系，质心系
- 在某些问题中，选用质心坐标系比需用惯性参考系还要好。

例：湖中有一船，船速为2m/s，船上人踢一质量m=1kg的小球（船的质量M远大于m），以4m/s的相对速度向正反两个方向踢。

问：分别以船及岸作参考系，计算人对球所做的功。

解：以船作参考系：

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\times 1\times 4^2 = 8 \quad (J)$$

以岸作参考系：

$$A_1' = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}\times 1\times (4+2)^2 - \frac{1}{2}\times 1\times 2^2 = 16 \quad (J)$$

$$A_2' = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}\times 1\times (-4+2)^2 - \frac{1}{2}\times 1\times 2^2 = 0 \quad (J)$$

问题出在哪里？

问题在于，踢出球后，船的动能发生了改变！

$$Mu = mv$$

$$u = \frac{m}{M} v \quad \to \quad 0$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} M \left(v_0 - u \right)^2 - \frac{1}{2} M v_0^2 = \frac{1}{2} M \left(v_0^2 - 2 v_0 u + u^2 \right) - \frac{1}{2} M v_0^2$$

$$= -M u v_0 + \frac{1}{2} M u^2 = -m v v_0 + \frac{1}{2} m v u = -m v v_0 = -8 \quad \left(J \right)$$

由于船的质量远大于球，其速度的改变u很小，但动能的改变却不能忽略！相对于“静止”参考系，球动能的增长虽然是16J(向前抛)或0J（向后抛），然而并不等于所需要做的功！所需作的功应等于“船–球”系统的动能的增长；必须计及船的动能的改变才可以得出正确的结果。

选取“船-球”系统的质心系则比较方便。因为船的质量远远大于球的质量，“船-球”系统的质心实际上也就是船的质心，船相对于自己的质心，当然始终是静止的。在质心坐标系中，轮船的动能始终是零，无需特别计及船的动能。在质心系中，球的速度也就是它相对于船的速度，不论向前或向后抛，物体的速度都是从0变为4 m/s，动能的增长都是8 J。据动能定理，应对它作功8J，与在岸上踢球的效果相同。

这里可以看到质心坐标系的优越性：无需计算轮船运动的改变就能得到正确的结果。

➢ 质点力学小节

牛顿第二定律：

$$\vec{F} = \frac{dm\vec{v}}{dt}$$

dt 乘

$$\vec{F}dt = dm\vec{v} = d\vec{p}$$

$$\int \vec{F}dt = \int d\vec{p} = P - P_0$$

动量定理

ds 标积（• 乘）

$$\vec{F} \bullet d\vec{s} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \bullet d\vec{s} = m\vec{v} \bullet d\vec{v}$$

$$\int \vec{F} \bullet d\vec{s} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

动能定理

r 左侧矢乘（×乘）

$$\vec{r} \times \vec{F} = \frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt}$$

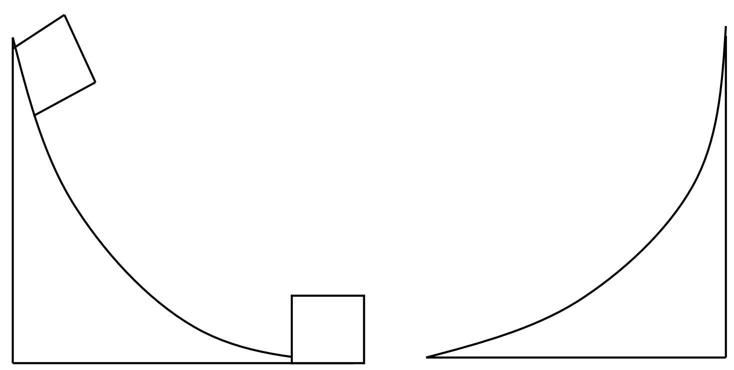
$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

动量矩定理

作业：P.173　4.3 ; 4.4 ; 4.16 ; 4.17；4.22

例题：

两个形状完全相同、质量都为M的弧形导轨A和B，放在底板上，AB导轨与地面相切，有一质量为m的小物体，从静止状态由A的顶端下滑，高度为h。所有接触面均为光滑的。试求：小物体在B导轨上能上升的最大高度。



解：第一过程：m从A下滑，水平面方向外力为0，动量守恒。

下滑过程没有摩擦力，机械能守恒：当m滑到水平面时，m的速度为v，A的速度为v_A：

$$-Mv_A + mv = 0$$

$$mgh = 1/2\, Mv_A^2 + 1/2\, mv^2$$

解得：

$$v = \sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}}$$

第二过程：m沿B上升过程，m上升到最大高度H时，相对B导轨的速度为0，两者以共同的速度u运动。水平面方向外力为0，动量守恒；没有摩擦力，机械能守恒。

$$mv = (M+m)u$$

$$1/2\, mv^2 = 1/2\,(M+m)u^2 + mgH$$

解得H为：

$$H = \frac{Mv^2}{2(M+m)g} = \left(\frac{M}{M+m}\right)^2 h$$

例题

一行李质量为m，垂直地轻放在传送带上，传送带的速率为v，它与行李间的摩擦系数为u。

求：（1）行李在传送带上滑动多长时间？（2）行李在这段时间内运动多远？（3）有多少能量被摩擦所消耗掉？

解：（1）行李的滑行时间为t，行李所受到的滑动摩擦力为μmg，根据动量定理：

$$\mu mgt = mv - 0$$

$$t = v/\mu g$$

行李在这段时间从静止→滑动（加速）→与传送带一起以速度v运动。

（2）设行李在时间t内运动长度为x，根据动能定理：

$$\mu mgx = \frac{1}{2}mv^2$$

$$x = \frac{v^2}{2\mu g}$$

（3）行李受到摩擦力，由静止到与传送带一起以速度v运动，行李运行的距离为x；行李所受摩擦力的反作用力是传送带受到的摩擦力，在该力作用期间，传送带运行的距离为vt，它所做的功为umgvt，这些功有一部分转换成行李的动能，另一部分被消耗掉了。消耗掉的能量就是传送带摩擦力所做的功减去转换成行李动能那一部分的能量。

$$\Delta E = \mu mgvt - \frac{1}{2}mv^2$$

将t＝v/μg代入得：

$$\Delta E = \mu mgv\left(\frac{v}{\mu g}\right) - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv^2$$