1. (本题讨论 左(右)导数 与导函数左(右)极限的关系)

(1) 设 f 在 $[a, a+\delta)$ 上连续,在 $(a, a+\delta)$ 上可导

求证:若 $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ 存在,则必有 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

(2) 考虑函数 $f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1+x}{1-x} & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$

研究:$\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)$,$\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)$,$f'_+(1)$,$f'_-(1)$

存在性,问(2)是否与(1)矛盾?

2. 求以下函数的 Maclaurin 公式
(麦克劳林)

(1) $(1+x)^\alpha$ (到 x^n 项)

(2) $\arctan x$ (到 x^{2n+2} 项)

(3) $e^{\sin x}$ (到 x^3 项)

3. 设 $f(x)$ 在 x_0 处 $(n+1)$ 次可导 且 $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$,其 Taylor 公式为

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0+\theta h), \quad 0<\theta<1$$

求证:$\lim\limits_{h\to 0} \theta = \dfrac{1}{n+1}$ (注:事实上 θ 未必是关于 h 的函数,可能一个 h 对应多个 θ,本题中我们对每个 h 取其中一个 θ,定义函数的)

4. (1) 确定方程 $\sin x = \dfrac{x}{8}$ 的实根个数

(2) 设有 $x, y>0$,$0<\alpha<\beta$,比较大小:$(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ 和 $(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$

5. 用微分学方法证明不等式

(1) $\sqrt{ab} < \dfrac{b-a}{\ln b-\ln a} < \dfrac{a+b}{2}$ $(0<a<b)$

(2) $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant \dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ $(x_i\geqslant 0)$，且取等条件为 $x_i=x_j$ $\forall i,j\in\{1,\cdots$

(Hint: 归纳法，

构造函数: $y=\left(\dfrac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^{n+1}-\prod_{i=1}^{n+1}x_i$

将 x_{n+1} 视为自变量，考虑~~其~~此函数的单调性与极值)

6. 不定积分计算

(1) 求 $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ $(x>1)$

(2) 求 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $a>0$，$|x|>a$

7. 1) $I_n=\displaystyle\int\tan^n x\,dx$ $n\in\mathbb{N}$

试求：I_n 满足的递推公式

2) $J_n=\displaystyle\int\sin^n x\,dx$ $n\in\mathbb{N}$

试求：J_n 满足的递推公式

8. 求不定积分

(1) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\,dx$

(2) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{(x+1)(1+\sqrt[3]{x+1})}\,dx$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^4+1}}\,dx$ （先作变换 $u=x^4$，按 $x\geq 0$，$x<0$ 分别求积分 最后整理为1个函数）

（求的过程中有关以以q的代换）

从以上3例中可见 对于 $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ 型积分

（$R(a,b)$ 表示含 a,b 的有理式） （$m\geq 2$，$ad-bc\neq 0$）

总可作变换 $t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 成为 有理函数积分

故一定可积！

9. 求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

10. (1) 求 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ $(n\geq 2)$

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

（Hint：用 Riemann 积分的定义）