

线性代数-行列式

- 行列式的定义
 1. 二阶行列式
 2. 三阶行列式
 3. n 阶行列式
- 行列式的性质
- 行列式的计算
- 行列式按行(列)展开

1. 1 行列式的定义

二阶行列式的引入

设有二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \quad (2)$$

用消元法求解

$$(1) \times a_{22}: \quad a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22},$$

$$(2) \times a_{12}: \quad a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{12}b_2;$$

两式相减消去 x_2 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

类似可以消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 则方程组有唯一解

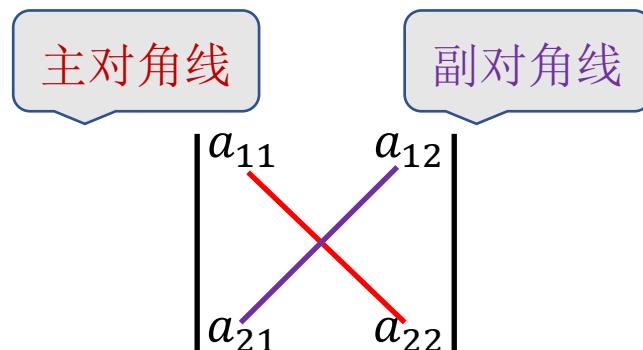
$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

二阶行列式的引入

用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 并称之为由 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 这4个数所确定的二阶行列式，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

记忆：对角线法则.



练习： $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = ?$

二阶行列式的引入

当 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, 方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}.$$

注意到

$$b_1 a_{22} - a_{12} b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \triangleq D_1$$

$$a_{11} b_2 - a_{21} b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \triangleq D_2,$$

则

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

规律: D_i 是由 b_1, b_2 替换 D 中第 i 列得到的二阶行列式.

二阶行列式的引入

思考：如果 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$, 方程组的解会有哪些情况？

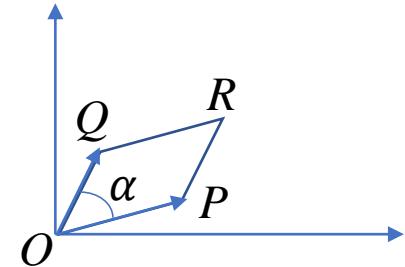
二阶行列式的几何意义

定理(二阶行列式的几何意义). 设 $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. 令 $P(a, b)$ 和 $Q(c, d)$ 是平面上的两个点. 则向量 \overrightarrow{OP} 和 \overrightarrow{OQ} 张成的平行四边形的面积为 $|D|$.

证明. 设向量 \overrightarrow{OP} 和 \overrightarrow{OQ} 之间的夹角为 α ($0 \leq \alpha \leq \pi$). 记向量 \overrightarrow{OP} 和 \overrightarrow{OQ} 张成的平行四边形为 $OPQR$.

$$\begin{aligned}\text{Area}(OPQR) &= |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| \sin \alpha \\ &= |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}.\end{aligned}$$

将 $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}|}$ 代入上式有:



$$\begin{aligned}\text{Area}(OPQR) &= |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| \sqrt{1 - \frac{(\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ})^2}{(|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}|)^2}} = \sqrt{(|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}|)^2 - (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ})^2} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2} \\ &= |ad - bc|.\end{aligned}$$

思考: 为什么平行四边形的面积不是 D ?

■

三阶行列式的定义

回顾：二阶行列式是由二元一次线性方程组的四个系数 a_{ij} 按照某种代数运算得到的一个数值 $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 这个数值不为零时方程组有唯一解 $x_i = \frac{D_i}{D}, i = 1, 2.$

问题：三阶行列式是否可以类比地通过三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

定义？

即是否存在关于方程组系数 a_{ij} 的某种代数运算，使得经过这种运算后得到的一个数值 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 满足 $D \neq 0$ 时，方程组有唯一

解 $x_i = \frac{D_i}{D}, i = 1, 2, 3?$

动手尝试！

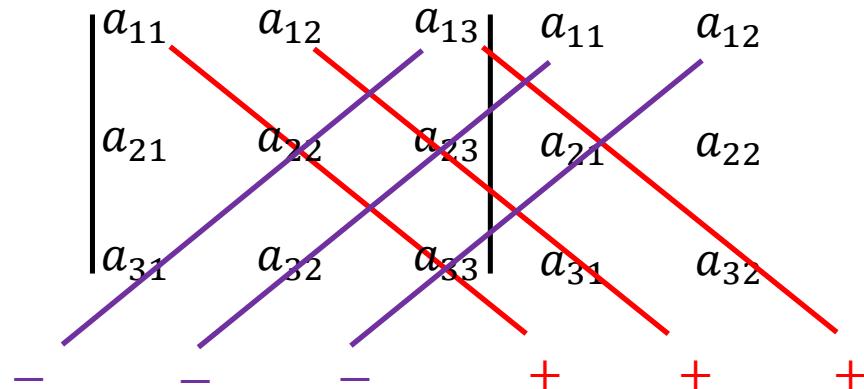
@copyright 黄申伟

三阶行列式的定义

定义(三阶行列式). 给定9个数 a_{ij} ($1 \leq i, j \leq 3$), 其确定的三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

记忆：沙路法.



三阶行列式的定义

定义(三阶行列式). 给定9个数 a_{ij} ($1 \leq i, j \leq 3$), 其确定的三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

记忆: 沙路法.

练习:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = ?$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = ?$$

三阶行列式的几何意义

定理(三阶行列式的几何意义). 设 $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$. 令 $P(a_1, a_2, a_3)$,
 $Q(b_1, b_2, b_3)$, $R(c_1, c_2, c_3)$ 是空间中的三个点, 则向量 \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{OQ} 和 \overrightarrow{OR} 张
成的平行六面体的体积为 $|D|$.

证明. 向量的叉积(自证).

■

排列

定义(排列). 由 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列. 所有 n 级排列的总数为 $n!$.

例：所有3级排列为123, 132, 213, 231, 312, 321.

例：排列 $12 \dots n$ 称为标准排列.

逆序数

定义(逆序数). 给定排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$, 若一对数在 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 中的前后位置与标准次序相反, 即前面的数字大于后面的数字, 则称这对数为一个**逆序**.

排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 中逆序的总数称为 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数, 记作 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$.

例: $12 \cdots n$ 中没有逆序, 故 $\tau(12 \cdots n) = 0$.

例: 31542的逆序为31, 32, 54, 52, 42, $\tau(31542) = 5$.

逆序数

逆序数的计算方法. 给定排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$,

$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = j_1$ 后面比 j_1 小的数的个数

$+ j_2$ 后面比 j_2 小的数的个数

\vdots

$+ j_{n-1}$ 后面比 j_{n-1} 小的数的个数

例：求 $135 \cdots (2n - 1)(2n)(2n - 2) \cdots 42$ 的逆序数.

解： $\tau =$

逆序数

逆序数的计算方法. 给定排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$,

$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = j_1$ 后面比 j_1 小的数的个数

$+ j_2$ 后面比 j_2 小的数的个数

\vdots

$+ j_{n-1}$ 后面比 j_{n-1} 小的数的个数

例：求 $135 \cdots (2n - 1)(2n)(2n - 2) \cdots 42$ 的逆序数.

解： $\tau = 1$

逆序数

逆序数的计算方法. 给定排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$,

$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = j_1$ 后面比 j_1 小的数的个数

$+ j_2$ 后面比 j_2 小的数的个数

\vdots

$+ j_{n-1}$ 后面比 j_{n-1} 小的数的个数

例：求 $135 \cdots (2n - 1)(2n)(2n - 2) \cdots 42$ 的逆序数.

解： $\tau = 1 + 2$

逆序数

逆序数的计算方法. 给定排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$,

$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = j_1$ 后面比 j_1 小的数的个数

$+ j_2$ 后面比 j_2 小的数的个数

⋮

$+ j_{n-1}$ 后面比 j_{n-1} 小的数的个数

例：求 $135 \cdots (2n - 1)(2n)(2n - 2) \cdots 42$ 的逆序数.

解： $\tau = 1 + 2 + \cdots + (n - 1)$

逆序数

逆序数的计算方法. 给定排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$,

$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = j_1$ 后面比 j_1 小的数的个数

$+ j_2$ 后面比 j_2 小的数的个数

\vdots

$+ j_{n-1}$ 后面比 j_{n-1} 小的数的个数

例：求 $135 \cdots (2n - 1)(2n)(2n - 2) \cdots 42$ 的逆序数.

解： $\tau = 1 + 2 + \cdots + (n - 1) + (n - 1)$

逆序数

逆序数的计算方法. 给定排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$,

$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = j_1$ 后面比 j_1 小的数的个数

$+ j_2$ 后面比 j_2 小的数的个数

\vdots

$+ j_{n-1}$ 后面比 j_{n-1} 小的数的个数

例：求 $135 \cdots (2n - 1)(2n)(2n - 2) \cdots 42$ 的逆序数.

解： $\tau = 1 + 2 + \cdots + (n - 1) + (n - 1) + (n - 2)$

逆序数

逆序数的计算方法. 给定排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$,

$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = j_1$ 后面比 j_1 小的数的个数

$+ j_2$ 后面比 j_2 小的数的个数

\vdots

$+ j_{n-1}$ 后面比 j_{n-1} 小的数的个数

例：求 $135 \cdots (2n - 1)(2n)(2n - 2) \cdots 42$ 的逆序数.

解： $\tau = 1 + 2 + \cdots + (n - 1) + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 1$

逆序数

逆序数的计算方法. 给定排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$,

$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = j_1$ 后面比 j_1 小的数的个数

$+ j_2$ 后面比 j_2 小的数的个数

\vdots

$+ j_{n-1}$ 后面比 j_{n-1} 小的数的个数

例：求 $135 \cdots (2n - 1)(2n)(2n - 2) \cdots 42$ 的逆序数.

解： $\tau = 1 + 2 + \cdots + (n - 1) + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 1$

$$= n(n - 1).$$

奇偶性

定义(奇偶性). 逆序数为奇数的排列为**奇排列**, 逆序数为偶数的排列为**偶排列**.

例: 讨论下列排列的奇偶性.

$$(a) n(n-1)\cdots 21; \quad (b) (2n)1(2n-1)2\cdots(n+1)n.$$

解: (a) $\tau(n(n-1)\cdots 21) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$

当 $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$ 时, 该排列为偶排列; 当 $n \equiv 2, 3 \pmod{4}$ 时, 该排列为奇排列.

$$\begin{aligned} (b) \tau((2n)1(2n-1)2\cdots(n+1)n) &= (2n-1) + (2n-3) + \cdots + 1 \\ &= n^2. \end{aligned}$$

当 n 为偶数时, 该排列为偶排列; 当 n 为奇数时, 该排列为奇排列.

对换

定义(对换). 把一个排列中某两个数互换而其余的数保持不动, 得到一个新排列, 这一操作称为一个**对换**. 如果互换的两个数是相邻的, 这样的对换叫做**相邻对换**.

定理. 对换改变排列的奇偶性.

证明思路.

先考虑相邻对换的情况, 再将一般情况转化为相邻对换.

对换

证明. 首先考虑相邻对换的情况.

- 设 $p = a_1 \cdots a_\ell \mathbf{a} \mathbf{b} b_1 \cdots b_m$ 对换 a 与 b 得到排列 $p' = a_1 \cdots a_\ell \mathbf{b} \mathbf{a} b_1 \cdots b_m$.
 - 任取 $\{x, y\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, 考察 $\{x, y\}$ 对 p 与 p' 的逆序数贡献情况.
 - 若 $\{x, y\} \neq \{a, b\}$, 则 $\{x, y\}$ 对 p 与 p' 的逆序数贡献相同.
 - 若 $\{x, y\} = \{a, b\}$, 则
 - 若 $a < b$, $\{a, b\}$ 在 p 中不为逆序而在 p' 中为逆序, $\tau(p') = \tau(p) + 1$.
 - 若 $a > b$, $\{a, b\}$ 在 p' 中不为逆序而在 p 中为逆序, $\tau(p') = \tau(p) - 1$.
- 因此 $\tau(p') = \tau(p) \pm 1$, 即排列奇偶性改变.

对换

证明(续). 现在考虑一般情况. 设 $p = a_1 \cdots a_\ell \mathbf{a} b_1 \cdots b_m \mathbf{b} c_1 \cdots c_k$ 对换 a 与 b 得到排列 $p' = a_1 \cdots a_\ell \mathbf{b} b_1 \cdots b_m \mathbf{a} c_1 \cdots c_k$.

问题: 对换 a 与 b 的效果能否用一系列相邻对换实现?

$$p = a_1 \cdots a_\ell \mathbf{a} b_1 \cdots b_m \mathbf{b} c_1 \cdots c_k$$

将 b 与其左边的 b_i 依次

作相邻对换

$$\xrightarrow{\text{作相邻对换}} a_1 \cdots a_\ell \mathbf{a} b b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_k \quad m \text{ 次}$$

将 a 与其右边的 b 和 b_i 依次

作相邻对换

$$\xrightarrow{\text{作相邻对换}} p' = a_1 \cdots a_\ell \mathbf{b} b_1 \cdots b_m \mathbf{a} c_1 \cdots c_k \quad m+1 \text{ 次}$$

因此对换 a 与 $b \Leftrightarrow 2m + 1$ 次相邻对换.



对换

思考：定理是否能够不通过相邻对换的情况直接证明？

排列

回顾.

- 二阶行列式
- 三阶行列式
- 逆序数：排列中逆序的总数.
- 奇偶性：逆序数的奇偶性.
- 定理：对换改变排列奇偶性.
 - 证法 1：先证相邻对换的情况，再将一般情况转化为相邻对换的情况.
 - 证法 2：直接证明.

对换

推论 1(对换次数的奇偶性). 奇(偶)排列需要通过奇(偶)数次对换变成标准排列.

证明. 因为标准排列是偶排列, 结论由定理直接可得. ■

对换

推论 2(奇偶排列个数相等). 当 $n \geq 2$ 时, n 级奇排列个数与 n 级偶排列个数相等.

证明思路 1: 分别计数 n 级奇排列和 n 级偶排列.

证明思路 2: 构造奇排列和偶排列之间的一一对应 (双射) .

映射（补充知识）

定义(映射). 给定非空集合 A 与 B , 若对 A 中任意的元素 a 都有 B 中唯一的元素 b 与之对应, 则称这种对应规则为 A 到 B 的一个映射, 记作 $f: A \rightarrow B$.

元素 b 称为 a 在 f 下的像, 记作 $b = f(a)$; 元素 a 称为 b 在 f 下的原像.

例: “学生 \rightarrow 学号” 是映射,

“学生 \rightarrow 课程” 不是映射.

映射（补充知识）

定义(单射, 满射, 双射). 设 $f:A \rightarrow B$ 是一个映射.

- 若任何 $a_1, a_2 \in A$ 且 $a_1 \neq a_2$, 都有 $f(a_1) \neq f(a_2)$, 则称 f 为单射. (不同的元素有不同的像)
- 若任给 $b \in B$, 都存在 $a \in A$ 使得 $b = f(a)$, 则称 f 为满射.
- 若 f 既是单射又是满射, 则称 f 为双射(一一对应).

例 1: “父亲”是否为单射?

是否为满射?

例 2: “同桌”是一个双射.

映射（补充知识）

定理(映射的性质). 设 A 与 B 为有限集合且 $f: A \rightarrow B$ 是一个映射.

- 若 f 为单射, 则 $|A| \leq |B|$.
- 若 f 为满射, 则 $|A| \geq |B|$.
- 若 f 为双射, 则 $|A| = |B|$.

证明. 若 f 为单射, 则 $\{f(a): a \in A\} \subseteq B$ 是 B 的一个大小为 $|A|$ 的子集, 故 $|A| \leq |B|$. ■

对换

推论 2(奇偶排列个数相等). 当 $n \geq 2$ 时, n 级奇排列个数与 n 级偶排列个数相等.

证明. 令 O 与 E 分别表示 n 级奇排列和 n 级偶排列的集合. 定义 O 到 E 的对应规则

$$f: O \rightarrow E$$

$$p = i_1 i_2 i_3 \cdots i_n \mapsto f(p) = i_2 i_1 i_3 \cdots i_n.$$

因为对换改变排列奇偶性, f 是一个从 O 到 E 的映射.

- f 是满射. 给定 $p' = i_1 i_2 i_3 \cdots i_n \in E$, 存在 $p = i_2 i_1 i_3 \cdots i_n \in O$ 使得 $p' = f(p)$.
- f 是单射. 给定两个不同的奇排列 $p_1 = i_1 i_2 \cdots i_n$ 和 $p_2 = j_1 j_2 \cdots j_n$, 存在某个位置 $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ 使得 $i_s \neq j_s$, 从而 $f(p_1) \neq f(p_2)$.

因此 f 是双射. ■

对换

思考.

- 给出满射性质的证明.
- 无限集合如何比较大小?

n 阶行列式的定义

用排列的观点来看二阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \triangleq a_{1\textcolor{red}{1}} a_{2\textcolor{red}{2}} - a_{1\textcolor{violet}{2}} a_{2\textcolor{violet}{1}}.$$

- 二阶行列式每项都是行列式中两个不同行不同列元素的乘积.
- 每项固定行指标为标准排列12时，其列指标对应某个2级排列 $j_1 j_2$ ：
 $j_1 j_2$ 为偶排列时其符号为正， $j_1 j_2$ 为奇排列时其符号为负.

所以，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2},$$

其中求和指标 $j_1 j_2$ 表示对所有2级排列求和.

n 阶行列式的定义

用排列的观点来看三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \triangleq a_{1\textcolor{red}{1}} a_{2\textcolor{red}{2}} a_{3\textcolor{red}{3}} + a_{1\textcolor{red}{2}} a_{2\textcolor{red}{3}} a_{3\textcolor{red}{1}} + a_{1\textcolor{red}{3}} a_{2\textcolor{red}{1}} a_{3\textcolor{red}{2}} - a_{1\textcolor{violet}{1}} a_{2\textcolor{violet}{3}} a_{3\textcolor{violet}{2}} - a_{1\textcolor{violet}{2}} a_{2\textcolor{violet}{1}} a_{3\textcolor{violet}{3}} - a_{1\textcolor{violet}{3}} a_{2\textcolor{violet}{2}} a_{3\textcolor{violet}{1}}}.$$

- 三阶行列式每项都是行列式中三个不同行不同列元素的乘积.
- 每项固定行指标为标准排列123时，其列指标对应某个3级排列 $j_1 j_2 j_3$: $j_1 j_2 j_3$ 为**偶**排列时其符号为正, $j_1 j_2 j_3$ 为**奇**排列时其符号为负.

所以,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

其中求和指标 $j_1 j_2 j_3$ 表示对所有3级排列求和.

n 阶行列式的定义

二阶和三阶行列式用排列的观点看符合相同的规律，因此我们类比地定义 n 阶行列式。

定义(n 阶行列式). 给定 n^2 个数 a_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$)，由这 n^2 个数确定的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \triangleq \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

- n 阶行列式展开中有 $n!$ 项，每项都是来自不同行不同列的 n 个元素乘积。
- 每项对应一个 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ ，偶排列对应的项为正，奇排列对应的项为负。

说明。

- 通常用 $|a_{ij}|$ 或者 $\det(a_{ij})$ 简记 n 阶行列式。
- 一阶行列式 $|a| = a$.

n 阶行列式的定义

例 1: 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 3 & 4 & 5 \\ & & 4 & 5 \\ & & & 6 \end{vmatrix}$ 和 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 3 & 4 & 5 \\ & & 4 & 5 \\ & & & 6 \end{vmatrix}.$

解: 由行列式定义,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}.$$

因为行列式中有许多元素为0, 求和式中有许多项为0. 因此只需找出求和式中的所有非零项及其对应的排列. 注意到

$$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} \neq 0 \Leftrightarrow a_{ij_i} \neq 0, i = 1, 2, 3, 4 \Leftrightarrow j_i = i, i = 1, 2, 3, 4.$$

所以, 求和式中只有一项非零项其对应排列为标准排列1234. 故

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(1234)} a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} = 24.$$

n 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} & & 1 \\ & 2 & \\ & 3 & \\ & 4 & \\ 6 & 5 & \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_6} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_6)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{6j_6}.$$

注意到

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{6j_6} \neq 0 \Leftrightarrow j_i = 7 - i, i = 1, 2, \dots, 6.$$

所以求和式中只有一项非零项其对应排列为654321. 故

$$\begin{vmatrix} & & 1 \\ & 2 & \\ & 3 & \\ & 4 & \\ 6 & 5 & \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(654321)} a_{16} a_{25} \dots a_{61} = -720.$$

n 阶行列式的定义

例 1 的结论可以推广到三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

和反三角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n\cdots 21)} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n\cdots 21)} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$

n 阶行列式的定义

例 2: 已知 $f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$, 求 x^3 的系数.

解: 由行列式定义, $f(x)$ 是 x 的多项式且最高次幂为 x^3 . 显然含 x^3 的有两项:

$$(-1)^{\tau(1234)}x \cdot x \cdot x \cdot 1 \text{ 与 } (-1)^{\tau(1243)}x \cdot x \cdot 1 \cdot (2x),$$

即 x^3 与 $-2x^3$. 故 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 -1 .

n 阶行列式的定义

练习：计算下列 n 阶行列式.

$$(a) \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ n & & & \ddots & n-1 \\ & & & & 0 \end{vmatrix}.$$

$$(b) \begin{vmatrix} & & 1 & 0 \\ & & 2 & 0 \\ & \ddots & 0 & \\ n-1 & \ddots & & \\ 0 & & & n \end{vmatrix}.$$

1.2 行列式的性质

行列式的性质

性质 1. 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$. 则

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

证明思路.

建立两个求和式中项之间的一一对应关系并证明对应的项相等.

具体例子.

考虑 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \textcolor{violet}{a_{14}} \\ \textcolor{violet}{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \textcolor{violet}{a_{33}} & a_{34} \\ a_{41} & \textcolor{violet}{a_{42}} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

- 左式中的项 $(-1)^{\tau(4132)} a_{14} a_{21} a_{33} a_{42}$ 对应右式中的项 $(-1)^{\tau(2431)} a_{21} a_{42} a_{33} a_{14}$.
- 当 $a_{14} a_{21} a_{33} a_{42}$ 的列标 4132 通过对换变成标准排列时, 其行标从标准排列变成 2431. 因此,

4132 的奇偶性 = 对换次数奇偶性 = 2431 的奇偶性.

从而 $(-1)^{\tau(4132)} a_{14} a_{21} a_{33} a_{42} = (-1)^{\tau(2431)} a_{21} a_{42} a_{33} a_{14}$.

行列式的性质

性质 1. 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$. 则

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

证明. 给定等式左边的一项 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, 通过一系列元素的对换可把 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 写成 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$, 其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的某个排列. 这就确定了从所有 n 级排列 S_n 到自身的一个映射

$$f: S_n \rightarrow S_n$$

$$j_1 j_2 \cdots j_n \mapsto f(j_1 j_2 \cdots j_n) = i_1 i_2 \cdots i_n.$$

并且 f 将 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 对应到 $(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$.

在元素对换的过程中, 当 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的列标从 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 变为标准排列时, 其行标从标准排列变为 $i_1 i_2 \cdots i_n$.

根据对换次数奇偶性推论, $j_1 j_2 \cdots j_n$ 与 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 有相同的奇偶性. 故

行列式的性质

证明(续). 下面证明 f 是双射.

- f 的对应规则为: 如果数 k 出现在 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的第 s 个位置上, 则 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的第 k 个位置上的数为 s .
- 只需证明 f 是单射或满射.

任给两个不同的排列 $p = j_1 j_2 \cdots j_n$ 和 $p' = j'_1 j'_2 \cdots j'_n$, 存在数 k 使得 k 出现在 p 与 p' 的不同位置上, 从而 $f(p)$ 与 $f(p')$ 的第 k 个位置上的数不同, 即 $f(p) \neq f(p')$. ■

思考: 如何证明 f 是满射?

关于证明

- 证明的书写是一项需要练习的技能，将直观理解变成严格的证明是需要花功夫的.
- 将复杂证明简化成直观思想是硬币的另一面(比如勾股定理的图片证明).

行列式的性质

性质 2. 交换行列式中的两行, 行列式变号.

证明思路.

建立两个行列式展开式中项之间的一一对应关系并证明对应的项互为相反数.

具体例子.

$$\text{设 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \color{purple}{a_{14}} \\ \color{purple}{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \color{purple}{a_{33}} & a_{34} \\ a_{41} & \color{purple}{a_{42}} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{交换第2行与第4行}} D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \color{purple}{a_{14}} \\ a_{41} & \color{purple}{a_{42}} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & \color{purple}{a_{33}} & a_{34} \\ \color{purple}{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}.$$

- 则 D 中的项 $(-1)^{\tau(4132)} a_{14} a_{21} a_{33} a_{42}$ 对应 D' 中的项 $(-1)^{\tau(4231)} a_{14} a_{42} a_{33} a_{21}$.
- 观察到 4231 是由 4132 经过一次对换而得到的. 故

$$(-1)^{\tau(4231)} a_{14} a_{42} a_{33} a_{21} = -(-1)^{\tau(4132)} a_{14} a_{21} a_{33} a_{42}.$$

行列式的性质

性质 2. 交换行列式中的两行, 行列式变号.

证明. 设 $D = |a_{ij}|$ 交换第 i 行和第 j 行 ($i < j$) 后得到行列式 $D' = |b_{ij}|$. 若 $k \notin \{i, j\}$, $b_{k\ell} = a_{k\ell}$ 并且 $b_{i\ell} = a_{j\ell}$, $b_{j\ell} = a_{i\ell}$ ($1 \leq \ell \leq n$).

$$D' = \sum_{p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)} b_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{jp_j} \cdots b_{np_n} \quad \text{行列式定义}$$

$$= \sum_{p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)} \mathbf{a}_{1p_1} \cdots \mathbf{a}_{ip_i} \cdots \mathbf{a}_{jp_j} \cdots \mathbf{a}_{np_n} \quad \text{假设条件}$$

$$= - \sum_{p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 \cdots \mathbf{p}_j \cdots \mathbf{p}_i \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} \quad \text{对换定理}$$

$$= - \sum_{p_1 \cdots \mathbf{p}_j \cdots \mathbf{p}_i \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} \quad \text{对换是双射}$$

$$= -D.$$

■

说明. 倒数第二个等式中改变求和指标只是交换求和次序.

行列式的性质

推论. 如果行列式 D 中有两行完全相同, 则 $D = 0$.

证明. 根据性质 2, 若交换 D 中完全相同的两行有 $D = -D$, 故 $D = 0$. ■

性质 3. 行列式中某一行中所有元素都乘以同一个数 k 等于用数 k 乘以此行列式.

证明. 我们用行列式定义来证明. 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, 则

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \sum_{j_1 \cdots j_i \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (ka_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\ &= k \sum_{j_1 \cdots j_i \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= kD. \end{aligned}$$

行列式的性质

性质 4. 行列式中如果有两行元素成比例，则此行列式为零.

证明. 性质 2 + 性质 3. ■

性质 5.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + a'^{'}_{i1} & a_{i2} + a'^{'}_{i2} & \cdots & a_{in} + a'^{'}_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'^{'}_{i1} & a'^{'}_{i2} & \cdots & a'^{'}_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明. 行列式的定义. ■

性质 6. 把行列式中某行的各元素乘同一个数后加到另一行对应元素上去，行列式不变.

证明. 性质 4 + 性质 5. ■