

线性代数-矩阵作业

黄申为

2022 年 3 月 24 日

1. 判断命题若 $A^2 = 0$, 则 $A = 0$ 是否正确? 若正确, 请给出证明; 若不正确, 请举出反例.
2. 设 A, B 都是 n 阶对称阵, 证明 AB 是对称矩阵的充分必要条件是 $AB = BA$.
3. 求所有与 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可交换的矩阵.
4. (a) 设 $a = (2, 1, -3)^T, b = (1, 2, 4)^T, A = ab^T$. 求 A^{101} .
(b) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$. 求 A^n .
5. 设 A 是 n 阶方阵. 若 $AA^T = E$ 且 $|A| = -1$, 证明 $|A + E| = 0$.
6. 在课堂中我们给出了矩阵乘法的定义: 给定 $A = (a_{ij})_{m \times s}$ 与 $B = (b_{ij})_{s \times n}$, 我们定义 A 与 B 的乘积为 $AB = (c_{ij})_{m \times n}$, 其中对任意的 $i = 1, 2, \dots, m$ 与 $j = 1, 2, \dots, n$ 有

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj}.$$

我们发现在这种定义下矩阵的乘法不满足交换律, 即 AB 不一定等于 BA . 现在给定 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 与 $B = (b_{ij})_{m \times n}$, 请给出一种定义 A 和 B 乘积的方式, 记做 $A \otimes B$, 使得 $A \otimes B = B \otimes A$, 并简单给出一个这种乘法可能的应用场景 (好比课本中的定义的乘法可以用来计算总收入与总利润或者线性变换的复合).

7. 成语覆水难收描述的是矩阵中的什么概念? 给出简单解释.

8. 写出一个不可逆的二阶非零方阵并说明为什么该方阵不可逆.

9. 设 n 阶方阵 A 的伴随矩阵为 A^* .

(a) 若 A 可逆, 证明 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

(b) 证明 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

(c) 设 A 为 3 阶方阵且 $|A| = \frac{1}{2}$, 求 $|(2A)^{-1} - 5A^*|$.

10. (a) 用分块矩阵乘法计算

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

(b) 设 n 阶方阵 A 及 s 阶方阵 B 都可逆, 求 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1}$.