南开大学 作业纸

系别 ______ 班级 ______ 姓名 ______ 第 页

1、B.

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{(2+|x|)(\sqrt{1+\sin x}-1)-0}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{(2+|x|)\cdot\frac{\sin x}{2}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2+|x|}{2}=1.$$

2、A.

令 $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$.

$F'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$，由于 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒大于零，

$\therefore F'(x)<0$. $x\in[a,b]$.

$\therefore x\in(a,b)$ 时，$F(x)>F(b)$，即 A 选项.

3、C.

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{t\to\infty}\frac{2+e^t}{1+e^{2t}}+1=1$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{t\to-\infty}\frac{2+e^{-t}}{1+e^{-2t}}+\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{-x}=2+(-1)=1=\lim_{x\to0^+}f(x).$$

$\therefore$ 是可去间断点.

4、 $f(x)$ 是连续函数. 由泰勒公式.

$$f(x)=\frac{2-2\cos x}{x^2}=\frac{2}{x^2}(1-\cos x)=\frac{2}{x^2}\left[1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)\right)\right]=1-\frac{x^2}{12}+o(x^3).$$

易知 $f''(0)=-\frac{1}{6}$.

南开大学 作业纸

系别 ______ 班级 ______ 姓名 ______ 第 页

5. $2^x-1=e^{x\ln2}-1\sim x\ln2$, $x\to0$; $\tan x\sim x$, $x\to0$.

故

$$原式=\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1+x^2}{x^2\ln2}\ (x\to0).$$

$$=\frac{\boxed{\sqrt[3]{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}-1}+x^2}{x^2\ln2}\ (x\to0).$$

等价无穷小

$$=\frac{\boxed{\left[1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right]}+x^2}{x^2\ln2}\ (x\to0)$$

$$=\frac{5}{6\ln2}$$

6、由已知，$y(0)=y'(0)=0$. 由洛必达法则，

$$\lim_{x\to0}\frac{y(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{y'(x)}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+y^2}{3x^2}$$

$$=\frac{1}{3}+\lim_{x\to0}\frac{y^2}{3x^2}=\frac{1}{3}+\lim_{x\to0}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{y(x)-0}{x-0}\right)^2$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot y'(0)^2=\frac{1}{3}.$$

7、由泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o_1(x^2).$$

$$\ln(x+1)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o_2(x^3)$$

代入题中式子，可得

$$\lim_{x\to0}\frac{(f(0)-1)x+(f'(0)+\frac{1}{2})x^2+(\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{3})x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}$$

因此 $f(0)=1$, $f'(0)=-\frac{1}{2}$, $f''(0)=\frac{4}{3}$.

南开大学 作业纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 页

8、令 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，$-1<x<1$，则 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为偶函数，且 $f(0)=0$

故只需证当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>0$.

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\cdot\frac{2}{1-x^2}-\sin x-x$$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\cdot\left(\frac{2}{1-x^2}-2\right)-\sin x+x.$$

当 $x\in(0,1)$ 时，$\ln\frac{1+x}{1-x}>0$，$\frac{2}{1-x^2}-2>0$，$x-\sin x>0$.

$\therefore x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$. 故 $x\in[0,1]$ 时 $f(x)>f(0)=0$.

9、由泰勒公式.

$$f(0)=f(\tfrac12)+f'(\tfrac12)(0-\tfrac12)+\frac{1}{2!}f''(\tfrac12)(0-\tfrac12)^2+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}(0-\tfrac12)^3,\quad (0<\xi_1<\tfrac12)$$

$$f(1)=f(\tfrac12)+f'(\tfrac12)(1-\tfrac12)+\frac{1}{2!}f''(\tfrac12)(1-\tfrac12)^2+\frac{f'''(\xi_2)}{3!}(1-\tfrac12)^3,\quad (\tfrac12<\xi_2<1)$$

两式相减，得 $2=f(1)-f(0)=f'(\tfrac12)+\frac{1}{48}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]$

即 $24=\frac12[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]$.

取 $f'''(\varepsilon_1)=\min\{f'''(\xi_1),f'''(\xi_2)\}$，

$f'''(\varepsilon_2)=\max\{f'''(\xi_1),f'''(\xi_2)\}$，

则 $f'''(\varepsilon_1)\le 24\le f'''(\varepsilon_2)$

南开大学 作业纸

系别________ 班级________ 姓名________ 第 页

10 令 $F(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}-f(x)$. $(C_1,C_2>0)$，则 $F(x)$ 有二阶导数且连续.

对 $\forall x\in R$，有. $F''(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}-f''(x)$

$\le C_1e^x+C_2e^{-x}-f(x).=F(x).$

由 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-|x|}f(x)=0$，
$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[C_1+C_2e^{-2x}-e^{-x}f(x)\right]=C_1.$$
$$\lim_{x\to-\infty}e^{x}F(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[C_1\cdot e^{2x}+C_2-e^{x}f(x)\right]=C_2.$$

由 $C_1,C_2>0$ 知，$\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=+\infty$，$\Rightarrow F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 取得最小值.

令 x_0 为 $F(x)$ 达到最小值的点，则 $F(x_0)\le F(x)$ $(\forall x\in R)$. 且 $F''(x_0)\ge0$.

由 $F''(x)\le F(x)$. 得

$F(x)\ge F(x_0)\ge F''(x_0)\ge0.$ $(\forall x\in R)$.

即 $C_1e^x+C_2e^{-x}\ge f(x)$，$(\forall x\in R)$

令 $C_1\to0$，$C_2\to0$. 可得 $f(x)\le0$. $(\forall x\in R)$.