线性代数-线性方程组

- 矩阵的初等变换
- 矩阵初等变换与矩阵乘法的联系
- 矩阵的秩
- 线性方程组有解判定定理
- 线性方程组的应用

3.1 矩阵的初等变换

矩阵的初等变换

引例：消元法求解线性方程组.

设有如下线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 & (1) \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (2) \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 & (3) \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 & (4) \end{cases} \qquad (B_0)$$

$$\xrightarrow[(3)\div 2]{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (1) \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 & (2) \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 & (3) \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 & (4) \end{cases} \qquad (B_1)$$

将x_1从后三个方程中消去：

$$\xrightarrow[\substack{(3)-2\times(1) \\ (4)-3\times(1)}]{(2)-(3)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (1) \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 & (2) \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6 & (3) \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3 & (4) \end{cases} \qquad (B_2)$$

说明. 上面对方程组的三种操作(交换两个方程，将某个方程两边同乘一个非零实数，将某个方程的倍数加到另一个方程上)不改变方程组的解.

矩阵的初等变换

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (1) \\ \quad\;\; 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 & (2) \\ \;\; -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6 & (3) \\ \quad\;\; 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3 & (4) \end{cases} \qquad (B_2)$$

再把x_2从后两个方程中消去：

$$\xrightarrow[\substack{(3)+5\times(2) \\ (4)-3\times(2)}]{(2)\times\frac{1}{2}} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (1) \\ \quad\;\; x_2 - x_3 + x_4 = 0 & (2) \\ \qquad\qquad 2x_4 = -6 & (3) \\ \qquad\qquad x_4 = -3 & (4) \end{cases} \qquad (B_3)$$

（这时x_3也已消去）

$$\xrightarrow[4-2\times(3)]{(3)\leftrightarrow(4)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (1) \\ \quad\;\; x_2 - x_3 + x_4 = 0 & (2) \\ \qquad\qquad x_4 = -3 & (3) \\ \qquad\qquad 0 = 0 & (4) \end{cases} \qquad (B_4)$$

矩阵的初等变换

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 4 & \quad (1)\\ x_2 - x_3 + x_4 &= 0 & \quad (2)\\ x_4 &= -3 & \quad (3)\\ 0 &= 0 & \quad (4)\end{aligned}\right. \qquad (B_4)$$

将x_4回代到前两个方程:

$$\xrightarrow{\substack{(1)-(3)\\(2)-(3)}} \left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 \quad &= 7 & \quad (1)\\ x_2 - x_3 \quad &= 3 & \quad (2)\\ x_4 &= -3 & \quad (3)\\ 0 &= 0 & \quad (4)\end{aligned}\right. \qquad (B_5)$$

将x_2回代到第1个方程:

$$\xrightarrow{(1)-(2)} \left\{\begin{aligned} x_1 - x_3 \quad &= 4 & \quad (1)\\ x_2 - x_3 \quad &= 3 & \quad (2)\\ x_4 &= -3 & \quad (3)\\ 0 &= 0 & \quad (4)\end{aligned}\right. \qquad (B_6)$$

有效方程

无效方程

矩阵的初等变换

$$\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 = 4 & (1) \\ \qquad x_2 - x_3 = 3 & (2) \\ \qquad\qquad x_4 = -3 & (3) \\ \qquad\qquad 0 = 0 & (4) \end{cases} \qquad (B_6)$$

(B_6)有3个有效方程，4个未知量，故某个未知量无法确定，这样的未知量称为**自由未知量**.

令x_3为自由未知量，原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 + 3 \\ x_4 = \quad -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{令}x_3=c\text{为任意实数}} \begin{cases} x_1 = c+4 \\ x_2 = c+3 \\ x_3 = c+0 \\ x_4 = 0-3 \end{cases}.$$

于是方程组的解可写成**向量形式**:

$$x \triangleq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c+0 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{其中}c\text{是任意实数}.$$

矩阵的初等变换

思考：是否能够取其他未知量为自由未知量?

令x_2为自由未知量，原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 1 \\ x_3 = x_2 - 3 \\ x_4 = \quad -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{令}x_2=c\text{为任意实数}} x = \begin{pmatrix} c+1 \\ c+0 \\ c-3 \\ 0-3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

思考：$c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$与上面的解是否是表示同一个集合?

$$x = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= (c+3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

当c取遍所有实数，$c+3$也取遍所有实数，因此两种形式表示的是同一个集合.

矩阵的初等变换

在上述消元过程中，实际上只有方程组的系数和常数进行运算，未知量并没有参与运算.

因此，对方程组所做的变换实际上是对其增广矩阵$B=(A,b)=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$所做的变换.

将对方程组的三种同解变换翻译到矩阵上，就是矩阵的初等行变换.

定义(矩阵的初等行变换). 下面三种变换称为矩阵的初等行变换:

- 对换矩阵中的两行($r_i \leftrightarrow r_j$);
- 把某一非零数k乘以某一行的所有元素($r_i \times k$);
- 把某一行各元素的k倍加到另一行对应元素上去($r_i + kr_j$).

说明. 将上述定义中的”行”改成”列”，即得到矩阵的初等列变换的定义. 矩阵的初等行变换和初等列变换统称为初等变换.

矩阵的初等变换

定义(矩阵的相抵关系). 设A,B为同型矩阵，若A能够经过有限次初等行(列)变换变成B，则称A行(列)相抵于B，记作$A \sim_r B$($A \sim_c B$).

若A能够经过有限次初等变换变成B，则称A相抵于B，记作$A \sim B$.

相抵关系的性质. 相抵关系是一个**等价关系**，即它满足下列三个性质：

- **反身性** $A \sim A$.
- **对称性** 若$A \sim B$，则$B \sim A$.
- **传递性** 若$A \sim B$，$B \sim C$，则$A \sim C$.

证明. 反身性和传递性显然.

要证对称性，只需证明若A能够经过1次初等行变换变成B，则B也能够经过1次初等行变换变回A.

- 若$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$，则$B \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} A$.
- 若$A \xrightarrow{r_i \times k} B$, 则$B \xrightarrow{r_i \times \frac{1}{k}} A$.
- 若$A \xrightarrow{r_i + k r_j} B$，则$B \xrightarrow{r_i + (-k) r_j} A$. ■

行阶梯形矩阵

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & (1) \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 - x_3 + x_4 = 0 & (2) \\ \phantom{x_1 + x_2 - 2x_3 + {}} x_4 = -3 & (3) \\ \phantom{x_1 + x_2 - 2x_3 + {}} 0 = 0 & (4) \end{cases} \qquad (B_4)$$

$$\Updownarrow$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵

定义(行阶梯形矩阵). 满足下面两个条件的矩阵称为行阶梯形矩阵:

- 非零行在零行的上面;
- 非零行的首非零元所在列在上一行(如果存在的话)的首非零元所在列的右面.

说明. 上述第2个条件可等价表述为:

若矩阵有r个非零行且第i行的首非零元出现在第j_i列($1 \le i \le r$), 则$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} & j_1 & j_2 & j_r \end{array} \\
\begin{array}{r} r\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ m-r\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array} &
\begin{pmatrix} & \$ & & \\ & & \$ & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \$ \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

行阶梯形矩阵

定义(行阶梯形矩阵). 满足下面两个条件的矩阵称为行阶梯形矩阵:

- 非零行在零行的上面;
- 非零行的首非零元所在列在上一行(如果存在的话)的首非零元所在列的右面.

例: $B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

是一个有3个非零行的行阶梯形矩阵, 其第1行首非零元出现在第1列, 第2行首非零元出现在第2列, 第3行首非零元出现在第4列.

说明. 行阶梯形矩阵的特点是

- 阶梯线下方的元素全为0.
- 每个台阶是一行, 台阶数即非零行的行数.
- 阶梯线的竖线后面的第一个元素为相应行的首非零元.

思考: 上三角矩阵是否为行阶梯形矩阵?

行最简形矩阵

定义(行最简形矩阵). 满足下面两个条件的行阶梯形矩阵称为行最简形矩阵:

- 每个非零行的首非零元为1;
- 非零行的首非零元所在列的其余元素为0.

例: $B_6 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$是一个行最简形矩阵.

思考: 有4个非零行的4×4行最简形矩阵是什么矩阵?

行最简形矩阵

因为

$$\text{线性方程组} \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{矩阵}$$

$$\text{线性方程组的三种同解变换} \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{矩阵的初等行变换}$$

所以,

消元法求解线性方程组 $\Leftrightarrow$ 通过初等行变换将其增广矩阵化为行最简形矩阵.

行最简形矩阵

例：
$$B_0=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{2}]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\2&-3&1&-1&2\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&2&-2&2&0\\0&-5&5&-3&-6\\0&3&-3&4&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3+2r_2\\r_4-3r_2}]{r_2\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&2&-6\\0&0&0&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_3]{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3}\begin{pmatrix}1&1&-2&0&7\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&0&-1&0&4\\0&\mathbf{1}&-1&0&3\\0&0&0&\mathbf{1}&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

练习：将$\begin{pmatrix}0&2&-3&1\\0&3&-4&3\\0&4&-7&1\end{pmatrix}$通过初等行变换化为行最简形矩阵.

行最简形矩阵

定理(初等行变换化行最简). **任何$\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$矩阵都能经过有限次初等行变换化为行最简形矩阵.**

证明. 对$m+n$用数学归纳法（习题）. ■

3.2 初等变换与矩阵乘法

初等变换与矩阵乘法

定义(初等矩阵). 由单位阵E经过1次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

- $E \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} E(i,j)$
- $E \xrightarrow{r_i \times k} E(i(k))$
- $E \xrightarrow{r_i + k r_j} E(ij(k))$

说明. 这里只考虑初等行变换，初等列变换是对称的.

定义(标准单位向量). 称n维列向量$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xleftarrow{\text{第}i\text{个分量}}$ 为标准单位向量.

性质. **设A为$n \times m$矩阵，则$e_i^T A = A$的第i行.**

证明. 根据矩阵乘法的定义直接验证. ■

初等变换与矩阵乘法

引理(初等矩阵与矩阵乘法的联系). **设$\boldsymbol{A}$为$\boldsymbol{m\times n}$矩阵，则对$\boldsymbol{A}$施行1次初等行变换等价于在$\boldsymbol{A}$的左边乘上相应的$\boldsymbol{m}$阶初等矩阵，即**

(1) 若$\boldsymbol{A \xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j} B}$， 则$\boldsymbol{B = E(i,j)A}$.

(2) 若$\boldsymbol{A \xrightarrow{r_i\times k} B}$， 则$\boldsymbol{B = E\big(i(k)\big)A}$.

(3) 若$\boldsymbol{A \xrightarrow{r_i+kr_j} B}$， 则$\boldsymbol{B = E\big(ij(k)\big)A}$.

证明. 对A按行分块有$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}$，其中$\alpha_i$为$A$的第$i$行.

(1) 设$A\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}B$，对$E(i,j)$按行分块计算$E(i,j)A$：

$$E(i,j)A=\begin{array}{r}\\ \\ \text{第}i\text{个分量}\rightarrow\\ \\ \text{第}j\text{个分量}\rightarrow\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}e_1^T\\ \vdots\\ e_j^T\\ \vdots\\ e_i^T\\ \vdots\\ e_m^T\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}e_1^TA\\ \vdots\\ e_j^TA\\ \vdots\\ e_i^TA\\ \vdots\\ e_m^TA\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=B.$$

(2)和(3)类似可证(练习). ■

初等变换与矩阵乘法

定理(通过初等矩阵刻画可逆矩阵). **方阵A可逆当且仅当A可表示成有限个初等矩阵的乘积.**

证明. **充分性.** 假设$A = P_1P_2\cdots P_\ell$，其中$P_i\,(1\le i\le \ell)$为初等矩阵.

注意到初等矩阵是可逆的:

$$E(i,j)^{-1} = E(i,j),$$
$$E\big(i(k)\big)^{-1} = E(i(\tfrac{1}{k})),$$
$$E\big(ij(k)\big)^{-1} = E(ij(-k)).$$

故A可逆.

必要性. 假设A为n阶可逆矩阵. 设A经过初等行变换后化为行最简形矩阵B.

由**初等矩阵与矩阵乘法引理**，存在初等矩阵$P_1,\ldots,P_\ell$使得

$$(P_\ell\cdots P_1)A = B.$$

因为A可逆且初等矩阵可逆，B可逆.

因此，B有n个非零行，从而$B = E_n$. 于是，

$$A = P_1^{-1}\cdots P_\ell^{-1}$$

为初等矩阵的乘积. ■

初等变换与矩阵乘法

定理(初等变换与矩阵乘法的联系). **设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$矩阵. 则$\boldsymbol{A}\sim_r\boldsymbol{B}$当且仅当存在$\boldsymbol{m}$阶可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使得$\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$.**

证明. $A\sim_r B \overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow}$ A经过有限次初等变换化为B

$\overset{\text{引理}}{\Longleftrightarrow}$ 存在有限个初等矩阵$P_1,\dots,P_\ell$使得$(P_\ell\cdots P_1)A=B$

$\overset{\text{定理}}{\Longleftrightarrow}$ 存在可逆阵P使得$PA=B$.

从而定理得证. ■

说明.

- 对初等列变换有：$A\sim_c B$当且仅当存在n阶可逆矩阵Q使得$AQ=B$.
- 对初等变换有：$A\sim B$当且仅当存在可逆矩阵P,Q使得$PAQ=B$.

推论. **$\boldsymbol{n}$阶方阵$\boldsymbol{A}$可逆 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}\sim_r\boldsymbol{E_n}$.**

证明. A可逆 $\Leftrightarrow$ 存在可逆阵P使得$PA=E_n$ **可逆的定义**

$\Leftrightarrow$ $A\sim_r E_n$. **初等变换与矩阵乘法的联系**

推论得证. ■

初等变换的应用

应用 1：求解矩阵方程$AX=B$，其中A为m阶可逆矩阵.

方法 1. 先求出A^{-1}，再计算$A^{-1}B$.

方法 2. 利用初等行变换.

- 将A,B做成一个分块矩阵(A,B)：由于A为m阶方阵， X必为$m\times s$矩阵（s为某个正整数），从而B为$m\times s$矩阵. 因此，(A,B)是一个$m\times(m+s)$矩阵，其中前m列为A，后s列为B.
- 对(A,B)作初等行变换，当对应A的子块变为E_m时，对应B的子块即为$A^{-1}B$.

证明. 设$(A,B)\sim_r(E_m,Y)$. 由**初等变换与矩阵乘法的联系**，存在可逆矩阵P使得

$$P(A,B)=(E_m,Y),$$

即$\begin{cases}PA & = & E_m \\ PB & = & Y\end{cases}$. 故$Y=PB=A^{-1}B$. ■

初等变换的应用

应用 1：求解矩阵方程$AX = B$，其中A为m阶可逆矩阵.

- 当$B = E_m$时，$X = A^{-1}$.
- 当$B = b$为m维列向量时，$X = A^{-1}b$为线性方程组$AX = b$的解.

例：求$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$的逆矩阵.

解：
$$(A, E) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \times \frac{1}{3}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 + 2r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4/3 & 0 & 2/3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \times -\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4/3 & 0 & 2/3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 - 3r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 3/2 & 2/3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 \times 6} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[r_1 + \frac{2}{3}r_3]{r_2 + \frac{1}{2}r_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{array}\right).$$

故$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

初等变换的应用

应用 2：给定$m\times n$矩阵A，求可逆矩阵P使得PA为行最简形矩阵.

- 将A,E_m做成分块矩阵(A,E_m)：(A,E_m)是一个$m\times(m+n)$矩阵，其中前n列为A，后m列为E_m.
- 对(A,E_m)作初等行变换，当对应A的子块变为行最简形矩阵时，对应E_m的子块即为所求.

证明. 设$(A,E_m)\sim_r(R,Y)$，其中R为行最简形矩阵. 由**初等变换与矩阵乘法的联系**，存在可逆矩阵P使得

$$P(A,E_m)=(R,Y),$$

即$\begin{cases} PA &= & R \\ PE_m &= & Y \end{cases}$. 故$Y=PE_m=P$即为所求. ∎

初等变换的应用

应用 2：给定$m \times n$矩阵A，求可逆矩阵P使得PA为行最简形矩阵.

例：求$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$. 求可逆矩阵$P$使得$PA$为行最简形矩阵.

解：

$$(A,E) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \times -\frac{1}{3}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+10r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10/3 & 8/3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10/3 & 8/3 & 1 \end{array}\right).$$

故A的行最简形矩阵为$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，而$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ -10/3 & 8/3 & 1 \end{pmatrix}$满足$PA = R$.

说明. 满足条件的矩阵P不唯一.

初等变换的应用

练习：

1. 设$A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\2&2&1\\3&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-3\\2&2\\3&-1\end{pmatrix}$, 求$X$使得$AX=B$.

2. 设$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\5&4&3&2\end{pmatrix}$. 求可逆矩阵$P$使得$PA$为行最简形矩阵.

线性方程组总结

线性方程组总结

难点.

- 秩的定义：最高阶非零子式的阶数.
- 秩的性质：
  - $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A, B) \leq R(A) + R(B)$.
  - $R(A+B) \leq R(A) + R(B)$.
  - $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$.
- 线性方程组有解判定定理的证明.

重点.

- 矩阵的初等变换及其与矩阵乘法之间的联系.
- 初等行变换求矩阵的逆.
- 求解一般的线性方程组并且在有无穷多个解的情况下写出所有的解.

线性方程组总结

1. 证明对矩阵A作1次初等列变换等价于在A的右边乘上一个相应的初等矩阵.

2. 求解线性方程组$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$.

3. 求$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

4. 若同型矩阵A, B满足$R(A) = R(B)$，是否一定有$A \sim_r B$?

5. 证明$R(A) = 1$的充分必要条件是存在非零向量a以及非零向量b使得$A = ab^T$.

扩展阅读

加性组合

问题：给定方程$a_1x_1+\cdots+a_kx_k=0$, 其中$a_1,\ldots,a_k$都是整数. 如果S $\subseteq [N]$不包含方程的非平凡解, $|S|$可以多大?

- $x_1+x_2=2x_3$:　　三项等差数列.
  - Behrend 构造(1946): $|S| \geq \frac{N}{e^{\alpha\sqrt{\ln N}}}$
  - Kelley-Meka (2023): $|S| \leq \frac{N}{e^{\alpha(\ln N)^{1/9}}}$ (组合学的重大突破)

加性组合

问题：给定方程$a_1x_1+\cdots+a_kx_k=0$, 其中$a_1,\ldots,a_k$都是整数. 如果$S\subseteq[N]$不包含方程的非平凡解, $|S|$可以多大?

- $x_1+x_2=x_3+x_4$: Sidon Set
  - 有限域构造: $|S|\geq\sqrt{N}$
  - Erdős-Turán (1941): $|S|\leq O(\sqrt{N})$
  - Lindström (1969): $|S|\leq N^{\frac{1}{2}}+N^{\frac{1}{4}}+1$
  - Balogh-Füredi-Roy (2021): $|S|\leq N^{\frac{1}{2}}+0.998N^{\frac{1}{4}}$

思考: 进一步改进Sidon Set的上界.