

# 线性代数—向量组作业解答

黄申为

2022 年 3 月 28 日

- 用定义解释含有零向量的向量组必定线性相关.

**Solution.** 如果让零向量前面的系数不等于零而其他向量前面的系数都等于 0, 则这样得到的线性组合等于零向量. 从而由定义该向量组线性相关.

- 问  $a$  取何值时下列向量共面?

$$a_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}.$$

**Solution.**  $a_1, a_2, a_3$  共面当且仅当  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$  的行列式为 0.

计算

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = (a+1)^2(a-2).$$

故当  $a = -1$  或  $a = 2$  时  $a_1, a_2, a_3$  共面.

- 设  $a_1, a_2$  线性相关且  $b_1, b_2$  也线性相关, 问  $a_1 + b_1, a_2 + b_2$  是否一定线性相关? 若正确给出证明; 若不正确请举出反例.

**Solution.** 不正确, 下面是一个反例. 设  $a_1 = e_1, a_2 = 2e_1, b_1 = e_2, b_2 = 3e_2$ . 则  $a_1 + b_1 = e_1 + e_2, a_2 + b_2 = 2e_1 + 3e_2$  是线性无关的.

- 设向量组  $B : b_1, \dots, b_r$  能由向量组  $A : a_1, \dots, a_s$  线性表示为

$$(b_1, \dots, b_r) = (a_1, \dots, a_s)K,$$

其中  $K$  为  $s \times r$  矩阵且向量组  $A$  线性无关. 证明向量组  $B$  线性无关的充分必要条件是  $R(K) = r$ .

**Solution.** 注意到  $x_1 b_1 + \cdots + x_r b_r = 0 \Leftrightarrow (a_1, \dots, a_s) K \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow K \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = 0$ , 这里第二个等价是因为  $a_1, \dots, a_s$  线性无关. 因此,

$b_1, b_2, \dots, b_r$  线性无关当且仅当  $K \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = 0$  只有零解, i.e.,  $R(K) = r$ .

5. 设有  $n$  维向量组  $A : a_1, a_2, \dots, a_n$ . 证明它们线性无关的充要条件是任一  $n$  维向量都可由它们线性表示.

**Solution.** 首先假设  $A : a_1, a_2, \dots, a_n$  线性无关. 则任给  $n$  维向量  $\beta, a_1, a_2, \dots, a_n, \beta$  线性相关, 从而  $\beta$  可由  $a_1, a_2, \dots, a_n$  唯一线性表示. 从而必要性得证.

下面证充分性. 假设任一向量可由  $a_1, a_2, \dots, a_n$  线性表示. 特别地, 标准单位向量  $e_1, e_2, \dots, e_n$  均可由  $a_1, a_2, \dots, a_n$  线性表示, 从而  $a_1, a_2, \dots, a_n$  线性表示与  $e_1, e_2, \dots, e_n$  等价. 已知等价的向量组具有相同的秩, 所以  $R(a_1, a_2, \dots, a_n) = R(e_1, e_2, \dots, e_n) = n$ , i.e.,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  线性无关.

6. 设  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ . 求一个  $4 \times 2$  矩阵  $B$  使得  $AB = 0$  且  $R(B) = 2$ .

**Solution.** 对  $B$  按列分块:  $B = (b_1, b_2)$ . 则  $AB = 0$  表明  $B$  的两个列向量  $b_1, b_2$  是  $Ax = 0$  的解. 由于  $R(B) = 2$ , 故  $Ax = 0$  有两个线性无关的解. 容易验证  $R(A) = 2$ , 所以  $Ax = 0$  的解空间是 2 维的. 因此本题实际上是求  $Ax = 0$  的基础解系. 具体计算从略.

7. 设 4 元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 已知  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  是它的三个解向量且

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 + \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

求该方程组的通解.

**Solution.** 首先,  $\eta = \eta_2 + \eta_3 - \eta_1 = (-1, -1, -1, -1)^T$  是  $Ax = b$  的解. 所以,  $\xi = \eta - \eta_1 = (-3, -4, -5, -6)^T$  是  $Ax = 0$  的解. 因为  $R(A) = 3$ ,  $\xi$  是  $Ax = 0$  的基础解系. 所以,  $Ax = b$  的通解为  $\eta_1 + k\xi$ ,  $k \in R$ .

8. 设  $n$  阶方阵  $A$  满足  $A^2 = A$ , 证明  $R(A) + R(A - E) = n$ .

**Solution.**  $A^2 = A \Leftrightarrow A(A - E) = 0$ . 由秩的定理可知,  $R(A) + R(A - E) \leq n$ . 又  $R(A) + R(A - E) = R(A) + R(E - A) \geq R(E) = n$ , 从而等式得证.

9. 设向量组  $a_1, a_2, \dots, a_m$  ( $m > 1$ ) 中,  $a_1 \neq 0$  且每个  $a_i$  ( $i = 2, 3, \dots, m$ ) 都不能被  $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$  线性表示. 证明  $a_1, a_2, \dots, a_m$  线性无关.

**Solution.** 假设  $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m = 0$ . 若  $k_m \neq 0$ , 则  $a_m = -\frac{k_1}{k_m} a_1 - \dots - \frac{k_{m-1}}{k_m} a_{m-1}$ , 这与  $a_m$  不能由  $a_1, \dots, a_{m-1}$  线性表示矛盾. 故  $a_m = 0$ . 同理可得,  $k_{m-1} = \dots = k_2 = 0$ , 从而  $k_1 a_1 = 0$ . 因为  $a_1 \neq 0$ , 故  $k_1 = 0$ . 命题得证.

10. 设  $\eta^*$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的一个特解且  $\xi_1, \dots, \xi_{n-r}$  是对应齐次线性方程组的一个基础解系.

- (a) 证明  $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$  线性无关.
- (b) 证明  $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$  线性无关.
- (c) 设  $\eta_1, \dots, \eta_{n-r+1}$  是  $Ax = b$  的  $n - r + 1$  个线性无关的解 (由 (b) 知它确有  $n - r + 1$  个线性无关的解). 试证它的任一解都可表示为

$$x = k_1 \eta_1 + \dots + k_{n-r+1} \eta_{n-r+1},$$

其中  $k_1 + \dots + k_{n-r+1} = 1$ .

**Solution.**

(a) 设  $k_1\xi_1 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r} + k\eta^* = 0$ . 方程两边同时左乘  $A$ :

$$0 = A(k_1\xi_1 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r} + k\eta^*) = k_1(A\xi_1) + \dots + k_m(A\xi_m) + k(A\eta^*) = kb.$$

因为  $b \neq 0$ , 得  $k = 0$ . 从而  $k_1\xi_1 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r} = 0$ . 因为  $\xi_1, \dots, \xi_{n-r}$  是基础解系,  $k_1 = \dots = k_m = 0$ . 所以  $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$  线性无关.

(b) 注意到  $(\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}) = (\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ .

因为  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$  满足  $|A| \neq 0$ , 所以  $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$  线性无关.

(c) 首先,  $Ax = b$  的任一解都可由  $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$  线性表示, 而由 (b),  $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$  可由  $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$  线性表示, 故  $Ax = b$  的任一解可由  $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$  线性表示. 所以,  $\eta_1, \dots, \eta_{n-r+1}$  是  $Ax = b$  的解集的最大无关组. 因而任意的解  $\eta$  可由  $\eta_1, \dots, \eta_{n-r+1}$  线性表示.

现假设  $\eta = k_1\eta_1 + \dots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$ . 在该等式两边同时左乘  $A$ :

$$A\eta = A(k_1\eta_1 + \dots + k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}) = k_1(A\eta_1) + \dots + k_{n-r+1}(A\eta_{n-r+1}).$$

从而  $b = (k_1 + \dots + k_{n-r+1})b$ . 因为  $b \neq 0$ , 得  $k_1 + \dots + k_{n-r+1} = 1$ .