线性代数-向量的线性相关性

- 向量组的线性表示
- 向量组的线性相关性
- 向量组的秩
- 线性方程组解的结构

4.1 向量组的线性表示

向量组的线性表示

定义（n维向量）. 由n个有次序的数$a_1, a_2, \dots, a_n$所组成的数组称为n维向量. 这n个数称为该向量的分量，a_i称为第i分量.

行向量

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

列向量

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

说明. 通常将向量写成列向量.

向量组的线性表示

定义(向量组). 若干个同维向量组成集合称为向量组.

例：给定矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

- A的n个m维列向量$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$称为$A$的列向量组，其中$\beta_i=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$.
- A的m个n维行向量$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$称为$A$的行向量组，其中$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in})$.

反之，一个有n个m维列向量$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$的向量组对应矩阵$(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$.

向量组 $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 矩阵

向量组的线性表示

定义(线性组合). 给定向量$a_1,\ldots,a_m$以及实数$k_1,\ldots,k_m$，表达式

$$k_1a_1+\cdots+k_ma_m$$

称为$a_1,\ldots,a_m$的线性组合. $k_1,\ldots,k_m$称为线性组合的系数.

定义(线性表示). 给定向量$a_1,\ldots,a_m$以及向量b，若存在实数$k_1,\ldots,k_m$使得

$$b=k_1a_1+\cdots+k_ma_m$$

则称b由$a_1,\ldots,a_m$线性表示.

例：$a_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. 则 $b=\begin{pmatrix}-3/2\\5/2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}a_1-2a_2$.

定理(线性表示的判定). 设有向量组$a_1,\ldots,a_m$. 则

$$\text{向量}b\text{由}a_1,\ldots,a_m\text{线性表示}\quad\Leftrightarrow\quad Ax=b\text{有解}\quad\Leftrightarrow\quad R(A)=R(A,b),$$

其中$A=(a_1,\ldots,a_m)$.

证明. 矩阵乘法的列图片. ∎

向量组的线性表示

定义(向量组的线性表示). 给定向量$a_1,\ldots,a_m$以及$b_1,\ldots,b_n$，若每个b_j都能由$a_1,\ldots,a_m$线性表示，则称向量组$b_1,\ldots,b_n$能由向量组$a_1,\ldots,a_m$线性表示.

若向量组$a_1,\ldots,a_m$与向量组$b_1,\ldots,b_n$能够相互表示，则称这两个向量组等价.

线性表示的矩阵描述. 设向量组$b_1,\ldots,b_n$能由向量组$a_1,\ldots,a_m$线性表示. 令$A=(a_1,\ldots,a_m)$, $B=(b_1,\ldots,b_n)$. 根据定义,

$$\begin{cases} b_1 = k_{11}a_1 + k_{21}a_2 + \cdots + k_{m1}a_m \\ b_2 = k_{12}a_1 + k_{22}a_2 + \cdots + k_{m2}a_m \\ \vdots \\ b_n = k_{1n}a_1 + k_{2n}a_2 + \cdots + k_{mn}a_m \end{cases}.$$

令$k_i=\begin{pmatrix} k_{1i} \\ k_{2i} \\ \vdots \\ k_{mi} \end{pmatrix}, 1\le i\le n$. 则

$$B=(b_1,b_2,\ldots,b_n)=(Ak_1,Ak_2,\ldots,Ak_n)=AK,$$

其中$K=(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\left(k_{ij}\right)_{m\times n}$.

向量组的线性表示

定理(向量组的线性表示的判定). 给定向量组$a_1, \dots, a_m$以及$b_1, \dots, b_n$. 令$A = (a_1, \dots, a_m), B = (b_1, \dots, b_n)$. 则向量组$b_1, \dots, b_n$能够由向量组$a_1, \dots, a_m$线性表示当且仅当$R(A) = R(A, B)$.

证明. 向量组$b_1, \dots, b_n$能够由向量组$a_1, \dots, a_m$线性表示

$$\Updownarrow$$

线性表示的矩阵描述

存在$m \times n$矩阵K使得$B = AK$

$$\Updownarrow$$

矩阵方程$AX = B$有解

$$\Updownarrow$$

矩阵方程定理

$R(A) = R(A, B)$. ■

向量组的线性表示

推论(向量组等价的判定). 给定向量组$a_1, \dots, a_m$以及$b_1, \dots, b_n$. 令$A = (a_1, \dots, a_m), B = (b_1, \dots, b_n)$. 向量组$a_1, \dots, a_m$与向量组$b_1, \dots, b_n$等价当且仅当$R(A) = R(A, B) = R(B)$.

证明. $a_1, \dots, a_m$与$b_1, \dots, b_n$等价 $\Leftrightarrow$ $a_1, \dots, a_m$与$b_1, \dots, b_n$能相互线性表示

$\Leftrightarrow R(A) = R(A, B)$ 且 $R(B) = R(A, B)$

$\Leftrightarrow R(A) = R(A, B) = R(B)$. ■

推论(向量组的线性表示秩的关系). 给定向量组$a_1, \dots, a_m$以及$b_1, \dots, b_n$. 令$A = (a_1, \dots, a_m), B = (b_1, \dots, b_n)$. 若向量组$b_1, \dots, b_n$能够由向量组$a_1, \dots, a_m$线性表示，则$R(B) \le R(A)$.

证明. 由**向量组线性表示判定定理**，$R(A) = R(A, B) \ge R(B)$. ■

向量组的线性表示

矩阵方法：使用矩阵的语言表述问题并通过矩阵的运算解决问题.

- 线性方程组的求解等价于通过初等行变换化增广矩阵为行最简形矩阵.
- 向量组的线性表示等价于矩阵方程解的存在性，从而可以用矩阵的秩的相等关系来刻画.
- 未完待续……

线性变换的矩阵描述

二次型的矩阵描述

向量组的线性表示

例 1：设$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
证明a_1, a_2与b_1, b_2, b_3等价.

解：令$A = (a_1, a_2)$，$B = (b_1, b_2, b_3)$. 只需证明$R(A) = R(A, B) = R(B)$.

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim_r \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 从而$R(A) = R(A, B) = 2$且$R(B) \leq 2$.
- 又B有一个2阶非零子式，故$R(B) \geq 2$.

所以，$R(B) = 2$.

向量组的线性表示

例 2：设A,B为$m\times n$矩阵且$A\sim_c B$．证明A的列向量组与B的列向量组等价．

解：由$\sim_c$的对称性，只需证若B由A经1次初等列变换而得到，则B的列向量组可以由A的列向量组线性表示．设$A=(a_1,\dots,a_n)$，$B=(b_1,\dots,b_n)$．

- $A\xrightarrow{c_i\leftrightarrow c_j}B$．则$\begin{cases} b_1=1a_1+\cdots+0a_i+\cdots+0a_j+\cdots+0a_n \\ \vdots \\ b_i=0a_1+\cdots+0a_i+\cdots+1a_j+\cdots+0a_n \\ \vdots \\ b_j=0a_1+\cdots+1a_i+\cdots+0a_j+\cdots+0a_n \\ \vdots \\ b_n=0a_1+\cdots+0a_i+\cdots+0a_j+\cdots+1a_n \end{cases}$

$$
\text{故}(b_1,\dots,b_n)=(a_1,\dots,a_n)\begin{array}{cl}
\left(\begin{array}{ccccccc}
1&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&0\\
\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots\\
0&\cdots&0&\cdots&1&\cdots&0\\
\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots\\
0&\cdots&1&\cdots&0&\cdots&0\\
\vdots&&\vdots&&\vdots&&\vdots\\
0&\cdots&0&\cdots&0&\cdots&1
\end{array}\right)
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \leftarrow i\text{行} \\ \\ \leftarrow j\text{行} \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{ccccccc}
&&\uparrow&&\uparrow&&\\
&&i\text{列}&&j\text{列}&&
\end{array} &
\end{array}
$$

$\boldsymbol{E(ij)}$

向量组的线性表示

例 2：设A, B为$m \times n$矩阵且$A \sim_c B$．证明A的列向量组与B的列向量组等价.

解(续)：

- $A \xrightarrow{c_i \times k} B$．则$B = AE(i(k))$.
- $A \xrightarrow{c_i + kc_j} B$．则$B = AE(ji(k))$. (表示的系数矩阵不是$E(ij(k))$!)

向量组的线性表示

例 3：n维向量组$a_1, a_2, \dots, a_n$对应矩阵$A=(a_1, a_2, \dots, a_n)$. 证明：$e_1, e_2, \dots, e_n$可由$a_1, a_2, \dots, a_n$线性表示的充要条件为$R(A)=n$.

证明. $e_1, e_2, \dots, e_n$可由$a_1, a_2, \dots, a_n$线性表示 $\Leftrightarrow$ $R(A)=R(A, E_n)$.

- 显然, $R(A, E_n) \le n$.
- 由**秩的性质 7**，$R(A, E_n) \ge R(E_n) = n$.

  所以，$R(A, E_n) = n$.

命题得证. ■

说明. 这个例题回答了我们之前提出的关于一般矩阵"可逆"条件的问题.

4.2 向量组的线性相关性

向量组的线性相关性

定义(线性相关性). 给定向量$a_1, \dots, a_m$，若存在不全为0的实数$k_1, \dots, k_m$使得

$$k_1 a_1 + \cdots + k_m a_m = 0,$$

则称$a_1, \dots, a_m$线性相关；否则称$a_1, \dots, a_m$线性无关.

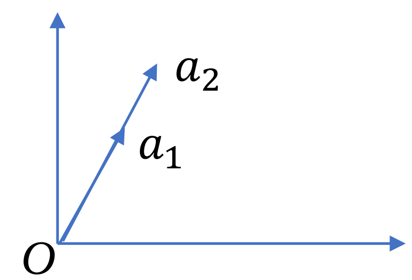
例：$a_1 = \binom{1}{1}$, $a_2 = \binom{1}{-1}$, $a_3 = \binom{-3/2}{5/2}$线性相关: $\frac{1}{2}a_1 - 2a_2 - a_3 = 0.$

理解.

- 定义中是“不全为0”，而不是“全不为0”！
- 线性无关通常使用逆否命题:

$$a_1, \dots, a_m\text{无关} \Leftrightarrow k_1 a_1 + \cdots + k_m a_m = 0 \Rightarrow k_1 = \cdots = k_m = 0.$$

- 线性相关的几何解释
    - $m = 1$　　a_1线性相关 $\Leftrightarrow$ a_1为零向量
    - $m = 2$　　a_1, a_2线性相关 $\Leftrightarrow$ a_1, a_2共线(成比例)
    - $m = 3$　　a_1, a_2, a_3线性相关 $\Leftrightarrow$ a_1, a_2, a_3共面



定义

线性相关性等价定义. **向量$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \dots, \boldsymbol{a_m}$线性相关当且仅当某个$\boldsymbol{a_i}$是其余$\boldsymbol{m-1}$个向量的线性组合.**

证明. **必要性.**

设$a_1, a_2 \dots, a_m$线性相关.

- 则存在不全为0的实数$k_1, k_2 \dots, k_m$使得$k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_ma_m = 0$.
- 不妨假设$k_1 \neq 0$，从而$k_1a_1 = -k_2a_2 - \cdots - k_ma_m$.
- 因为$k_1 \neq 0$，两边同除k_1可得$a_1 = -\frac{k_2}{k_1}a_2 - \cdots - \frac{k_m}{k_1}a_m$.

定义

线性相关性等价定义. **向量$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \dots, \boldsymbol{a_m}$线性相关当且仅当某个$\boldsymbol{a_i}$是其余$\boldsymbol{m-1}$个向量的线性组合.**

证明(续). **充分性.**

不妨假设a_1是其余$m-1$个向量的线性组合.

- 则存在实数$k_2, \dots, k_m$使得$a_1 = k_2 a_2 + \cdots + k_m a_m$.
- 故$1a_1 - k_2 a_2 - \cdots - k_m a_m = 0$.
- 因为$1, -k_2, \dots, -k_m$不全为0, $a_1, a_2, \dots, a_m$线性相关. ∎

向量组的线性相关性

定理(线性相关性的判定). 给定向量$a_1, \dots, a_m$, 令$A = (a_1, \dots, a_m)$. 则

$$a_1, \dots, a_m \text{线性相关} \iff R(A) < m.$$

证明.

$$\begin{aligned} a_1, \dots, a_m \text{线性相关} &\iff \text{存在不全0的实数} x_1, \dots, x_m \quad && \text{定义} \\ &\quad\ \text{使得} x_1 a_1 + \cdots + x_m a_m = 0 && \\ &\iff \text{齐次线性方程组} Ax = 0 \text{有非零解} && \text{列图片} \\ &\iff R(A) < m. && \blacksquare \end{aligned}$$

例 1: 讨论$e_1, \dots, e_n$的线性相关性.

解: 令$E_n = (e_1, \dots, e_n)$. 因为$|E_n| = 1 \neq 0$, $R(E_n) = n$. 故$e_1, \dots, e_n$线性无关.

思考: 如何使用定义证明$e_1, \dots, e_n$线性无关?

向量组的线性相关性

例 2：已知向量a_1, a_2, a_3线性无关．设

$$\begin{cases} b_1 = a_1 + a_2 \\ b_2 = a_2 + a_3 \\ b_3 = a_3 + a_1 \end{cases}$$

证明b_1, b_2, b_3线性无关.

证法 1：定义.

$$x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1(a_1 + a_2) + x_2(a_2 + a_3) + x_3(a_3 + a_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow\; (x_1 + x_3)a_1 + (x_1 + x_2)a_2 + (x_2 + x_3)a_3 = 0$$

a_1, a_2, a_3线性无关

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0. \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\; x_1 = x_2 = x_3 = 0 \qquad \blacksquare$$

向量组的线性相关性

例 2：已知向量a_1,a_2,a_3线性无关. 设

$$\begin{cases} b_1 = a_1 + a_2 \\ b_2 = a_2 + a_3 \\ b_3 = a_3 + a_1 \end{cases}$$

证明b_1,b_2,b_3线性无关.

证法 2：转化为齐次线性方程组是否有非零解的讨论.

令$A = (a_1,a_2,a_3), B = (b_1,b_2,b_3)$. 则

$$B = AK, \text{其中} K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3 = 0 \iff Bx = 0$$

$$\iff AKx = 0 \iff A(Kx) = 0$$

因为a_1,a_2,a_3线性无关，$R(A) = 3$. 从而齐次线性方程组$Ay = 0$只有零解.

$$\iff Kx = 0$$

$\boldsymbol{R(K) = 3}$ $\qquad \iff x = 0.$ ■

向量组的线性相关性

例 2：已知向量a_1, a_2, a_3线性无关．设

$$\begin{cases} b_1 = a_1 + a_2 \\ b_2 = a_2 + a_3 \\ b_3 = a_3 + a_1 \end{cases}$$

证明b_1, b_2, b_3线性无关.

证法 3：秩的性质.

令$A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3)$. 则

$$B = AK, \text{其中} K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned} R(B) &= R(AK) \\ &= R(A) \\ &= 3 \end{aligned}$$

***K*可逆**

线性相关判定定理

从而b_1, b_2, b_3线性无关. ■

向量组的线性相关性

练习：已知向量a_1, a_2, a_3线性无关. 判定向量b_1, b_2, b_3的线性相关性.

- $\begin{cases} b_1 = a_1 + a_2 \\ b_2 = 2a_2 + 3a_3 \\ b_3 = 3a_1 + 5a_3 \end{cases}$

- $\begin{cases} b_1 = a_1 - a_2 \\ b_2 = 2a_2 + a_3 \\ b_3 = a_1 + a_2 + a_3 \end{cases}$

线性相关性的性质

性质 1：**若$\boldsymbol{a_1,\dots,a_m}$线性相关，则$\boldsymbol{a_1,\dots,a_m,a_{m+1}}$也线性相关．反之，若$\boldsymbol{a_1,\dots,a_m,a_{m+1}}$线性无关，则$\boldsymbol{a_1,\dots,a_m}$线性无关.**

证明．令$A=(a_1,\dots,a_m)$，$B=(a_1,\dots,a_m,a_{m+1})$．则$R(B)\le R(A)+1$.

若$a_1,\dots,a_m$线性相关，**由线性相关性判定定理**，$R(A)<m$. 从而$R(B)\le R(A)+1<m+1$.

由**线性相关性判定定理**，$a_1,\dots,a_m,a_{m+1}$线性相关. ■

记忆．部分相关，则整体相关；反之，整体无关，则部分无关.

线性相关性的性质

性质 2：**设$\boldsymbol{a_1,\dots,a_m}$为$\boldsymbol{n}$维向量．若$\boldsymbol{m>n}$，则$\boldsymbol{a_1,\dots,a_m}$线性相关.**

证明．$A=(a_1,\dots,a_m)$为$n\times m$矩阵．从而

$$R(A)\le n<m.$$

由**线性相关性判定定理**，$a_1,\dots,a_m$线性相关. ■

记忆．个数大于维数必相关.

特别地，**$\boldsymbol{n+1}$个$\boldsymbol{n}$维向量必线性相关.**

线性相关性的性质

性质 3：**若$\boldsymbol{a_1},\dots,\boldsymbol{a_m}$线性无关，$\boldsymbol{a_1},\dots,\boldsymbol{a_m},\boldsymbol{b}$线性相关．则$\boldsymbol{b}$必能由$\boldsymbol{a_1},\dots,\boldsymbol{a_m}$唯一线性表示.**

证明．令$A=(a_1,\dots,a_m)$，$B=(a_1,\dots,a_m,b)$.

- 因$a_1,\dots,a_m$线性无关，由线性相关性判定定理，$R(A)=m$.
- 因$a_1,\dots,a_m,b$线性相关, 由线性相关性判定定理，$R(B)<m+1$.

  从而，$m=R(A)\le R(B)<m+1$．故$R(B)=m=R(A)$.

  因此，$Ax=b$有唯一解，即b能由$a_1,\dots,a_m$唯一线性表示. ■

记忆．无关变相关，表示必唯一.

说明．以上三个性质均可用定义证明(动手尝试).

线性相关性的性质

例：设a_1,a_2,a_3线性相关, 设a_1,a_2,a_4线性无关. 证明:

- a_3能由a_1,a_2线性表示.
- a_4不能由a_1,a_2,a_3线性表示.

证明. 因a_1,a_2,a_4线性无关, 由**性质 1**, a_1,a_2线性无关.

由**性质 3**, a_3能由a_1,a_2(唯一)线性表示.

假设a_4能由a_1,a_2,a_3线性表示.

因a_3能由a_1,a_2线性表示, 从而a_4能由a_2,a_3线性表示, 这与a_1,a_2,a_4线性无关矛盾.