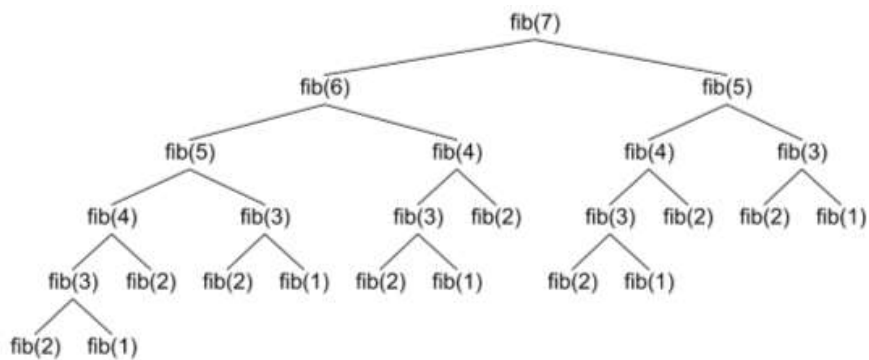


2. 아래는 피보나치 수열의 정의와 fib(7)에 대한 재귀함수 트리 구조를 보이고 있다.

$$fib(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ is } 0, \\ 1 & \text{if } n \text{ is } 1, \\ fib(n-1) + fib(n-2) & \text{othersize.} \end{cases}$$



fib(n-k)가 몇 번 호출되는지를 n과 k에 관한 간단한 표현식으로 나타내고
풀이 과정을 보이시오. (단, $1 \leq k \leq n-1$)

* 해답 및 풀이

문제에서 제시된 재귀함수 트리는 $n=7$ 이 아닌 $n=8$ 일 때의 트리이고 $1 \leq k \leq n-1$ 의 범위를 가진다. 따라서 k 값의 범위는 $1 \leq k \leq 7$ 이며 $\text{fib}(n-k)$ 의 범위 또한 $\text{fib}(7), \text{fib}(6), \text{fib}(5) \dots \text{fib}(1)$ 이다.

다시 트리로 돌아가서 $\text{fib}(7), \text{fib}(6), \text{fib}(5) \dots \text{fib}(1)$ 의 개수(=호출 횟수)를 각각 세어보면 아래와 같은 결과를 얻을 수 있다.

$\text{fib}(7) - 1$ 개	$n=8, k=1=(n-7)$
$\text{fib}(6) - 1$ 개	$n=8, k=2=(n-6)$
$\text{fib}(5) - 2$ 개	$n=8, k=3=(n-5)$
$\text{fib}(4) - 3$ 개	$n=8, k=4=(n-4)$
$\text{fib}(3) - 5$ 개	$n=8, k=5=(n-3)$
$\text{fib}(2) - 8$ 개	$n=8, k=6=(n-2)$
$\text{fib}(1) - 5$ 개	$n=8, k=7=(n-1)$

$\text{fib}(1)$ 을 제외한 $\text{fib}(7) \sim \text{fib}(2)$ 의 개수를 차례대로 나열해보면 $\{1, 1, 2, 3, 5, 8\}$ 이고 이는 곧 피보나치 수열임을 알 수 있다. 이를 $\text{fib}()$ 함수와 n, k 를 사용하여 아래와 같은 표현식으로 나타낼 수 있다.

$\text{fib}(n-1)=\text{fib}(7)$	$\Rightarrow 1(=\text{fib}(1))$ 번 호출
$\text{fib}(n-2)=\text{fib}(6)$	$\Rightarrow 1(=\text{fib}(1))$ 번 호출
$\text{fib}(n-3)=\text{fib}(5)$	$\Rightarrow 2(=\text{fib}(1))$ 번 호출
$\text{fib}(n-4)=\text{fib}(4)$	$\Rightarrow 3(=\text{fib}(1))$ 번 호출
$\text{fib}(n-5)=\text{fib}(3)$	$\Rightarrow 5(=\text{fib}(1))$ 번 호출
$\text{fib}(n-6)=\text{fib}(2)$	$\Rightarrow 8(=\text{fib}(1))$ 번 호출
$\text{fib}(n-7)=\text{fib}(1)$	$\Rightarrow 5(=\text{fib}(7))$ 번 호출

\Rightarrow $\text{fib}(n-k)$ 의 호출 횟수는 $\text{fib}(k)$ 로 나타낼 수 있음

* 문제에 오류가 있었던 부분

1) k 의 범위가 $1 \leq k \leq n-1$ 이고 제시된 재귀함수 트리의 값이 $\text{fib}(7)$ 이므로 $n=8$ 인 트리이다. 하지만 재귀함수 트리의 정의를 문제에서는 ' $\text{fib}(7)$ 에 대한 재귀함수 트리 구조'로 정의하였기 때문에 $n=7$ 로 오해할 수 있는 여지가 충분하였음

2) 본 문제의 취지는 ' $\text{fib}(n-k)$ 호출 횟수를 나열한 결과가 피보나치 수열 형태임을 보이는 것'이다.

해답 및 풀이 중 $\text{fib}(n-k)$ 의 $1 \leq k \leq n-1$ 범위에 대한 호출 횟수 결과는 아래와 같다. $\text{fib}(7) \sim \text{fib}(2)$ 의 호출 횟수는 $\{1, 1, 2, 3, 5, 8\}$ 로 피보나치 수열 형태를 가지지만 $\text{fib}(1)$ 의 호출 횟수는 5이기 때문에 $\text{fib}(7) \sim \text{fib}(1)$ 의 호출 횟수는 $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 5\}$ 이므로 피보나치 수열이 아니다.

$\text{fib}(7) - 1$ 개	$n=8, k=1=(n-7)$
$\text{fib}(6) - 1$ 개	$n=8, k=2=(n-6)$
$\text{fib}(5) - 2$ 개	$n=8, k=3=(n-5)$
$\text{fib}(4) - 3$ 개	$n=8, k=4=(n-4)$
$\text{fib}(3) - 5$ 개	$n=8, k=5=(n-3)$
$\text{fib}(2) - 8$ 개	$n=8, k=6=(n-2)$
$\text{fib}(1) - 5$ 개	$n=8, k=7=(n-1)$

따라서 본 문제의 취지에 적합한 k 값의 범위는 $1 \leq k \leq n-1$ 이 아닌 $1 \leq k \leq n-2$ 이다.

* 채점 기준 (20점 만점)

문제의 오류를 감안하여 채점 기준을 아래와 같이 정하였음

1) 20점 : $\text{fib}(n-k)$ 가 $\{1, 1, 2, 3, 5, 8\}$ 과 같은 피보나치 수열 형태임을 직접/간접적으로 서술하고 이에 대한 적절한 풀이를 작성한 경우

- 답안 예시 (1) $\text{fib}(n-k)$ 의 호출 횟수 = $\text{fib}(k+1)$ 또는 $\text{fib}(k)$

=> 문제에서 k 값의 범위와 $n=8$ 인 트리임을 명시하지 않았기 때문에 $\text{fib}(k+1)$ 도 정답으로 처리하였음

- 답안 예시 (2) $\text{fib}(n-k)$ 의 호출 횟수 = $\text{fib}(n-k+1) + \text{fib}(n-k+2)$

2) 15점 : 1)의 경우를 제외하고, 제시된 트리가 $n=8$ 인 트리를 서술하였거나 $\text{fib}(7)$ 의 호출 횟수 = 1, $\text{fib}(6)$ 의 호출 횟수 = 1, $\text{fib}(5)$ 의 호출 횟수 = 2와 같은 관계식을 서술한 경우 또는 관계식을 서술하였으나 풀이가 빈약한 경우

3) 10점 : 1), 2)를 제외한 경우