第四章 二元关系和函数

4.1 集合的笛卡尔积与二元关系

一、集合的笛卡儿积

1、有序对（序偶），记作 $\langle x, y \rangle$。

特点：(1) $x \neq y$时，$\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$，

(2) $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle \Leftrightarrow x = u, y = v$。

有序n元组$(n \geq 3)$，记$\langle x_1, x_2, \cdots x_n \rangle$。

2、笛卡儿积

定义：设A、B为两集合，用A中元素为第一元素，B中元素为第二元素，构成有序对，所有这样的有序对构成的集合称为A和B的笛卡尔积，记作$A \times B$，即

$$A \times B = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

例1、 $A=\{0,1\}, B=\{a,b,c\}$

求 $A\times B$，$B\times A$，$A\times A$，$A\times\phi$，$\phi\times B$。

解: $A\times B=\{\langle 0,a\rangle,\langle 0,b\rangle,\langle 0,c\rangle,\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 1,c\rangle\}$

$B\times A=\{\langle a,0\rangle,\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle,\langle c,1\rangle\}$

$A\times A=\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 1,1\rangle\}$

$A\times\phi=\phi$

$\phi\times B=\phi$

例2、设 $A=\{a,b\}$，求 $A\times P(A)$ 。

解： $P(A)=\{\phi,\{a\},\{b\},A\}$

$$A\times P(A)=\{\langle a,\phi\rangle,\langle a,\{a\}\rangle,\langle a,\{b\}\rangle,\langle a,A\rangle,\langle b,\phi\rangle,\langle b,\{a\}\rangle,\langle b,\{b\}\rangle,\langle b,A\rangle\}$$

注意： (1) 若 A 是 m 元集, B 是 n 元集，则 $A\times B$ 为 mn 元集。

(2) 笛卡儿积是集合，有关集合的运算都适合。

(3) 一般，$A\times B\neq B\times A$ 。

3、笛卡儿积运算对$\cup$或$\cap$满足分配律

(1) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

(2) $(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$

(3) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

(4) $(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

例3、证明：$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

证明： 对任意$\langle x,y\rangle$，

$$\langle x,y\rangle\in A\times(B\cap C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in(B\cap C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\wedge y\in C$$

$$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\in C)$$

$$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in(A\times B)\wedge\langle x,y\rangle\in(A\times C)$$

$$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in(A\times B)\cap(A\times C)$$

故$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$。

4、n阶 (n≥3) 笛卡儿积

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n =$$

$$\{\langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \cdots \wedge x_n \in A_n\}$$

特别，当 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ 时，

记为A^n。

如 $A = \{a, b\}$，

$$A^2 = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$$

二、二元关系。

1、定义：

(1) 若集合R为空集或它的元素都是有序对，

则称R为二元关系。 若$\langle x,y\rangle \in R$，则记作 xRy，

否则，记作 $x\not{R}y$ 。

(2) $A\times B$的任何一个子集都称作从A到B的一个二元关系。

特别地，当$\boldsymbol{A=B}$时，称作 **A上的二元关系**。

例、 $A=\{a,b\}$，$B=\{0,1,2\}$

设 $R_1=\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle b,2\rangle\}$ $R_2=\phi$ $R_3=A\times B$

$R_4=\{\langle b,1\rangle\}$ 都是从A到B的关系。

$R_5=\{\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle\}$是$A$上的一个二元关系。

例1、

设A表示学生的集合，B是课程的集合。另R是由有序对$\langle a, b\rangle$构成的关系，其中a是选修课程b的学生。

例如，如果学生董鸿声和朱帅选修了CS518课程，那么有序对⟨董鸿声，CS518⟩和⟨朱帅，CS518⟩就属于R，如果董鸿声也选修了CS610，那么有序对⟨董鸿声，CS610⟩也属于R，但是如果朱帅没有选修CS610，那么有序对⟨朱帅，CS610⟩就不属于R。

如果一个学生目前没有选修任何课程，那么R中就没有以他为第一元素的任何有序对,

如果一门课程目前没有开设，那么R中就没有以这门课为第二元素的任何有序对。

2、特殊的关系。

对任意集合 A，

空关系 ϕ，

全域关系 $E_A=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in A\}=A\times A$,

恒等关系 $I_A=\{\langle x,x\rangle \mid x\in A\}$。

3、常用关系。

(1) 设$A \subseteq R$，A上小于等于关系：

$$L_A = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x \le y\}$$

(2) 设$B \subseteq Z^+$，B上整除关系：

$$D_B = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in B \wedge x \mid y\}$$

(3) 幂集$P(A)$上的包含关系R：

$$R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in P(A) \wedge x \subseteq y\}$$

例2、$A=\{2,3,6,8\}$，求 L_A，D_A。

解：$L_A=\{\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 3,3\rangle,$
$\langle 3,6\rangle,\langle 3,8\rangle,\langle 6,6\rangle,\langle 6,8\rangle,\langle 8,8\rangle\}$

$D_A=\{\langle 2,2\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 6,6\rangle,\langle 8,8\rangle\}$

例3、 $A=\{a,b\}$，求 $\rho(A)$上的包含关系 R 。

解： $\rho(A)=\left\{\phi,\{a\},\{b\},A\right\}$ ，

$$R=\left\{\left\langle\phi,\phi\right\rangle,\left\langle\phi,\{a\}\right\rangle,\left\langle\phi,\{b\}\right\rangle,\right.$$

$$\left\langle\phi,A\right\rangle,\left\langle\{a\},\{a\}\right\rangle,\left\langle\{a\},A\right\rangle,$$

$$\left.\left\langle\{b\},\{b\}\right\rangle,\left\langle\{b\},A\right\rangle,\left\langle A,A\right\rangle\right\}$$

4、A上二元关系的表示法。

有三种 $\left\{\begin{array}{l}\text{集合表示法}\\ \\ \text{矩阵表示法}\\ \\ \text{图形表示法}\end{array}\right.$

一般：设 $A=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

关系R的关系矩阵 $M_R=(r_{ij})_{n\times n}$，其中 $r_{ij}=\begin{cases}1 & x_i R x_j \\ 0 & x_i \not R x_j\end{cases}$

$$\text{关系图表示}\begin{cases}\text{结点}(n\text{个顶点}) \\ \\ \text{边(每个有序对对应一条有向弧)}\end{cases}$$

例4、已知 $A=\{1,2,3,4\}$，A上关系

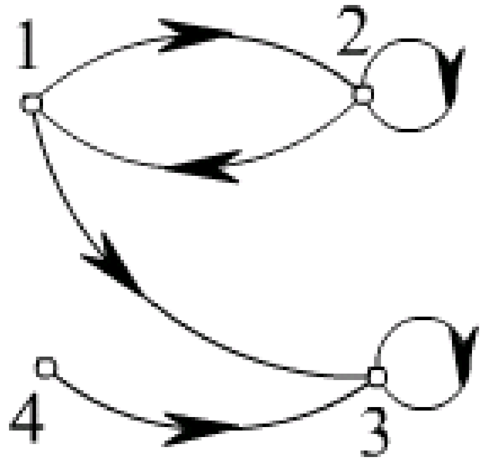
$$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,3\rangle\},$$

求 R的关系矩阵 M_R 和关系图。

解：

$$M_R=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

关系图：



二、关系的五种性质

由下表给出(R为A上的关系)

	自反性	反自反性
定义	$\forall x \in A$，都有 $\langle x, x\rangle \in R$	$\forall x \in A$，都有 $\langle x, x\rangle \notin R$
关系矩阵的特点	主对角线元素全为1	主对角线元素全为0
关系图的特点	图中每个结点都有自回路	图中每个结点都无自回路

	对称性	反对称性
定义	若$\langle x,y\rangle \in R$，则$\langle y,x\rangle \in R$	若$\langle x,y\rangle \in R$且$x \neq y$，则$\langle y,x\rangle \notin R$
关系矩阵的特点	对称矩阵	若$r_{ij}=1$且$i \neq j$，则$r_{ji}=0$
关系图的特点	若两结点间有弧，必是一对方向相反的弧	若两顶点间有弧，必是一条有向弧

	传递性
定义	若$\langle x, y\rangle \in R$ 且$\langle y, z\rangle \in R$，则$\langle x, z\rangle \in R$
关系矩阵的特点	
关系图的特点	若顶点 x_i 到 x_j 有弧，x_j 到x_k有弧， 则 x_i 到x_k 必有弧

例5、$A=\{1,2,3\}$ ，A 上关系 R_1, R_2, R_3, R_4

如下所示，判断 R_1, R_2, R_3, R_4 各有哪些性质。

(1) $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

解： R_1 既不是自反又不是反自反，

是对称的，不是传递的。

(2) $R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

解： R_2 是反自反的，反对称的，传递的。

例5、 $A=\{1,2,3\}$ ，A 上关系 R_1,R_2,R_3,R_4

如下所示，判断 R_1,R_2,R_3,R_4 各有哪些性质。

(3) $R_3=\{\langle 1,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

解： R_3 既不是自反又不是反自反的，

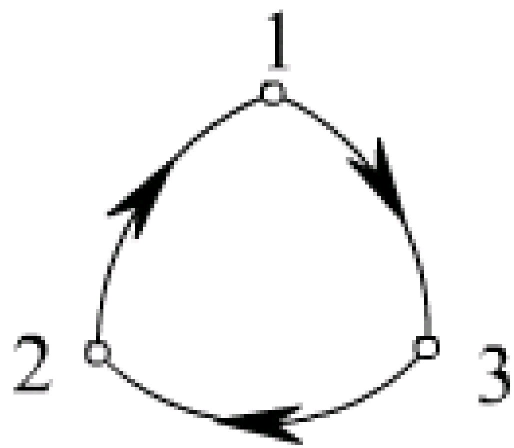
既是对称又是反对称的，传递的。

(4) $R_4=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

解： R_4 是自反的，既不是对称又不是反对称的，

不是传递的。

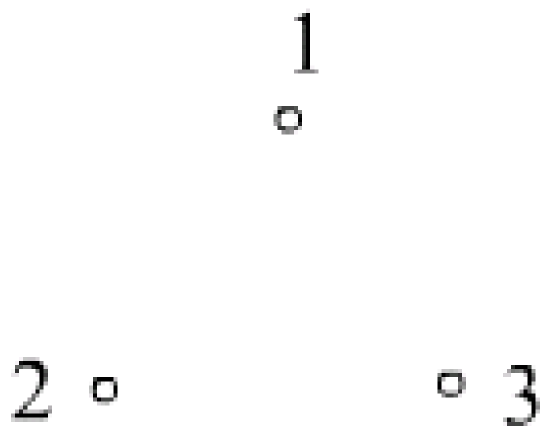
例6、判断下图中的关系分别具有哪些性质。



(1) R_1

解： R_1是反自反，反对称，不是传递的。

例6、判断下图中的关系分别具有哪些性质。

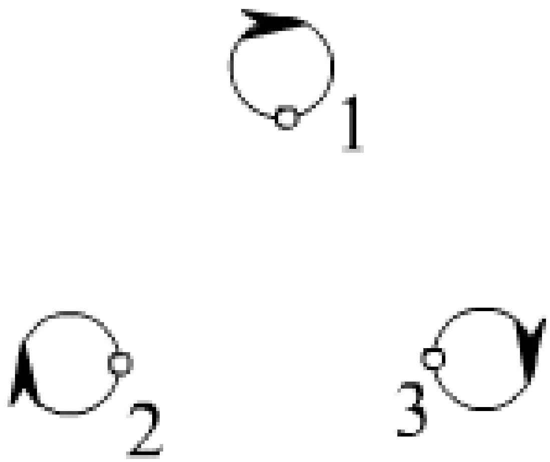


(2) R_2

解：R_2是空关系，是反自反，

既是对称又是反对称的，传递的。

例6、判断下图中的关系分别具有哪些性质。

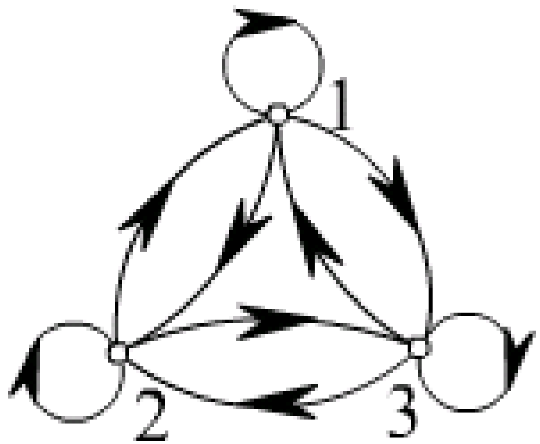


(3) R_3

解：R_3是恒等关系，是自反的，

既是对称又是反对称的，传递的。

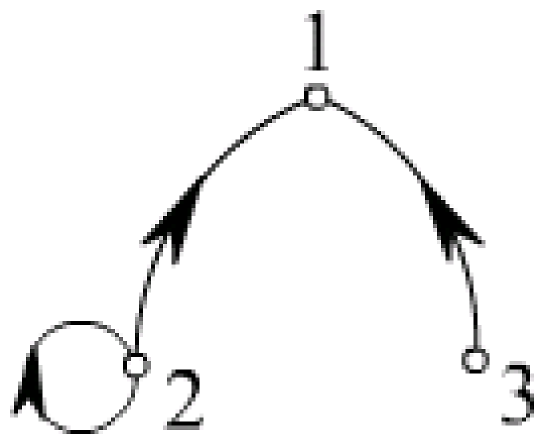
例6、判断下图中的关系分别具有哪些性质。



(4)R_4

解：R_4 是全域关系，是自反的，对称的，传递的。

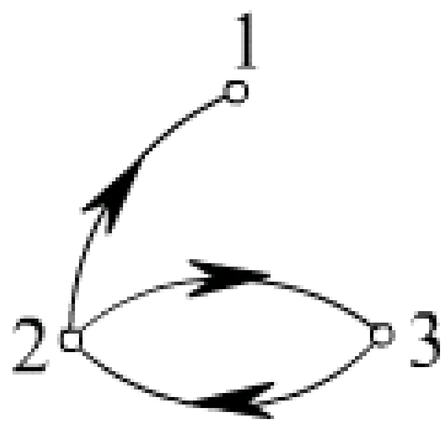
例6、判断下图中的关系分别具有哪些性质。



$(5)R_5$

解：R_5 既不是自反也不是反自反的，
反对称的，传递的。

例6、判断下图中的关系分别具有哪些性质。



(6)R_6

解： R_6 是反自反的，既不是对称又不是反对称，不是传递的。

例7：设 R_1, R_2 为 A 上的对称关系，

证明 $R_1 \cap R_2$ 也是 A 上的对称关系。

证明：对任意 $\langle x, y \rangle$

$$\langle x, y \rangle \in R_1 \cap R_2$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1 \wedge \langle x, y \rangle \in R_2$$

$$\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 \wedge \langle y, x \rangle \in R_2$$

$$\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 \cap R_2$$

所以 $R_1 \cap R_2$ 在 A 上是对称的。

例8：设 R_1, R_2为A上反对称关系，

证明$R_1 \cup R_2$不一定是 A 上的反对称关系。

反例：$A=\{1,2\}, R_1=\{\langle 1,2\rangle\}, R_2=\{\langle 2,1\rangle\}$

都是 A 上的反对称关系，

但$R_1 \cup R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$不是 A 上

的反对称关系。