§1.3 范 式

一个公式有很多的等价形式，但是有没有一个标准的形式呢？这就是我们要介绍的公式的范式。

先要介绍基本积和基本和的概念。此处用积表示合取，用和表示析取 。

1、基本积：命题公式中的变元及变元否定之积，称为基本积。

如：P、$P\wedge Q$、$\neg P\wedge Q$、$\neg P\wedge Q\wedge P$

2、基本和：命题公式中的变元及变元否定之和，称为基本和。

如：P、$P\vee Q$、$\neg P\vee Q$、$\neg P\vee\neg Q\vee P$

定理： 一个基本积是永假式，当且仅当它含有P，$\neg P$形式的两个因子。

证 （**充分性**） $P \wedge \neg P$是永假式，而$Q \wedge F \Leftrightarrow F$，所以含有$P$和$\neg P$形式的两个因子时，此基本积是永假式。

（**必要性**） 用反证法。设基本积永假但不含P和$\neg P$形式的两个因子，则给这个基本积中不带否定符的命题变元指派真值T，带有否定符的命题变元指派真值F，得基本积的真值是T，但这与假设矛盾。

一个基本和是永真式，当且仅当它含有P，$\neg P$形式的两个因子。

3、析取范式：与给定的命题公式 A 等价的公式，如果是由基本积之和组成，则称它是给定命题公式的析取范式。（公式的第一标准型）

形如：$A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee \cdots \vee A_n$，其中，$A_i$为基本积。

如： $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

4、合取范式：与给定的命题公式 A 等价的公式，如果是由基本和之积组成，则称它是给定命题公式的合取范式。（公式的第二标准型）

形如：$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \cdots \wedge A_n$，其中，$A_i$为基本和。

如:$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$

任何一个公式都有与之相等价的析取范式和合取范式。但是命题的析取范式和合取范式都不唯一，我们把运算符最少的析取范式和合取范式称为最简析取范式和最简合取范式。

求公式的析取范式和合取范式的步骤：

1) 消去$\rightarrow$ 和$\leftrightarrow$ ；

利用 $P\rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P\vee Q$

以及$P \leftrightarrow Q$的等价式

2) 否定号 $\neg$ 的消去或内移 ；

3) 利用$\wedge$和$\vee$的分配律。

例 1

(a)　求$P\wedge(P\rightarrow Q)$的析取范式。

解　$P\wedge(P\rightarrow Q)\Leftrightarrow P\wedge(\neg P\vee Q)$

$$\Leftrightarrow P\wedge\neg P\vee P\wedge Q$$

$P\wedge(P\rightarrow Q)$不是永假式，因为其析取范式中，后一个基本积非永假。

如果需要求出最简的析取范式，那么(1)式还可化简成

$P\wedge(P\rightarrow Q)\Leftrightarrow F\vee P\wedge Q$

$$\Leftrightarrow P\wedge Q$$

$P\wedge Q$是$P\wedge(P\rightarrow Q)$的最简析取范式。

(b) 求 $P\wedge(Q\rightarrow R)$ 的合取范式与析取范式

解： $P\wedge(Q\rightarrow R)$

$\Leftrightarrow P\wedge(\neg Q\vee R)$ 合取范式

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge R)$ 析取范式

(c) 求公式 $\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(P\wedge Q)$ 的最简析取范式

解：$\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(P\wedge Q)$

$$\Leftrightarrow (\neg(P\vee Q)\wedge(P\wedge Q))\vee((P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q))$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(\neg P\wedge\neg Q\wedge P\wedge Q)}_{F}\vee((P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q))$$

$$\Leftrightarrow ((P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q))$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(P\wedge\neg P)}_{F}\vee(Q\wedge\neg P)\vee(P\wedge\neg Q)\vee\underbrace{(Q\wedge\neg Q)}_{F}$$

$$\Leftrightarrow (Q\wedge\neg P)\vee(P\wedge\neg Q)$$

命题的析取范式和合取范式都不唯一，不能作为等价命题公式的标准形式，进一步引入**主范式**.

1、**极小项**：在有 n 个命题变元的基本积中，若每个变元与其否定并不同时存在，且二者之一必出现一次且仅出现一次，则这种基本积称为极小项。

如：设P、Q为两个命题变元，构成的极小项有

$$P\wedge Q、\neg P\wedge Q、P\wedge\neg Q、\neg P\wedge\neg Q$$

则n个变元可以构成2^n个不同的极小项。如，3个变元P、Q、R可以构成8个极小项。

比如 $\neg P\wedge\neg Q\wedge R$、 $P\wedge Q\wedge R$

极小项的性质：

设P、Q为两个命题变元，小项的真值表为

P	Q	$P \wedge Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1

1) 任意两个小项都不是等价的；

2) 每个小项均对应一组指派，使得该小项真值为真，其余 2^n-1 种指派下均为假；

3) $m_i \wedge m_j \Leftrightarrow F$, (i≠j)，即任两个小项不能同时为真。

我们把命题变元看成“1”，而命题变元的否定看成“0”，那么，若把P、Q、R按照一定的顺序排列下来可以把每个极小项依次对应于一个三位二进制数（编码）。如下：

极小项	二进制编码	对应的数	记作
$\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$	000	0	m_0
$\neg P\wedge\neg Q\wedge R$	001	1	m_1
$\neg P\wedge Q\wedge\neg R$	010	2	m_2
$\neg P\wedge Q\wedge R$	011	3	m_3
$P\wedge\neg Q\wedge\neg R$	100	4	m_4
$P\wedge\neg Q\wedge R$	101	5	m_5
$P\wedge Q\wedge\neg R$	110	6	m_6
$P\wedge Q\wedge R$	111	7	m_7

2、主析取范式：对于给定的命题公式，仅含有极小项的析取的等价公式，称为该给定公式的主析取范式。

例如：

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \underbrace{(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)}_{\text{主析取范式}}$$

注1： 对于任何已知的命题公式A($P_1, P_2, ..., P_n$)，$P_1, P_2, ..., P_n$ 一定能够直接构成与其等价的主析取范式。

注2：主析取范式与真值表之间的关系：

若将极小项的二进制编码与他的一组指派相对应，如$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$与0、1、0，则当且仅当用这组指派代入该极小项时极小项为真。

由此可知，在命题公式的主析取范式中每个极小项与真值表中的成真指派一一对应。一个命题公式的真值表是唯一的，所以公式的主析取范式也是唯一的。

例如：

$$P \to Q \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$

所以，公式$P \to Q$有3个成真指派 00,01,11。

注3：一般来说, 由n个变元构成的公式有无限多个, 但是每个公式都有一个唯一的主析取范式, 如果两个公式有相同的主析取范式，那么这两个公式是等价的.

则，要判断两个公式是否等价的另一种方式:判断两个公式的主析取范式是否相等.

*主析取范式的个数

由n个变元构成的公式由多少种不同的主析取范式呢?这是可以计算出来的:

n=1时, 有2个极小项, 可以构成 2^{2^1} =4个主析取范式;

n=2时, 有4个极小项, 可以构成 2^{2^2} =16个主析取范式;

以此类推, n个变元, 有2^n个极小项, 可以构成 2^{2^n} 个主析取范式.

3、极大项：在有 n 个命题变元的基本和中，若每个变元与其否定并不同时存在，且二者之一必出现一次且仅出现一次，则这种基本和称为极大项。

例如：有2个变元的例子：$P \vee Q$ 、 $P \vee \neg Q$等

有3个变元的例子：$P \vee Q \vee R$、 $\neg P \vee \neg Q \vee R$等

n个变元可以构成个2^n个不同的极大项。如，2个变元可以构成4个极大项，3个变元P、Q、R可以构成8个极大项。

极大项的性质：

设P、Q为两个命题变元，极大项的真值表为

P	Q	$P\vee Q$	$P\vee\neg Q$	$\neg P\vee Q$	$\neg P\vee\neg Q$
1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1

1) 任意两个极大项都不是等价的；

2) 每个极大项均对应一组指派，使得该大项真值为假，其余种指派下均为真；

3） $M_i\vee M_j \Leftrightarrow T$, $(i\neq j)$ ，即任两个大项不能同时为假。

我们把命题变元看成“0”，而命题变元的否定看成“1”，那么，若把P、Q、R按照一定的顺序排列下来可以把每个极大项依次对应于一个三位二进制数。如下：

极大项	二进制编码	对应的数	记作
$P \vee Q \vee R$	000	0	M_0
$P \vee Q \vee \neg R$	001	1	M_1
$P \vee \neg Q \vee R$	010	2	M_2
$P \vee \neg Q \vee \neg R$	011	3	M_3
$\neg P \vee Q \vee R$	100	4	M_4
$\neg P \vee Q \vee \neg R$	101	5	M_5
$\neg P \vee \neg Q \vee R$	110	6	M_6
$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$	111	7	M_7

4、主合取范式：对于给定的命题公式，仅含有极大项的合取的等价公式，称为该给定公式的主合取范式。

注1：对于任何已知的命题公式 $A(P_1, P_2, ..., P_n)$，$P_1, P_2, ..., P_n$ 是其中的 n 个命题变元，则一定能够直接构成与其等价的主合取范式。

注2：主合取范式与真值表之间的关系：

主合取范式中的每一项与真值表中的成假指派一一对应。

所以，一个主合取范式就和一个主析取范式相对应。

求主析取范式、主合取范式的基本步骤 ：

1、化为最简析取范式或合取范式；

2、对于不是极小项的合取式，若不含命题变元P，也不含$\neg$ P ，即通过$\wedge$（ P $\vee$ $\neg$P）来添加，然后应用分配率展开构成主析取范式。

（对于不是极大项的析取式，若不含命题变元P，也不含$\neg$ P，即通过$\vee$（ P $\wedge$ $\neg$P）来添加，然后应用分配率展开构成主合取范式。）

注：一个命题公式的主析取范式和主合取范式紧密相关，在它们的简记式中，代表极小项和极大项的足标是互补的，即两者一起构成0, 1, 2, …, 2^n-1诸数，例如

$$P\wedge Q\vee R \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1,3,5,6,7)$$ 主析取范式

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$$

$$\Leftrightarrow \pi(0,2,4)$$ 主合取范式

例1：求 $P \to Q$ 的主析取范式

解：（法一）

P	Q	$P \to Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

可得

$$P \to Q \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$

例1：求 $P \rightarrow Q$ 的主析取范式

解：（法二）

$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee (Q \wedge (P \vee \neg P))$

$\Leftrightarrow \underline{(\neg P \wedge Q)} \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee \underline{(Q \wedge \neg P)}$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

练习：求下列公式的主析取范式与主合取范式

1. $P \leftrightarrow Q$

2. $P \rightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P))$

例2：甲乙丙丁四个人有且仅有两个人参加比赛，下列四个条件均要满足：（1）甲和乙只有一人参加

（2）丙参加，则丁必参加

（3）乙和丁至多有一人参加

（4）若丁不参加，甲也不会参加，

问哪两个人参加了比赛？

解：设P:甲参加，Q:乙参加，R:丙参加，S:丁参加,则四个条件符号化为（1） $P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge Q$

（2） $R \rightarrow S$

（3） $\neg (Q \wedge S)$

（4） $\neg S \rightarrow \neg P$

因为四个条件都要满足，所以选派方案F=1.

$F \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge \neg (Q \wedge S) \wedge (\neg S \rightarrow \neg P)$

$\Leftrightarrow$---

$\Leftrightarrow \underbrace{(P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge S) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R \wedge S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge \neg S)}_{\text{主析取范式}}$

成真赋值:1001,1011,0100

因为有且仅有两人参加，所以只能取**1001**，即甲、丁二人参加比赛。

注：还可用真值表法

只需列有且仅有两个变元赋值为1的真值表

P	Q	R	S	$P\wedge\neg Q\vee\neg P\wedge Q$	$R\rightarrow S$	$\neg(Q\wedge S)$	$\neg S\rightarrow\neg P$
0	0	1	1				
0	1	0	1				
0	1	1	0				
1	0	0	1				
1	0	1	0				
1	1	0	0				