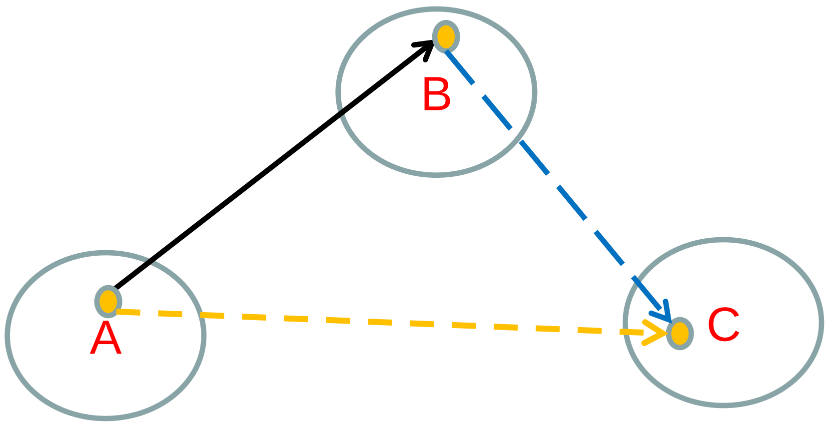
4.2 关系的合成

1、 合成的定义

设R_1是从A到B的关系，R_2是从B到C的关系，从A到C的合成关系记作$R_2 \circ R_1$(或R_2R_1)，定义为

$$\{<x,z>|x \in A \wedge z \in C \wedge \exists y(y \in B \wedge <x,y> \in R_1 \wedge <y,z> \in R_2)\}$$

关系图：



例如： 如果 R_1是“…是…的兄弟”，R_2是“…是…的父亲”，那么 $R_2 \circ R_1$ 就是“…是…的叔伯”，$R_2 \circ R_2$ 就是“…是…的祖父”。

例1 设$A=\{a_1, a_2, a_3\}$, $B=\{b_1, b_2\}$, $C=\{c_1,c_2,c_3,c_4\}$
$R=\{<\mathrm{a}_1,\mathrm{b}_1>,<\mathrm{a}_2,\mathrm{b}_2>,<\mathrm{a}_3,\mathrm{b}_1>\}$,
$S=\{<b_1,c_4>,<b_2,c_2>,<b_2,c_3>\}$,求$S\circ R$

例2 设$A=\{1,2,3,4\}$，$R=\{<1,1>,<1,3>,<2,4>\}$，
$S=\{<1,4>,<3,2>,<4,3>\}$，求$R\circ S$，$S\circ R$。

注：不一定有$R\circ S=S\circ R$。

定理1 $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$ 即合成运算满足结合律

定理2

(1) $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$

(2) $(R_2 \cup R_3) \circ R_4 = (R_2 \circ R_4) \cup (R_3 \circ R_4)$

(3) $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$

(4) $(R_2 \cap R_3) \circ R_4 \subseteq (R_2 \circ R_4) \cap (R_3 \circ R_4)$

(5) 若$R_2 \subseteq R_3$，则$R_1 \circ R_2 \subseteq R_1 \circ R_3$，$R_{,2} \circ R_4 \subseteq R_3 \circ R_4$

2、 关系R 的幂

定义: 设R为A上的关系，n为自然数，则R的n次幂定义为:

（1） $R^0=\{<x,x>|x\in A\}=I_A$

（2） $R^{n+1}=R^n \circ R$

例 设 $A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$, 求$R^0$, R^2, R^3

定理3 设R为A上的二元关系,m,n为自然数,那么

（1）$R^m \circ R^n=R^{m+n}$

（2）$(R^m)^n=R^{mn}$

3、 合成关系的矩阵表达

设R是从A到B的关系，S是从B到C的关系，且R，S的关系矩阵分别为M_R，M_S，则R，S的合成关系矩阵$M_{S\circ R}=M_R \cdot M_S$。
（布尔矩阵的布尔乘法）：把矩阵乘法中的矩阵加法改为$\vee$，乘法改为$\wedge$，其它不变。

逻辑加法：$0+0=0$，$0+1=1$，

$1+0=1$，$1+1=1$ 。

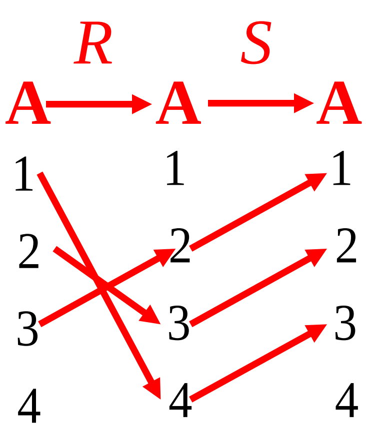
$S\circ R$的关系图可将R,S 的关系图连接起来求得。

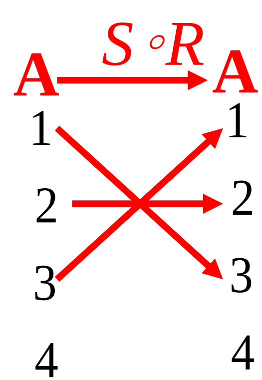
例3 设$A=\{1,2,3,4\}$，R,S均为A上的二元关系，$R=\{<1,4>,<2,3>,<3,2>\}$，$S=\{<2,1>,<3,2>,<4,3>\}$，用关系矩阵求$S\circ R$，并画出$S\circ R$的关系图。

解：

$$M_R=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad M_S=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$M_{S\circ R}=M_R\cdot M_S=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$





练习　设$A=\{1,2,3,4\}$，均为A上的二元关系 $R=\{<1,2>,<1,3>,<2,3>,<2,4>,<3,4>\}$，求$R$，$R^2$，$R^3$的关系矩阵与关系图

如果$R \circ R \subseteq R$，关系R称为传递的。

例4 设 $A=\{1,2,3\}$，A上的关系

$$R_1=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$$

$$R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle\}$$

判断 R_1, R_2 是否传递的。

解： 因 $R_1 \cdot R_1 = \phi \subseteq R_1$， 所以 R_1 是传递的。

因 $R_2 \cdot R_2 = \{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle\} \not\subseteq R_2$，

所以 R_2 不是传递的。

3、逆关系

定义：设A和B是任意两个集合，若R是A,B上的二元关系，则B,A 上的二元关系：$\{<b,a>|<a,b>\in R\}$称为关系R的逆关系,记作R^{-1}

例 (1) Z上的关系$<$的逆关系是$>$

(2) 集合族上的关系$\subseteq$的逆关系是 $\supseteq$

定理1 $R\subseteq A\times B$，R的关系矩阵为M_R，则R^{-1}关系矩阵M_R $=(M_R)^T$。

例5 设$A=\{1,2,3,4\}$，A上的二元关系$R=\{<1,2>,<1,3>,<2,3>,<2,4>,<3,4>\}$，求$R^{-1}$的关系矩阵与关系图

定理2 设R，R_1，R_2是集合A,B上的二元关系，则

(1) $(R^{-1})^{-1}=R$;

(2) $(R_1 \cup R_2)^{-1}=R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$

(3) $(R_1 \cap R_2)^{-1}=R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$

(4) $(A \times B)^{-1}=B \times A$;

(5) $\Phi^{-1}=\Phi$

(6) $R_1 \subseteq R_2$，则$R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$

定理3 设R_2是A,B上的二元关系，R_1是B,C上的二元关系，则

$$(R_1 \circ R_2)^{-1}=R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$$

11

例6 设A={a,b,c}，R,S为A上的二元关系，其关系矩阵分别为

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},M_S=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

求$M_{S^{-1}},M_{R^{-1}},M_{(S\circ R)^{-1}}$。

12

关系在各种运算下保持原有特性问题。

原有性质 / 运算	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R^{-1}	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cap R_2$	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cup R_2$	✓	✓	✓	×	×
$R_1 - R_2$	×	✓	✓	✓	×
$R_1 \circ R_2$	✓	×	×	×	×

4.3 关系的闭包

定义 给定集合X，R是X中的二元关系，若有另一关系 R' 满足下列条件：

(1) R' 是自反的（对称的、传递的）；

(2) $R' \supseteq R$；

(3) 对于任一自反（对称、可传递）关系R''，若$R'' \supseteq R$，则必有 $R'' \supseteq R'$；

则称R'是R的自反（对称、传递）闭包，并依次用$r(R)$，$s(R)$，$t(R)$来表示之。

定理1 给定集合X，R是X上的二元关系，则

(1) R是自反的当且仅当 $r(R)=R$；

(2) R是对称的当且仅当 $s(R)=R$；

(3) R是可传递的当且仅当 $t(R)=R$。

例如： 设$X=\{a, b\}$，$R=\{<a, a> \ <a, b>\}$，

则

$r(R)=\{<a, a> \ <a, b> \ <b, b>\}$，

$s(R)=\{<a, a> \ <a, b> \ <b, a>\}$，

$t(R)=\{<a, a> \ <a, b>\} = R$

构造R的自反、对称和传递闭包的方法就是给R补充必要的序偶，使它具有所希望的特性。

定理2 设R是X上的二元关系，I_X是X上的恒等关系，则有 $r(R)=R\cup I_X$.

定理3 设R是X上的二元关系，则有

$$s(R)=R\cup R^{-1}.$$

定理4 设R是X上的二元关系，则有

$$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i.$$

例2：设$X=\{a , b , c \}$，

二元关系 $R=\{<a , b>\ <b , c>\ <c , a>\}$，

求$r(R)$，$s(R)$，$t(R)$。

解：$r(R)= R \cup I_x = \{< a, b > < b, c > < c, a >$

$< a, a > < b, b > < c, c > \}.$

$s(R)= R \cup R^{-1} = \{< a, b > < b, a > < b, c >$

$< c, b > < c, a > < a, c > \} .$

$t(R)=\{<a, b> <b, c> <c, a>$

$<a, c> <b, a> <c, b>$

$<a, a> <b, b> <c, c> \}.$

定理5 给定集合***X***，且 $|X| = n$，设***R***是***X***上的二元关系，则有

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \cup R^k$$

$$= \bigcup_{i=1}^{k} R^i,\quad (0 \le k \le n).$$

例3： 设$X=\{a , b , c\}$，$|X|=3$,

二元关系$R=\{<a , b>\ \ <b , c>\ \ <c , a>\}$,

求 $t(R)$.

解： $R^2 = R\circ R = \{<a , c>\ \ <b , a>\ \ <c , b>\}$,

$R^3 = R^2\circ R = \{<a , a>\ \ <b , b>\ \ <c , c>\}$,

$R^4 = R$,

$\therefore\ t(R) = R \cup R^2 \cup R^3$

$= \{<a , b>\ \ <b , c>\ \ <c , a>\ \ <a , c>\ \ <b , a>$

$<c , b>\ \ <a , a>\ \ <b , b>\ \ <c , c> \}$.

例4： 设$X=\{a, b, c, d\}$，

$R=\{<a, b> <b, c> <c, d> \}$,

求 $t(R)$.

解： $R^2 = \{< a, c > \ < b, d >\}$，

$R^3 = \{< a, d >\}$， $R^4 = \varnothing$

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$$

$$= \{ < a, b > \ < b, c > < c, d >$$

$$< a, c > < b, d > \ < a, d > \ \}.$$