3.5 等价关系和划分

内容：等价关系，划分。

重点：(1) 掌握等价关系和等价类的概念

(2) A上的等价关系与集合A的划分之间的联系

一、等价关系。

1、定义：若 A上关系 R 满足自反，对称，传递，

则称 R 为A 上的等价关系。

若 $\langle x, y\rangle \in R$，记 $x \sim y$。

例1、(1) 集合 A上的恒等关系，全域关系是等价关系。

(2) 三角形的全等关系，三角形的相似关系是等价关系。

(3) 在一个班级里“年龄相等”的关系是等价关系。

例2、$A=\{1,2,3,4,5,7\}$

$$R=\left\{\langle x,y\rangle \middle| x,y\in A\wedge x\equiv y(\bmod 3)\right\}$$

(其中$x\equiv y(\bmod 3)$也就是$3\mid(x-y)$，

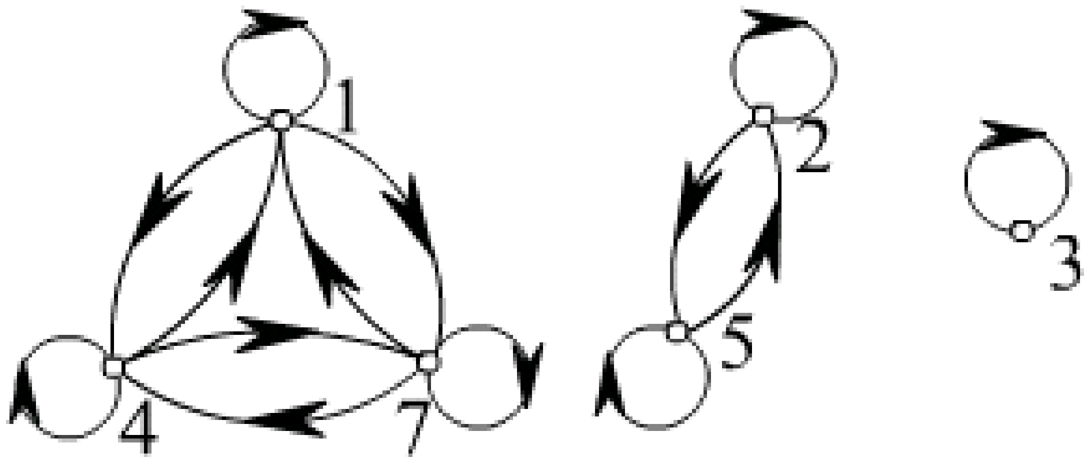
称模3的同余关系)，

验证 R 为 A 上的等价关系。

证明： $R=\{\langle 1,4\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 1,7\rangle,\langle 7,1\rangle,\langle 4,7\rangle,\langle 7,4\rangle,$

$\langle 2,5\rangle,\langle 5,2\rangle\}\cup I_A$

例2、 R 的关系图如下：



显然，R满足自反性、对称性、传递性，
所以R是A上的等价关系。

其中1～4～7，2～5。

推广：整数集 Z 上模 m 的同余关系是等价关系：

$$R=\left\{\langle x,y\rangle \middle| x,y\in Z\wedge x\equiv y(\bmod m)\right\}$$

事实上：(1) $\forall x\in Z$，$m\mid(x-x)$，

故 $\langle x,x\rangle\in R$，R 是自反的。

(2) 若 $\langle x,y\rangle\in R$，即 $m\mid(x-y)$，

则 $m\mid(y-x)$，故 $\langle y,x\rangle\in R$，

R 是对称的。

推广：整数集 Z 上模 m 的同余关系是等价关系：

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in Z\wedge x\equiv y(\mathrm{mod}\, m)\}$$

事实上：(3) 若 $\langle x,y\rangle\in R$，$\langle y,z\rangle\in R$，

即 $m\mid(x-y)$，$m\mid(y-z)$，

因 $x-z=(x-y)+(y-z)$，

所以 $m\mid(x-z)$，故 $\langle x,z\rangle\in R$，

R 是传递的。

由(1)，(2)，(3)，R 是等价关系。

2、等价类。

(1) **定义**：设R是非空集合 A上的等价关系，对$x\in A$,记

$$[x]_R=\{y\mid y\in A\wedge xRy\}$$

则称 $[x]_R$ 为 **x关于R的等价类**，简称 **x的等价类**，记 $[x]$

(2) 性质

定理：R是非空集合 A 上的等价关系，$\forall x,y\in R$,

(i) $[x]\neq\phi$，且 $[x]\subseteq A$,

(ii) 若xRy，则 $[x]=[y]$，

(iii) 若 $x\not R y$，则$[x]\cap[y]=\phi$，

(iv) $\bigcup\limits_{x\in A}[x]=A$。

在例2中， $[1]=[4]=[7]=\{1,4,7\}$

$[2]=[5]=\{2,5\}$

$[3]=\{3\}$

$[1]$, $[2]$, $[3]$都是A的非空子集，

$\forall a,b\in A$，$[a]=[b]$或$[a]\cap[b]=\phi$

(由 $a\sim b$ 或 $a\nsim b$ 决定)，

$[1]\cup[2]\cup[3]=\{1,2,3,4,5,7\}$ 。

3、商集。

定义： 设 R 为非空集合 A 上的等价关系，

以 R 的不交的等价类为元素的集合

叫做 A 在 R 下的**商集**，记作 A/R ，

即 $A/R=\{[x]_R \mid x\in A\}$ 。

例如：在例2中，$A/R=\{\{1,4,7\},\{2,5\},\{3\}\}$ 。

例3、(1) 非空集合A上的恒等关系I_A是等价关系，

$\forall x \in A$，$[x]=\{x\}$，所以商集

$$A/I_A=\{\{x\}|x \in A\}$$

(2) 非空集合A上的全域关系E_A是等价关系，

$\forall x \in A$，$[x]=A$，所以商集

$$A/E_A=\{A\}$$

例4、整数集 Z 上模m的等价关系

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in Z\wedge x\equiv y(\operatorname{mod} m)\}$$

其等价类是：$[0]=\{km \mid k\in Z\}$

$$[1]=\{km+1 \mid k\in Z\}$$

$$[2]=\{km+2 \mid k\in Z\}$$

$$\cdots\cdots$$

$$[m-1]=\{km+(m-1) \mid k\in Z\}$$

商集 $Z/R=\{[0],[1],[2],\cdots,[m-1]\}$

二、集合的划分。

1、划分的定义。

A是非空集合，$A_1, A_2, \cdots, A_m$是它的非空子集，

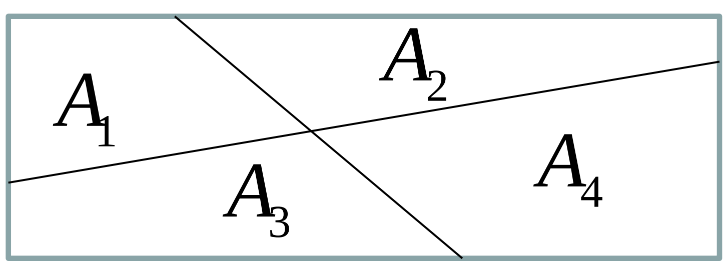
满足：(1) $A_i \cap A_j = \phi (i \neq j)$

(2) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = A$

则称 $\pi = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 为 A 的一个**划分**，

而$A_1, A_2, \cdots, A_m$称为这个**划分的块**。

把一张纸A撕碎得A的一个划分，



例5、设 $A=\{a,b,c,d\}$，

判断下列子集族是否A的划分。

(1) $\{\{a,b\},\{c\},\{c,d\}\}$ 不是A的划分

(2) $\{\{a,b\},\{d\}\}$ 不是A的划分

(3) $\{\{a,b\},\{c,d\},\phi\}$ 不是A的划分

(4) $\{\{a\},\{b,c\},\{d\}\}$ 是A的划分

(5) $\{\{a,b,c,d\}\}$ 是A的划分

2、集合 A的一个划分确定 A的一个等价关系。

A 上的一个划分 π 把 A分成若干划分块，

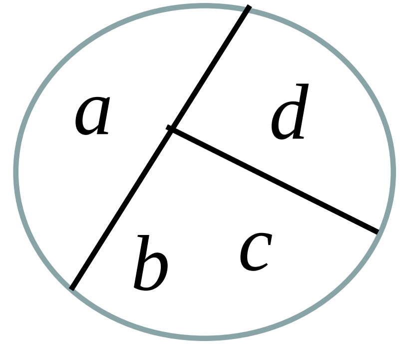
若定义同一块中的元素有关系 R，

可以证明 R是 A上的一个等价关系，

称为划分 π 诱导的等价关系，

则这个划分的块就是等价关系的等价类，

划分就是商集。



如例5中的(4)的划分 $\{\{a\},\{b,c\},\{d\}\}$，

确定 A 上的一个等价关系 R 如下：

$$R=\{a\}\times\{a\}\cup\{b,c\}\times\{b,c\}\cup\{d\}\times\{d\}$$

$$=\{\langle a,a\rangle\}\cup\{\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,c\rangle\}\cup\{\langle d,d\rangle\}$$

即$R=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$

或写成$R=\{\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle\}\cup I_A$

商集：$A/R=\{\{a\},\{b,c\},\{d\}\}$

3、*A*上的一个等价关系可确定 *A*的一个划分。

若 R 为A 上的等价关系，则所有等价类的集合，即商集 A/R，就是 A 的一个划分，称为由 R 诱导的划分。

综上可得：

集合A上的等价关系R决定A的一个划分。

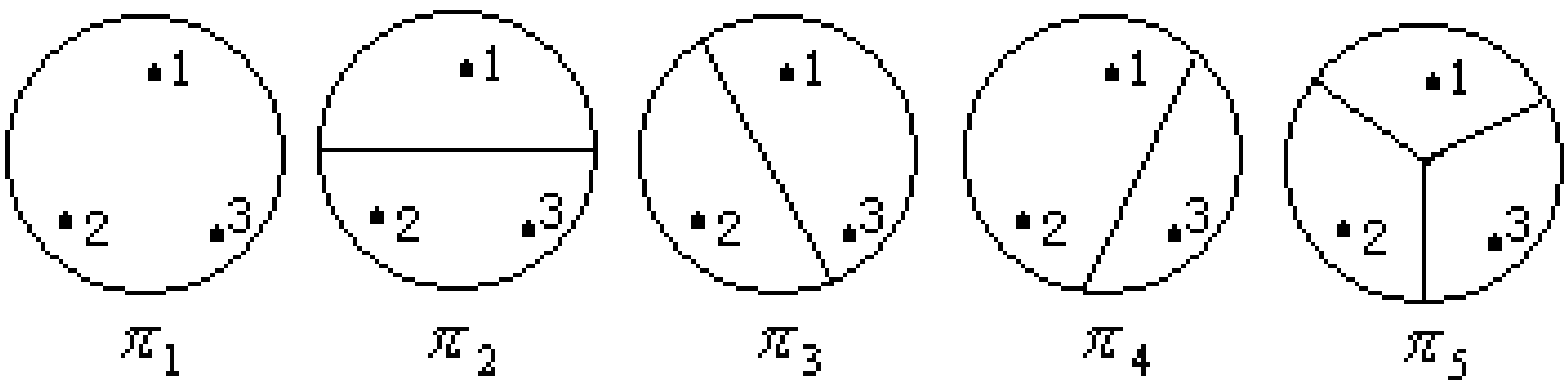
集合A的一个划分决定A的一个等价关系。

例6、设 $A=\{1,2,3\}$，

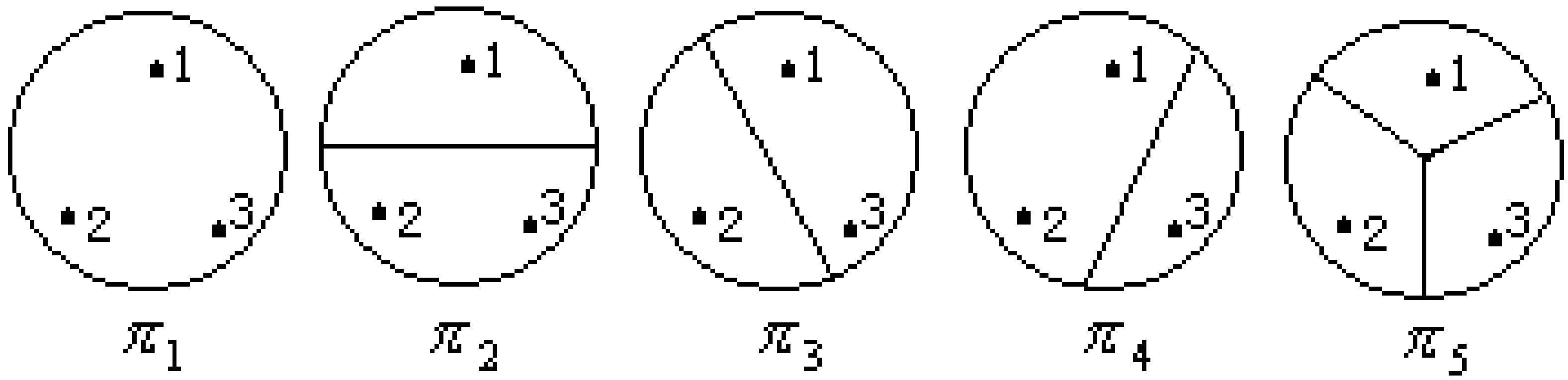
求出 A上的所有的等价关系。

解： 只需列出 A上所有的划分，

并找出由它们确定的等价关系。



A 的不同划分只有以上五种，设对应于划分 $\pi_i(i=1,2,\cdots,5)$的等价关系为R_i ，则有



$$R_1=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$$

$$\cup I_A=E_A$$ 全域关系

$$R_2=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}\cup I_A$$

$$R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}\cup I_A$$

$$R_4=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}\cup I_A$$

$$R_5=I_A$$ 恒等关系

例7、设 $S=\{1,2,3\}$，在 $S\times S$ 上定义等价关系~:

$$\forall\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\in S\times S$$

$$\langle a,b\rangle\sim\langle c,d\rangle\Leftrightarrow a+d=b+c$$

则由此等价关系诱导的划分中

(1) 共有几个划分块？

(2) 求其中最大的块。

(3) 求其中最小的块。

解： 依题意得：$\langle a,b\rangle \sim \langle c,d\rangle \Leftrightarrow a+d=b+c$

$\Leftrightarrow a-b=c-d$

即第一元素与第二元素之差相等的有序对互相等价，将$S\times S$ 中的元素按差划分。

差为0的: $\langle 1,1\rangle \sim \langle 2,2\rangle \sim \langle 3,3\rangle$

差为-1的：$\langle 1,2\rangle \sim \langle 2,3\rangle$

差为1的：$\langle 2,1\rangle \sim \langle 3,2\rangle$

差为-2的：$\langle 1,3\rangle$

差为2的：$\langle 3,1\rangle$

解：(1) 共有5个划分块。

(2) 最大的划分块为：

$$\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

(3) 最小的划分块为：

$$\{\langle 1,3\rangle\}\text{和}\{\langle 3,1\rangle\}$$

小 结

二、二元关系。

1、基本概念；关系合成；偏序；等价和划分。

2、应用。

1）关系矩阵和关系图
2）关系的特性
3）关系的合成及矩阵表达（布尔矩阵）
4）偏序与哈斯图
5）最大、小元素；极大、小元素；上、下界；上、下确界
6）等价关系；等价类与划分。

例1、设 $S_1=\{1,2,\cdots,8,9\}$，$S_2=\{2,4,6,8\}$，

$S_3=\{1,3,5,7,9\}$，$S_4=\{3,4,5\}$，$S_5=\{3,5\}$

确定在以下条件下 X 可能与 $S_1,\cdots,S_5$ 中哪个集合相等？

(1) $X\cap S_5=\phi$

解： $X=S_2$

(2) $X\subseteq S_4$，但 $X\cap S_2=\phi$

解： $X=S_5$

例1、设 $S_1=\{1,2,\cdots,8,9\}$，$S_2=\{2,4,6,8\}$，

$S_3=\{1,3,5,7,9\}$，$S_4=\{3,4,5\}$，$S_5=\{3,5\}$

确定在以下条件下X可能与$S_1,\cdots,S_5$中哪个

集合相等？

(3) $X\subseteq S_1$ 且 $X\not\subseteq S_3$

解： $X=S_1,S_2$ 或 S_4

(4) 若 $X-S_3=\phi$

解： $X=S_3$ 或 S_5

例1、设 $S_1=\{1,2,\cdots,8,9\}$，$S_2=\{2,4,6,8\}$，

$S_3=\{1,3,5,7,9\}$，$S_4=\{3,4,5\}$，$S_5=\{3,5\}$

确定在以下条件下X可能与$S_1,\cdots,S_5$中哪个集合相等？

(5) 若 $X\subseteq S_3$ 且$X\not\subseteq S_1$

解：X与其中任何集合都不相等

例2、简要说明：ϕ 与 $\{\phi\}$ 的区别，

举出它们的元素和子集。

解：ϕ 是无任何元素的集合，

子集有 ϕ，

$\{\phi\}$ 是以集合为元素的集合，

元素为 ϕ，子集有 $\phi, \{\phi\}$。

例3、设 A,B 为任意集合，证明：

(1) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$

证明：设 $A \subseteq B$

$\forall x \in P(A)$，有 $x \subseteq A$

又 $A \subseteq B$，故 $x \subseteq B$，即有 $x \in P(B)$,

所以 $P(A) \subseteq P(B)$。

例3、设 A, B为任意集合，证明：

(2) $P(A) \subseteq P(B) \Rightarrow A \subseteq B$

证明：设 $P(A) \subseteq P(B)$

$\forall x \in A$，有$\{x\} \in P(A)$

又$P(A) \subseteq P(B)$，故$\{x\} \in P(B)$，

即 $x \in B$ ，

所以 $A \subseteq B$ 。

例4、求下列集合的基数和每个集合的幂集。

(1) $\{1,\{2,3\}\}$

解： 基数2，

幂集为: $\{\phi,\{1\},\{\{2,3\}\},\{1,\{2,3\}\}\}$

(2) $\{\phi,a,\{b\}\}$

解： 基数3，

幂集为: $\{\phi,\{\phi\},\{a\},\{\{b\}\},\{\phi,a\},$

$\{\phi,\{b\}\},\{a,\{b\}\},\{\phi,a,\{b\}\}\}$

例5、设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，A上的二元关系

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid (x-y)^2\in A\wedge x>y\}$$

$$S=\{\langle x,y\rangle \mid y\text{是}x\text{的倍数}\}$$

$$T=\{\langle x,y\rangle \mid {}^{x}\!/_{y}\text{是素数}\}$$

(1) 写出 R,S,T 的元素。

解： $R=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 5,4\rangle,$

$\langle 6,5\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 5,3\rangle,\langle 6,4\rangle\}$

例5、设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，A上的二元关系

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid (x-y)^2\in A\wedge x>y\}$$

$$S=\{\langle x,y\rangle \mid y\text{是}x\text{的倍数}\}$$

$$T=\{\langle x,y\rangle \mid {}^{x}\!/_{y}\text{是素数}\}$$

(1) 写出 R,S,T 的元素。

解： $S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 6,6\rangle,$

$\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 2,4\rangle,$

$\langle 2,6\rangle,\langle 3,6\rangle\}$

例5、设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，A上的二元关系

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid (x-y)^2\in A\wedge x>y\}$$

$$S=\{\langle x,y\rangle \mid y\text{是}x\text{的倍数}\}$$

$$T=\{\langle x,y\rangle \mid {}^{x}\!/_{y}\text{是素数}\}$$

(1) 写出 R,S,T 的元素。

解： $T=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 5,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 6,2\rangle,\langle 6,3\rangle\}$

例5、设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，A上的二元关系

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid (x-y)^2\in A\wedge x>y\}$$

$$S=\{\langle x,y\rangle \mid y\text{是}x\text{的倍数}\}$$

$$T=\{\langle x,y\rangle \mid {}^{x}\!/_{y}\text{是素数}\}$$

(2) R,S,T 具有哪些性质。

解： R 是反自反，反对称的。

S 是自反，反对称，传递的。

T 是反自反，反对称的。

例5、设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，A上的二元关系

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid (x-y)^2 \in A \wedge x>y\}$$

$$S=\{\langle x,y\rangle \mid y\text{是}x\text{的倍数}\}$$

$$T=\{\langle x,y\rangle \mid x/y\text{是素数}\}$$

(3) 求$R\circ R$，$R\circ T$

$$R\circ R=\left\{\begin{array}{c}<3,1>,<4,1>,<4,2>,<5,1>,<5,2> \\ <5,3>,<6,2>,<6,3>,<6,4>\end{array}\right\}$$

解：

$$R \circ T = \{<4,1>,<5,1>,<3,1><5,2>,<6,1>,<6,2>\}$$

例6、举出 $A=\{1,2,3\}$ 上的关系 R 的例子，

使它有如下的性质：

(1) R 既是对称的，又是反对称的。

解：$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

(2) R 既不是对称的，也不是反对称的。

解：$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

(3) R 是传递的。

解：$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

例7、 R 是 X 上的二元关系，对 $x \in X$，

定义集合 $R(x) = \{ y | xRy \}$，

若 $X = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$，

且令 $R_1 = \{ \langle x, y \rangle | x, y \in X \wedge x < y \}$，

$R_2 = \{ \langle x, y \rangle | x, y \in X \wedge y - 1 < x < y + 2 \}$

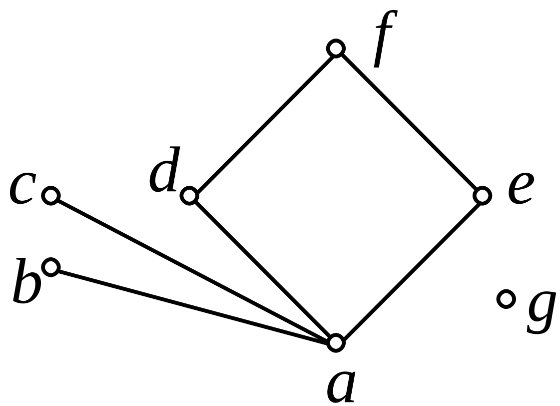
$R_3 = \{ \langle x, y \rangle | x, y \in X \wedge x^2 \leq y \}$

求以下集合：

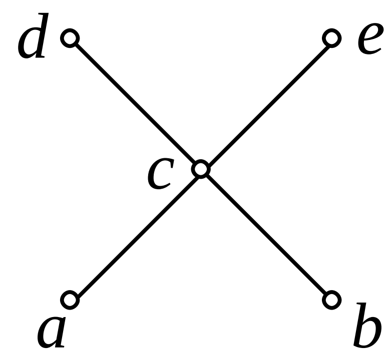
(1) $R_1(0) = \underline{\{1, 2, 3, 4\}}$ (2) $R_2(0) = \underline{\{-1, 0\}}$

(3) $R_3(3) = \underline{\phi}$ (4) $R_1(1) = \underline{\{2, 3, 4\}}$

例8、如下图是两个偏序集$\langle R, \preceq \rangle$的哈斯图，分别写出集合$A$和偏序关系$\preceq$的表达式。



(1)



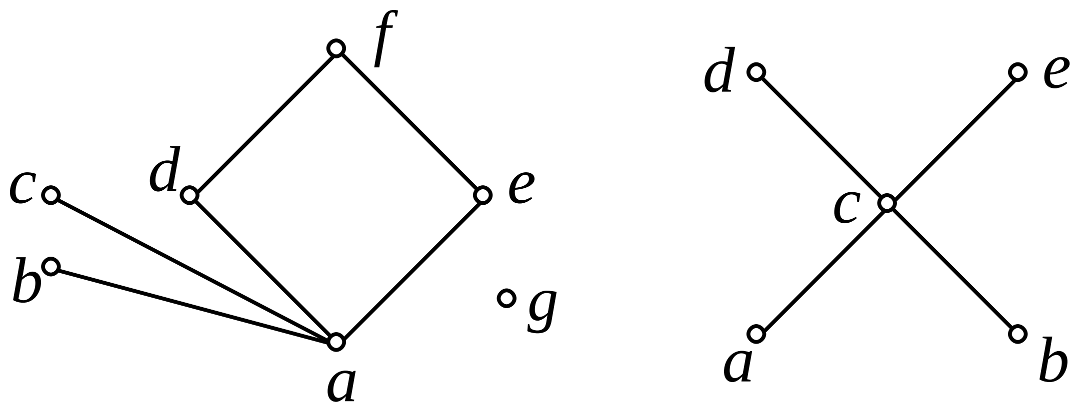
(2)

解：(1) $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$$\preceq = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle, \langle a,f\rangle, \langle a,e\rangle, \langle d,f\rangle, \langle e,f\rangle\} \cup I_A$$

例8、如下图是两个偏序集$\langle R,\preceq\rangle$的哈斯图，

分别写出集合A和偏序关系$\preceq$的表达式。



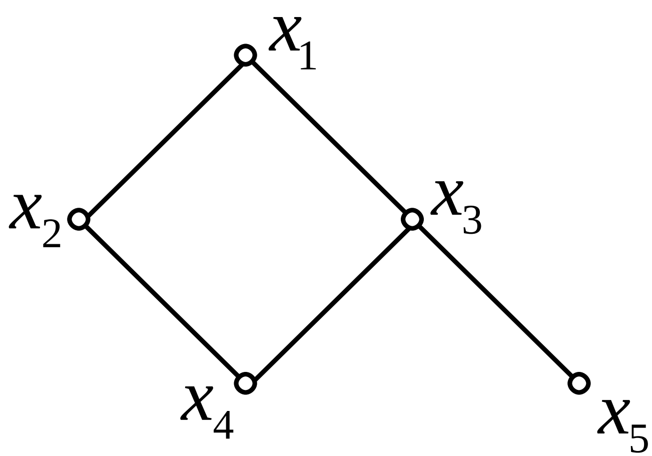
(1) (2)

解：(2) $A=\{a,b,c,d,e\}$

$$\preceq=\{\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle c,e\rangle,\langle a,d\rangle,$$

$$\langle a,e\rangle,\langle b,d\rangle,\langle b,e\rangle\}\cup I_A$$

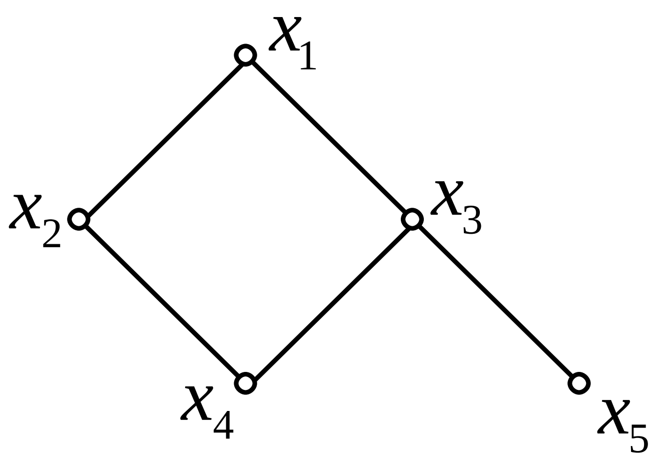
例9、设集合$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$上的偏序关系如下图，求子集$X_1=\{x_3,x_4,x_5\}$的最大元，最小元，极大元，极小元，上界，下界，上确界，下确界。



解：X_1的最大元x_3，X_1无最小元，

极大元 x_3， 极小元为 x_4,x_5，

例9、 设集合$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$上的偏序关系如下图，求子集$X_1=\{x_3,x_4,x_5\}$的最大元，最小元，极大元，极小元，上界，下界，上确界，下确界。



解： X_1的上界为x_1和x_3，上确界为x_3，

X_1无下界，无下确界。

例10、设$A=\{a,b,c,d\}$，A 上关系

$$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle\}$$

(1) 画出 R 的关系图，并写出 R的关系矩阵。

解：

关系图：

$$\text{关系矩阵：} M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

例10、设$A=\{a,b,c,d\}$，A 上关系

$$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle\}$$

(2) 求R^2，R^3，R^4，R^{-1}。

解：$R^2=\{\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle d,b\rangle,\langle d,d\rangle\}$

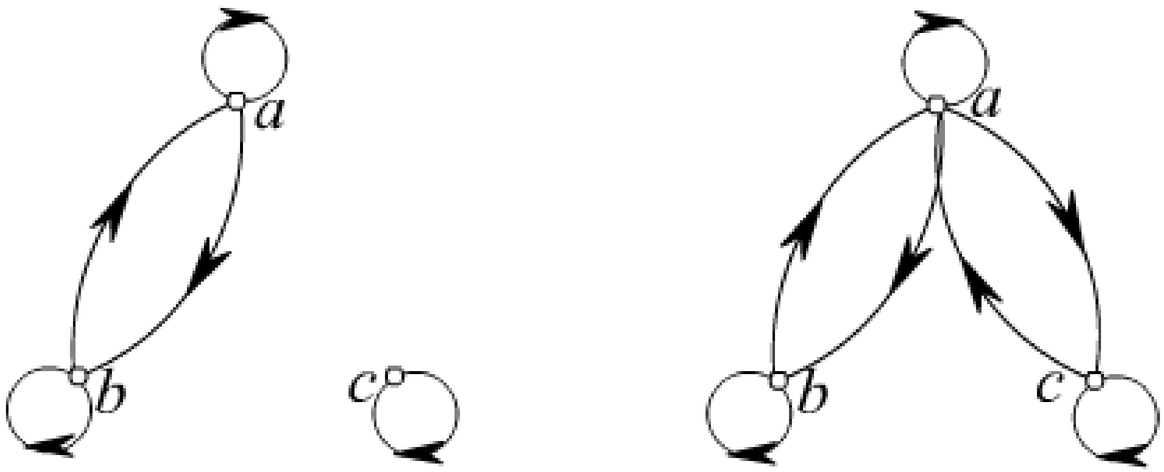
$$R^3=\{\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle\}$$

$$R^4=\{\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,b\rangle,\langle d,d\rangle\}$$

$$R^{-1}=\{\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle d,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$$

例11、令$A=\{1,2,3\}$，A上的两个关系如下图，

它们是否是等价关系。



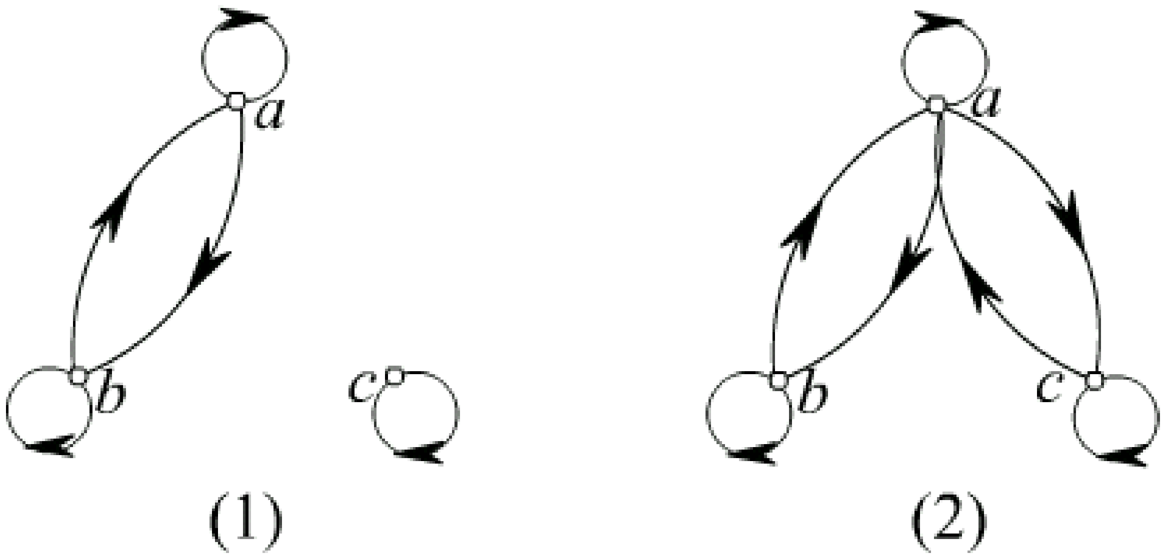
(1) (2)

解： 图(1)表示的关系满足自反，对称，传递，

是等价关系。

例11、令$A=\{1,2,3\}$，A上的两个关系如下图，

它们是否是等价关系。



解：图(2)表示的关系满足自反，对称，

但不满足传递，不是等价关系。

例12、 设R是集合A上的一个传递关系和对称关系，若对任意$a \in A$，都存在一个$b \in A$，使得$\langle a,b \rangle \in R$，证明$R$是一个等价关系。

证明： 对任意$a \in A$，存在$b \in A$使$\langle a,b \rangle \in R$，

因为R是对称的，所以$\langle b,a \rangle \in R$，

又因为R是传递的，所以$\langle a,a \rangle \in R$，

由于a的任意性，所以R是自反的，

所以R是A上等价关系。