南京信息工程大学第一学期
《高等数学》I-1 期中考试样卷

一、填空题(每题 3 分，共 15 分)

1、函数 $y=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 的定义域__________________.

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots\dfrac{n}{n^2+n}\right)=$ _________.

3、已知 $f'(3)=2$，那么 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3-h)-f(3+h)}{2h}=$ ___________.

4、若当 $x\to0$ 时，有 $\ln\dfrac{1-ax^2}{1+ax^2}\sim\sin^2(\sqrt{6}x)$，则 $a=$____________.

5、已知 $f(x)=\sin x+\cos x$，则 $f^{(n)}(x)=$___________________.

二、选择题(每题 3 分，共 15 分)

1、 $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ 在 $x=0$ 处 (　　　)

(A) 有定义　　（B）极限存在　　（C）左极限存在　　（D）右极限存在

2、数列 $\{x_n\}$ 有界是它收敛的（　　　）

（A) 充分但不必要条件　　（B）必要但不充分　　（C）充要条件　　（D）不充分也不必要条件

3、当 $x\to1$ 时，$1-x$ 是比 $1-x^2$ （　　　）

A、 高阶的无穷小;　　　　B、 低阶的无穷小;

C、 等价无穷小;　　　　D、 同阶但不等价无穷小.

4、设 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}-\cos(xy)=e-1$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为(　　　)

A、 $x+y-1=0$　　　　B、 $x-y-1=0$

C、 $-x+y-1=0$　　　　D、 $x+y+1=0$

5、由 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq0,\\ f(0), & x=0,\end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f'(0)\neq0$，$f(0)=0$，则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的

(　　　)

（A）连续点　　（B）第二类间断点　　（C）第一类间断点　　（D）连续点或间断点不能由此决定

三、计算题(每题 6 分，共 30 分)

1、求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$.

2、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\sin 2x^3}$.

3、设 $f(x)=(x^2-a^2)g(x)$，其中 $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续，求 $f'(a)$.

4、$y=f(x^2)$，$f'(x)=\arctan x^2$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$.

5、求由参数方程 $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数.

四、$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-bx+2\right)=0$，求 a,b.（8 分）

五、（**本题 8 分**）设曲线 $y=f(x)$ 在原点处与 $y=\sin x$ 相切，a，b 为常数，且 $ab\neq 0$，试求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(ax)+f(bx)}{\sin x}$.

六、设 $f(x)=\begin{cases} e^{x^3}, x\leq 1, \\ ax+b, x>1, \end{cases}$ 问 a,b 取何值时 $f'(1)$ 存在.　（8 分）

七、设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f''(0)=4$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.　（8 分）

八、已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：

（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$.

（2）存在两个不同的点 η，$\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$. (8 分)