§2.2 谓词演算的永真公式

一、合式公式的解释

对公式中各种变项(个体变项，函数变项，谓词变项)，指定特殊的常项去代替，就构成了公式的一个解释。

通常情况下，解释 E 由以下4部分组成：

(1) 为论述域指定一个非空集合 D

(2)为每个个体常元指定一个D中的个体，

(3)为每个函数变项指定一个D上的函数，

(4)为每个谓词变项指定一个D上的谓词。

例1、现给定解释 N 如下：

1) 个体域为自然数集合D_N 2) D_N 中特定元素 $a=0$

3) D_N 上特殊函数 $f(x,y)=x+y, g(x,y)=x\bullet y$

4) D_N 上特定谓词$F(x,y)$为$x=y$

在解释N下，讨论下面哪些公式为真？哪些为假？

(1) $\forall xF\left(g(x,a),x\right)$

解：在解释N 下，公式化为：

$\boldsymbol{\forall x(x\bullet 0=x)}$ 真值为0

例1、现给定解释 N 如下：

1) 个体域为自然数集合D_N　　2) D_N 中特定元素 $a=0$

3) D_N 上特殊函数 $f(x,y)=x+y, g(x,y)=x\bullet y$

4) D_N 上特定谓词$F(x,y)$为$x=y$

在解释N下，讨论下面哪些公式为真？哪些为假？

(2) $\forall x\forall y\Big(F\big(f(x,a),y\big)\to F\big(f(y,a),x\big)\Big)$

解：在解释N 下，公式化为：

$\forall x\forall y(x+0=y\to y+0=x)$　　真值为1

例1、现给定解释 N 如下：

1) 个体域为自然数集合D_N　　2) D_N 中特定元素 $a=0$

3) D_N 上特殊函数 $f(x,y)=x+y, g(x,y)=x\bullet y$

4) D_N 上特定谓词$F(x,y)$为$x=y$

在解释N下，讨论下面哪些公式为真？哪些为假？

(3) $\forall x\forall y\exists zF\left(f(x,y),z\right)$

解：在解释N 下，公式化为：

$\forall x\forall y\exists z(x+y=z)$　　真值为1

例1、现给定解释 N 如下：

1) 个体域为自然数集合D_N　　2) D_N 中特定元素 $a=0$

3) D_N 上特殊函数 $f(x,y)=x+y, g(x,y)=x\bullet y$

4) D_N 上特定谓词$F(x,y)$为$x=y$

在解释N下，讨论下面哪些公式为真？哪些为假？

(4) $\forall x \forall y F\left(f(x,y), g(x,y) \right)$

解：在解释 N 下，公式化为：

$\forall x \forall y (x+y=x\bullet y)$　　真值为0

例1、现给定解释 N 如下：

1) 个体域为自然数集合D_N　2) D_N 中特定元素 $a=0$

3) D_N 上特殊函数 $f(x,y)=x+y, g(x,y)=x\bullet y$

4) D_N 上特定谓词$F(x,y)$为$x=y$

在解释N下，讨论下面哪些公式为真？哪些为假？

(5) $F\big(f(x,y), f(y,z)\big)$

解：在解释 N下，公式化为：

$x+y=y+z$　真值不确定(不是命题)

如何让它成为命题呢？

(5) $F\big(f(x,y), f(y,z)\big)$

解： 在解释 N 下，公式化为：

$x+y=y+z$ 真值为不确定(不是命题)

解释N下的赋值：对每个自由出现的个体变项指定个体域中的一个元素。

取解释N下的赋值σ： $\sigma(x)=1, \sigma(y)=3, \sigma(z)=5$

则在解释N和赋值σ下，公式为1+3=3+5 **假命题**

若取解释N下的赋值σ'： $\sigma'(x)=1, \sigma'(y)=3, \sigma'(z)=1$

则在解释N和赋值σ'下，公式为1+3=3+1 **真命题**

二、永真式、矛盾式、可满足式

永真式——在任何解释下和该解释下的任何赋值下都为真的合式公式。
（逻辑有效式）

例如：$\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$

永假式——在任何解释下和该解释下的任何赋值下都为假的合式公式。
（矛盾式）

例如：$\neg(F(x,y) \rightarrow R(x,y)) \wedge R(x,y)$

可满足式——至少存在一个解释及该解释下的一个赋值使其为真的合式公式。

不存在一个可行的算法能够判断任一公式是否是可满足的，
但有一些特殊的公式，可以利用命题公式的结论

命题公式中永真式的代换实例在谓词公式中仍是永真式，矛盾式的代换实例在谓词公式中仍是矛盾式。

用n个谓词$A_1,A_2,\ldots,A_n$取代命题公式$A(p_1,p_2,\ldots,p_n)$中的变元所得的谓词公式$A_0(A_1,A_2,\ldots,A_n)$称为命题公式A的**代换实例**。

例如：

$$F(x)\rightarrow G(x),$$

$$\exists xF(x)\rightarrow G(x),$$

$$\forall xF(x)\rightarrow \exists xG(x)$$

都是命题P→Q的代换实例

例2：判断下列公式中哪些是重言式，哪些是矛盾式。

$$(1)\ \forall xF(x)\rightarrow\left(\forall x\exists yG(x,y)\rightarrow\forall xF(x)\right)$$

解：原公式是命题公式P→(Q→P)的代换实例，且

$$P\rightarrow(Q\rightarrow P)\Leftrightarrow\neg P\vee(\neg Q\vee P)\Leftrightarrow \mathbf{1}$$

所以原公式是重言式。

$$(2)\ \forall xF(x)\rightarrow\left(\forall xF(x)\vee\exists yG(y)\right)$$

解：原公式是命题公式P→(P∨Q)的代换实例，且

$$P\rightarrow(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\vee(P\vee Q)\Leftrightarrow \mathbf{1}$$

所以原公式是重言式。

$(3)\ \neg\big(F(x,y)\to R(x,y)\big)\wedge R(x,y)$

解： 原公式是命题公式$\neg(P \to Q) \wedge Q$的代换实例，且

$$\neg(P \to Q) \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \wedge Q$$
$$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \wedge Q \Leftrightarrow \mathbf{0}$$

所以原公式是矛盾式。

对于不是永真或永假式的代换实例的谓词公式，判断并非易事，但一些简单的可通过读公式含义，或取解释来判断。

(4) $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$

解：根据量词的含义，若对一切x∈D，都有F(x)为真，则对某一确定的x，F(x)为真，所以就存在x∈D，使得F(x)为真。

所以，原公式是重言式。即 $\boxed{\forall xF(x) \Rightarrow \exists xF(x)}$

$$\boxed{\forall xF(x) \Rightarrow F(x)}$$

(5) $\forall x \exists y F(x,y) \rightarrow \exists x \forall y F(x,y)$

解：取解释I_1：个体域为自然数集N，$F(x,y)$：$x \le y$。

在解释I_1下，蕴含的前件为真，后件也为真，故原式为真。

取解释I_2：个体域为自然数集N，$F(x,y)$：$x=y$。

在解释I_2下，蕴含的前件为真，后件为假，故原式为假。

综上可知，原公式是非永真的可满足式。