4.6 函数的基本概念

一、函数的定义。

1、定义： 设f是从集合X到集合Y的一个关系，

若f满足对每一个$x \in X$，都存在唯一的$y \in Y$，使得$\langle x, y \rangle \in f$

则称f是一个从X到Y的函数，记作$f(x) = y$.

xfy

前域

陪域

自变元

函数值

例如：$F_1 = \{\langle x_1, y_2 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle, \langle x_3, y_1 \rangle\}$是函数，

而 $F_2 = \{\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_1, y_2 \rangle, \langle x_2, y_1 \rangle, \langle x_3, y_2 \rangle\}$

不是函数。

注：1、有关集合和关系的运算对函数都适合。

$$f=g \Leftrightarrow f \subseteq g \wedge g \subseteq f \quad \Leftrightarrow \forall x \in \operatorname{dom} f=\operatorname{dom} g,$$

$$f(x)=g(x)$$

2、函数的定义域 $\operatorname{dom} f=X$

值域 $\operatorname{ran} f \subseteq Y$

$B^{A}=\{f \mid f: A \rightarrow B\}$表示从$A$到$B$的全体函数构成的集合

例如：

$f(x)=2x, x \in R$是从实数集R到R的函数，即$f \in R^{R}$.

$g(x)=\ln x, x \in R^{+}$是从R^{+}到R的函数，即$g \in R^{R^{+}}$.

例1、 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{a,b\}$，求 B^A。

解：题目要求从 A 到 B 的所有函数，依函数定义，有

$$f_1=\{\langle 0,a\rangle,\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$$

$$f_2=\{\langle 0,a\rangle,\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$$

$$f_3=\{\langle 0,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$$

$$f_4=\{\langle 0,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$$

例1、 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{a,b\}$，求 B^A。

解： 题目要求从 A 到 B 的所有函数，依函数定义，有

$$f_5=\{\langle 0,b\rangle,\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle\}$$

$$f_6=\{\langle 0,b\rangle,\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$$

$$f_7=\{\langle 0,b\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle\}$$

$$f_8=\{\langle 0,b\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle\}$$

例1、 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{a,b\}$，求 B^A。

解： 故 $B^A=\{f_1,f_2,\cdots f_8\}$

一般，若 $|A|=m$，$|B|=n$（m,n不全为0)，

则 $|B^A|=n^m$。

二、函数的性质。

1、**满射：** 若 $\operatorname{ran} f = B$，则称 f 是**满射**的(或到上的)。

2、**单射：** 若 $\forall x_1, x_2 \in A$，$x_1 \neq x_2$，则 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则 f 称是**单射**的(或一一的)。

3、**双射：** 若 f 既是满射，又是单射，则称 f 是**双射**的 (或一一到上的)。

例2、判断以下f,g,h的是否从A到B的函数，

若是函数，再判断是否单射，满射，双射的；

若不是，请说明理由。

(1) $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{6,7,8,9,10\}$，

$$f=\{\langle 1,8\rangle,\langle 3,9\rangle,\langle 4,10\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 5,9\rangle\}$$

解： f是从A到B的函数，

但f不是单射，也不是满射。

例2、判断以下 f,g,h 的是否从A 到 B 的函数，若是函数，再判断是否单射，满射，双射的；若不是，请说明理由。

(1) $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{6,7,8,9,10\}$，

$$g=\{\langle 1,8\rangle,\langle 3,10\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 4,9\rangle\}$$

解：g 不是从 A 到B 的函数，

例2、判断以下 f, g, h 的是否从A 到 B 的函数，若是函数，再判断是否单射，满射，双射的；若不是，请说明理由。

(1) $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{6,7,8,9,10\}$，

$$h=\{\langle 1,7\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 3,8\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 1,9\rangle,\langle 5,10\rangle\}$$

解： h 不是从 A 到B的函数，

(2) $A = B = R$(实数集)

$$f(x) = x^2 - x$$

解： f 是从 A 到B 的函数，

但它不是单射，也不是满射。

$$g(x) = x^3$$

解： g 是从A到B的双射函数。

$$h(x) = \sqrt{x}$$

解： h不是从 A 到 B 的函数。

(3) $A=B=Z^{+}$(正整数集)

$$f(x)=x+1$$

解： f是从 A到 B 的函数，

且是单射的，但不是满射的 。

$$g(x)=x-1$$

解： g不是从 A 到B 的函数。

(3) $A=B=Z^{+}$(正整数集)

$$h(x)=\begin{cases}1 & (x=1)\\ x-1 & (x>1)\end{cases}$$

解： h 是从 A 到 B 的函数，

不是单射的，

是满射的。

三、常用的一些函数。

1、**常函数**，$f:A\to B$，$\forall x\in A$都有

$$f(x)=c\ (\ c\in B，c\ 为常数)$$

2、**恒等函数**，$I_A:A\to A$，$\forall x\in A,$

都有$I_A(x)=x$

3、**特征函数**，$\chi_{A'}:A\to\{0,1\}$，$\forall x\in A,$

$$\chi_{A'}(x)=\begin{cases}1 & x\in A'\\ 0 & x\in A-A'\end{cases}$$，其中$A'\subseteq A$。

4.7 函数的复合和反函数

内容：复合函数，反函数。

一般：基本掌握复合函数，

反函数的定义及求法。

一、复合函数

1、**定义：**设函数 $f:B\to C$，$g:A\to B$,

则 $f\circ g:A\to C$，对任意 $x\in A$，

$f\circ g(x)=f\left(g(x)\right)$，称为$f,g$的**复合函数**。

例1、设 $f,g,h\in R^R$，其中

$$f(x)=x+3，g(x)=2x+1，h(x)=\frac{x}{2}，$$

求 $f\circ g$，$g\circ f$，$f\circ f$，$g\circ g$，$h\circ f$，$f\circ h\circ g$。

解： 因为f,g,h均为从R到R的函数，所以所求的复合函数也是从R到R的函数。

例1、设 $f,g,h\in R^R$，其中

$$f(x)=x+3,\ g(x)=2x+1,\ h(x)=\frac{x}{2},$$

求 $f\circ g$，$g\circ f$，$f\circ f$，$g\circ g$，$h\circ f$，$f\circ h\circ g$。

解： $f\circ g(x)=f\left(g(x)\right)=f(2x+1)$

$$=(2x+1)+3=2x+4$$

$$g\circ f(x)=g\left(f(x)\right)=g(x+3)$$

$$=2(x+3)+1=2x+7$$

例1、设 $f,g,h\in R^R$，其中

$$f(x)=x+3，g(x)=2x+1, h(x)=\frac{x}{2},$$

求 $f\circ g, g\circ f, f\circ f, f\circ h\circ g$ 。

解： $f\circ h\circ g(x)=f\Big(h\big(g(x)\big)\Big)=f\big(h(2x+1)\big)$

$$=f\left(\frac{1}{2}(2x+1)\right)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)+3=x+\frac{7}{2}$$

2、性质:　设 $f:B\to C$ ，$g:A\to B$

(1) 若 f,g是满射的，则$f\circ g:A\to C$也是满射的。

证：$\forall z\in C$，由于 f 满射，故 $\exists y\in B$使$f(y)=z$，

对这个 y，又由于 g满射，故$\exists x\in A$使$g(x)=y$，

因此，$f\circ g(x)=f\left(g(x)\right)=f(y)=z$

所以 $f\circ g$是满射。

(2) 若 f,g是单射的，则 $f\circ g:A\to C$也是单射的。

(3) 若 f,g是双射的，则 $f\circ g:A\to C$也是双射的。

二、反函数(逆函数)

引例：关系 $f=\{\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_1\rangle,\langle x_3,y_2\rangle\}$ 是一个函数，

其逆关系 $f^{-1}=\{\langle y_1,x_1\rangle,\langle y_1,x_2\rangle,\langle y_2,x_3\rangle\}$

是关系，但不是一个函数，

定义：设函数 $f:A\to B$ 是双射的，则 $f^{-1}:B\to A$ 也是双射的，称 f^{-1} 是 f 的反函数。

例2、判断以下函数是否存在反函数，若存在，请写出反函数，否则，请说明理由。

(1) $f:R\to R$，$f(x)=x^2-1$

解： f 不存在反函数，

因为 f 不是单射，$f(-1)=f(1)=0$。

(2) $g:R\to R$，$g(x)=3x+1$

解： g 是双射的，

存在反函数 $g^{-1}:R\to R$，$g^{-1}(x)=\frac{1}{3}(x-1)$。

(3) $h: R \to R^{+}$，$h(x) = e^{x}$

解： h 是双射的，

存在反函数 $h^{-1}: R^{+} \to R$，$h^{-1}(x) = \ln x$。

(4) $f: N \to N, f\left(x\right) = \left(x\right) \bmod 3,$ x除以3的余数

解： f 既不是单射也不是满射，因为

$f\left(3\right) = f\left(0\right)=0$，且$\operatorname{ran} f = \left\{0,1,2\right\}.$

故不存在反函数。

例3、说明以下函数是否单射、满射、双射。

若是双射，给出反函数。

(1) $f: R \to R, f(x) = x$

解：是双射，逆函数 $f^{-1} = f$

(2) $f: Z \to E$ (偶数集)，$f(x) = 2x$

解：是双射，逆函数 $f^{-1} = \frac{x}{2}$

(3) $f: Z \to N, f(x) = |x|$

解：满射。但不是双射，不存在逆函数。

例4、设 $f:R\to R, f(x)=\begin{cases} x^2, x\ge 3; \\ -2, x<3. \end{cases}$

$$g:R\to R, g(x)=x+2$$

求$f\circ g(x), g\circ f(x)$,并判断逆关系f^{-1}, g^{-1}是否是反函数。

解：f原来在x=3点分成两段，但 $f\circ g(x)$ 却x=1点分成两段，因为x=1时，$g(x)$=3,恰好在f的分段点上。

$$f\circ g(x)=\begin{cases} (x+2)^2, x\ge 1 \\ -2, \qquad x<1 \end{cases}, \qquad g\circ f(x)=\begin{cases} x^2+2, x\ge 3 \\ 0, \qquad x<3 \end{cases}$$

f不是单射，更不是双射，故f^{-1}不是反函数；

g是双射，故g^{-1}是反函数。

例5、设 $f: A \to B$，$g: B \to C$是两个函数，

证明：

(1) 若$g \circ f$是满射，则g是满射，

证明： 对任意$c \in C$，由$g \circ f$是满射，

所以存在$a \in A$，使得$g \circ f(a) = c$，

即$g\left(f(a)\right) = c$，

所以存在$b = f(a) \in B$，使得 $g(b) = c$，

由于c的任意性，所以g是满射。

例5、设 $f: A \to B$，$g: B \to C$是两个函数，

证明：

(2) 若$g \circ f$是单射，则 f 是单射，

证明：对任意$a_1, a_2 \in A \quad (a_1 \neq a_2)$，

由于$g \circ f$ 是单射，所以$g \circ f(a_1) \neq g \circ f(a_2)$,

即 $g\left(f(a_1)\right) \neq g\left(f(a_2)\right)$，

因g 是函数，所以 $f(a_1) \neq f(a_2)$,

所以 f 是单射。

例5、设 $f:A\to B$，$g:B\to C$是两个函数，

证明：

(3) 若$g\circ f$是双射，则f是单射，g是满射。

证明： 若 $g\circ f$是双射，即$g\circ f$是单射和满射。

由于$g\circ f$ 是满射，则由(1)知，g是满射；

由于$g\circ f$是单射，则由(2)知，f是单射。

一、填空题

1、设集合 A,B，其中 A＝{1,2,3}, B= {1,2}, 则 A - B＝__________;　ρ(A) - ρ(B)＝ __。

2. 设有限集合 A, |A| = n, 则 |ρ(A×A)| = ____________________.

3、设集合 A＝{1, 2, 3, 4}，A 上的二元关系 R＝{(1,1),(1,2),(2,3)}, S＝{(1,3),(2,3),(3,2)}。则 $R\cdot S$＝____________________________, R^2＝____________________.

4、设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则 R 所具有的关系的三个特性是____________.。

5、设集合 A＝{2, 3, 4, 5, 6}，R 是 A 上的整除，则 R 以集合形式(列举法)记为_____________。

6、P，Q 真值为 0 ；R，S 真值为 1。则 $(P\wedge(R\vee S))\to((P\vee Q)\wedge(R\wedge S))$ 的真值为 ____________________________ 。

二、求下列公式的主析取范式或主合取范式

1、$G = \neg(P\rightarrow Q)\vee(Q\wedge(\neg P\rightarrow R))$，求 G 的主析取范式

$G = \neg(P\rightarrow Q)\vee(Q\wedge(\neg P\rightarrow R))$

$= \neg(\neg P\vee Q)\vee(Q\wedge(P\vee R))$

$= (P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge(P\vee R))$

$= (P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge P)\vee(Q\wedge R)$

$= (P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

$= (P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

$= m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_6\vee m_7 = \Sigma(3, 4, 5, 6, 7).$

2、$P\rightarrow Q$

三、证明下列命题公式

1、$\{P\rightarrow Q, R\rightarrow S, P\vee R\}$蕴涵 $Q\vee S$。

(1) $P\vee R$	P
(2) $\neg R\rightarrow P$	T，1，E
(3) $P\rightarrow Q$	P
(4) $\neg R\rightarrow Q$	T，2,3，前提三段论
(5) $\neg Q\rightarrow R$	T，4，E
(6) $R\rightarrow S$	P
(7) $\neg Q\rightarrow S$	T，5,6，前提三段论
(8) $Q\vee S$	T,7,E

2、{$\neg A \vee B$, $\neg C \to \neg B$, $C \to D$}蕴涵 $A \to D$。

(1) A P(附加前提)

(2) $\neg A \vee B$ P

(3) B T，1,2，析取三段论

(4) $\neg C \to \neg B$ P

(5) $B \to C$ T,4,E

(6) C T,3,5,假言推理

(7) $C \to D$ P

(8) D T，6,7，假言推理

(9) $A \to D$ CP 规则

所以 {$\neg A \vee B$, $\neg C \to \neg B$, $C \to D$}蕴涵 $A \to D$.

3、$\forall x(P(x)\vee Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x)\vee \exists xQ(x)$

$\because \forall xP(x)\vee \exists xQ(x) \Leftrightarrow \neg(\forall x)P(x) \to \exists xQ(x)$

本题可证 $\forall x(P(x)\vee Q(x)) \Rightarrow \neg(\forall xP(x) \to \exists xQ(x)$

① $\neg(\forall xP(x))$	P（附加前提）
② $\exists x(\neg P(x))$	T，①，E
③ $\neg P(a)$	T，②，ES
④ $\forall x(P(x)\vee Q(x))$	P
⑤ $P(a)\vee Q(a)$	T，④，US
⑥ $Q(a)$	T，③，⑤，假言推理
⑦ $\exists xQ(x)$	T,⑥，EG
⑧ $\neg(\forall xP(x) \to \exists xQ(x)$	CP 规则

四、设 R 是集合 A = {a, b, c, d}. R 是 A 上的二元关系, R = {(a,b), (b,a), (b,c), (c,d)},

(1) 求出 r(R), s(R), t(R);

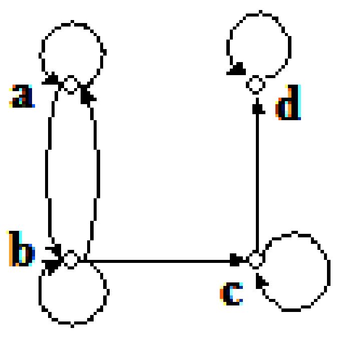
(2) 画出 r(R), s(R), t(R)的关系图.

$r(R)=R\cup I_A=\{(a,b), (b,a), (b,c), (c,d), (a,a), (b,b), (c,c), (d,d)\}$,

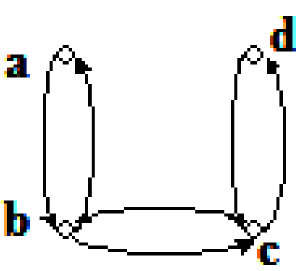
$s(R)=R\cup R^{-1}=\{(a,b), (b,a), (b,c), (c,b)\ (c,d), (d,c)\}$,

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4=\{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (c,d)\}$;

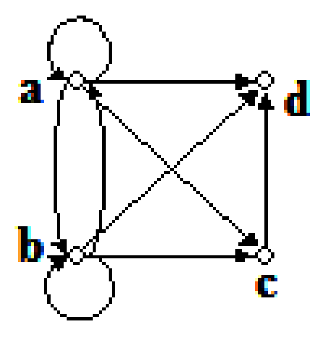
(2)关系图:



r(R)



s(R)



t(R)

五、设 R 和 S 是集合 $A=\{a, b, c, d\}$ 上的关系，其中 $R=\{(a, a),(a, c),(b, c),(c, d)\}$,

$S=\{(a, b),(b, c),(b, d),(d, d)\}$.

(1) 试写出 R 和 S 的关系矩阵；

(2) 计算 $R\cdot S, R\cup S$ **（每题 6 分，共 6 分）**

(1)$M_R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $M_S=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

(2)$R\cdot S=\{(a, b),(c, d)\}$,

$R\cup S=\{(a, a),(a, b),(a, c),(b, c),(b, d),(c, d),(d, d)\}$.

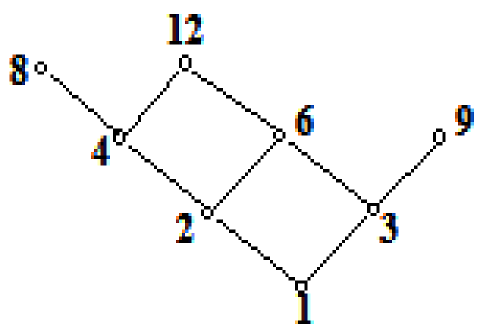
六、设集合 A＝{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12}，R 为整除关系。

(1) 画出半序集(A,R)的哈斯图；

(2) 写出 A 的子集 B = {3,6,9,12}的上界，下界，最小上界，最大下界；

（每题 12 分，共 12 分）

(1)



（2) B 无上界，也无最小上界。下界 1, 3; 最大下界是 3.

七、 设 X={1, 2, 3, 4, 5}，X 上的关系 R={<1, 1>，<1，2>，<2，3>，<3，5>，<4，2>}，求 R 所诱导的等价关系，划分等价类并求秩（每题 6 分，共 6 分）

解：

$tsr(\mathbf{R}) = \{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<5,5>,<1,2>,<2,1>,<2,3>,$
$<3,2>,<3,5>,<5,3>,<4,2>,<2,4>,<1,3>,<3,1>,<1,4>,<4,1>,$
$<2,5>,<5,2>,<5,1>,<1,5>,<4,5>,<5,4>,<3,4>,<4,3>\}$

划分的等价类：$[1] = \{1,2,4,3,5\}$

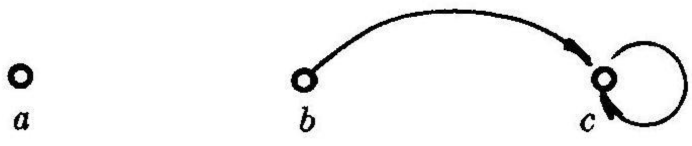
秩为 1

定理: 设R是A上的二元关系,设$R'=tsr(R)$是R的自反对称传递闭包,那么

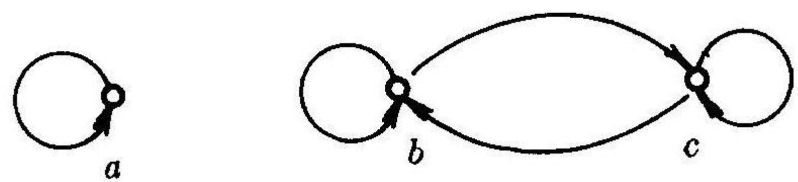
(a)R'是A上的等价关系,叫做R诱导的等价关系

(b)如果R''是一等价关系且$R''\supseteq R$,那么$R''\supseteq R'$.就是说,R'是包含R的最小等价关系.

例： 设$A=\{a,b,c\}$且A上的二元关系R如图a所示,则$tsr(R)$如图b所示.



图a



图b

八、 设 A={1，2，3，4}，S={{1，3}，{2，4}}，$T=\{\{1,2,3\},\{4\}\}$ 均为 A 的划分，求

1）由 S 导出的等价关系。

2）求 $S+T$,$S\cdot T$ （每题 8 分，共 8 分）

解：设划分 S 诱导的等价关系为 R_1，划分 T 诱导的等价关系为 R_2.，

$$R_1=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<1,3>,<3,1>,<2,4>,<4,2>\}$$

$$R_2=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<1,2>,<2,1>,<1,3>,<3,1>,<2,3>,<3,2>\}$$

$$t(R_1\cup R_2)=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<1,2>,<2,1>,$$
$$<1,3>,<3,1>,<2,3>,<3,2><2,4>,<4,2>,<1,4>,<4,1>,$$
$$<2,4>,<4,2>,<3,4>,<4,3>\}$$

$$R_1\cap R_2=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<1,3>,<3,1>\}$$

所以，

$$S+T=\{\{1,2,3,4\}\}$$

$$S\cdot T=\{[1,3\},\{2\},\{4\}\}$$

注：1.如果划分是有限集合，则，不同块的个数称为划分的秩。若划分是无限集合，则它的秩是无限的。

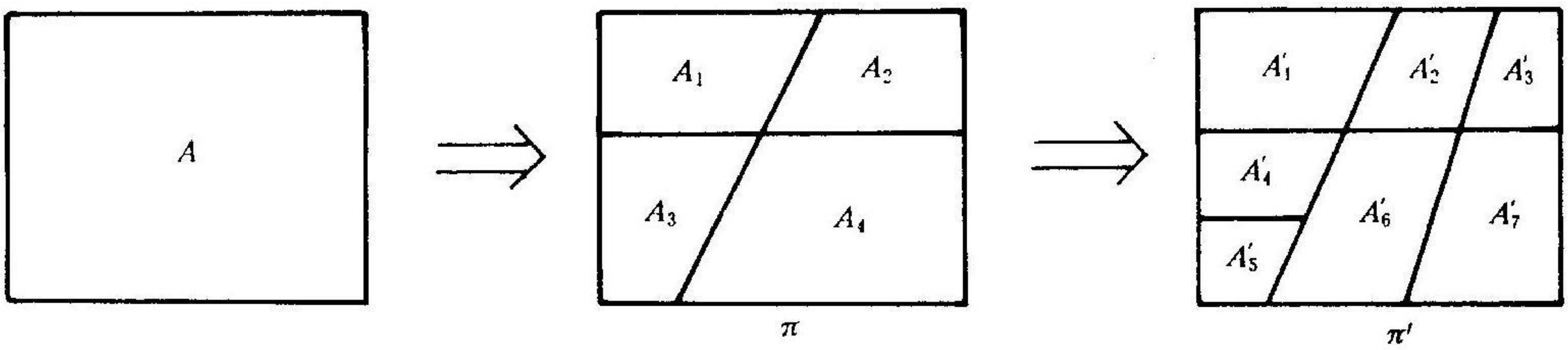
2.划分的秩就是划分的大小。

设$A=\{a,b,c\}$,
划分$\pi=\{\{a,b\},\{c\}\}$的秩是2,
划分$\pi'=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$的秩是3，划分$\pi'$更大。

定义1： 设π和π'是非空集合A上的划分，如果π'的每一块都包含在π的一块中，那么就说π'细分π。

例： (a)设$A=\{a,b,c\},\pi=\{\{a,b\},\{c\}\}$, $\pi'=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$,则$\pi'$细分$\pi$

(b) 把一张纸A撕碎得A的划分π,再撕碎,就是将π细分,所得之π'仍是A的划分.



划分的积：

定义2： 非空集合A的划分 π_1与π_2的积$\pi_1 \cdot \pi_2$也是A的划分，它使：

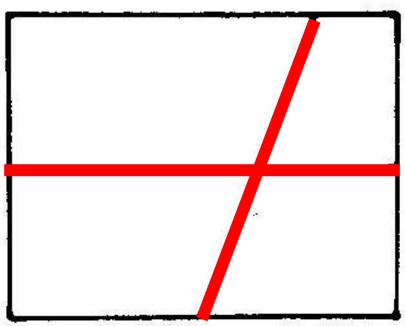
（1）$\pi_1 \cdot \pi_2$既细分π_1又细分π_2，

（2）如果π'细分π_1和π_2，那么π'细分$\pi_1 \cdot \pi_2$。

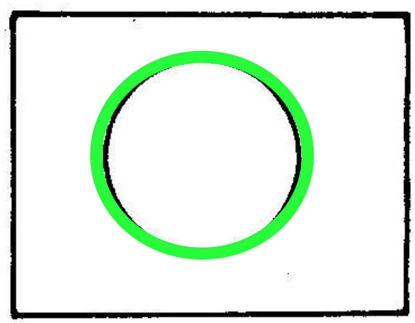
也就是说，$\pi_1 \cdot \pi_2$是细分π_1和π_2的最小划分。

定理1： 设R_1和R_2是π_1和π_2诱导的等价关系，那么R=$R_1 \cap R_2$诱导出$\pi_1 \cdot \pi_2$。

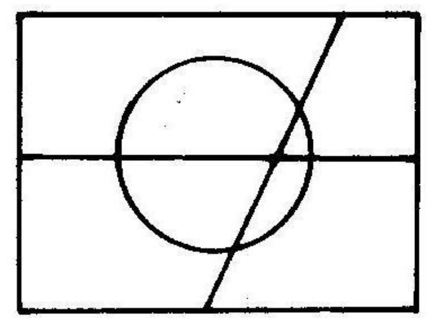
假定一张纸画上红线和绿线,按红线剪开得划分π_1,按绿线剪开得划分π_2,那么按红线和绿线剪开产生积划分$\pi_1\ \pi_2$



π_1



π_2



$\pi_1 \cdot \pi_2$

划分的和：

定义3： 是非空集合A的划分π_1与π_2的和$\pi_1+\pi_2$也是A的划分，它使：

（1）π_1和π_2细分$\pi_1+\pi_2$，

（2）如果π_1和π_2细分π'，那么$\pi_1+\pi_2$细分π'。

也就是说，$\pi_1+\pi_2$是π_1和π_2所细分的最大划分。

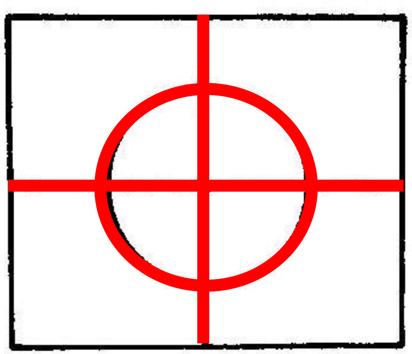
定理2： 设R_1和R_2是π_1和π_2诱导的等价关系，

那么$R=\mathrm{t}(R_1 \cup R_2)$诱导出$\pi_1+\pi_2$。

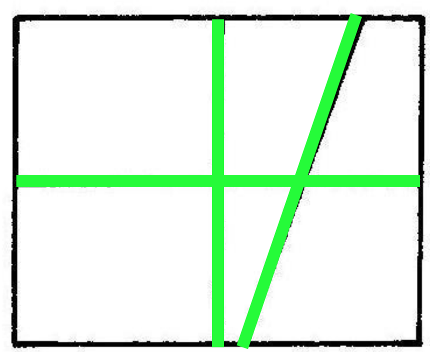
事实上，

$$R=\mathrm{t}(R_1 \cup R_2)=\mathrm{tsr}(R_1 \cup R_2)$$

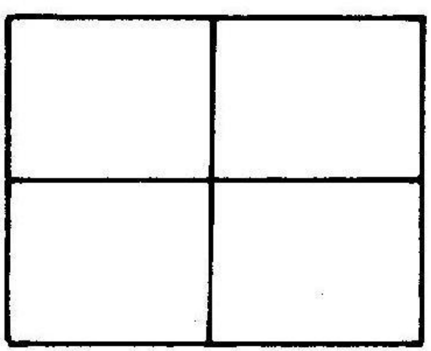
假定一张纸上的红线表示划分π_1,绿线表示划分π_2,那么,按既是红线又是绿线的线剪开就产生和划分$\pi_1+\pi_2$



π_1



π_2



$\pi_1+\pi_2$