集合论简介

集合论是研究集合一般性质的数学分支，它的创始人是康托尔（$G, Cantor$，1845－1918）。在现代数学中，每个对象（如数，函数等）本质上都是集合，都可以用某种集合来定义，数学的各个分支，本质上都是在研究某一种对象集合的性质。集合论的特点是研究对象的广泛性，它也是计算机科学与工程的基础理论和表达工具，而且在程序设计，数据结构，形式语言，关系数据库，操作系统等都有重要应用。

第三章 集合的基本概念和运算

2.1 集合的基本概念

内容： 集合，元素，子集，幂集等。

重点： (1) 掌握集合的概念及两种表示法，

(2) 常见的集合 N, Z, Q, R, C

和特殊集合 ϕ, E,

(3) 掌握子集及两集合相等的概念，

(4) 掌握幂集的概念及求法。

一、集合的概念。

1、**集合**——一些确定的对象的整体。

集合用大写的字母标记

其中的对象称元素，用小写字母标记

$$A=\{a_1, a_2, \cdots a_n\}$$

表示集合 A 含有元素 $a_1, a_2, \cdots a_n$

注意： (1) $a \in A$ 或 $a \notin A$

(2) 集合中的元素均不相同

$\{a,b,c\},\{a,b,b,c\},\{c,a,b\}$

表示同一个集合。

(3) 集合的元素可以是任何类型的事物，

一个集合也可以作为另一个集合的元素。

例如：$A=\left\{a,\{b,c\},b,\{b\}\right\}$

2、集合的表示法。

(1) 列举法(将元素一一列出)

例如：$A = \{2, 3, 4, 5\}$

(2) 描述法(用谓词概括元素的属性)

例如：$B = \{x \mid x \in Z \wedge 2 \le x \le 5\}$

一般，用描述法表示集合 $A = \left\{x \mid P(x)\right\}$

3、常见的一些集合。

N, Z, Q, R, C

4、集合间的关系。

(1) B为A 的子集，记 $B \subseteq A$

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$$

$$B \not\subseteq A \Leftrightarrow \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$$

B为A的真子集，记$B \subset A$

$$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge B \neq A$$

$$B \not\subset A \Leftrightarrow B \not\subseteq A \vee B = A$$

4、集合间的关系。

(2) 对任意集合 A 有 $A \subseteq A$

(3) 两集合 A, B 相等，记作 $A = B$

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

5、特殊的集合。

空集 $\boldsymbol{\phi}$

全集 $\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{U}$)

$\phi \subseteq A \subseteq E$(A 为任一集合)

例1、选择适当的谓词表示下列集合。

(1) 小于5的非负整数集

解：$\{x \mid x \in N \wedge x < 5\}$

(2) 奇整数集合

解：$\{x \mid x = 2n + 1 \wedge n \in Z\}$

例1、选择适当的谓词表示下列集合。

(3) 10的整倍数集合，

解：$\{x \mid x = 10n \wedge n \in Z\}$

(4) $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

解：$\{x \mid x\text{是素数} \wedge 2 < x < 20\}$

例2、用列举法表示下列集合。

(1) $S_3 = \{x \mid x \in Z \wedge 5 < x \leq 10\}$

解： $S_3 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$

(2) $S_4 = \left\{\left\langle x, y\right\rangle \mid x = 0 \wedge (y = 1 \vee y = 2)\right\}$

解： $S_4 = \left\{\left\langle 0,1\right\rangle, \left\langle 0,2\right\rangle\right\}$

例3、确定下面命题的真值：

(1) $\phi \subseteq \phi$ 真值T

(2) $\phi \in \phi$ 真值F

(3) $\phi \subseteq \{\phi\}$ 真值T

(4) $\phi \in \{\phi\}$ 真值T

例3、确定下面命题的真值：

(5) $\{a,b\} \subseteq \left\{a,b,c,\{a,b,c\}\right\}$ 真值T

(6) $\{a,b\} \in \left\{a,b,c,\{a,b,c\}\right\}$ 真值F

(7) $\{a,b\} \subseteq \left\{a,b,\left\{\{a,b\}\right\}\right\}$ 真值T

(8) $\{a,b\} \in \left\{a,b,\left\{\{a,b\}\right\}\right\}$ 真值F

2.2 集合上的运算

内容：集合的运算，环和（对称差），幂集，运算律。

重点：(1) 掌握集合的运算

$$A\bigcup B, A\bigcap B, A-B, \overline{A}, A\oplus B$$

$$\rho(A)$$

(2) 掌握基本运算律的内容及运用。

一、集合的运算。

集合A, B的并集$A \bigcup B$，交集$A \bigcap B$，相对补集$A - B$，绝对补集 $\overline{A}$ ，对称差$A \oplus B$。

$$A \bigcup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \bigcap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

(当 $A \bigcap B = \phi$ 时，称 A, B 不交)

以上定义加以推广，

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

$$= \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

$$= \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$\overline{A} = E - A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\}$$ (其中E为全集)，

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

例1、设 $E=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,4\}$，

$B=\{1,2,5\}$，$C=\{2,4\}$，求出以下集合。

(1) $A\cap B$ $\{1\}$

(2) $B-C$ $\{1,5\}$

(3) $\overline{A}$ $\{2,3,5\}$

(4) $B\cup\overline{A}$ $\{1,2,3,5\}$

例1、设 $E=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,4\}$，

$B=\{1,2,5\}$，$C=\{2,4\}$，求出以下集合。

(5) $A\oplus B$ $\{2,4,5\}$

(6) $\overline{(A\cup B)}$ $\{3\}$

(7) $(A\cap B)\cup\overline{C}$ $\{1,3,5\}$

(8) $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ $\{1,4\}$

二、幂集。

定义1：n 元集(n个元素的集合)的 m 元$(m \le n)$子集。

例如：$A = \{a, b, c\}$为3元集，求它的全部子集。

0元子集： ϕ(只有一个)，

1元子集：$\{a\}, \{b\}, \{c\}$(共$C_3^1 = 3$个)，

2元子集：$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$(共 $C_3^2 = 3$个)，

3元子集：$\{a, b, c\}$(共$C_3^3 = 1$个)。

一般，n 元集共有子集 $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$ 个。

定义2：集合 A 的幂集,记 $\rho(\boldsymbol{A})$,是 A的全体子集的集合

例5、$A=\{a,b,c\}$，求 $\rho(A)$。

解： $\rho(A)=\{\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},$

$\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

若A有 n个元素，则 $\rho(A)$有 2^n 个元素。

例6、求以下集合的幂集。

(1) $A = \phi$

解： $\rho(A) = \{\phi\}$

(2) $A = \{\phi\}$

解： $\rho(A) = \{\phi, A\}$

(3) $A = \{\phi, \{\phi\}\}$

解： $\rho(A) = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, A\}$

(4) $A = \{1, \{2, 3\}\}$

解： $\rho(A) = \{\phi, \{1\}, \{\{2, 3\}\}, A\}$

(5) $A = \{\{\phi, 2\}, \{2\}\}$

解： $\rho(A) = \{\phi, \{\{\phi, 2\}\}, \{\{2\}\}, A\}$

三、集合运算律。

1、幂等律：$A\bigcup A=A$，$A\bigcap A=A$

2、结合律：$(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$，

$$(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$$

3、交换律：$A\bigcup B=B\bigcup A$，$A\bigcap B=B\bigcap A$

4、分配律：$A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$，

$$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$$

三、集合运算律。

5、同一律：$A\bigcup\phi=A$，$A\bigcap E=A$

6、零律：$A\bigcup E=E$，$A\bigcap\phi=\phi$

7、互否律：$A\bigcup\overline{A}=E$ (排中律)，

$A\bigcap\overline{A}=\phi$ (矛盾律)

8、吸收律：$A\bigcup(A\bigcap B)=A$，

$A\bigcap(A\bigcup B)=A$

三、集合运算律。

9、德•摩根律：

$$A-(B\bigcup C)=(A-B)\bigcap(A-C)$$

$$A-(B\bigcap C)=(A-B)\bigcup(A-C)$$

$$\overline{(B\bigcup C)}=\overline{B}\bigcap\overline{C} \qquad \overline{(B\bigcap C)}=\overline{B}\bigcup\overline{C}$$

$$\overline{\phi}=E \qquad \overline{E}=\phi$$

10、双重否定律： $\overline{\overline{A}}=A$

以上恒等式的证明思路：

欲证$P=Q$，即证对任意x，$x\in P\Leftrightarrow x\in Q$。

例4、证明分配律 $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$。

证明：对任意 x，$x\in A\bigcup(B\bigcap C)$

$$\Leftrightarrow (x\in A)\vee\left(x\in(B\bigcap C)\right)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A)\vee\left(x\in B\wedge x\in C\right)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A\bigcup B)\wedge(x\in A\bigcup C)$$

$$\Leftrightarrow x\in(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$$

故 $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$

除基本运算外，还有以下一些常用性质 (证明略)

11、$A \cap B \subseteq A$，$A \cap B \subseteq B$

12、$A \subseteq A \cup B$，$B \subseteq A \cup B$

13、$A - B \subseteq A$

14、 $A - B = A \cap \overline{B}$

15、$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$

$$\Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \phi$$

此式给出了A是B的子集的3种等价定义。不仅提供了证明子集的新方法，也可以用于集合公式的化简。

除基本运算外，还有以下一些常用性质 (证明略)

16、$A \oplus B = B \oplus A$ “$\oplus$”的交换律

17、$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ “$\oplus$”的结合律

18、$A \oplus \phi = A$

19、$A \oplus A = \phi$

20、$A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B = C$

例5、证明： $A-B=A\cap\overline{B}$ (第14条)

证明：对任意 x，

$$x\in A-B$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\overline{B}$$

$$\Leftrightarrow x\in A\cap\overline{B}$$

故 $A-B=A\cap\overline{B}$

例6、证明 $A\cup(B-A)=A\cup B$ 。

证明： $A\cup(B-A)=A\cup(B\cap\overline{A})$

$$=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{A})$$

$$=(A\cup B)\cap E$$

$$=A\cup B$$

例7、化简$\left((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B)\right)$

$$-\left(\left(A\cup(B-C)\right)\cap A\right)$$

解：因为 $A\cup B\subseteq A\cup B\cup C$，

所以 $(A\cup B\cup C)\cap(A\cup B)=A\cup B$，

又因为 $A\subseteq A\cup(B-C)$

所以$\left(A\cup(B-C)\right)\cap A=A$，

所以原式化简为$(A\cup B)-A$

例7、化简 $\left((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B)\right)$

$$-\left(\left(A\cup(B-C)\right)\cap A\right)$$

解：又 $(A\cup B)-A$

$$=(A\cup B)\cap\overline{A}$$

$$=(A\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{A})$$

$$=\phi\cup(B-A)$$

$$=B-A$$

最后，原式化简为$B-A$。

例8、设 A,B,C 均为 E 的子集，以下命题中为真，为假的各有哪些？

（1）$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

（2）$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = A$

（3）$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

（4）$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = B$

（5）$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup (B - A) = B$

（6）$B \subseteq A \Leftrightarrow (A - B) \cap B = A$

解：为真的命题有(1)、(3)、(5)，

为假的命题有(2)、(4)、(6)。