第一章 概率论的基本概念

1、掌握事件的关系及运算（6 种关系 4 个运算律）：会利用事件的关系表示事件，会利用事件的运算律变换事件并计算事件的概率。

6 种关系：包含 $A \subset B$、和（并）$A \cup B$、积（交）$A \cap B$、差 $A - B = A - AB = A \cap \overline{B}$、

互不相容（互斥）$AB = \Phi$、对立（互斥）$AB = \Phi$ 且 $A \cup B = S$。

4 个运算律：（1）交换律、（2）结合律、（3）分配率、（4）对偶律（德摩根律）

2、掌握概率的性质（3 条基本性质 6 条一般性质）：会利用概率的性质计算事件的概率。

3 条基本性质：（1）非负性：$P(A) \geq 0$；

（2）规范性：$P(S) = 1$；

（3）可列可加性：$A_1, A_2, \cdots, A_n \cdots$ 两两互斥，则 $P(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$

6 条一般性质：（1）不可能事件的概率：$P(\Phi) = 0$

（2）互斥事件和事件的概率（可列可加性）：$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，则 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

（3）任意事件的概率：$P(A) \leq 1$

（4）逆事件的概率：$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

（5）差事件的概率（减法公式）：$A \subset B$, 则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$

$A \not\subset B$, 则 $P(B - A) = P(B) - P(AB)$

（6）和事件的概率（加法公式）：$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \cdots + (-1)^n P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

3、掌握古典概型及相应的计算公式：会利用公式计算古典概型中事件的概率。

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A\text{的样本点数}}{S\text{的样本点数}}$$

4、掌握乘法公式：会利用乘法公式计算交事件的概率。

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2 \mid A_1) P(A_3 \mid A_1 A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

5、掌握全概率公式以及贝叶斯公式：会利用两个公式解决已知原因求结果（全概率公式）和已知结果求原因（贝叶斯公式）的问题，注意划分的构造。

全概率公式：$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间的一个划分，且 $P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，$A$ 为 S 的任意事件，

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A \mid B_i)$$

贝叶斯公式：$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间的一个划分，且 $P(B_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，$A$ 为 S 的任意事件，$P(A) > 0$ 则

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i) P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j) P(A \mid B_j)}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

6、掌握用事件独立性及相关性质：会利用独立性进行概率计算.

A, B 独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow \begin{cases} P(A \mid B) = P(A), P(B) > 0 \\ P(B \mid A) = P(B), P(A) > 0 \end{cases}$

A, B 独立 $\Rightarrow A$ 和 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 和 B, $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 分别独立。（多个事件同样成立）

第二章 一维随机变量及其分布

1、掌握离散型随机变量分布律的定义及性质：会计算分布律，会利用分布律的性质判断一个函数是否为分布律或求分布律中的未知参数。

性质：（1）$P\{X=x_k\}\geq 0$；（2）$\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=x_k\}=1$

2、掌握（0-1）分布（也称两点分布）、二项分布、泊松分布：各分布的表示符号及分布律的表达式。

（0-1）分布 $b(1,p)$：$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},k=0,1$

二项分布 $b(n,p)$：$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,\cdots,n$

泊松分布 $\pi(\lambda)$：$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},k=0,1,\cdots$（$\lambda>0$）

3、掌握分布函数的概念及性质：会计算随机变量的分布函数，会利用性质判断一个函数是否为随机变量的分布函数，会利用分布函数计算变量落在某区间的概率。

定义：$F(x)=P\{X\leq x\},-\infty<x<+\infty$

性质：（1）单调不减；（2）$0\leq F(x)\leq 1,F(-\infty)=0,F(+\infty)=1$；（3）右连续

应用：$P\{a<X\leq b\}=F(b)-F(a)$（离散型注意端点处）

4、掌握连续型随机变量概率密度的性质：会利用两条最基本性质判断一个函数是否为随机变量的概率密度，利用性质计算概率密度中的未知参数，求变量落在某区间的概率，已知概率密度求分布函数或已知分布函数求概率密度。

性质：（1）$f(x)\geq 0$；（2）$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$；（两条最基本性质）

（3）$P\{a<X\leq b\}=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$；（4）$F'(x)=f(x),F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$；

（5）$P\{X=a\}=0,_{(a\text{是常数})}$，$P\{a<X<b\}=P\{a<X\leq b\}=P\{a\leq X<b\}=P\{a\leq X\leq b\}$

（6）$F(x)$ 在整个实数域上连续。

5、掌握均匀分布、指数分布、正态分布：各分布的表示符号和概率密度的表达式, 会查表求标准正态分布上α分位点并解决正态分布的相关计算问题。

均匀分布 $U(a,b)$：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a},x\in(a,b)\\0,else\end{cases}$

指数分布 $E(\theta),\theta>0$ 或 $E(\lambda),(\lambda=\dfrac{1}{\theta}>0)$：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta},x>0\\0,else\end{cases}$ 或 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x},x>0\\0,else\end{cases}$

正态分布 $N(\mu,\sigma^2),\sigma>0$：$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<\infty$，

（$f(x)$ 关于 $x=\mu$ 对称，$P\{X<\mu\}=P\{X\geq\mu\}=0.5$）

标准正态分布 $N(0,1)$：$\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<\infty$，分布函数记为 $\Phi(x)$

（$\varphi(x)$ 关于 $x=0$ 对称，$\Phi(0)=P\{X<0\}=P\{X\geq 0\}=0.5$）

计算：$X\sim N(\mu,\sigma^2),F(x)=P\{X\leq x\}=\Phi(\dfrac{x-\mu}{\sigma})$，

$$P\{a<X\leq b\}=F(b)-F(a)=\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

分位点：$\Phi(z_\alpha)=1-\alpha\Rightarrow z_\alpha$，$z_{1-\alpha}=-z_\alpha$

6、掌握随机变量函数的分布的求法：会求离散型随机变量函数的分布律和连续型随机变量函数的概率密度。

离散型：定义法

连续型：分布函数法（适应于所有函数）和公式法（只适应于单调函数）

分布函数法：$Y=g(X),则F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\},f_Y(y)=F'_Y(y)$

公式法：$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]\cdot|h'(y)|,\alpha<y<\beta\\0,else\end{cases}$，其中 $h(y)$ 是 $y=g(x)$ 的反函数，α,β 分别是 $g(x)$ 的最小值和最大值。

第三章 多维随机变量及其分布

1、掌握二维离散型随机变量的分布律的定义和性质：会求二维离散型随机变量的分布律，会利用性质计算分布律中的未知参数。

性质：（1）$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_i\}\ge 0$；（2）$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$

2、掌握二维连续型随机变量的概率密度的性质：会利用性质计算概率密度中的未知参数，计算二维随机变量落在平面上某区域内的概率，由分布函数计算概率密度或由概率密度计算分布函数；

性质：（1）$f(x,y)\ge 0$；（2）$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$；（两条最基本的性质）

（3）$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_{(x,y)\in G}f(x,y)dxdy$；（4）$\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$；

3、掌握二维随机变量的边缘分布：会计算离散型下边缘分布律和连续型下边缘概率密度.

离散型：$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},i=1,2,\cdots;P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij},j=1,2,\cdots.$

连续型：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y,\ f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x.$

4、掌握二维随机变量的条件分布：会计算条件分布律和条件概率密度（注意公式的应用条件：保证分母大于 0）。

离散型：$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},P\{Y=y_j|X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}},$

连续型：$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$；$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$

5、掌握随机变量的独立性判别方法：会判断离散型和连续型随机变量的独立性。

离散型：X,Y 独立 $\Leftrightarrow$ 联合分布律等于边缘分布律的乘积

连续型：X,Y 独立 $\Leftrightarrow$ 联合概率密度等于边缘概率密度的乘积

6．掌握两个随机变量的函数的分布求法：会由两个离散型随机变量的联合分布律求其函数的分布律,**了解**根据两个连续型随机变量的联合概率密度求其函数的概率密度.

离散型：定义法

连续型：（1）一般函数 $Z=g(X,Y)$，$F_Z(z)=P\{g(X,Y)\le z\}=\iint_{g(x,y)\le z}f(x,y)dxdy,\quad f_Z(z)=F'_Z(z)$

（2）$Z=X+Y$，一般情况：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy$

X, Y 独立：卷积公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\cdot f_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)\cdot f_Y(y)dy$

（3）最大值函数 $M=\max(X,Y)$ 和最小值函数 $N=\min(X,Y)$

最大值函数，一般情况：$F_M(z)=P\{M\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}=F(z,z),f_M(z)=F'_M(z)$

X, Y 独立：$F_M(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)$，$f_M(z)=F'_M(z)$

最小值函数，一般情况：$F_N(z)=P\{N\le z\}=1-P\{N\ge z\}=1-P\{X\ge z,Y\ge z\}, f_N(z)=F'_N(z)$

X, Y 独立：$F_N(z)=1-[1-F_X(z)]\cdot[1-F_Y(z)]$，$f_N(z)=F'_N(z)$

第四章 随机变量的数字特征

1、掌握随机变量数字特征（数学期望、方差、标准差、协方差、相关系数）的定义和性质：会利用定义和性质计算随机变量或其函数的数字特征。

数学期望的定义： $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k$. $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x)\,\mathrm{d}x.$

函数的数学期望： $E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$， $E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i,y_j)\cdot p_{ij}，\quad E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)\cdot f(x,y)dxdy$$

数学期望的性质：

1. 设C是常数，则$E(C)=C$;
2. 若k是常数，则$E(kX)=kE(X)$;
3. $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$;

推广：$E[\sum_{i=1}^{n}X_i]=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$

4. 设X、Y相互独立，则$E(XY)=E(X)E(Y)$;

推广：$E[\prod_{i=1}^{n}X_i]=\prod_{i=1}^{n}E(X_i)$ （诸X_i相互独立时）

2、掌握随机变量的方差的定义和性质：会利用定义和性质计算随机变量或其函数的方差。

方差的定义： $D(X)=\mathrm{Var}(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$,称 $\sqrt{D(X)}$ 为标准差或均方差，记为 $\sigma(X)$.

$$D(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}[x_k-E(X)]^2p_k,\quad D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2f(x)\,\mathrm{d}x,$$

常用公式： $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$

方差的性质：

(1) 设 C 是常数,则有 $D(C)=0$.

(2) 设 X 是一个随机变量, C 是常数,则有 $D(CX)=C^2D(X)$.

(3) 设 X 与 Y 是两个随机变量，则 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E\{[X-(X)][Y-E(Y)]\}$

X,Y 相互独立,则 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$.

推广 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,则有 $D(X_1\pm X_2\pm\cdots\pm X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\cdots D(X_n)$

(4) $D(X+a)=D(X)$

3、掌握常用分布的期望和方差：六种常见分布的数学期望和方差。

分 布	参数	数学期望	方差
两点分布	$0<p<1$	p	$p(1-p)$
二项分布	$n\ge1$, $0<p<1$	np	$np(1-p)$
泊松分布	$\lambda>0$	λ	λ
均匀分布	$a<b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
指数分布	$\theta>0$	θ	θ^2
正态分布	$\mu,\sigma>0$	μ	σ^2

4、掌握随机变量协方差和相关系数的定义和性质：会利用定义和性质计算随机变量或其函数的协方差和相关系数，会利用相关系数判断两个变量的相关性。

协方差的定义： $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E(XY)-E(X)E(Y)$

协方差的性质: (1) $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$;　　(2) $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$，$a,b$ 为常数；

(3) $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$;　　(4) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$.

(5) $\mathrm{Cov}(X,a)=0$；　　(6) $\mathrm{Cov}(X,X)=D(X)$

相关系数的定义：$\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$

相关性的判断：X,Y 不相关 $\Leftrightarrow \rho_{XY}=0 \Leftrightarrow Cov(X,Y)=0 \Leftrightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$

相关与独立：独立必然不相关，但是不相关未必独立。但是对于二维正态分布，独立与不相关等价。

5、掌握随机变量的矩：原点矩和中心矩。

X 的 k **阶原点矩**,简称 k **阶矩**：$E(X^k),\quad k=1,2,\cdots$

X 的 k **阶中心矩**：$E\{[X-E(X)]^k\},\quad k=2,3,\cdots$

X 和 Y 的 $k+l$ **阶混合矩**：$E(X^kY^l),\quad k,l=1,2,\cdots$

X 和 Y 的 $k+l$ **阶混合中心矩**：$E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\},\ k,l=1,2,\cdots$

第五章 大数定律及中心极限定理

1、掌握切比雪夫不等式：会利用不等式估计变量落在某范围的概率。

$P\{|X-\mu|\ge\varepsilon\}\le\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\Leftrightarrow P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\ge 1-\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$. 其中 σ^2 为变量 X 的方差。

2、**了解三个大数定律和两个中心极限定理。**

三个大数定律：切比雪夫大数定律、伯努利大数定律、辛钦大数定律

两个中心极限定理：独立同分布中心极限定理、德莫佛－拉普拉斯定理

第六章 样本及抽样分布

1、**掌握简单随机样本独立同分布的特点**：会求样本的联合分布。

联合分布律：$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)$.

联合概率密度：$f^*(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$.

2、**掌握统计量的定义及常见统计量**：样本均值、样本方差、样本标准差、及 k 阶样本原点矩和中心矩。

样本均值：$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$；　　**样本方差**：$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)$.

样本标准差：$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}$；　**样本的 K 阶（原点）矩**：$A_k=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k,\ k=1,2,\cdots$;

样本的 k 阶（中心）矩：$B_k=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k,\ k=2,3,\cdots$;

3、掌握 χ^2 分布、t 分布和 F 分布：掌握三种变量的典型模式，会查表计算三种分布的上侧 α 分位点.

χ^2 分布：（1）变量：$X = {X_1}^2 + {X_2}^2 + \cdots + {X_n}^2 \sim \chi^2(n)$，其中 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立且服从标准正态分布。

（2）性质：设 $X_1 \sim \chi^2(n_1)$，$X_2 \sim \chi^2(n_2)$，并且 χ_1^2，χ_2^2 独立，则 $X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.　（可加性）

若 $X \sim \chi^2(n)$，则 $E(X) = n$，$D(X) = 2n$.

（3）分位点：对于给定的正数 α，$0 < \alpha < 1$，称满足条件 $P\{X > \chi_\alpha^2(n)\} = \alpha$ 的点 $\chi_\alpha^2(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的上 α 分位点.

t 分布：（1）变量：设 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，且 X, Y 独立，则 $t = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$.

（2）分位点：对于给定的 α，$0 < \alpha < 1$，称满足条件 $P\{t > t_\alpha(n)\} = \alpha$ 的点 $t_\alpha(n)$ 为 $t(n)$ 分布的上 α 分位点.

$t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$.

F 分布：（1）变量：设 $U \sim \chi^2(n_1)$，$V \sim \chi^2(n_2)$，且 U, V 独立，则 $F = \dfrac{U/n_1}{V/n_2} \sim F(n_1, n_2)$.

若 $F \sim F(n_1, n_2)$，则 $\dfrac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$.

（2）分位点：对于给定的 α，$0 < \alpha < 1$，称满足条件 $P\{F > F_\alpha(n_1, n_2)\} = \alpha$ 的点 $F_\alpha(n_1, n_2)$ 为 $F(n_1, n_2)$ 分布的上 α 分位点.

$$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}.$$

5、掌握关于正态总体的抽样分布定理：掌握单个正态总体的样本均值、样本方差的抽样分布，了解两个正态总体均值差和方差比的抽样分布.

定理一：设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$ 是样本均值，则有 $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$.

定理二：设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}, S^2$ 分别是样本均值和样本方差，则有

(1) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$;　(2) $\overline{X}$ 与 S^2 独立.

定理三：设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}, S^2$ 分别是样本均值和样本方差，则有 $\dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$.

定理四：设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别是具有相同方差的两正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$，$N(\mu_2, \sigma^2)$ 的样本，且这两个样本互相独立，设 $\overline{X} = \dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i$，$\overline{Y} = \dfrac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_i$ 分别是这两个样本的均值，

$S_1^2 = \dfrac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \overline{X})^2$，$S_2^2 = \dfrac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i - \overline{Y})^2$ 分别是这两个样本的方差，则有

(1) $\dfrac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$;

(2) 当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 时，

$$\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)，\text{其中 } S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}，\quad S_w = \sqrt{S_w^2}.$$

第七章 参数估计

1、了解参数的估计量与估计值的概念：估计量是统计量也是变量，估计值是统计量的取值。

2、掌握矩估计法和最大似然估计法：会求未知参数的矩估计量和最大似然估计量。

矩估计法：用样本矩来估计总体矩,用样本矩的连续函数来估计总体矩的连续函数。

具体解法： 令 $\mu_l(\theta_1,\cdots,\theta_k)=A_l,\quad l=1,2,\cdots,k.$ 建立方程或方程组。

用方程或方程组的解 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_k$ 分别作为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的估计量,即为参数的矩估计量.

最大似然估计法：（1）似然函数：离散型：$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}p(x_i;\theta),\quad \theta\in\Theta,$

连续型：$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\theta),$

（2）定义：

满足 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\hat{\theta})=\max\limits_{\theta\in\Theta}L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)$ 的 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是参数 θ 的最大似然估计值

$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是参数 θ 的最大似然估计量。

（3）步骤：$1'$ 写出总体的概率密度或分布律（公式形式）

$2'$ 写出似然函数 $L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$ 或 $L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\theta);$

$3'$ 取对数 $\ln L(\theta)=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln p(x_i;\theta)$ 或 $\ln L(\theta)=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln f(x_i;\theta);$

$4'$ 对 θ 求导 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$, 并令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$, 解方程即得未知参数 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

或求偏导数 $\dfrac{\partial}{\partial\theta_i}\ln L=0, i=1,2,\cdots,k.$ 解出由 k 个方程组成的方程组,即可得各未知参数 $\theta_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

$5'$ $\hat{\theta}_i(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 即为参数 θ_i 的最大似然估计量。

（4）性质：

设 θ 的函数 $u=u(\theta),\theta\in\Theta$ 具有单值反函数 $\theta=\theta(u),u\in\mu$, 又设 $\hat{\theta}$ 是 X 的概率密度函数 $f(x;\theta)$ (f 形式已知) 中的参数 θ 的最大似然估计, 则 $\hat{u}=u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的最大似然估计.

3. 掌握估计量的无偏性和有效性：会判断估计量是否是参数的无偏估计，会比较两个无偏估计量哪一个更有效。掌握几个特殊的估计量。

无偏性： 无偏估计, $E(\hat{\theta})=\theta$; 有偏估计, $E(\hat{\theta})\neq\theta$

有效性：

设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 都是 θ 的无偏估计量，若有 $D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2)$,
则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效.

特殊估计量： 样本均值 $\overline{X}$ 是总体均值 $E(X)$ 的无偏估计，也是 $E(X)$ 的最好的估计量。

k阶样本矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ 是k阶总体矩 μ_k 的无偏估计.

样本方差 S^2是总体方差 $D(X)$的无偏估计量，也是$D(X)$最好的估计量.

4、掌握单个正态总体均值和方差的双侧置信区间求法：置信区间的定义，会求方差已知和方差未知情况下单个正态总体均值双侧置信区间的和均值未知情况下方差和标准差的双侧置信区间.

定义：

设总体X的分布函数$F(x;\theta)$含有一个未知参数θ,对于给定值$\alpha\ (0<\alpha<1)$,若由样本$X_1,X_2,\cdots X_n$确定的两个统计量$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$和$\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 满足$P\{\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha$,

则称随机区间$(\underline{\theta},\overline{\theta})$是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的置信区间,$\underline{\theta}$和$\overline{\theta}$分别称为置信度为$1-\alpha$的双侧置信区间的置信下限和置信上限,$1-\alpha$为置信度.

思路：

⑴ 设$X_1,\mathrm{X}_2,\cdots,X_\mathrm{n}$是来自总体$X$的样本,取参数$\theta$的较优的点估计$\hat{\theta}(X_1,\mathrm{X}_2,\cdots,X_\mathrm{n})$，最好是无偏估计量。

（2）根据实际问题, 设法构造一个只含待估参数的样本函数 $Z(X_1,\cdots,X_n)$,Z 的分布已知, 并且不依赖于参数, 也不依赖于其他任何未知参数; Z 的分位点可以从表中查出。

(3) 对于给定的置信度 $1-\alpha$,查表求得Z的$\frac{\alpha}{2}$及$1-\frac{\alpha}{2}$,分位点a,b,使得$P\{a<Z(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)<b\}=1-\alpha$

(4)由不等式$a<Z(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)<b$解得$\theta$的置信区间 $\theta_1(X_1,X_2,\cdots,X_n;a,b)<\theta<\theta_2(X_1,X_2,\cdots,X_n;a,b)$

公式： （1）当σ^2已知时,μ的置信区间：$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mathrm{z}_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mathrm{z}_{\alpha/2}\right)$或$\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mathrm{z}_{\alpha/2}\right)$.

（2）当σ^2未知时,μ的置信区间：$\left(\overline{X}-\frac{s}{\sqrt{n}}\mathrm{t}_{\alpha/2}(n-1),\ \overline{X}+\frac{s}{\sqrt{n}}\mathrm{t}_{\alpha/2}(n-1)\right)$或$\left(\overline{X}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}\mathrm{t}_{\alpha/2}(n-1)\right)$.

（3）当μ未知时,σ^2的置信区间：$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(\mathrm{n}-1)},\quad\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(\mathrm{n}-1)}\right)$

当μ未知时,σ的置信区间：$\left(\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2}(\mathrm{n}-1)}}S,\quad\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2}(\mathrm{n}-1)}}S\right)$