§2.1　一阶逻辑基本概念-谓词和量词

引例：判断以下推理是否正确：

凡人都是要死的，

苏格拉底是人，

所以苏格拉底是要死的。

这是著名的“**苏格拉底三段论**”。

凭直觉这个论证是正确的，但无法用命题演算表达出来。为了深入研究形式逻辑中的推理问题，我们将命题演算扩充，引入谓词演算。

在命题逻辑中，命题演算的基本单位是命题，不再对原子命题进行分解，故无法研究命题语句的结构、成份和内在的逻辑特征。为此将原子命题分解成个体和谓词这样两个组成部分。

例：在上述论证中，“人总是要死的”可以分解成“人”（个体）与“是要死的”（谓词）。

在命题的研究中，基于谓词分析的逻辑，称为谓词逻辑。

谓词逻辑是命题逻辑的扩充和发展。

一、个体词，谓词，量词。

1、个体词、谓词

例如：李华是大学生。

$\sqrt{2}$是无理数。

小王比小明高。

(1) **个体词**——简单命题中表示主体或客体的词(由名词组成)。

$$
\text{个体词}\begin{cases}\text{个体常项（常元）} & \text{用 } a,b,c\cdots \text{ 表示} \\ \text{个体变项（变元）} & \text{用 } x,y,z\cdots \text{ 表示}\end{cases}
$$

个体域(或称**论述域**)——个体变项取值的范围。

特别地，当无特殊声明时，将宇宙间的一切事物组成的个体域，称为全总个体域。

例子：对于命题：任何正整数都大于零。

其中：正整数是该命题谈论的对象，是个体；所有正整数集合可以构成一个论述域；某一个确定的正整数（如5）就是一个个体常项；而如果用 x 来表示任何一个正整数，则 x 就是一个个体变元。

(2) **谓词**——刻画个体词的性质、特征或个体词之间关系的词。

$$\text{谓词}\left\{\begin{matrix}\text{谓词常项}\\ \\ \text{谓词变项}\end{matrix}\right\}\text{都用}F,G,H\cdots\text{表示}$$

例："3 大于 2"中"大于"是一个谓词。

"猫是动物"一句中的"是动物"就是一个谓词，而"猫"是个体。

n元谓词： 含n个个体词的谓词称n元谓词。(用 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示)

看成函数：定义域：个体变项的个体域

值域：$\{0,1\}$

不是命题

例如 $F(x, y)$：x 比 y 高。

其中$F(x, y)$ 是二元谓词，x, y 为个体词。

a：小王，

b：小明，

$F(a,b)$：小王比小明高。

是命题

例如：李华是大学生，小明是大学生。

$F(x)$：x 是大学生，　　一元谓词

a：李华　　个体常项

b：小明　　个体常项

$F(a), F(b)$ 分别表示李华是大学生，小明是大学生，它们是0元谓词。

注：1、一元谓词表示一个个体变元所具有的性质、特点。

2、 n元谓词表示n个个体变元之间的关系。

3、 0元谓词都是命题，命题可以看成谓词的特殊情况。

称为命题的谓词表达式

注：谓词与函数的比较

代数	自变量（常数）	函数	函数值	定义域
逻辑	个体变元（常元）	谓词	命题	个体域

2、**量词**——表示数量的词，对个体变元的数量限制。

$$\text{量词}\begin{cases}\text{全称量词 } \forall \\ \text{存在量词 } \exists\end{cases}$$

例如，$\forall x A(x)$ 为："对于个体域内所有的 x 都有A(x)为真"。

$\exists x A(x)$ 为："个体域内存在(某些) x 使A(x)为真"。

量词与联结词"¬"之间的关系：

例：设P(x)表示x今天来校上课，个体域为计科班全体同学，比较可以得到：

$$\neg(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x)$$

$$\neg(\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x)$$

使用量词时，应注意以下5点：

(1) 在不同个体域中，命题符号化的形式可能不一样;

例如：$F(x)$表示“x是要死的”，$M(x)$表示“x是人”

特性谓词

如果论述域是全人类，则“人总是要死的”译为

$$\forall x F(x)$$

如果论述域是全总个体域，则“人总是要死的”译为

$$\forall x (M(x) \rightarrow F(x))$$

含义是“对一切x，如果x是人，那么x是要死的”

(2) 一般,除非有特别说明，均以全总个体域为个体域;

使用量词时，应注意以下5点：

(3) 当个体域为有限集时，如 $D=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$

$$\forall xA(x)\Leftrightarrow A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\cdots\wedge A(a_n)$$

$$\exists xA(x)\Leftrightarrow A(a_1)\vee A(a_2)\vee\cdots\vee A(a_n)$$

(4) 多个命题变元出现时，不能随意颠倒量词顺序，否则命题的含义完全改变。

(5) 在谓词逻辑中符号化语句，一般要求在全总个体域中，需要分析清楚语句讨论的对象，并用特性谓词表示之。在引入特性谓词M(x)时，M(x)以蕴含前件加在“∀”后，以合取项加在“∃”后。即，

对全称量词“∀”，用“ M(x)→? ”加入；

对存在量词“∃”用“ M(x)∧ ?”加入。

例如：将下面命题符号化。

(1) 所有的有理数均可表成分数。
(2) 有的有理数是整数。

解：因无指定个体域，则以全总个体域为个体域。

$Q(x)$：x 为有理数，

$F(x)$：x 可表成分数，

$Z(x)$：x 为整数，

$$(1)\forall x\big(Q(x)\to F(x)\big)$$

$$(2)\exists x\big(Q(x)\wedge Z(x)\big)$$

注：若本题指定的个体域为有理数集，则(1)，(2)分别符号化为 $\forall xF(x)$ 和 $\exists xZ(x)$ 。

二、命题符号化

例1、将下列命题符号化。

(1) 凡偶数均能被2整除。

解：$F(x)$：x是偶数，$G(x)$：x能被2整除，

$$\forall x\left(F(x)\rightarrow G(x)\right)$$

(2) 存在着偶素数。

解：$F(x)$：x是偶数，$H(x)$：x 是素数，

$$\exists x\left(F(x)\wedge H(x)\right)$$

(3) 没有不犯错误的人。

解： $M(x)$：x 是人， $F(x)$：x 犯错误，

$$\neg\exists x\left(M(x)\wedge\neg F(x)\right)$$

原命题即：“每个人都犯错误”。

又可符号化为：$\forall x\left(M(x)\rightarrow F(x)\right)$

可以不唯一

(4) 在北京工作的人未必是北京人。

解： $F(x)$：x 是在北京工作的人，

$G(x)$：x 是北京人，

$$\neg\forall x\big(F(x)\to G(x)\big)$$

(5) 尽管有些人聪明，但未必一切人都聪明。

解： $M(x)$：x 是人，$F(x)$：x 聪明，

$$\exists x\big(M(x)\wedge F(x)\big)\wedge\neg\forall x\big(M(x)\to F(x)\big)$$

(6) 每列火车都比某些汽车快。

某些汽车比所有的火车慢。

解： $F(x)$：x是火车， $G(y)$：y是汽车，

$H(x,y)$：x 比 y 快，

第一句为：$\forall x\left(F(x)\rightarrow\exists y\left(G(y)\wedge H(x,y)\right)\right)$

或 $\forall x\exists y\left(F(x)\rightarrow\left(G(y)\wedge H(x,y)\right)\right)$

第二句为：$\exists y\left(G(y)\wedge\forall x\left(F(x)\rightarrow H(x,y)\right)\right)$

或 $\exists y\forall x\left(G(y)\wedge\left(F(x)\rightarrow H(x,y)\right)\right)$

三、谓词公式。

1、原子公式

不出现连接词和量词的谓词命名式 $P(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 称为谓词演算的原子公式。

2、合式公式的递归定义：

(1) 原子公式是合式公式；

(2) 若A是合式公式，则$(\neg A)$也是合式公式；

(3)若 A, B 是合式公式，则 $(A \wedge B), (A \vee B)$,

$(A \to B), (A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式；

(4) 若 A 是合式公式，则 $\forall xA, \exists xA$ 也是合式公式；

(5) 只有有限次地应用(1)—(4)构成的符号串

才是合式公式(也称谓词公式)，简称公式。

3、约束变元，自由变元。

在合式公式 $\forall xA(x), \exists xA(x)$ 中，

称x为**指导变项（元）**，

称A为相应量词的**辖域**，（紧接于量词之后最小的子公式）

辖域A内变元 x 的一切出现叫**约束出现**，称 x 为**约束变元**。

A不是约束出现的其他变项的出现叫变元的**自由出现**，该变元称**自由变元**。

例1、指出下列各合式公式中的指导变项，量词的辖域，个体变元的自由出现和约束出现。

(1) $\forall x\big(F(x) \to \exists y H(x,y)\big)$

(2) $\exists x F(x) \wedge G(x,y)$

(3) $\forall x \forall y\big(R(x,y) \vee L(y,z)\big) \wedge \exists x H(x,y)$

注：公式中，约束变元的符号是可以更改的。

换名规则：将一个**指导变项**及其在辖域中所有**约束出现**替换成公式中没有出现的个体变项符号。

1） 换名时，该变元在量词及其辖域中的所有出现需一起更改，其余部分不变。

2）换名时，所选用符号必须在量词辖域内未出现。

例如： $\forall x\big(F(x)\rightarrow\exists yH(x,y)\big)$

换成 $\forall z\big(F(z)\rightarrow\exists yH(z,y)\big)$