# §1.5　推理规则和证明方法

在命题逻辑中，除了利用等价关系来判定满足性的判定问题之外，还有另一种判断问题——推理

推理 ：判定由给定前提是否能推导出某个结论。即推理关心的是命题 A 是否永真蕴含命题 B。

有两类进行推理的方法：

1、真值表技术

2、基于推理规则

# 一、基于真值表的推理

给定两个命题 A 和 B，若A $\Rightarrow$ B， 则称 B 是 A 的有效结论，或 B 在逻辑上是由 A 推导出来的。判别有效结论的过程就是论证过程。

推广到有m个前提的情况：设$H_1, H_2, ..., H_m$, C是一些命题公式，当且仅当$H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_m \Rightarrow C$，称C是前提集合$\{H_1, H_2, ..., H_m\}$的有效结论。

即证： $H1 \wedge H2 \wedge ... \wedge Hm \rightarrow C$为重言式

**例1：判断下列推理是否正确：**

**如果天气凉快，小王就不去游泳。天气凉快，所以小王没去游泳。**

设P：天气凉快，Q：小王去游泳。

前提：$P \rightarrow \neg Q$，P。

结论：$\neg Q$

判断：$(P \rightarrow \neg Q) \wedge P \rightarrow \neg Q$是否为重言式。

| **P** | **Q** | $(P \rightarrow \neg Q) \wedge P$ | $(P \rightarrow \neg Q) \wedge P \rightarrow \neg Q$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |

$(P \rightarrow \neg Q) \wedge P \rightarrow \neg Q$为重言式，所以推理正确。

从真值表中找出前提的真值均为真的行，如果对应结论的真值也为真，则可以证明对应结论是给定前提的有效结论。

例2：考察 Q 是否是前提 P 和 P→Q的有效结论.

前提1　　　　前题2

| P | Q | P→Q |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

由表中可以看到，P→ Q, 和 P 同时为真的情形只有在最后一行，而此时 Q 为真。因此 Q 是前提 P 和 P→Q的有效结论.

真值表技术在前提数目多时就比较繁琐，需要采用别的方法：基于推理规则的方法。

# 二、基于规则的推理

1）直接证明法：由一组给定的前提，利用一些公认的推理规则，并根据已知的等价公式和永真蕴含公式推得有效结论的方法。

推理使用的构造公式的规则:

- 规则 P: 在推导的任何步骤上，都可以引入前提。
- 规则 T：在推导过程中，如果前面有一个或多个命题公式永真蕴含公式 S，那么就可以把公式 S 引进推导过程中。

可将证明过程用三列形式表示：

第一列为序号，

第二列为当前得到的结论，

第三列为得到当前结论的理由。

还有合取式，见课本

| 推理定律 | 永真式形式 | 名字 |
| --- | --- | --- |
| P，<br>所以P∨Q | $P \Rightarrow P \vee Q$ | 加法式 |
| P∧Q，<br>所以P | $P \wedge Q \Rightarrow P$ | 简化式 |
| P→Q<br>P，<br>所以Q | $P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$ | 假言推理 |
| P→Q<br>¬Q，<br>所以¬P | $\neg Q \wedge (P \to Q) \Rightarrow \neg P$ | 拒取式 |
| P∨Q<br>¬P，<br>所以Q | $(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$ | 析取三段论 |
| P→Q<br>Q→R，<br>所以P→R | $(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow (P \to R)$ | 前提三段论 |
| (P→Q)∧(R→S)<br>P∨R，<br>所以Q∨S | $(P \to Q) \wedge (R \to S) \wedge (P \vee R) \Rightarrow Q \vee S$ | 构造性二难推理 |
| (P→Q)∧(R→S)<br>¬Q∨¬S，<br>所以¬P∨¬R | $(P \to Q) \wedge (R \to S) \wedge (\neg Q \vee \neg S) \Rightarrow \neg P \vee \neg R$ | 破坏性二难推理 |

例1：前提：$P \rightarrow Q$ ，$R \rightarrow \neg Q$， R

结论：$\neg P$

证明

P规则，前提引入

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $R$ | P |
| 2 | $R \rightarrow \neg Q$ | P |
| 3 | $\neg Q$ | T, 1, 2, I |
| 4 | $P \rightarrow Q$ | P |
| 5 | $\neg P$ | T, 3, 4, I |

T规则，根据

假言推理

拒取式

将下列论证用命题逻辑符号表示，然后证明该论证是正确的。

例2. 如果分配小王到幼儿园工作，他就高兴，但是他在幼儿园工作就会闹孩子气，家长就会有意见，家长有意见，他就不高兴，除了在幼儿园工作之外，小王只能在家，因此小王只能在家。

解:设P:分配小王到幼儿园工作,

Q:他高兴

R:小王闹孩子气

S:家长有意见

T:小王只能在家

前提:$P \rightarrow Q$, $P \rightarrow R$, $R \rightarrow S$, $S \rightarrow \neg Q$, $P \vee T$

结论:T

前提：$P \to Q$, $P \to R$, $R \to S$, $S \to \neg Q$, $P \vee T$

结论：$T$

证明

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $P \to R$ | P |
| 2 | $R \to S$ | P |
| 3 | $P \to S$ | T, 1, 2, 前提三段论 |
| 4 | $S \to \neg Q$ | P |
| 5 | $P \to \neg Q$ | T, 3, 4, 前提三段论 |

前提:$P \to Q$, $P \to R$, $R \to S$, $S \to \neg Q$, $P \vee T$

结论:$T$

| | | |
|---|---|---|
| 6 | $\neg P \vee \neg Q$ | T, 5, E |
| 7 | $P \to Q$ | P |
| 8 | $\neg P \vee Q$ | T, 7, E |
| 9 | $(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$ | T, 6, 8, 合取式 |
| 10 | $\neg P$ | T, 9, E |
| 11 | $P \vee T$ | P |
| 12 | $T$ | T, 10，11, 析取三段论 |