§2.2　谓词演算的永真公式

一、合式公式的解释

对公式中各种变项(个体变项，函数变项，谓词变项)，指定特殊的常项去代替，就构成了公式的一个解释。

通常情况下，解释 E 由以下4部分组成：

(1) 为论述域指定一个非空集合D

(2)为每个个体常元指定一个D中的个体，

(3)为每个函数变项指定一个D上的函数，

(4)为每个谓词变项指定一个D上的谓词。

例1、现给定解释 N 如下：

1) 个体域为自然数集合D_N　　2) D_N 中特定元素 $a=0$

3) D_N 上特殊函数 $f(x,y)=x+y, g(x,y)=x\bullet y$

4) D_N 上特定谓词$F(x,y)$为$x=y$

在解释N下，讨论下面哪些公式为真？哪些为假？

(1) $\forall xF\left(g(x,a),x\right)$

解： 在解释N 下，公式化为：

$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}\bullet 0=\boldsymbol{x})$　真值为0

例1、现给定解释 N 如下：

1) 个体域为自然数集合D_N　　2) D_N 中特定元素 $a=0$

3) D_N 上特殊函数 $f(x,y)=x+y, g(x,y)=x \bullet y$

4) D_N 上特定谓词$F(x,y)$为$x=y$

在解释N下，讨论下面哪些公式为真？哪些为假？

(2) $\forall x \forall y \Big(F\big(f(x,a),y\big) \rightarrow F\big(f(y,a),x\big)\Big)$

解：在解释N 下，公式化为：

$\forall x \forall y(x+0=y \rightarrow y+0=x)$　　真值为1

例1、现给定解释 N 如下：

1) 个体域为自然数集合D_N　　2) D_N 中特定元素 $a=0$

3) D_N 上特殊函数 $f(x,y)=x+y, g(x,y)=x\bullet y$

4) D_N 上特定谓词$F(x,y)$为$x=y$

在解释N下，讨论下面哪些公式为真？哪些为假？

(3) $\forall x\forall y\exists zF\left(f(x,y),z\right)$

解：在解释N 下，公式化为：

$\forall x\forall y\exists z(x+y=z)$　　真值为1

例1、 现给定解释 N 如下：

1) 个体域为自然数集合D_N　　2) D_N 中特定元素 $a=0$

3) D_N 上特殊函数 $f(x,y)=x+y, g(x,y)=x\bullet y$

4) D_N 上特定谓词$F(x,y)$为$x=y$

在解释N下，讨论下面哪些公式为真？哪些为假？

(4) $\forall x\forall yF\left(f(x,y),g(x,y)\right)$

解： 在解释 N下，公式化为：

$\forall x\forall y(x+y=x\bullet y)$　　真值为0

例1、现给定解释 N 如下：

1) 个体域为自然数集合D_N　　2) D_N 中特定元素 $a=0$

3) D_N 上特殊函数 $f(x,y)=x+y, g(x,y)=x \bullet y$

4) D_N 上特定谓词$F(x,y)$为$x=y$

在解释N下，讨论下面哪些公式为真？哪些为假？

(5) $F\left(f(x,y), f(y,z)\right)$

解：在解释 N下，公式化为：

$x+y=y+z$　　真值不确定(不是命题)

如何让它成为命题呢？

(5) $F\big(f(x,y), f(y,z)\big)$

解： 在解释 N下，公式化为：

$x+y=y+z$ 真值为不确定(不是命题)

解释N下的赋值：对每个自由出现的个体变项指定个体域中的一个元素。

取解释N下的赋值σ： $\sigma(x)=1, \sigma(y)=3, \sigma(z)=5$

则在解释N和赋值σ下，公式为1+3=3+5 **假命题**

若取解释N下的赋值σ'： $\sigma'(x)=1, \sigma'(y)=3, \sigma'(z)=1$

则在解释N和赋值σ'下，公式为1+3=3+1 **真命题**

二、永真式、矛盾式、可满足式

永真式——在任何解释下和该解释下的任何赋值下都为真的合式公式。
（逻辑有效式）

例如：$\forall xF(x) \to \exists xF(x)$

永假式——在任何解释下和该解释下的任何赋值下都为假的合式公式。
（矛盾式）

例如：$\neg(F(x,y) \to R(x,y)) \wedge R(x,y)$

可满足式——至少存在一个解释及该解释下的一个赋值使其为真的合式公式。

不存在一个可行的算法能够判断任一公式是否是可满足的，
但有一些特殊的公式，可以利用命题公式的结论

命题公式中永真式的代换实例在谓词公式中仍是永真式，矛盾式的代换实例在谓词公式中仍是矛盾式。

用n个谓词$A_1,A_2,\ldots,A_n$取代命题公式$A(p_1,p_2,\ldots,p_n)$中的变元所得的谓词公式$A_0(A_1,A_2,\ldots,A_n)$称为命题公式A的**代换实例**。

例如：

$$F(x) \to G(x),$$

$$\exists x F(x) \to G(x),$$

$$\forall x F(x) \to \exists x G(x)$$

都是命题P→Q的代换实例

例2：判断下列公式中哪些是重言式，哪些是矛盾式。

(1) $\forall xF(x)\rightarrow\left(\forall x\exists yG(x,y)\rightarrow\forall xF(x)\right)$

解：原公式是命题公式P→(Q→P)的代换实例，且

$$P\rightarrow(Q\rightarrow P)\Leftrightarrow\neg P\vee(\neg Q\vee P)\Leftrightarrow \mathbf{1}$$

所以原公式是重言式。

(2) $\forall xF(x)\rightarrow\left(\forall xF(x)\vee\exists yG(y)\right)$

解：原公式是命题公式P→(P∨Q)的代换实例，且

$$P\rightarrow(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\vee(P\vee Q)\Leftrightarrow \mathbf{1}$$

所以原公式是重言式。

(3) $\neg\left(F(x,y)\to R(x,y)\right)\wedge R(x,y)$

解： 原公式是命题公式$\neg(P \to Q) \wedge Q$的代换实例，且

$$\neg(P \to Q) \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \wedge Q$$
$$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \wedge Q \Leftrightarrow \mathbf{0}$$

所以原公式是矛盾式。

对于不是永真或永假式的代换实例的谓词公式，判断并非易事，但一些简单的可通过读公式含义，或取解释来判断。

(4) $\forall xF(x) \to \exists xF(x)$

解：根据量词的含义，若对一切x∈D，都有F(x)为真，则对某一确定的x，F(x)为真，所以就存在x∈D，使得F(x)为真。

所以，原公式是重言式。即 $\boxed{\forall xF(x) \Rightarrow \exists xF(x)}$

$$\boxed{\forall xF(x) \Rightarrow F(x)}$$

(5) $\forall x \exists y F(x,y) \to \exists x \forall y F(x,y)$

解：取解释I_1：个体域为自然数集N，$F(x,y)$：$x \le y$。

在解释I_1下，蕴含的前件为真，后件也为真，故原式为真。

取解释I_2：个体域为自然数集N，$F(x,y)$：$x=y$。

在解释I_2下，蕴含的前件为真，后件为假，故原式为假。

综上可知，原公式是非永真的可满足式。

三、一阶逻辑等价(值) 式。

定义：若A $\leftrightarrow$ B为重言式，则称A $\Leftrightarrow$ B。

1、已有的等值式

命题公式中的24个恒等式及其代换实例

例如：$\forall xA(x) \to \exists xB(x) \Leftrightarrow \neg\forall xA(x) \vee \exists xB(x)$

由换名规则所得公式与原公式等价

例如：$\forall x(F(x) \to \exists yH(x,y)) \Leftrightarrow \forall z(F(z) \to \exists yH(z,y))$

由替换规则所得公式与原公式等价

例如：$\forall x\neg A(x) \vee B \Leftrightarrow \neg\exists xA(x) \vee B$

几条规则：

(1). 代入规则——在一公式中，任一**自由个体变元**可以代以另一个个体变元，只需该个体变元出现的各处都同样代入，且代入的变元不允许在原来公式中以约束变元出现。

注：换名规则与代入规则的区别：1、前者只用于约束变元，后者只用于自由变元；2、改名后的式子与原式等价，代入后却不一定，除非是永真式。

(2). 替换规则——若**A**是公式**C**中的子公式，**A** $\Leftrightarrow$ **B**，将**B**替换**C**中的**A**得**D**，则**C** $\Leftrightarrow$ **D**。

(3). 对偶原理：若**A** $\Leftrightarrow$ **B**，则**A*** $\Leftrightarrow$ **B***。

若**A** $\Rightarrow$ **B**，则**B*** $\Rightarrow$ **A*** 。

2、一些重要等值式

量词否定等值式:

(1) $\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$

(2) $\neg\exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

量词辖域收缩与扩张等值式:

(3) $\forall x\big(A(x) \vee B\big) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$

(4) $\forall x\big(A(x) \wedge B\big) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$

(5) $\forall x\big(A(x) \to B\big) \Leftrightarrow \exists x A(x) \to B$

(6) $\forall x\big(B \to A(x)\big) \Leftrightarrow B \to \forall x A(x)$

证明（5）： $\forall x\left(A(x)\rightarrow B\right)\Leftrightarrow\forall x\left(\neg A(x)\vee B\right)$

$$\Leftrightarrow\forall x\neg A(x)\vee B$$

$$\Leftrightarrow\neg\exists xA(x)\vee B$$

$$\Leftrightarrow\exists xA(x)\rightarrow B$$

(7) $\exists x\left(A(x)\vee B\right)\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee B$

(8) $\exists x\left(A(x)\wedge B\right)\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge B$

(9) $\exists x\left(A(x)\rightarrow B\right)\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow B$

(10) $\exists x\left(B\rightarrow A(x)\right)\Leftrightarrow B\rightarrow\exists xA(x)$

量词分配等值式：

$$(11)\forall x\big(A(x)\wedge B(x)\big)\Leftrightarrow\big(\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)\big)$$

例如： “今天所有的人既唱歌又跳舞”与

“今天所有的人唱歌并且今天所有的人跳舞”

有相同含义。

$$(12)\exists x\big(A(x)\vee B(x)\big)\Leftrightarrow\big(\exists xA(x)\vee\exists xB(x)\big)$$

例如: “有些人将去旅游或探亲”与

“有些人将去旅游或有些人将去探亲”

有相同含义。

量词分配等值式：

$$(11)\forall x\left(A(x)\wedge B(x)\right)\Leftrightarrow\left(\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)\right)$$

$$(12)\exists x\left(A(x)\vee B(x)\right)\Leftrightarrow\left(\exists xA(x)\vee\exists xB(x)\right)$$

注意： $\forall x\left(A(x)\vee B(x)\right)\not\Leftrightarrow\left(\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\right)$

$$\exists x\left(A(x)\wedge B(x)\right)\not\Leftrightarrow\left(\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)\right)$$

$$(13)\left(\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\right)\Rightarrow\forall x\left(A(x)\vee B(x)\right)$$

$$(14)\exists x\left(A(x)\wedge B(x)\right)\Rightarrow\left(\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)\right)$$

$$(15)\exists x(A(x)\rightarrow B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$$

$$(16)\exists xA(x)\rightarrow\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$$

证明(15)：$\exists x(A(x) \to B(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg A(x) \vee B(x))$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg A(x) \vee \exists x B(x)$$

$$\Leftrightarrow \neg \forall x A(x) \vee \exists x B(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x A(x) \to \exists x B(x)$$

多个量词间的次序排列等值式：

(17)$\forall x \forall y A(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x,y)$

(18)$\exists x \exists y A(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x,y)$

(19)$\exists y \forall x A(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x,y)$

但$\forall y \exists x A(x,y) \Rightarrow \exists x \forall y A(x,y)$不真

例3: 证明$\forall x(P(x)\to Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x)\to\neg Q(x)) \to (R(x)\to\neg P(x))$

证明： 根据CP规则，上式等价于

$$\forall x(P(x)\to Q(x)) \wedge \forall x(R(x)\to\neg Q(x)) \Rightarrow (R(x)\to\neg P(x))$$

而$\forall x(P(x)\to Q(x)) \wedge \forall x(R(x)\to\neg Q(x))$

$\Leftrightarrow \forall x((P(x)\to Q(x)) \wedge (R(x)\to\neg Q(x)))$ **根据等值式 (11)**

$\Leftrightarrow \forall x((R(x)\to\neg Q(x)) \wedge (\neg Q(x)\to\neg P(x)))$ **E**

$\Rightarrow (R(x)\to\neg Q(x)) \wedge (\neg Q(x)\to\neg P(x))$ 根据$\forall x F(x) \Rightarrow F(x)$

$\Rightarrow R(x)\to\neg P(x)$ **前提三段论**

所以，

$$\forall x(P(x)\to Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x)\to\neg Q(x)) \to (R(x)\to\neg P(x))$$