§2.3 谓词演算的推理规则

重点： 全称指定规则（US）（Universal Specification）

存在指定规则（ES）（Existential Specification）

全称推广规则（UG）（Universal Generalization）

存在推广规则（EG）（Existential Specification）

了解： 推理规则在推理中的正确使用。

1、全称指定规则（US）

$$\forall x A(x) \Rightarrow A(y)$$

要求：(1)y是个体常项，或者是个体变项且在公式$A(x)$中，x不出现在量词$\forall y$或$\exists y$的辖域内。

(2) $A(y)$中约束变元个数与$A(x)$中约束变元个数相同。

说明：若个体域中所有个体都满足谓词A，则任一个体y也满足谓词A。

意义：全称量词可以删除。

2、存在指定规则（ES）

$$\exists x A(x) \Rightarrow A(c)$$

要求：(1) c 是使 A 为真的特定的个体常项，

而不是个体变元。

(2)通常使用这一规则时，选用前面推导步骤中未使用过的字母作为公式中的c。

说明：若个体域中存在 某些个体满足谓词A，那么一定有某个确定的个体c满足谓词A。

3、全称推广规则（UG）

$$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$$

要求：(1) y是个体域中任一个体，且都有$A(y)$为真。

4、存在推广规则（EG）

$$A(y) \Rightarrow \exists x A(x)$$

要求：(1) y 是个体常元或变元，

(2)在公式$A(y)$中，y不出现在量词$\forall x$或$\exists x$的辖域内。

注：考察以下推理过程

①	$\forall x \exists y P(x, y)$	P前提引入
②	$\exists y P(c, y)$	T,1, US
③	$P(c, d)$	T,2, ES
④	$\forall x P(x, d)$	T,3,UG

第④步是错误的，因为由ES引入的变元d不能理解成在P中自由出现，公式P不是对d的一切值都可证明的，所以在这种情况下，就不能使用UG规则。

例1： 证明苏格拉底三段论："凡人都是要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的。"

解：设F(x)：x是人；G(x)：x是要死的；a：苏格拉底

前提：$\forall x\left(F(x)\rightarrow G(x)\right), F(a)$

结论：$G(a)$

证明： ① $\forall x\left(F(x)\rightarrow G(x)\right)$ P前提引入

② $F(a)\rightarrow G(a)$ T,1, US

③ $F(a)$ P前提引入

④ $G(a)$ T,2,3,假言推理

例2、指出下列推理中的错误，并加以改正。

（1） ① $\forall x P(x) \to Q(x)$ P前提引入

② $P(t) \to Q(t)$ T,1, US

解：在第一步中，全称量词的辖域为 $P(x)$，而非 $P(x) \to Q(x)$，所以不能直接使用US规则。

① $\forall x P(x) \to Q(x)$ P前提引入

② $\forall y P(y) \to Q(x)$ T,1, E

③ $\exists y (P(y) \to Q(x))$ T,2, E

④ $P(c) \to Q(x)$ T,3,ES

例2、指出下列推理中的错误，并加以改正。

（2） ① $\forall x(P(x) \to Q(x))$ P前提引入

② $P(a) \to Q(b)$ T,1, US

解：在第一步中，$P(x)$和$Q(x)$均受同一个量词的限制，所以使用US规则时，替代x的变元符号必须一致。

① $\forall x(P(x) \to Q(x))$ P前提引入

② $P(t) \to Q(t)$ T,1, US

例2、指出下列推理中的错误，并加以改正。

（3）

①	$\exists x P(x)$	P前提引入
②	$P(c)$	T,1, ES
③	$\exists x Q(x)$	P前提引用
④	$Q(c)$	T,3,ES

解：在第3步中，由于量词是存在量词，所选用的替代x的常量符必须是前面推导中没有出现过的。

①	$\exists x P(x)$	P前提引入
②	$P(c)$	T,1, ES
③	$\exists x Q(x)$	P前提引用
④	$Q(a)$	T,3,ES

例2、指出下列推理中的错误，并加以改正。

（4） ① $P(a)\to\exists xQ(x)$ P前提引入

② $P(a)\to Q(a)$ T,1, ES

解：在第1步中，所给公式并非是存在量词在最前面，故不能直接使用ES规则。另外a是前面出现过的常量符，不能用来替代x。

① $P(a)\to\exists xQ(x)$ P前提引入

② $\exists x(P(a)\to Q(x))$ T,1, E

③ $P(a)\to Q(c)$ T,2, ES

例3、构造下面的推论的证明：

前提： $\exists x F(x) \wedge \forall x G(x)$

结论： $\exists x\big(F(x) \wedge G(x)\big)$

证明：

①	$\exists x F(x) \wedge \forall x G(x)$	P前提引入
②	$\exists x F(x)$	T,1,化简
③	$F(c)$	T,2,ES
④	$\forall x G(x)$	T,1,化简
⑤	$G(c)$	T,4,US
⑥	$F(c) \wedge G(c)$	T,3,5,合取式
⑦	$\exists x\big(F(x) \wedge G(x)\big)$	T,6,EG

例4、构造下面的推论的证明：

前提：$\neg\exists x\big(F(x)\wedge H(x)\big), \forall x\big(G(x)\to H(x)\big)$

结论：$\forall x\big(G(x)\to\neg F(x)\big)$

证明：

① $\neg\exists x\big(F(x)\wedge H(x)\big)$	P前提引入
② $\forall x\big(\neg F(x)\vee\neg H(x)\big)$	T,1,E
③ $\forall x\big(H(x)\to\neg F(x)\big)$	T,2,E
④ $H(y)\to\neg F(y)$	T,3,US
⑤ $\forall x\big(G(x)\to H(x)\big)$	P前提引入
⑥ $G(y)\to H(y)$	T,5,US
⑦ $G(y)\to\neg F(y)$	T,4,6,前提三段论
⑧ $\forall x\big(G(x)\to\neg F(x)\big)$	T,7,UG

例5、构造下面的推论的证明：

前提： $\forall x(F(x) \vee G(x))$

结论： $\forall xF(x) \vee \exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \neg\forall xF(x) \rightarrow \exists xG(x)$

可用附加前提法

证明： ① $\neg\forall xF(x)$ 附加前提引入

② $\exists x\neg F(x)$ T,1,E

③ $\neg F(a)$ T,2,ES

④ $\forall x(F(x) \vee G(x))$ P前提引入

⑤ $F(a) \vee G(a)$ T,4,US

⑥ $G(a)$ T,3,5,析取三段论

⑦ $\exists xG(x)$ T,6,EG

⑧ $\neg\forall xF(x) \rightarrow \exists xG(x)$ CP规则

例6、在一阶逻辑中构造下面推理的证明：

有理数都是实数，有的有理数是整数。因此有的实数是整数。

解：

设$P(x)$：x是有理数；$Q(x)$：x是实数；$R(x)$：x是整数。

前提：$\forall x\left(P(x)\to Q(x)\right)$，$\exists x\left(P(x)\wedge R(x)\right)$

结论：$\exists x\left(Q(x)\wedge R(x)\right)$

前提：$\forall x\big(P(x)\rightarrow Q(x)\big)$，$\exists x\big(P(x)\wedge R(x)\big)$

结论：$\exists x\big(Q(x)\wedge R(x)\big)$

证明：

①	$\exists x\big(P(x)\wedge R(x)\big)$	P前提引入
②	$P(a)\wedge R(a)$	T,1,ES
③	$P(a)$	T,2,化简
④	$\forall x\big(P(x)\rightarrow Q(x)\big)$	P前提引入
⑤	$P(a)\rightarrow Q(a)$	T,4,US
⑥	$Q(a)$	T,3,5,假言推理
⑦	$R(a)$	T,2,化简
⑧	$Q(a)\wedge R(a)$	T,6,7,合取式
⑨	$\exists x\big(Q(x)\wedge R(x)\big)$	T,8,EG

小结与例题

一、谓词演算公式及解释。

1、基本概念。

谓词公式；辖域，约束变项，自由变项；

代换实例；重言式，

矛盾式，可满足式。

2、应用。

(1) 求某些公式在给定解释下的真值。

(2) 判断某些简单公式的类型。

二、含有量词的永真公式。

基本概念。

等值式，常用等值式，永真蕴含式（及相应规则）；

三、谓词演算的推理理论。

全称量词消去规则（US）
全称量词引入规则（UG）
存在量词消去规则（ES）
存在量词引入规则（EG）

例1、在一阶逻辑中将下列命题符号化。

(1) 每一个有理数都是实数。

解： $Q(x)$: x 是有理数，$R(x)$: x是实数，

$$\forall x\left(Q(x) \to R(x)\right)$$

(2) 并非每一个实数都是有理数。

解： $R(x)$：x 是实数，$Q(x)$: x是有理数，

$$\neg\forall x\left(R(x) \to Q(x)\right)$$

(3) 任何金属均可溶解于某种液体中。

解： $P(x)$：x 是液体，

$G(x)$：x是金属，

$R(x, y)$：x 溶解 y，

$$\forall x\Big(G(x) \to \exists y\big(p(y) \wedge R(y, x)\big)\Big)$$

例2、将下列命题译成自然语言，并确定其真值。

(个体域为Z^+)

(1) $\forall x \exists y G(x, y)$，其中$G(x, y): xy = y$

解：对任意正整数x，存在正整数 y,

使得$xy = y$。真值0。

(2) $\exists x \forall y F(x, y)$，其中$F(x, y): x + y = y$

解：存在正整数x，使得对任意的正整数y，

满足 $x + y = y$。真值0。

例2、将下列命题译成自然语言，并确定其真值。

(个体域为Z^+)

(3) $\forall x \exists y M(x,y)$，其中$M(x,y): xy=1$

解：对任意正整数 x，存在正整数 y，

使得 $xy=1$。真值0。

(4) $\forall x \exists y N(x,y)$，其中$N(x,y): y=2x$

解：对任意正整数 x，存在正整数 y，

使得$y=2x$。真值1。

例3、指出下列量词的辖域，并指出各式中的自由变元和约束变元。

(1) $\forall x\big(P(x)\leftrightarrow Q(x)\big)\wedge\exists xR(x)\vee S(x)$

解： $\forall x$ 的辖域为$\big(P(x)\leftrightarrow Q(x)\big)$，

$P(x),Q(x)$ 中的 x 是约束变元；

$\exists x$ 的辖域为$R(x)$，

$R(x)$中的 x是约束变元；

$S(x)$中的 x 是自由变元。

例4、指出下列量词的辖域，并指出各式中的自由变元和约束变元。

(2) $\forall x\left(F(x) \wedge G(x,y)\right) \rightarrow \forall y F(y) \wedge R(x,y,z)$

例5、 设个体域为$A=\{a,b,c\}$将下面谓词公式中的量词消除，写出与之等值的命题公式。

(1) $\forall xP(x)\wedge\exists xR(x)$

例5、 设个体域为$A=\{a,b,c\}$将下面谓词公式中的量词消除，写出与之等值的命题公式。

（2）$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$

例5、 设个体域为$A=\{a,b,c\}$将下面谓词公式中的量词消除，写出与之等值的命题公式。

（3）$\forall x \exists y P(x,y)$

例6、构造下面推理的证明

前提 $\forall x(\neg P(x) \to Q(x)), \forall x \neg Q(x)$

结论 $\forall x P(x)$