



§ 2.3 谓词演算的推理规则

- 重点：** 全称指定规则（**US**）（Universal Specification）
存在指定规则（**ES**）（Existential Specification）
全称推广规则（**UG**）（Universal Generalization）
存在推广规则（**EG**）（Existential Specification）
- 了解：** 推理规则在推理中的正确使用。

1、全称指定规则（US）

$$\forall xA(x) \Rightarrow A(y)$$

要求：(1) y 是个体常项，或者是个体变项且在公式 $A(x)$ 中， x 不出现在量词 $\forall y$ 或 $\exists y$ 的辖域内。

(2) $A(y)$ 中约束变元个数与 $A(x)$ 中约束变元个数相同。

说明：若个体域中所有个体都满足谓词 A ，则任一个体 y 也满足谓词 A 。

意义：全称量词可以删除。

2、存在指定规则（ES）

$$\exists x A(x) \Rightarrow A(c)$$

要求：(1) c 是使 A 为真的特定的个体常项，
而不是个体变元。

(2) 通常使用这一规则时，选用前面推导步骤中未使用过的字母作为公式中的 c 。

说明：若个体域中存在某些个体满足谓词 A ，
那么一定有某个确定的个体 c 满足谓词 A 。

3、全称推广规则（UG）

$$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$$

要求：(1) y 是个体域中任一个体，且都有 $A(y)$ 为真。

4、存在推广规则（EG）

$$A(y) \Rightarrow \exists x A(x)$$

要求：(1) y 是个体常元或变元，

(2)在公式 $A(y)$ 中， y 不出现在量词 $\forall x$ 或 $\exists x$ 的辖域内。

注：考察以下推理过程

①	$\forall x \exists y P(x, y)$	P前提引入
②	$\exists y P(c, y)$	T,1, US
③	$P(c, d)$	T,2, ES
④	$\forall x P(x, d)$	T,3,UG

第④步是错误的，因为由**ES**引入的变元 d 不能理解成在 P 中自由出现，公式 P 不是对 d 的一切值都可证明的，所以在这种情况下，就不能使用**UG**规则。

例1： 证明苏格拉底三段论：“凡人都是要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的。”

解： 设 **$F(x)$** ： **x** 是人； **$G(x)$** ： **x** 是要死的； **a** ：苏格拉底

前提： $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)), F(a)$

结论： $G(a)$

证明：① $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ P前提引入

② $F(a) \rightarrow G(a)$ T,1, US

③ $F(a)$ P前提引入

④ $G(a)$ T,2,3,假言推理

例2、指出下列推理中的错误，并加以改正。

- (1) ① $\forall xP(x) \rightarrow Q(x)$ P前提引入
② $P(t) \rightarrow Q(t)$ T,1, US

解：在第一步中，全称量词的辖域为 $P(x)$ ，而非 $P(x) \rightarrow Q(x)$ ，所以不能直接使用**US**规则。

- ① $\forall xP(x) \rightarrow Q(x)$ P前提引入
② $\forall yP(y) \rightarrow Q(x)$ T,1, E
③ $\exists y(P(y) \rightarrow Q(x))$ T,2, E
④ $P(c) \rightarrow Q(x)$ T,3,ES

例2、指出下列推理中的错误，并加以改正。

(2) ① $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ P前提引入

② $P(a) \rightarrow Q(b)$ T,1, US

解：在第一步中， $P(x)$ 和 $Q(x)$ 均受同一个量词的限制，所以使用**US**规则时，替代 x 的变元符号必须一致。

① $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ P前提引入

② $P(t) \rightarrow Q(t)$ T,1, US

例2、指出下列推理中的错误，并加以改正。

(3) ① $\exists xP(x)$ P前提引入

② $P(c)$ T,1, ES

③ $\exists xQ(x)$ P前提引用

④ $Q(c)$ T,3,ES

解：在第3步中，由于量词是存在量词，所选用的替代 x 的常量符必须是前面推导中没有出现过的。

① $\exists xP(x)$ P前提引入

② $P(c)$ T,1, ES

③ $\exists xQ(x)$ P前提引用

④ $Q(a)$ T,3,ES

例2、指出下列推理中的错误，并加以改正。

(4) ① $P(a) \rightarrow \exists xQ(x)$ P前提引入

② $P(a) \rightarrow Q(a)$ T,1, ES

解：在第1步中，所给公式并非是存在量词在最前面，故不能直接使用**ES**规则。另外 a 是前面出现过的常量符，不能用来替代 x 。

① $P(a) \rightarrow \exists xQ(x)$ P前提引入

② $\exists x(P(a) \rightarrow Q(x))$ T,1, E

③ $P(a) \rightarrow Q(c)$ T,2, ES

例3、构造下面的推论的证明：

前提： $\exists xF(x) \wedge \forall xG(x)$

结论： $\exists x(F(x) \wedge G(x))$

证明：	①	$\exists xF(x) \wedge \forall xG(x)$	P前提引入
	②	$\exists xF(x)$	T,1,化简
	③	$F(c)$	T,2,ES
	④	$\forall xG(x)$	T,1,化简
	⑤	$G(c)$	T,4,US
	⑥	$F(c) \wedge G(c)$	T,3,5,合取式
	⑦	$\exists x(F(x) \wedge G(x))$	T,6,EG

例4、构造下面的推论的证明：

前提： $\neg \exists x(F(x) \wedge H(x)), \forall x(G(x) \rightarrow H(x))$

结论： $\forall x(G(x) \rightarrow \neg F(x))$

证明： ① $\neg \exists x(F(x) \wedge H(x))$	P前提引入
② $\forall x(\neg F(x) \vee \neg H(x))$	T,1,E
③ $\forall x(H(x) \rightarrow \neg F(x))$	T,2,E
④ $H(y) \rightarrow \neg F(y)$	T,3,US
⑤ $\forall x(G(x) \rightarrow H(x))$	P前提引入
⑥ $G(y) \rightarrow H(y)$	T,5,US
⑦ $G(y) \rightarrow \neg F(y)$	T,4,6,前提三段论
⑧ $\forall x(G(x) \rightarrow \neg F(x))$	T,7,UG

例5、构造下面的推论的证明：

前提： $\forall x(F(x) \vee G(x))$

结论： $\forall xF(x) \vee \exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \neg \forall xF(x) \rightarrow \exists xG(x)$
可用附加前提法

证明：	①	$\neg \forall xF(x)$	附加前提引入
	②	$\exists x \neg F(x)$	T,1,E
	③	$\neg F(a)$	T,2,ES
	④	$\forall x(F(x) \vee G(x))$	P前提引入
	⑤	$F(a) \vee G(a)$	T,4,US
	⑥	$G(a)$	T,3,5,析取三段论
	⑦	$\exists xG(x)$	T,6,EG
	⑧	$\neg \forall xF(x) \rightarrow \exists xG(x)$	CP规则

例6、在一阶逻辑中构造下面推理的证明：

有理数都是实数，有的有理数是整数。因此有的实数是整数。

解：

设 $P(x)$ ： x 是有理数； $Q(x)$ ： x 是实数； $R(x)$ ： x 是整数。

前提： $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, $\exists x(P(x) \wedge R(x))$

结论： $\exists x(Q(x) \wedge R(x))$

前提: $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x(P(x) \wedge R(x))$

结论: $\exists x(Q(x) \wedge R(x))$

证明:	①	$\exists x(P(x) \wedge R(x))$	P前提引入
	②	$P(a) \wedge R(a)$	T,1,ES
	③	$P(a)$	T,2,化简
	④	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	P前提引入
	⑤	$P(a) \rightarrow Q(a)$	T,4,US
	⑥	$Q(a)$	T,3,5,假言推理
	⑦	$R(a)$	T,2,化简
	⑧	$Q(a) \wedge R(a)$	T,6,7,合取式
	⑨	$\exists x(Q(x) \wedge R(x))$	T,8,EG

小结与例题

一、谓词演算公式及解释。

1、基本概念。

谓词公式；辖域，约束变项，自由变项；
代换实例；重言式，
矛盾式，可满足式。

2、应用。

- (1) 求某些公式在给定解释下的真值。
- (2) 判断某些简单公式的类型。

二、含有量词的永真公式。

基本概念。

等值式，常用等值式，永真蕴含式（及相应规则）；

三、谓词演算的推理理论。

全称量词消去规则（US）

全称量词引入规则（UG）

存在量词消去规则（ES）

存在量词引入规则（EG）

例1、在一阶逻辑中将下列命题符号化。

(1) 每一个有理数都是实数。

解： $Q(x)$: x 是有理数, $R(x)$: x 是实数,

$$\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$$

(2) 并非每一个实数都是有理数。

解： $R(x)$: x 是实数, $Q(x)$: x 是有理数,

$$\neg \forall x(R(x) \rightarrow Q(x))$$

(3) 任何金属均可溶解于某种液体中。

解: $P(x)$: x 是液体,

$G(x)$: x 是金属,

$R(x, y)$: x 溶解 y ,

$$\forall x (G(x) \rightarrow \exists y (P(y) \wedge R(y, x)))$$

例2、将下列命题译成自然语言，并确定其真值。

(个体域为 Z^+)

(1) $\forall x \exists y G(x, y)$ ，其中 $G(x, y): xy = y$

解：对任意正整数 x ，存在正整数 y ，

使得 $xy = y$ 。真值0。

(2) $\exists x \forall y F(x, y)$ ，其中 $F(x, y): x + y = y$

解：存在正整数 x ，使得对任意的正整数 y ，

满足 $x + y = y$ 。真值0。

例2、将下列命题译成自然语言，并确定其真值。

(个体域为 Z^+)

(3) $\forall x \exists y M(x, y)$ ，其中 $M(x, y): xy = 1$

解：对任意正整数 x ，存在正整数 y ，

使得 $xy = 1$ 。真值0。

(4) $\forall x \exists y N(x, y)$ ，其中 $N(x, y): y = 2x$

解：对任意正整数 x ，存在正整数 y ，

使得 $y = 2x$ 。真值1。

例3、指出下列量词的辖域，并指出各式中的自由变元和约束变元。

$$(1) \forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \wedge \exists xR(x) \vee S(x)$$

解： $\forall x$ 的辖域为 $(P(x) \leftrightarrow Q(x))$ ，
 $P(x), Q(x)$ 中的 x 是约束变元；
 $\exists x$ 的辖域为 $R(x)$ ，
 $R(x)$ 中的 x 是约束变元；
 $S(x)$ 中的 x 是自由变元。

例4、指出下列量词的辖域，并指出各式中的自由变元和约束变元。

$$(2) \forall x(F(x) \wedge G(x, y)) \rightarrow \forall yF(y) \wedge R(x, y, z)$$

解： $\forall x$ 的辖域为 $(F(x) \wedge G(x, y))$ ，

$F(x), G(x, y)$ 中的 x 是约束变元，

$G(x, y)$ 中的 y 是自由变元；

$\forall y$ 的辖域是 $F(y)$ ，

$F(y)$ 中的 y 是约束变元；

$R(x, y, z)$ 中的 x, y, z 都是自由变元。

例5、 设个体域为 $A = \{a, b, c\}$ 将下面谓词公式中的量词消除，写出与之等值的命题公式。

$$(1) \quad \forall x P(x) \wedge \exists x R(x)$$

解 $\forall x P(x) \wedge \exists x R(x)$

$$\Leftrightarrow (P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)) \wedge (R(a) \vee R(b) \vee R(c))$$

例5、 设个体域为 $A = \{a, b, c\}$ 将下面谓词公式中的量词消除，写出与之等值的命题公式。

$$(2) \quad \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

解 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

$$\Leftrightarrow (P(a) \rightarrow Q(a)) \wedge (P(b) \rightarrow Q(b)) \wedge (P(c) \rightarrow Q(c))$$

例5、 设个体域为 $A = \{a, b, c\}$ 将下面谓词公式中的量词消除，写出与之等值的命题公式。

$$(3) \quad \forall x \exists y P(x, y)$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \forall x \exists y P(x, y) &\Leftrightarrow (P(a, a) \vee P(a, b) \vee P(a, c)) \wedge \\ &\quad (P(b, a) \vee P(b, b) \vee P(b, c)) \\ &\quad \wedge (P(c, a) \vee P(c, b) \vee P(c, c)) \end{aligned}$$

例6、构造下面推理的证明

前提 $\forall x(\neg P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\neg Q(x)$

结论 $\forall xP(x)$

证明:	① $\forall x(\neg P(x) \rightarrow Q(x))$	P前提引入
	② $\neg P(y) \rightarrow Q(y)$	T,1, US
	③ $\forall x\neg Q(x)$	P前提引入
	④ $\neg Q(y)$	T,3,US
	⑤ $P(y)$	T,2,4,拒取式
	⑥ $\forall xP(x)$	T,5,UG

谢 谢！