4.4 次序关系

一、偏序集合

1、偏序集合的定义。

定义1：若A上关系R满足**自反**、**反对称**、**传递**，则称R为A上的**偏序关系**，简称**偏序**，记作$\leq$ 或 $\preceq$ 。

若$\langle x, y\rangle \in R$，记 $x \leq y$，读作x小于或等于y，说明x在偏序上排在y的前面或相同。

集合 A与 A上的偏序关系 R一起叫做**偏序集**，记作$\langle A, R\rangle$ 。

定义2：设$\langle A,\leq\rangle$是一偏序集合，

$\forall x, y \in A$,若$x \leq y$或$y \leq x$，**则称x与y是可比的。**

例1、偏序集合的常见例子。

整数集上的小于等于关系 $\langle Q, R_{\leq}\rangle$

A的幂集$\rho(A)$上的包含关系 $\langle \rho(A), R_{\subseteq}\rangle$

集合A上的恒等关系 $\langle A, I_A\rangle$

正整数集上的整除关系 $\langle Z^+, R_{整除}\rangle$

2、哈斯图($Hasse$)。（偏序集合的简化的关系图）

步骤如下：

(1) A中的每个元素用结点表示，

若 $x \le y$，结点 x 排在 y结点的下方。

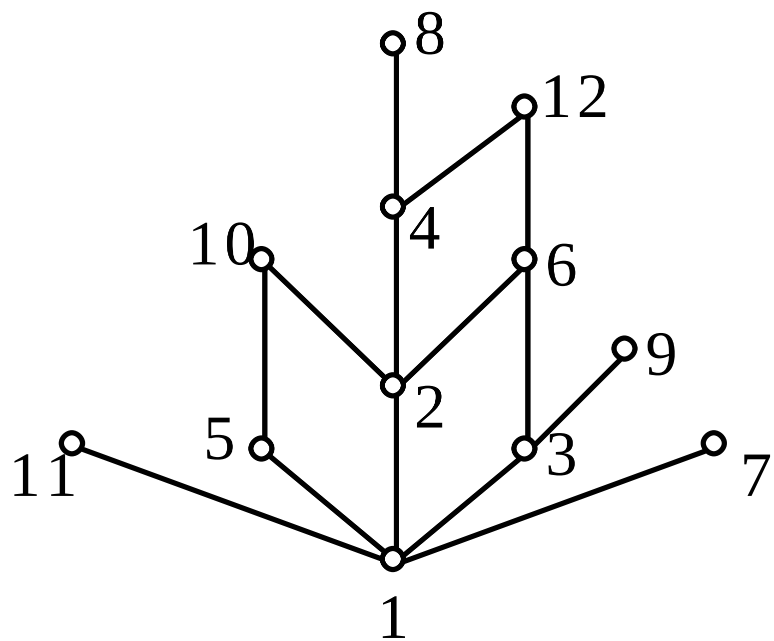
(2) 不画自回路

(3)不画由传递性所蕴含的边，即若 $x \le y$,且仅当没有其他元素 z，使得$x \le z \le y$时，才画一条从 x 到 y 的线。

例2、画出 $\langle A, R_{\text{整除}} \rangle$ 的哈斯图，其中 A 分别为

(1) $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

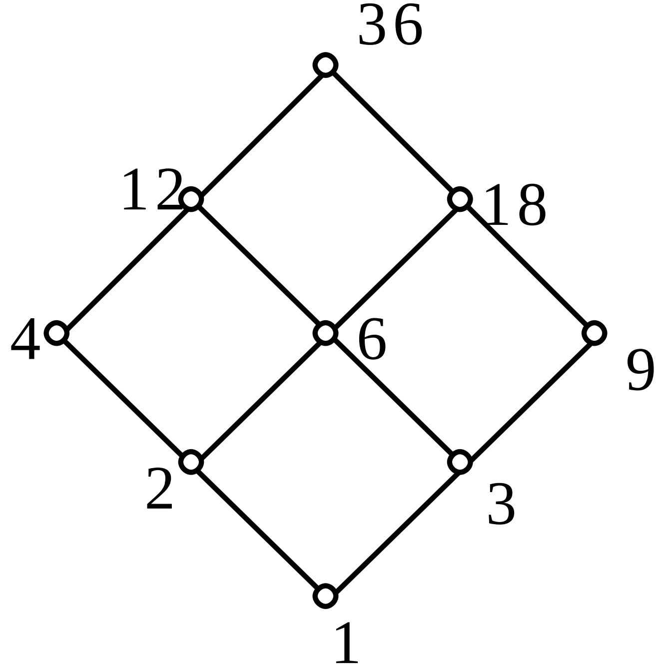
解：哈斯图：



例2、画出 $\langle A, R_{整除} \rangle$ 的哈斯图，其中 A 分别为

(2) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

解：哈斯图：

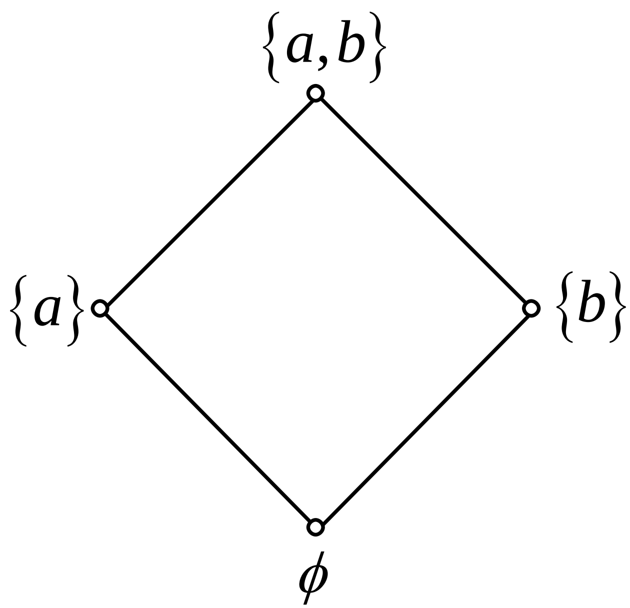


例3、画出 $\langle \rho(A), R_{\subseteq} \rangle$ 的哈斯图，其中A 分别为

(1) $A=\{a,b\}$

解： $\rho(A)=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

哈斯图：



例3、画出 $\langle \rho(A), R_{\subseteq} \rangle$ 的哈斯图，其中 A 分别为

(2) $A = \{a, b, c\}$

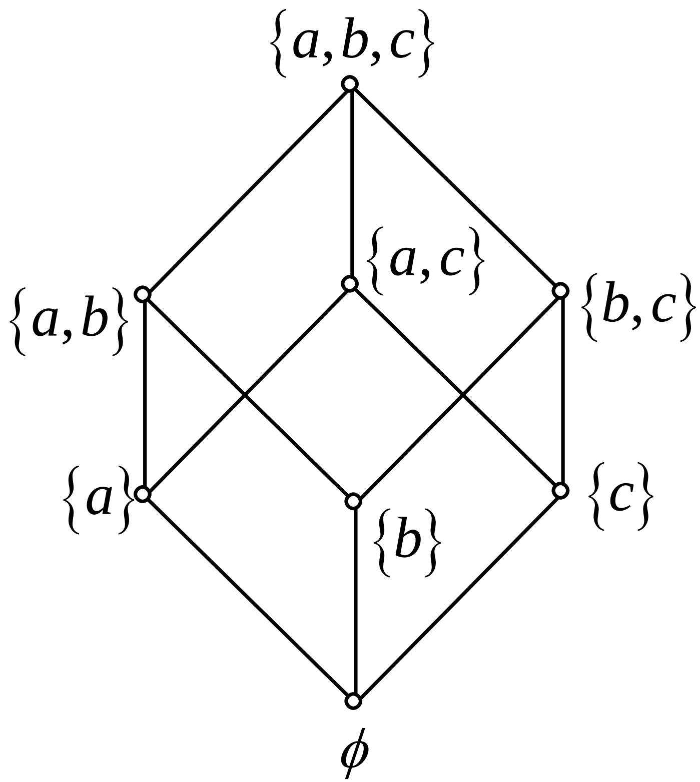
解： $P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\},$

$\{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

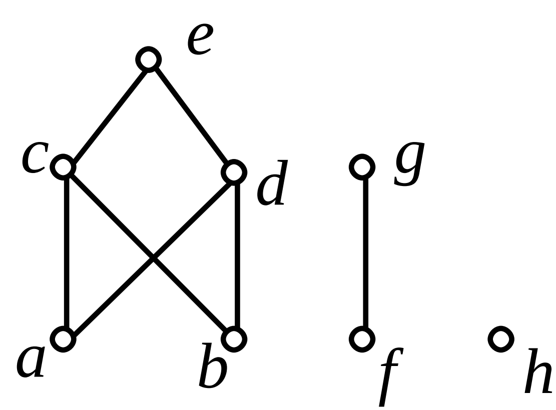
例3、画出 $\langle \rho(A), R_{\subseteq} \rangle$ 的哈斯图，其中A分别为

(2) $A=\{a,b,c\}$

解：哈斯图：



例4、已知偏序集$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R}_{\leq} \rangle$的哈斯图(右图)，求集合$A$的偏序关系$\leq$。



解：$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$$\boldsymbol{R}_{\leq} = \{\langle a,c \rangle, \langle a,d \rangle, \langle a,e \rangle, \langle b,c \rangle, \langle b,d \rangle,$$

$$\langle b,e \rangle, \langle c,e \rangle, \langle d,e \rangle, \langle f,g \rangle\} \cup I_A$$

二、偏序集中极小元，极大元，最小元，最大元，上界，下界，上确界，下确界。

1、极大、小元，最大、小元。

定义：设$\langle A, \leq \rangle$为偏序集，$B \subseteq A$，

(1) 若$\exists y \in B$，使得$\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$成立，

则称y是B的**最小元**。

(2) 若$\exists y \in B$，使得$\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$成立，

则称y是B的**最大元**。

二、偏序集中极小元，极大元，最小元，最大元，上界，下界，上确界，下确界。

1、极大、小元，最大、小元。

定义：设$\langle A, \leq \rangle$为偏序集，$B \subseteq A$，

(3) 若$\exists y \in B$，使得$\neg \exists x(x \in B \wedge x < y)$成立，

则称y是B的**极小元**。

(4) 若$\exists y \in B$，使得$\neg \exists x(x \in B \wedge y < x)$成立，

则称y是B的**极大元**。

二、偏序集中极小元，极大元，最小元，最大元，上界，下界，上确界，下确界。

1、极大、小元，最大、小元。

由定义知：

$$\left.\begin{array}{l}\text{最小元} \in B, \text{ 小于} B \text{中其它元} \\ \\ \\ \text{最大元} \in B\text{，大于} B \text{ 中其它元}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{不一定存在,} \\ \text{若存在必唯一}\end{array}$$

二、偏序集中极小元，极大元，最小元，

最大元，上界，下界，上确界，下确界。

1、极大、小元，最大、小元。

由定义知：

极小元$\in B$,

B中没有比它小的元

极大元$\in B$,

B中没有比它大的元

对于非空有限的偏序集合一定存在，可能多个

二、偏序集中极小元，极大元，最小元，最大元，上界，下界，上确界，下确界。

2、上、下界，上、下确界。

定义：设$\langle A, \preceq \rangle$为偏序集，$B \subseteq A$，

(1) 若存在$y \in A$，使得$\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$成立，则称$y$为$B$的上界。

(2) 若存在$y \in A$，使得$\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$成立，则称$y$为$B$的下界。

二、偏序集中极小元，极大元，最小元，最大元，上界，下界，上确界，下确界。

2、上、下界，上、下确界。

定义：设$\langle A,\leq\rangle$为偏序集，$B\subseteq A$，

(3) 令$C=\{y \mid y\text{为}B\text{的上界}\}$，称$C$中最小元为$B$的上确界(**最小上界**)。（记为lub)

(4) 令$D=\{y \mid y\text{为}B\text{的下界}\}$，称$D$中最大元为$B$的下确界(**最大下界**)。(记为glb)

二、偏序集中极小元，极大元，最小元，最大元，上界，下界，上确界，下确界。

2、上、下界，上、下确界。

由定义知：

上界$\in A$，大于 B中其它元

下界$\in A$，小于 B中其它元

不一定存在，若存在不一定只有一个

二、偏序集中极小元，极大元，最小元，

最大元，上界，下界，上确界，下确界。

2、上、下界，上、下确界。

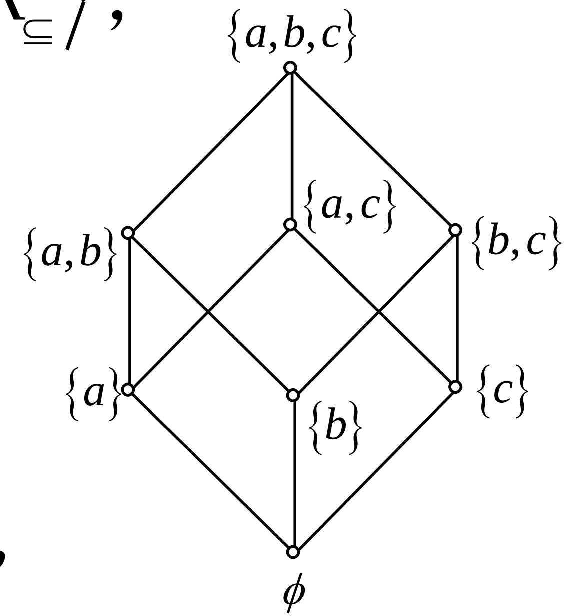
由定义知：

上确界——最小的上界
下确界——最大的下界

不一定存在，
若存在必唯一

例5、$A=\{a,b,c\}$，偏序集$\langle\rho(A),R_{\subseteq}\rangle$，求$B$的最大、小元，极大、小元，上、下界，上、下确界。

(1) $B=\{\{a\},\{c\},\{b,c\}\}$



解：B的最大元：无，最小元：无，

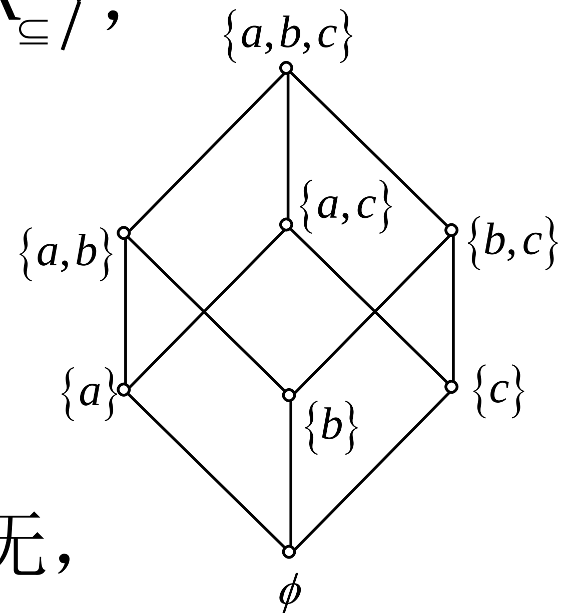
极大元：$\{a\},\{b,c\}$，极小元：$\{a\},\{c\}$，

上界：$\{a,b,c\}$，下界：ϕ，

上确界：$\{a,b,c\}$，下确界：ϕ。

例5、$A=\{a,b,c\}$，偏序集$\langle P(A),R_{\subseteq}\rangle$，求$B$的最大、小元，极大、小元，上、下界，上、下确界。

(2) $B=\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$



解：B的最大元：$\{a,b\}$，最小元：无，

极大元：$\{a,b\}$，极小元：$\{a\},\{b\}$，

上界：$\{a,b\},\{a,b,c\}$，下界：ϕ ，

上确界：$\{a,b\}$，下确界：ϕ 。

3. 定理：设 $\langle A, \leq \rangle$是偏序集合，B是A的子集

则： (1)如果b是B的最大元素，那么b是B的极大元素.

(2)如果b是B的最大元素，那b是B的上确界 .

(3)如果b是B的一个上界且$b \in B$，那么b是B的最大元素.

同理可得,最小元素、极小元素、下确界之间关系。

三、拟序集合

- 定义：如果集合A上的二元关系R是传递的和反自反的，那么R叫做A上的拟序。
- $<A，R>$称为拟序集合，常用符号$<$表示拟序。

注：显然拟序是反对称的。
（事实上，如果xRy和yRx，由传递性，xRx,这与反自反性矛盾）

例如

（1）实数集合中的$<$ 是拟序关系

（2）集合中的真包含是拟序关系。

四、线序集合和良序集合

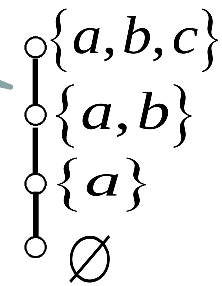
定义1：在偏序集合$\langle \boldsymbol{A},\leq\rangle$中，若 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in \boldsymbol{A}$, x与y都是可比的，那么$\leq$叫做A上的线序（或全序）。

$\langle \boldsymbol{A},\leq\rangle$ 叫做线序集合。

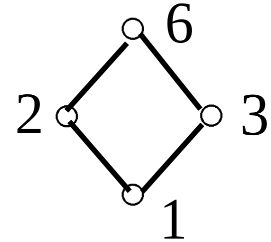
一个竖立的结点序列

例如

（1）$P=\{\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$, $\langle P,\subseteq\rangle$是线序集合。



（2）$\langle\{1,2,3,6\}$, 整除$\rangle$不是线序集合。



- 定义2：设$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{R} \rangle$是一线序集合，且$A$的每一非空子集都有一最小元素，那么$R$叫做$A$上的**良序**。

例如：

自然数集上的 $\leq$是良序。

整数集$\boldsymbol{Z}$上的$\leq$不是良序，因为$\boldsymbol{Z}$上的某些子集不包含最小元素（比如$\boldsymbol{Z}$本身）。

实数集$\boldsymbol{R}$上的 $\leq$不是良序，比如子集（0，1）。