§1.3 范 式

一个公式有很多的等价形式,但是有没有一个标准的形式呢?这就是我们要介绍的公式的范式。

先要介绍基本积和基本和的概念。此处用积表示合取，用和表示析取 。

1、基本积：命题公式中的变元及变元否定之积，称为基本积。

如：P、P∧Q、¬P∧Q、¬P∧Q∧P

2、基本和：命题公式中的变元及变元否定之和，称为基本和。

如：P、P∨Q、¬P∨Q、¬P∨¬Q∨P

定理： 一个基本积是永假式, 当且仅当它含有P，$\neg P$形式的两个因子。

证 （**充分性**） $P\wedge\neg P$是永假式, 而$Q\wedge F\Leftrightarrow F$, 所以含有$P$和$\neg P$形式的两个因子时, 此基本积是永假式。

（**必要性**） 用反证法。设基本积永假但不含P和$\neg P$形式的两个因子, 则给这个基本积中不带否定符的命题变元指派真值T, 带有否定符的命题变元指派真值F, 得基本积的真值是T, 但这与假设矛盾。

一个基本和是永真式, 当且仅当它含有P，$\neg P$形式的两个因子。

3、析取范式：与给定的命题公式 A 等价的公式，如果是由基本积之和组成，则称它是给定命题公式的析取范式。（公式的第一标准型）

形如：$A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee \cdots \vee A_n$，其中，$A_i$为基本积。

如：$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

4、合取范式：与给定的命题公式 A 等价的公式，如果是由基本和之积组成，则称它是给定命题公式的合取范式。（公式的第二标准型）

形如：$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \cdots \wedge A_n$，其中，$A_i$为基本和。

如:$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$

任何一个公式都有与之相等价的析取范式和合取范式。但是命题的析取范式和合取范式都不唯一，我们把运算符最少的析取范式和合取范式称为最简析取范式和最简合取范式。

求公式的析取范式和合取范式的步骤：

1) 消去$\rightarrow$ 和$\leftrightarrow$ ；

利用 $P\rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P\vee Q$

以及$P \leftrightarrow Q$的等价式

2) 否定号 $\neg$ 的消去或内移 ；

3) 利用$\wedge$和$\vee$的分配律。

例 1

(a) 求$P \wedge (P \rightarrow Q)$的析取范式。

解 $P \wedge (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge (\neg P \vee Q)$

$$\Leftrightarrow P \wedge \neg P \vee P \wedge Q$$

$P \wedge (P \rightarrow Q)$不是永假式，因为其析取范式中，后一个基本积非永假。

如果需要求出最简的析取范式，那么(1)式还可化简成

$$P \wedge (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow F \vee P \wedge Q$$

$$\Leftrightarrow P \wedge Q$$

$P \wedge Q$是$P \wedge (P \rightarrow Q)$的最简析取范式。

(b) 求 $P\wedge(Q\rightarrow R)$ 的合取范式与析取范式

解： $P\wedge(Q\rightarrow R)$

$\Leftrightarrow P\wedge(\neg Q\vee R)$ 合取范式

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge R)$ 析取范式

(c) 求公式 $\neg(P\vee Q) \leftrightarrow (P\wedge Q)$ 的最简析取范式

解：$\neg(P\vee Q) \leftrightarrow (P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg(P\vee Q)\wedge(P\wedge Q)) \vee ((P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q))$

$\Leftrightarrow \underbrace{(\neg P\wedge\neg Q\wedge P\wedge Q)}_{F} \vee ((P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q))$

$\Leftrightarrow ((P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q))$

$\Leftrightarrow \underbrace{(P\wedge\neg P)}_{F}\vee(Q\wedge\neg P)\vee(P\wedge\neg Q)\vee\underbrace{(Q\wedge\neg Q)}_{F}$

$\Leftrightarrow (Q\wedge\neg P)\vee(P\wedge\neg Q)$

命题的析取范式和合取范式都不唯一，不能作为等价命题公式的标准形式，进一步引入**主范式**.

1、**极小项**：在有 n 个命题变元的**基本积**中，若每个变元与其否定并不同时存在，且二者之一必出现一次且仅出现一次，则这种基本积称为极小项。

如：设P、Q为两个命题变元，构成的极小项有

$$P\wedge Q、\neg P\wedge Q、P\wedge\neg Q、\neg P\wedge\neg Q$$

则n个变元可以构成2^n个不同的极小项。如，3个变元P、Q、R可以构成8个极小项。

比如 $\neg P\wedge\neg Q\wedge R$、 $P\wedge Q\wedge R$

极小项的性质：

设P、Q为两个命题变元，小项的真值表为

P	Q	$P \wedge Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1

1) 任意两个小项都不是等价的；

2) 每个小项均对应一组指派，使得该小项真值为真，

其余 2^n-1 种指派下均为假；

3) $m_i \wedge m_j \Leftrightarrow F$, (i≠j)，即任两个小项不能同时为真。

我们把命题变元看成“1”，而命题变元的否定看成“0”，那么，若把P、Q、R按照一定的顺序排列下来可以把每个极小项依次对应于一个三位二进制数（编码）。如下：

极小项	二进制编码	对应的数	记作
$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	000	0	m_0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	001	1	m_1
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	010	2	m_2
$\neg P \wedge Q \wedge R$	011	3	m_3
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	100	4	m_4
$P \wedge \neg Q \wedge R$	101	5	m_5
$P \wedge Q \wedge \neg R$	110	6	m_6
$P \wedge Q \wedge R$	111	7	m_7