第一课时复习

1、将下列命题符号化：

（1）涵涵边读书边听音乐。

P:涵涵读书，　Q:涵涵听音乐。

原命题符号化为 $P \wedge Q$

（2）小凡要么住在1104室，要么住在1105室。

P：小凡住在1104室，Q：小凡住在1105室。

原命题符号化为 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

（3）现在没下雨，可也没出太阳，是阴天。

P：现在下雨，Q：现在出太阳了，R:现在是阴天。

原命题符号化为 $\neg P \wedge \neg Q \wedge R$

（4）我和小红都喜欢吃草莓。

我和小红都不喜欢吃草莓。

我和小红不都喜欢吃草莓。

P:我喜欢吃草莓。Q:小红喜欢吃草莓。

总结：P $\wedge$ Q：
“…与…”, “并且”，“既…又…”，“不但…而且…”，“虽然…，但是…”，“…，可是…”

P $\vee$ Q：
“…或…”

（5）小王只要用功，成绩就会好。 $P \rightarrow Q$

P：小王用功，Q：小王成绩好。

（6）小王只有用功，成绩才会好。 $Q \rightarrow P$

P：小王用功，Q：小王成绩好。

（7）如果你不是白痴，你就不会干那件傻事。 $\neg P \rightarrow \neg Q$

P：你是白痴，Q:你会干那件傻事。

总结：$P \rightarrow Q$:

"如果P，那么(则) Q",

"如果P，Q",

"只要P 就 Q"

"只有Q才P"

"P 仅当 Q"

"Q每当 P"

"P 是Q的充分条件"

"Q是P的必要条件"

"Q，除非$\neg$P"

列出公式 $\neg(p \rightarrow q) \wedge \neg q$ 的真值表

§1.2 公式分类及等价演算

判定问题:以有限步骤，来决定命题公式的永真性、永假性或可满足性的问题，在逻辑上称为判定问题。

判定问题的解决基于命题演算，一般有两个途径:

1）基于命题演算进行推导，看该命题是否和一个已知的永真、永假或可满足命题具有等价关系。

2）把命题化为某种标准形式----范式，范式具有很明显的永真性、永假性或可满足性。

一、公式的类型

（1）永真式(重言式)：无论命题变元的取值如何，公式 $A(P_1, P_2, ..., P_n)$ 的值均为真。

（2）永假式(矛盾式，不可满足的)：无论命题变元的取值如何，公式 $A(P_1, P_2, ..., P_n)$ 的值均为假。

（3）可满足式：公式 $A(P_1, P_2, ..., P_n)$ 至少存在一个成真指派。

（4）非永真式：公式 $A(P_1, P_2, ..., P_n)$ 至少存在一个成假指派。

例（**真值表法**）：（$p\wedge q$）$\wedge\neg p$，（$p\vee q$）$\vee\neg p$的真值表

p	q	$p\wedge q$	$\neg p$	$p\vee q$	（$p\wedge q$）$\wedge\neg p$	（$p\vee q$）$\vee\neg p$
T	T	T	F	T	F	T
T	F	F	F	T	F	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	F	F	T

（$p\wedge q$）$\wedge\neg p$为永假式，（$p\vee q$）$\vee\neg p$为重言式

二、恒等式（逻辑等价）

给定两个命题公式 A 和 B，设 P_1，P_2，…，P_n 是出现于 A 和 B 中的所有命题变元。若对于这 n 个命题变元的所有可能真值指派组合，命题公式 A 给出的真值都等于命题公式 B 给出的真值，（即，两个公式A，B恒同真假）则称命题公式 A 等价于命题公式 B，并记作$A \Leftrightarrow B$。

A 等价于 B ，也就意味着$A \leftrightarrow B$为永真式。

三、永真蕴含

当且仅当 $A\rightarrow B$ 是一个永真式，称命题公式 A 永真蕴涵命题公式 B，并记作 $A\Rightarrow B$，可读成 “A永真蕴含B” 。

注：1. “A永真蕴含B”的证明方法：

方法一：真值表法

方法二：假定A为真，若能推出B为真，则$A\rightarrow B$为永真式

方法三：假定B为假，若能推出A为假，则$A\rightarrow B$为永真式

2. $A\leftrightarrow B$为永真式 当且仅当 $A\rightarrow B=1$且$B\rightarrow A=1$，
即$A\Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A\Rightarrow B$且$B\Rightarrow A$

3. 若$A\rightarrow B=1$，则，$\neg B\rightarrow\neg A=1$

性质1：

若$A\Leftrightarrow B$、$B\Leftrightarrow C$，则$A\Leftrightarrow C$；若$A\Rightarrow B$、$B\Rightarrow C$，则$A\Rightarrow C$。

性质2：

若$A\Rightarrow B$、$A\Rightarrow C$，则$A\Rightarrow B\wedge C$

四、常用等价式：

E1： $\neg\neg P \Leftrightarrow P$ （双重否定）

E2： $P\wedge Q \Leftrightarrow Q\wedge P$ （交换律）

E3： $P\vee Q \Leftrightarrow Q\vee P$

E4： $(P\wedge Q)\wedge R \Leftrightarrow P\wedge (Q\wedge R)$ （结合律）

E5： $(P\vee Q)\vee R \Leftrightarrow P\vee (Q\vee R)$

E6： $P\wedge (Q\vee R) \Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee (P\wedge R)$ （分配律）

E7： $P\vee (Q\wedge R) \Leftrightarrow (P\vee Q)\wedge (P\vee R)$

E8： $\neg(P\vee Q) \Leftrightarrow \neg P\wedge \neg Q$ （DEMORGAN）

E9： $\neg(P\wedge Q) \Leftrightarrow \neg P\vee \neg Q$

E10： $P\wedge P \Leftrightarrow P$ （等幂律）

E11： $P\vee P \Leftrightarrow P$

E12： $R\vee (P\wedge \neg P) \Leftrightarrow R$ （吸收律）

E13： $R\wedge (P\vee \neg P) \Leftrightarrow R$

E14： $R\vee (P\vee \neg P) \Leftrightarrow T$

E15： $R\wedge (P\wedge \neg P) \Leftrightarrow F$

10

E16： $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ （联结词化归律）

E17： $\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

E18： $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$ （逆反律）

E19： $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$ （输出律）

E20： $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$

E21： $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

E22： $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

E23： $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$ （归缪律）

E24： $P \vee T \Leftrightarrow T$

E25： $P \wedge F \Leftrightarrow F$

五、常用蕴含式：

I1： $P \wedge Q \Rightarrow P$ （化简式）

I2： $P \wedge Q \Rightarrow Q$

I3： $P \Rightarrow P \vee Q$ （附加式）

I4： $Q \Rightarrow P \vee Q$

I5： $\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$

I6： $Q \Rightarrow P \rightarrow Q$

I7： $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$

I8： $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$

I9： $P, Q \Rightarrow P \wedge Q$

I10： $\neg P, (P \vee Q) \Rightarrow Q$ （析取三段论）

I11： $P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$ （假言推理）

I12： $\neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$ （拒绝式）

I13： $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$

I14： $P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$（穷举推理）

I15： $P \rightarrow Q \Rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$

六、代入规则与替换规则

1）代入实例：给定一个命题公式 B，设 P_1，P_2，…，P_n 是 B 中的全部命题变元。如果

(1)用某个命题公式 A_i 取代 B 中的某个变元 P_i；

(2)若用 A_i 取代 P_i，则必须用 A_i 取代 B 中出现的所有 P_i，

则由此而得到的命题公式 A，称为是命题公式 B 的**代入实例**。

2）代入规则：若原公式为永真式，则它的代入实例也为永真式。

例如： $\neg P \wedge (P \vee Q) \rightarrow Q$为永真式

则用R来取代P得到的公式（即代入实例）

$$\neg R \wedge (R \vee Q) \rightarrow Q$$

也为永真式。

或用公式$R \vee \neg S \rightarrow \neg P$来取代$Q$得到的公式(即代入实例)

$$\neg R \wedge (R \vee (R \vee \neg S \rightarrow \neg P)) \rightarrow (R \vee \neg S \rightarrow \neg P)$$

也为永真式。

对非重言式通常不作代入运算, 特别是偶然, 因所得代入实例的性质不确定, 没有用处。例如:

$$B: P\rightarrow Q$$（不是重言式）

原是偶然, 若用$R\vee\neg R$代换B中之Q, 得

$$A: P\rightarrow(R\vee\neg R)$$

却是重言式。

3）子公式：给定命题公式 A，设 A'是 A 的任何一部分，如果 A'也是一个命题公式（可以是原子或合式公式），则称 A'是 A 的子公式。

例如：公式$A=(P\rightarrow Q)\wedge R$,

4）替换规则：给定一个命题公式 A，设 A'是 A 的子公式。设 B'是一个命题公式。如果 $A'\Leftrightarrow B'$，则对于用B'取代 A 中的 A'而生成的新命题公式 B，有$A\Leftrightarrow B$。

例如：公式$A=(P\rightarrow Q)\wedge R$，将$P\rightarrow Q$替换成$\neg P\vee Q$，

得$B=(\neg P\vee Q)\wedge R$，有

$$(P\rightarrow Q)\wedge R$$
$$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q)\wedge R$$

七、练习

1、化简下列各式

$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P$

$P \wedge (((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow Q)$

2、证明下列各式（验证下列等价式）

$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$ （真值表法，答案见下一页）

$\neg (P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg (Q \wedge P)$

$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$

$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$真值表证明法

P	Q	R	$Q \rightarrow R$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	$(P \wedge Q) \rightarrow R$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

3、解决下面问题：

.1、赵、钱、孙、李、四人赛跑，问及比赛结果时，回答如下：

甲说：“赵第一，李第二”

乙说：“赵第二，孙第三”

丙说：“孙第四，钱第二”

已知，甲、乙、丙三个人的两个回答中有且只有一个是真的，且没有并列名次，问比赛结果如何？

提示：设A_1、A_2、A_3、A_4 分别表示赵得第一、二、三、四名

B_1、B_2、B_3、B_4 分别表示钱得第一、二、三、四名

C_1、C_2、C_3、C_4 分别表示孙得第一、二、三、四名

D_1、D_2、D_3、D_4 分别表示李得第一、二、三、四名

2. 甲、乙、丙、丁参加考试后，有人问他们谁的成绩最好，甲说“不是我”，乙说“是丁”，丙说“是乙”，丁说“不是我”，四个人只有一个人的答案符合实际，问谁的成绩最好？

提示：设A、B、C、D分别表示甲、乙、丙、丁成绩最好。

3. 已知：A说：“B说谎或C说谎”

B说：“A说谎”

C说：“A说谎，B也说谎”

问：谁说真话？

提示：设A、B、C分别表示A、B、C讲真话。

. 1、赵、钱、孙、李、四人赛跑，问及比赛结果时，回答如下：

甲说："赵第一，李第二"

乙说："赵第二，孙第三"

丙说："孙第四，钱第二"

已知，甲、乙、丙三个人的两个回答中有且只有一个是真的，且没有并列名次，问比赛结果如何？

解:设A1、A2、A3、A4 分别表示赵得第一、二、三、四名

B1、B2、B3、B4 分别表示钱得第一、二、三、四名

C1、C2、C3、C4 分别表示孙得第一、二、三、四名

D1、D2、D3、D4 分别表示李得第一、二、三、四名

则$A_1 \Leftrightarrow \neg D_2$， $A_2 \Leftrightarrow \neg C_3$， $C_4 \Leftrightarrow \neg B_2$，且$A_1 \wedge A_2=0$，$D_2 \wedge A_2=0$ ，

故$A_2 \Leftrightarrow A_2 \wedge 1 \Leftrightarrow A_2 \wedge (A_1 \vee D_2) \Leftrightarrow \underline{(A_2 \wedge A_1)} \vee \underline{(A_2 \wedge D_2)} \Leftrightarrow F$

则C_3为真， C_4为假， B_2为真，那么D_2为假， A_1为真，

比赛结果为：赵第一，钱第二，孙第三，李第四

2. 甲、乙、丙、丁参加考试后，有人问他们谁的成绩最好，甲说“不是我”，乙说“是丁”，丙说“是乙”，丁说“不是我”，四个人只有一个人的答案符合实际，问谁的成绩最好？

解：设A、B、C、D分别表示甲、乙、丙、丁成绩最好。

A	B	C	D	$\neg$A	$\neg$D
1	0	0	0		
0	1	0	0		
0	0	1	0		
0	0	0	1		

3. 已知：A说：“B说谎或C说谎”

B说：“A说谎”

C说：“A说谎，B也说谎”

问：谁说真话？

解：设A表示“A讲真话”，

B表示“B讲真话”，

C表示“C讲真话”，

则 $\neg B \vee \neg C \Leftrightarrow A$ (1)

$\neg A \Leftrightarrow B$ (2)

$\neg A \wedge \neg B \Leftrightarrow C$ (3)

则 $B \wedge \neg B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow F$, 故C说谎，再带入（1）得

$A \Leftrightarrow \neg B \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$, **故**A说真话。

八、对偶原理

1）对偶公式：给定一个命题公式A（仅含联结词$\neg$，$\wedge$，$\vee$的命题公式），若$\vee$用代换$\wedge$，用$\wedge$代换$\vee$，用 T 代换 F，用 F 代换 T，代换之后，得到一个命题公式A*，则称 A 和 A*是互为**对偶公式**。

如：$(P\wedge Q)\wedge(P\vee\neg Q)$　与　$(P\vee Q)\vee(P\wedge\neg Q)$

$P\wedge T$　与　$P\vee F$

2）定理1：设A和A*是对偶公式，$P_1, P_2, P_3 \cdots P_n$为在A，A*中出现的所有的变元，则有

$$\neg A(P_1, P_2, P_3 \cdots P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \neg P_3 \cdots \neg P_n)$$

如：$A=\neg P\vee\neg Q\wedge R$　　　$A^*=\neg P\wedge(\neg Q\vee R)$

3）定理2(对偶定理)

设$A \Leftrightarrow B$，且A、B为命题变元$P_1, P_2, P_3 \cdots P_n$和联结词$\neg, \wedge, \vee$构成的公式，A^*与B^*分别为A、B的对偶公式，则$A^* \Leftrightarrow B^*$。

如： $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

设$A \Rightarrow B$，且A、B为命题变元$P_1, P_2, P_3 \cdots P_n$和联结词$\neg, \wedge, \vee$构成的公式，A^*与B^*分别为A、B的对偶公式，则$B^* \Rightarrow A^*$。

如： $P \wedge Q \Rightarrow P$ $P \Rightarrow P \vee Q$