

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №1
по дисциплине «Построение и анализ алгоритмов»
Тема: Поиск с возвратом

Студент гр. 3343

Пименов П.В.

Преподаватель

Жангиров Т.Р.

Санкт-Петербург

2025

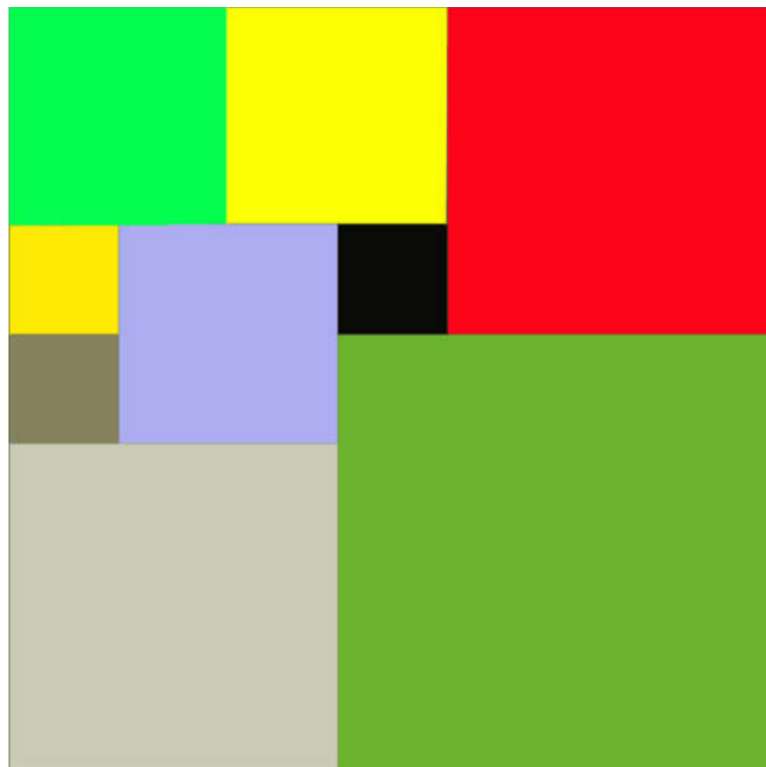
Цель работы.

Решение задачи квадрирования квадрата с помощью алгоритма бэктрекинга («поиск с возвратом»)

Задание.

У Вовы много квадратных обрезков доски. Их стороны (размер) изменяются от 1 до $N - 1$, и у него есть неограниченное число обрезков любого размера. Но ему очень хочется получить большую столешницу - квадрат размера N . Он может получить ее, собрав из уже имеющихся обрезков(квадратов).

Например, столешница размера 7×7 может быть построена из 9 обрезков.



Внутри столешницы не должно быть пустот, обрезки не должны выходить за пределы столешницы и не должны перекрываться. Кроме того, Вова хочет использовать минимально возможное число обрезков.

Входные данные

Размер столешницы - одно целое число N ($2 \leq N \leq 20$)

Выходные данные

Одно число K , задающее минимальное количество обрезков(квадратов), из которых можно построить столешницу(квадрат) заданного размера N . Далее

должны идти K строк, каждая из которых должна содержать три целых числа x, y и w, задающие координаты левого верхнего угла ($1 \leq x, y \leq N$) и длину стороны соответствующего обрезка(квадрата).

Пример входных данных

7

Соответствующие выходные данные

9

1 1 2

1 3 2

3 1 1

4 1 1

3 2 2

5 1 3

4 4 4

1 5 3

3 4 1

Выполнение работы.

Вар. 2р. Рекурсивный бэктрекинг. Исследование времени выполнения от размера квадрата.

Для решения задачи использован алгоритм бэктрекинга.

Описание реализованных функций и классов:

- class Grid – отвечает за работу с полем, на которое ставятся квадраты. Кроме этого, хранит частичные решения.
 - `vector<vector<int>>` grid – поле, на которое ставятся квадраты
 - `vector<vector<int>>` currentPartition – вектор троек x, y, w – текущего разбиения квадрата
 - `vector<vector<int>>` bestPartition – вектор троек x, y, w – лучшего на данный момент разбиения квадрата
 - `int bestCount` – количество квадратов в лучшем разбиении

- `void fill(int x, int y, int size, int value)` – заполняет область квадрат (x, y) – (x+size, y+size) на поле значением value
- `Grid(int n)` – конструктор, инициализирует grid и bestCount
- `int getSize()` – возвращает размер поля (N)
- `int getCurrentCount()` – возвращает количество квадратов в текущем разбиении (размер currentPartition)
- `int getBestCount()` – возвращает bestCount
- `vector<vector<int>>& getBestPartition()` – возвращает bestPartition (для вывода ответа)
- `void place(int x, int y, int size)` – добавляет новый квадрат соответствующего размера по нужным координатам в текущее разбиение и на поле
- `void revert()` – убирает последний поставленный квадрат из текущего разбиения (также стирая его с поля)
- `void saveAsBest()` – сохраняет текущее разбиение как лучшее
- `bool canPlace(int x, int y, int size)` – проверяет, можно ли поставить квадрат такого размера по таким координатам на поле
- `pair<int, int> firstNotFilled()` – возвращает координаты самой первой верхней левой незанятой клетки
- `bool isFilled()` – проверяет, заполнено ли поле
- `void backtrack(Grid& grid)` – рекурсивная функция поиска с возвратом. Принимает в качестве аргумента ссылку на Grid, с которым будет работать на каждом шаге. Сначала проверяется условие выхода (количество квадратов в текущем разбиении больше либо равно количеству квадратов в лучшем разбиении) – в этом случае можно возвращаться из рекурсии, т. к. это решение либо уже лучшее, либо будет хуже. Вычисляются координаты первой незакрашенной клетки. В случае, если поле уже закрашено, то решение сохраняется как лучшее и осуществляется возврат из рекурсии (так как количество квадратов меньше, чем в лучшем разбиении). После всех проверок осуществляется сам бэктрекинг – перебор квадратов всех размеров и попытка их расположить. Берем квадрат нового размера, проверяем можно ли его

поставить, если нет, берем другой квадрат, а если да – ставим, и снова запускаем бэктрекинг, но уже с поставленным квадратом. Если найдется лучшее разбиение в такой конфигурации, то оно сохранится. После выхода из запущенного бэктрекинга, Этот квадрат снимается с поля и берется квадрат следующего размера, цикл повторяется.

- `vector<vector<int>> solve(int n)` – метод, выполняющий решение задачи. Создает Grid, оптимизирует по возможности, запускает бэктрекинг, возвращает лучшее разбиение.

Оптимизации:

- Для четного N – лучшее разбиение будет состоять всего из 4 квадратов размера $N/2$.
- Для простого N – в разбиении всегда участвуют квадраты размеров $(N+1)/2$, $(N-1)/2$, $(N-1)/2$
- В остальных случаях (для нечетного составного N) – в разбиении всегда участвуют квадраты размеров $lscale * n / mf$, $sscale * n / mf$, $sscale * n / mf$, где mf – минимальный делитель N , $lscale = mf / 2 + 1$, а $sscale = mf - lscale$.

Сложность алгоритма:

- По памяти: $O(n^2)$ на создание поля $N \times N$ и хранение лучшего и текущего разбиений
- По времени: в лучшем случае решение получается за $O(1)$, остальных случаях сложность экспоненциальная – $O(n^n)$ (хотя и около 75% поля будет заполнено изначально).

Тестирование:

Входные данные	Выходные данные	Комментарий
7	9 1 1 4 5 1 3	Успех

	1 5 3 4 5 2 4 7 1 5 4 1 5 7 1 6 4 2 6 6 2	
6	4 1 1 3 4 1 3 1 4 3 4 4 3	Успех
9	6 1 1 6 7 1 3 1 7 3 7 4 3 4 7 3 7 7 3	Успех

Исследование:



Как видно на рисунке, время выполнения алгоритма сильно возрастает при увеличении размера квадрата (при больших простых N).

Выводы.

Разработан алгоритм для решения задачи квадрирования квадрата с помощью бэктрекинга. Проведено исследование времени выполнения алгоритма от размера квадрата.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Файл main.cpp:

```
#INCLUDE <Iostream>
#include <unordered_set>
#include <vector>

#define MIN_N 2
#define MAX_N 40

using namespace std;

class Grid {
private:
    vector<vector<int>>> grid;
    vector<vector<int>>> bestPartition;
    vector<vector<int>>> currentPartition;
    int bestCount;

    void fill(int x, int y, int size, int value) {
        for (int i = x; i < x + size; ++i) {
            for (int j = y; j < y + size; ++j) {
                grid[i][j] = value;
            }
        }
    }

public:
    Grid(int n) {
        grid = vector<vector<int>>>(n, vector<int>(n, 0));
        bestCount = n * n;
    }

    int getSize() { return grid.size(); }

    int getCurrentCount() { return currentPartition.size(); }

    int getBestCount() { return bestCount; }

    vector<vector<int>>>& getBestPartition() { return bestPartition; }

    void place(int x, int y, int size) {
        fill(x, y, size, currentPartition.size() + 1);
        currentPartition.push_back({x, y, size});
    }

    void revert() {
        if (!currentPartition.empty()) {
            auto lastSquare = currentPartition.back();
            fill(lastSquare[0], lastSquare[1], lastSquare[2], 0);
            currentPartition.pop_back();
        }
    }

    void saveAsBest() {
        print();
        cout << endl;

        bestPartition = currentPartition;
        bestCount = currentPartition.size();
    }

    bool canPlace(int x, int y, int size) {
```



```

        IF (X + SIZE > GRID.SIZE() || Y + SIZE > GRID.SIZE()) {
            RETURN FALSE;
        }
        FOR (INT I = X; I < X + SIZE; ++I) {
            FOR (INT J = Y; J < Y + SIZE; ++J) {
                IF (GRID[I][J] != 0) {
                    RETURN FALSE;
                }
            }
        }
        RETURN TRUE;
    }

    PAIR<INT, INT> FIRSTNOTFILLED() {
        FOR (INT I = 0; I < GRID.SIZE(); ++I) {
            FOR (INT J = 0; J < GRID[I].SIZE(); ++J) {
                IF (GRID[I][J] == 0) {
                    RETURN {I, J};
                }
            }
        }
        RETURN {-1, -1};
    }

    BOOL ISFILLED() { RETURN FIRSTNOTFILLED() == MAKE_PAIR(-1, -1); }

    VOID PRINT() {
        FOR (AUTO& ROW : GRID) {
            FOR (INT CELL : ROW) {
                COUT << CELL << " ";
            }
            COUT << ENDL;
        }
    }
};

VOID BACKTRACK(Grid& GRID) {
    IF (GRID.GETCURRENTCOUNT() >= GRID.GETBESTCOUNT()) {
        RETURN;
    }

    INT N = GRID.GETSIZE();

    PAIR<INT, INT> FIRSTNOTFILLED = GRID.FIRSTNOTFILLED();
    INT X = FIRSTNOTFILLED.FIRST, Y = FIRSTNOTFILLED.SECOND;

    // ЕСЛИ СВОБОДНЫХ КЛЕТОК НЕТ - РЕШЕНИЕ НАЙДЕНО
    IF (X == -1) {
        GRID.SAVEASBEST();
        RETURN;
    }

    // ПРОБУЕМ ПОСТАВИТЬ КВАДРАТЫ РАЗНЫХ РАЗМЕРОВ
    FOR (INT SIZE = MIN(MIN(N - X, N - Y), N - 1); SIZE >= 1; --SIZE) {
        IF (GRID.CANPLACE(X, Y, SIZE)) {
            GRID.PLACE(X, Y, SIZE);
            BACKTRACK(GRID);
            GRID.REVERT();
        }
    }
}

INT MINFACTOR(INT N) {

```

```

    FOR (INT I = 3; I * I <= N; ++I) {
        IF (N % I == 0) {
            RETURN I;
        }
    }
    RETURN 1;
}

VECTOR<VECTOR<INT>> SOLVE (INT N) {
    GRID GRID = GRID(N);

    // ОПТИМИЗАЦИИ
    IF (N % 2 == 0) { // N - четное
        INT SIZE = N / 2;
        GRID.PLACE(0, 0, SIZE);
        GRID.PLACE(SIZE, 0, SIZE);
        GRID.PLACE(0, SIZE, SIZE);
        GRID.PLACE(SIZE, SIZE, SIZE);
        GRID.SAVEAsBEST();
    }
    INT MF = MINFACTOR(N);
    IF (MF == 1) { // N - простое
        INT LSIZE = (N + 1) / 2, SSIZE = (N - 1) / 2;
        GRID.PLACE(0, 0, LSIZE);
        GRID.PLACE(LSIZE, 0, SSIZE);
        GRID.PLACE(0, LSIZE, SSIZE);
    } ELSE { // N - нечетное составное
        INT LSCALE = MF / 2 + 1, SSCALE = MF - LSCALE;
        INT LSIZE = LSCALE * N / MF, SSIZE = SSCALE * N / MF;
        GRID.PLACE(0, 0, LSIZE);
        GRID.PLACE(LSIZE, 0, SSIZE);
        GRID.PLACE(0, LSIZE, SSIZE);
    }

    IF (GRID.ISFILLED()) {
        RETURN GRID.GETBESTPARTITION();
    }

    BACKTRACK(GRID);

    RETURN GRID.GETBESTPARTITION();
}

INT MAIN() {
    INT N;
    CIN >> N;

    IF (N < MIN_N || N > MAX_N) {
        RETURN 0;
    }

    VECTOR<VECTOR<INT>> SOLUTION = SOLVE(N);

    COUT << SOLUTION.SIZE() << ENDL;
    FOR (AUTO& SQUARE : SOLUTION) {
        COUT << SQUARE[0] + 1 << " " << SQUARE[1] + 1 << " " << SQUARE[2]
            << ENDL;
    }
    RETURN 0;
}

```