අධ්‍යාපන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2027

General Certificate of Education (Adv.Level) Examination 2027

ප්‍රශ්න පත්‍ර අංක **04**
Paper No

10 **S** **I,II**

කාලය පැය 3 යි.
Three hours.

සංයුක්ත ගණිතය - දුෂ්‍යන්ත මහබදුගේ - සංයුක්ත ගණිතය - දුෂ්‍යන්ත මහබදුගේ - සංයුක්ත ගණිතය - දුෂ්‍යන්ත මහබදුගේ - සංයුක්ත ගණිතය
සංයුක්ත ගණිතය - දුෂ්‍යන්ත මහබදුගේ - සංයුක්ත ගණිතය - දුෂ්‍යන්ත මහබදුගේ - සංයුක්ත ගණිතය - දුෂ්‍යන්ත මහබදුගේ - සංයුක්ත ගණිතය
සංයුක්ත ගණිතය - දුෂ්‍යන්ත මහබදුගේ - සංයුක්ත ගණිතය - දුෂ්‍යන්ත මහබදුගේ - සංයුක්ත ගණිතය - දුෂ්‍යන්ත මහබදුගේ - සංයුක්ත ගණිතය

උපදෙස්

- ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකි.
  (**A** කොටස ප්‍රශ්න 10 ක් හා **B** කොටස ප්‍රශ්න 7 ක්)
- A කොටසේ සියළුම ප්‍රශ්න සඳහා පිළිතුරු ලිවිය යුතු අතර එම පිළිතුරු මෙම පත්‍රයේ ම සැපයිය යුතුය.
- B කොටසේ ප්‍රශ්න හතෙන් පහකට පමණක් පිළිතුරු සැපයිය යුතු ය. ඒ සඳහා ලියන කඩදාසි භාවිත කළ යුතුය.

උත්තරපත්‍ර පරීක්ෂක සටහන්

A කොටසේ ලකුණු විස්තරය	
01	
02	
03	
04	
05	
06	
07	
08	
09	
10	
එකතුව(A)	

B කොටසේ ලකුණු විස්තරය	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
එකතුව(B)	
එකතුව(A)	
මුළු එකතුව	
100%	
සංකේතය	

Part – A

- සියළුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න.

01. $ax^2 + bx + c = 0, a, c \neq 0$ සමීකරණයේ මූල $sin\ \alpha, cos\ \alpha$ නම්, $(a + c)^2 = b^2 + c^2$ බව ඔප්පු කරන්න. $sin^3\ \alpha + cos^3 \alpha$ හි අගය සොයන්න.

---

02. $log_a b = \frac{1}{log_b a}, a, b \in \mathbb{R}^+$ සම්බන්ධය භාවිතා කර $log_3(2x+5) + \frac{1}{log_{x+1} 3} = 2$ වන පරිදි x හි අගය සොයන්න.

---

03. $\tan A = \frac{5}{12}$ හා $\sin B = \frac{4}{5}$ නම්, $\sin(A+B)$ හි අගය සොයන්න. මෙහි $\pi < A < \frac{3\pi}{2}$ හා $\frac{\pi}{2} < B < \pi$ වේ.

---

04. $x^2 - 2(2\lambda + 1)x + 5\lambda^2 - 4 = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල තිබීමට අවශ්‍යතාවය සොයන්න.

---

05. P, Q, R ලක්ෂ්‍ය තුනක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\underline{a} + \underline{b}, 3\underline{a} - 4\underline{b}, 9\underline{a} - 19\underline{b}$ වෙයි. $\underline{a}$ සහ $\underline{b}$ යනු අභිශූන්‍ය නොවන සමාන්තර ද නොවන දෛශික වෙයි. P, Q, R ඒක රේඛීය බව පෙන්වා $PQ:QR$ අනුපාතය සොයන්න. S, T ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $2\underline{a} - \underline{b}$ සහ $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$ වෙයි. P, S, T **ඒක රේඛීය** වෙයි නම්, $2\alpha + \beta = 3$ වන බව සාධනය කරන්න.

---

06. $a, b, c \in \mathbb{R}$ හා $a \neq 1, b \neq 1$ නම්, $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$ බව පෙන්වා, ඒ නයින්,

$log_a b = \frac{1}{log_b a}$ බව **අපෝහනය** කරන්න. $log_3 x + log_9 x^2 + log_{27} x^3 = 3$ නම්,

x හි අගය සොයන්න.

---

07. $x^2 + kx + 1$ ප්‍රකාශනය $x^4 - 12x^2 + 8x + 3$ සාධකයක් වීම සඳහා k ට තිබිය හැකි අගය සොයා **එනයින්,** $x^4 - 12x^2 + 8x + 3 = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

---

08. $sec\theta + tan\theta = \sqrt{3}$ නම්, $sin\theta$ ගතහැකි අගයන් සොයන්න.

---

09. $f(x) \equiv ax^3 - x^2 - 5x + 3$ බහුපදය $x + 1$ න් බෙදූවිට, ශේෂය 0 වේ. a සොයන්න. a ට එම අගය ඇතිවිට $f(x)$ හි ඉතිරි සාධක සොයන්න.

---

10. වගු භාවිතා නොකොට $tan 15°$ හි අගය සොයන්න. එමඟින් $tan 75°$ හි අගය සොයන්න.

B -කොටස

- ඔබ තෝරාගත් ප්‍රශ්න 05 ක් සඳහා පිළිතුරු සපයන්න.

11. a) $f(x) = 4x^3 + 7x^2 + ax - 1$ යැයි ගනිමු. $(a \in \mathbb{R}), (4x - 1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් නම්, $a = 2$ බව පෙන්වන්න.
$f(x) = (4x - 1)(x + k)^2$ ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න.
(k යනු නියතයකි.) $(4x - 1)$යන්න $b(x + 1) + c$ ලෙස ලියා දක්වන්න.
b හා c යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.
ඒ නයින්, $f(x)$ බහුපදය $(x + 1)^3$ ගෙන් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

b) $f(x)$ හා $g(x)$ යනු x හි බහුපද දෙකකි.
$f(x)$ බහුපදය $3x^2 + x - 2$ න් බෙදූ විට ශේෂය $(x + 2\ )$ වන අතර $g(x)$ බහුපදය $(x^2 - 1\ )$ න් බෙදූ විට ශේෂය x වේ.
$[f(x) + g(x)]$ හි ඒකජ සාධකයක් සොයන්න.
එම ඒකජ සාධකයෙන් $f(x).g(x)$ බහුපදය බෙදූ විට ශේෂය (-1) වන බව ද පෙන්වන්න.

c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 13x + k$ වේ.
$(x - 3)$ යනු $f(x)$ හි සාධකයක් නම්, k හි අගය සොයන්න.
ඒනයින්, $f(x)$ ඒකජ සාධක වලට වෙන් කරන්න.

---

12. a) $tan\, x$ සහ $tan\, y$ ඇසුරෙන් $tan(x\ +\ y)$ සඳහා සූත්‍රය සඳහන් කරන්න.
$2x\ +\ y\ =\ \frac{\pi}{4}$ නම්, $tan\, y\ =\ \frac{1-2\tan x - \tan^2 x}{1+2\tan x - \tan^2 x}$ බව පෙන්වන්න.
$t^2 + 2t\ - 1 = 0$ සමීකරණයේ මූලයක් $tan\ \frac{\pi}{8}$ බවද, එහි අගය $\sqrt{2}\ -\ 1$ බවද **අපෝහනය** කරන්න.

b) $sin(A\ +\ B)$ යන්න $sin\, A\, , cos\, A\, , sin\, B$ හා $cos\, B$ ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න. $sin(90°\ -\ \theta)\ =\ cos\, \theta$ යොදා ගනිමින් $cos(A\ +\ B)\ =\ cos\, A\, cos\, B\ -\ sin\, A\, sin\, B$ බව පෙන්වන්න. **එනයින්** $cos(A\ -\ B)$ සඳහා සූත්‍රය **අපෝහනය**

කරන්න. තවද A හා B සඳහා සුදුසු අගයන් යොදා ගනිමින් $cos\,105°$ හා $sin\,75°$ සොයන්න.

c) $sin\,A\,, cos\,A\,, sin\,B\,, cos\,B$ ඇසුරෙන් $cos(A\,+\,B)$ හා $cos(A\,-\,B)$ ලියා දක්වන්න.

(i) $cos(90°\,+\,\theta)\;=\;-\,sin\,\theta$ හා

(ii) $2\,cos\,40°\;=\;\sqrt{3}\,cos\,10°\;-\;sin\,10°$ බව අපෝහනය කරන්න.

(iii) $cos(x\,-\,y)\;=\;a\,cos(x\,+\,y)$ නම් $cot\,x\,cot\,y\;=\;\frac{a+1}{\mathrm{a}-1}$ බව පෙන්වන්න.

---

13. a) $\frac{\sec 8A-1}{\sec 4A-1}=\frac{\tan 8A}{\tan 2A}$ බව සාධනය කරන්න.

b) $\sin\alpha+\sin\beta=a$ සහ $\cos\alpha+\cos\beta=b$ නම්, $\cos(\alpha+\beta)$ හා $\cos(\alpha-\beta)$ යන ප්‍රකාශන a සහ b ඇසුරෙන් සොයන්න. $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{8\,ab}{(a^2+b^2)^2-4a^2}$ බව පෙන්වන්න.

c) $sin\,A\,, sin\,B\,, cos\,A\,, cos\,B$ ඇසුරින් $sin(A\,+\,B)$ හා $sin(A\,-\,B)$ ලියා දක්වන්න. **එනයින්** $sin\,C\;+\;sin\,D\;=\;2\,sin\,\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$ බව පෙන්වන්න. $\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

d) $\sec x+\tan x=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$ බව පෙන්වා, $(\sec x-\tan x)$ සඳහා එවැනිම ප්‍රකාශනයක් අපෝහනය කරන්න. ඒ නයින්, $tan\frac{7\pi}{12}$ හා $tan\frac{\pi}{12}$ හි අගයන් කරණි ආකාරයට සොයන්න.

---

14. a) $2\cos\theta=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{x}\right]$ නම්,

$\cos 3\theta=\frac{1}{2}\left[x^3+\frac{1}{x^3}\right]$ හා $\cos 6\theta=\frac{1}{2}\left[x^6+\frac{1}{x^6}\right]$ බව සාධනය කරන්න.

b) $\tan 3x-\tan x=\frac{2\sin x}{cos\,3x}$ බව පෙන්වන්න.

එමඟින්, $\frac{\sin x}{cos\,3x}+\frac{\sin 3x}{cos\,9x}+\frac{\sin 9x}{cos\,27x}=\frac{1}{2}(\tan 27x-\tan x)$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්,

$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{28}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{28}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{28}\right)}{\cos\left(\frac{9\pi}{28}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{9\pi}{28}\right)}{\cos\left(\frac{27\pi}{28}\right)} = -\tan\left(\frac{\pi}{28}\right)$ බව පෙන්වන්න.

c) $\frac{\sin x}{\sin 2x} + \frac{\cos x}{\cos 2x} = 2\sin 3x\, cosec\, 4x$ බව පෙන්වන්න.

d) $\theta + \alpha = \frac{\pi}{6}$ නම්, $\left(\sqrt{3} + \tan\theta\right)\left(\sqrt{3} + \tan\alpha\right) = 4$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\tan\frac{\pi}{12}$ හි අගය අපෝහනය කරන්න.

---

15. a) $x = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}},\ y = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ නම්, $x^2 + xy + y^2 = 99$ බව පෙන්වන්න.

b) $\frac{x^3 + 3}{(x^2 - 1)(x + 1)}$ යන්න භින්න භාගවලට වෙන් කරන්න.

c) $f(x) = 5x^3 + 9x^2 + kx - 1$ වේ. $(5x - 1)$ යනු $f(x)$ හි සාධකයක් නම් k නියතය සොයන්න. $f(x)$ යන්න $(5x - 1)(x + \lambda)^2$ ආකාරයට ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න.

(මෙහි λ නිර්ණය කළ යුතු නියතයකි) $5x - 1 = \alpha(x + 1) + \beta$ ආකාරයට ලියන්න. එනයින් $f(x)$ බහුපදය $(x + 1)^3$ මගින් බෙදූවිට ශේෂය සොයන්න.

d) $x + \frac{1}{x} = t$ ආදේශය භාවිතයෙන් $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල සියල්ලම සොයන්න.

---

16. a) A හා B යනු O ලක්ෂ්‍යයක් සමඟ ඒක රේඛීය නොවන ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක් යැයි ගනිමු. O ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ යැයි ගනිමු. D යනු $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$ වන පරිදි දික්කළ AB මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යය නම්, O ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් D

ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය $2\underline{b}-\underline{a}$ බව පෙන්වන්න. OD මත E ලක්ෂ්‍යයක් පිහිටා ඇත්තේ $\overrightarrow{OE} = k\,(2b - a)$ වන අන්දමිනි. මෙහි $k < 1$ වේ. දික්කළ OA මත F ලක්ෂ්‍යයක් පිහිටා ඇත්තේ $\overrightarrow{OF} = \lambda\underline{a}$ වන අන්දමිනි. මෙහි $\lambda > 1$ වේ. $\underline{a}\,, \underline{b}\,, \lambda$ ඇසුරින් $\overrightarrow{BF}$ ද $\underline{a}, \underline{b}\,, k$ ඇසුරින් $\overrightarrow{EB}$ ද ප්‍රකාශ කරන්න.

$\overrightarrow{BF} = 3\,\overrightarrow{EB}$ වන බව දී ඇත්නම්, λ සහ k සොයන්න. $\overrightarrow{OD} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{OE}$ බව පෙන්වන්න.

b) O ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය 2 ක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ වේ. AB රේඛාව $\mu : \lambda$ අනුපාතයට අභ්‍යන්තරව බෙදෙන ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය $\frac{\lambda a + \mu b}{\lambda + \mu}$ බව පෙන්වන්න.

$\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ හා $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ වේ. OA හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය P වේ. $OQ : QB = 3:1$ හා $AR : RQ = 4:1$ වන පරිදි OB හා AQ මත පිළිවෙළින් Q හා R ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත.

i. $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ හා $\overrightarrow{OR}$ දෛශික $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ ඇසුරින් ප්‍රකාශ කරන්න.

ii. $\overrightarrow{BR} = \frac{1}{5}\left(\underline{a} - 2\underline{b}\right)$ බව පෙන්වන්න.

iii. B, R, P ඒක රේඛීය බව පෙන්වන්න.

---

17. a) $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයන් E හා F වේ. AE, AF රේඛාවලින් BD රේඛාව G, H හි දී ඡේදනය වේ. $\overrightarrow{AB} = \underline{a}, \overrightarrow{AD} = \underline{b}$ වේ.

i. $\overrightarrow{AE}$ දෛශිකය සොයන්න.

ii. $\overrightarrow{AG} = \lambda\overrightarrow{AE}$ ලෙස $\overrightarrow{AG}$ ලබා ගන්න.

iii. $\overrightarrow{BG} = \mu\overrightarrow{BD}$ ලෙස ලියා $\overrightarrow{BG}$ ලබා ගන්න.

$ABG\Delta$ යට දෛශික ඓක්‍යය යොදා ඒනයින්, $\mu = \frac{1}{3}$ බව පෙන්වන්න. BD රේඛාව G, H හි දී ත්‍රිච්ඡේදනය වන බව ඒනයින්, ලබා ගන්න.

b) i. $ABCD$ චතුරස්‍රයේ AC සහ BD විකර්ණවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයන් පිළිවෙළින් X, Y වේ.
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{YX}$ බව ඔප්පු කරන්න.

ii. $ABCD$ යනු සමාන්තරාස්‍රයකි. X යනු AB හි මධ්‍යලක්ෂ්‍යය වේ.
$\overrightarrow{AB} = \underline{a}, \overrightarrow{AD} = \underline{b}, \overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AC}$ සහ $\overrightarrow{DP} = \mu\overrightarrow{DX}$ ලෙස ලියන්න.
$\overrightarrow{AP}$ හි අගය $\lambda, \underline{a}, \underline{b}$ වලින් සොයන්න. ඒනයින්, P යනු AC හා DX රේඛාවල ත්‍රිච්ඡේද ලක්ෂ්‍ය බව පෙන්වන්න.

සංයුක්ත ගණිතය - දුෂන්ත මහබඩුගේ - සංයුක්ත ගණිතය - දුෂන්ත මහබඩුගේ - සංයුක්ත ගණිතය - දුෂන්ත මහබඩුගේ - සංයුක්ත ගණිතය
සංයුක්ත ගණිතය - දුෂන්ත මහබඩුගේ - සංයුක්ත ගණිතය - දුෂන්ත මහබඩුගේ - සංයුක්ත ගණිතය - දුෂන්ත මහබඩුගේ - සංයුක්ත ගණිතය
සංයුක්ත ගණිතය - දුෂන්ත මහබඩුගේ - සංයුක්ත ගණිතය - දුෂන්ත මහබඩුගේ - සංයුක්ත ගණිතය - දුෂන්ත මහබඩුගේ - සංයුක්ත ගණිතය
සංයුක්ත ගණිතය - දුෂන්ත මහබඩුගේ - සංයුක්ත ගණිතය - දුෂන්ත මහබඩුගේ - සංයුක්ත ගණිතය - දුෂන්ත මහබඩුගේ - සංයුක්ත ගණිතය

General Certificate of Education (Adv.Level) Examination 2027

Paper No 04

10 **S** **I,II**

Three hours.

Instructions

- **The paper consists of two parts**
- **(10 questions of part A and 7 Questions of part B)**
- **All questions of part A should be answered on the paper itself.**
- **5 out of 7 questions should be answered in part B.**
  Writing paper should be used for this.

Examiner Notes

Part A	
01	
02	
03	
04	
05	
06	
07	
08	
09	
10	
Total(A)	

Part B	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
Total(B)	
Total(A)	
Final Total	
100%	
Grade	

Part – A

- ANSWER ALL QUESTIONS

01. If the roots of $ax^2 + bx + c = 0, a, c \neq 0$ are $in\ \alpha, cos\ \alpha$.
Show that $(a + c)^2 = b^2 + c^2$ .Hence find the value of $sin^3\ \alpha + cos^3 \alpha$

---

02. Using the relationship $log_a b = \frac{1}{log_b a}, a, b \in \mathbb{R}^+$,
if $log_3(2x + 5) + \frac{1}{log_{x+1}3} = 2$ .Find the value of x

---

03. If $\tan A = \frac{5}{12}$ and $\sin B = \frac{4}{5}$,find the value of $\sin(A + B)$
Here $\pi < A < \frac{3\pi}{2}$ and $\frac{\pi}{2} < B < \pi$

---

04. If $x^2 - 2(2\lambda + 1)x + 5\lambda^2 - 4 = 0$ has real distinct roots find the range that λ can take.

---

05. The position vectors of three points P, Q, R are $\underline{a} + \underline{b}, 3\underline{a} - 4\underline{b}, 9\underline{a} - 19\underline{b}$. Here $\underline{a}$ and $\underline{b}$ are two non zero non parallel vectors. Show that P, Q, R are collinear and find the ratio $PQ: QR$ .The position vectors of two points S, T are $2\underline{a} - \underline{b}$ and $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$ .If P, S, T **are collinear** ,show that $2\alpha + \beta = 3$

---

06. Let $a, b, c \in \mathbb{R}$ and $a \neq 1, b \neq 1$ .Show that $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$ and hence deduce that $log_a b = \frac{1}{log_b a}$ .If $log_3 x + log_9 x^2 + log_{27} x^3 = 3$ find the value of x.

---

07. **Find the value of k in order for** $x^2 + kx + 1$ to be a factor of
$x^4 - 12x^2 + 8x + 3$ .Hence factorize $x^4 - 12x^2 + 8x + 3 = 0$

---

08. If $sec\theta + tan\theta = \sqrt{3}$,find the value of $sin\theta$

---

09. **When** $f(x) \equiv ax^3 - x^2 - 5x + 3$ is divided by $x + 1$ the remainder is 0 .
Find the value of a.For the above value of a .Hence completely factorize $f(x)$

---

10. Find the value of $tan 15°$ witout lograithmic tables.Hence find the value of $tan 75°$

Part-B

- <u>Answer 05 Question Only</u>

11. a) Let $f(x) = 4x^3 + 7x^2 + ax - 1$ $(a \in \mathbb{R}). If$ $(4x - 1)$ is a factor of $f(x)$. show that $a = 2$.

Show that $f(x)$ can be written in the form $f(x) = (4x - 1)(x + k)^2$

(Here k is a constant to be determined) .

Express $(4x - 1)$ in the form $b(x + 1) + c$

b and c are constants to be determined

Hence find the remainder when $f(x)$ is divided by $(x + 1)^3$

b) $f(x)$ and $g(x)$ are polynomials of x

When $f(x)$ is divided by $3x^2 + x - 2$ the remainder is $(x + 2\ )$

and when $g(x)$

is divided by $(x^2 - 1\ )$ the remainder is x

Find a factor of $[f(x) + g(x)]$

Show that when $f(x).\, g(x)$ is divided by the relevant factor the remainder is (-1)

c) Let $f(x) = x^3 + 3x^2 - 13x + k$

If $(x - 3)$ is a factor of $f(x)$ find the value of k

Hence factorize $f(x)$ completely

---

12. a) Express $tan\ (x + y)$ in terms of $tan\ x$ and $tany$

If $2x + y = \frac{\pi}{4}$ show that $tan\ y = \frac{1-2\tan x - \tan^2 x}{1+2\tan x - \tan^2 x}$

If one of the roots of $t^2 + 2t - 1 = 0$ can be given by $an\ \frac{\pi}{8}$,

show that its value is $\sqrt{2} - 1$

b) Write down $sin(A + B)$ in terms of $sin\ A$, $cos\ A$, $sin\ B$ and $os\ B$.

Using $sin(90° - \theta) = cos\ \theta$,

show that $cos(A + B) = cos\ A\ cos\ B - sin\ A\ sin\ B$. **Hence** deduce the formula of $cos(A - B)$.Using suitable substitutions for A and B,find the values of $cos\ 105°$ and $sin\ 75°$

c) In terms of $sin\ A$, $cos\ A$, $sin\ B$, $cos\ B$,express $cos(A + B)$ and $cos(A - B)$

(i) Deduce that $cos(90° + \theta) = -sin\ \theta$ and

(ii) $2\ cos\ 40° = \sqrt{3}\ cos\ 10° - sin\ 10°$

(iii) If $cos(x - y) = a\ cos(x + y)$ show that $cot\ x\ cot\ y = \frac{a+1}{a-1}$

---

13. a) Show that $\frac{\sec 8A-1}{\sec 4A-1} = \frac{\tan 8A}{\tan 2A}$

b) If $\sin\alpha + \sin\beta = a$ and $\cos\alpha + \cos\beta = b$,find the values of $\cos(\alpha+\beta)$ and $\cos(\alpha-\beta)$

Hence **deduce** that $\tan\alpha + \tan\beta = \frac{8\ ab}{(a^2+b^2)^2-4a^2}$

c) In terms of $sin\ A$, $sin\ B$, $cos\ A$, $cos\ B$ express $sin(A + B)$ and $sin(A - B)$

Hence show that $sin\ C + sin\ D = 2\ sin\ \frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

Hence **deduce** that $\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

d) Show that $\sec x + \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$. Deduce a similar expression for $(\sec x - \tan x)$ and hence find the values of $tan\frac{7\pi}{12}$ and $tan\frac{\pi}{12}$

14. a) If $2\cos\theta = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{x}\right]$,show that

$\cos 3\theta = \frac{1}{2}\left[x^3 + \frac{1}{x^3}\right]$ and $\cos 6\theta = \frac{1}{2}\left[x^6 + \frac{1}{x^6}\right]$

b) Show that $\tan 3x - \tan x = \frac{2\sin x}{\cos 3x}$

Hence show that $\frac{\sin x}{\cos 3x} + \frac{\sin 3x}{\cos 9x} + \frac{\sin 9x}{\cos 27x} = \frac{1}{2}(\tan 27x - \tan x)$

Using the above result show that

$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{28}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{28}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{28}\right)}{\cos\left(\frac{9\pi}{28}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{9\pi}{28}\right)}{\cos\left(\frac{27\pi}{28}\right)} = -tan\left(\frac{\pi}{28}\right)$

c) Show that $\frac{\sin x}{\sin 2x} + \frac{\cos x}{\cos 2x} = 2\sin 3x\ cosec\ 4x$

d) If $\theta + \alpha = \frac{\pi}{6}$,show that $\left(\sqrt{3} + \tan\theta\right)\left(\sqrt{3} + \tan\alpha\right) = 4$

Hence deduce the value of $\tan\frac{\pi}{12}$

---

15. a) If $x = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}},\ y = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ show that $x^2 + xy + y^2 = 99$

b) Find partial fractions for $\frac{x^3 + 3}{(x^2-1)(x+1)}$

c) $f(x) = 5x^3 + 9x^2 + kx - 1.$ $(5x - 1)$ is a factor of $f(x)$.

Find the constant k .

Show that $f(x)$ can be written in the form $(5x - 1)(x + \lambda)^2$.

(Here, λ is a constant to be determined.) Write $5x - 1 = \alpha(x + 1) + \beta$ in this form. Hence, find the remainder when the polynomial $f(x)$ is divided by $(x + 1)^3$.

d) Using the substitution $x + \frac{1}{x} = t$,find all the roots of

$x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$

---

16. a) A and B are two points that are not collinear with point O.The position vectors of A and B with respect to O are $\underline{a}$ and $\underline{b}$. D is a point on extended AB such that $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$.

Show that the position vector of D can be given by $2\underline{b} - \underline{a}$. E lies on OD such that $\overrightarrow{OE} = k\,(2b - a)$.Here $k < 1$. F lies on OA such that $\overrightarrow{OF} = \lambda\underline{a}$ .Here $\lambda > 1$. Express $\overrightarrow{BF}$ *in terms of* $\underline{a}$, $\underline{b}$, λ and $\overrightarrow{EB}$ in terms of $\underline{a}$, $\underline{b}$, k

If $\overrightarrow{BF} = 3\,\overrightarrow{EB}$ find λ and k .Hence show that $\overrightarrow{OD} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{OE}$

b) The position vectors of two points A and B with respect to point O are $\underline{a}$ and $\underline{b}$ .Show that the position vector of he point that divided the line AB in the ratio $\mu : \lambda$ can be given by $\frac{\lambda\underline{a} + \mu\underline{b}}{\lambda + \mu}$

Let $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ and $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ .The midpoint of OA is P. The points Q and R are located on OB and AQ such that $OQ : QB = 3 : 1$ and $AR : RQ = 4 : 1$

i. Express $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ and $\overrightarrow{OR}$ in terms of $\underline{a}$ and $\underline{b}$

ii. Show that $\overrightarrow{BR} = \frac{1}{5}\left(\underline{a} - 2\underline{b}\right)$

iii. Show that B, R, P are collinear

17. a) In the parallelogram $ABCD$,the midpoints of $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ are E and F AE, AF intersect BD at G, H respectively Also $\overrightarrow{AB} = \underline{a}, \overrightarrow{AD} = \underline{b}$

i. Find the vector $\overrightarrow{AE}$

ii. If $\overrightarrow{AG} = \lambda\overrightarrow{AE}$ find $\overrightarrow{AG}$

iii. If $\overrightarrow{BG} = \mu\overrightarrow{BD}$ find $\overrightarrow{BG}$

Using the laws of vector addition for $ABG\Delta$ Show that $\mu = \frac{1}{3}$ .Hence show that BD is trisected at G, H

b) i. In the quadrilateral $ABCD$,the midpoints of AC and BD are X, Y Show that $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{YX}$

ii. ABCD is a parallelogram. X is the midpoint of AB.
Let $\overrightarrow{AB} = \underline{a}, \overrightarrow{AD} = \underline{b}, \overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AC}$ and $\overrightarrow{DP} = \mu\overrightarrow{DX}$ .Express $\overrightarrow{AP}$ in terms of $\lambda, \underline{a}, \underline{b}$ .Hence show that P is the trisection point of AC and DX.