2014年全国研究生数学建模竞赛E题

乘用车物流运输计划问题

整车物流指的是按照客户订单对整车快速配送的全过程。随着我国汽车工业的高速发展，整车物流量，特别是乘用车的整车物流量迅速增长。图1、2、3就是乘用车整车物流实施过程中的画面。

乘用车生产厂家根据全国客户的购车订单，向物流公司下达运输乘用车到全国各地的任务，物流公司则根据下达的任务制定运输计划并配送这批乘用车。为此，物流公司首先要从他们当时可以

调用的“轿运车”中选择出若干辆轿运车，进而给出其中每一辆轿运车上乘用车的装载方案和目的地，以保证运输任务的完成。“轿运车”是通过公路来运输乘用车整车的专用运输车，根据型号的不同有单层和双层两种类型，由于单层轿运车实际中很少使用,本题仅考虑双层轿运车。双层轿运车又分为三种子型：上下层各装载 1 列乘用车，故记为 1-1 型（图 1）；下、上层分别装载 1、2 列，记为 1-2 型（图 2）；上、下层各装载 2 列，记为 2-2 型（图 3），每辆轿运车可以装载乘用车的最大数量在 6 到 27 辆之间。

在确保完成运输任务的前提下，物流

公司追求降低运输成本。但由于轿运车、乘用车有多种规格等原因，当前很多物流公司在制定运输计划时主要依赖调度人员的经验，在面对复杂的运输任务时，往往效率低下，而且运输成本不尽理想。**请你们为物流公司建立数学模型，给出通用算法和程序（评审时要查）**。

装载具体要求如下：每种轿运车上、下层装载区域均可等价看成长方形，各列乘用车均纵向摆放，相邻乘用车之间纵向及横向的安全车距均至少为0.1米，下层力争装满，上层两列力求对称，以保证轿运车行驶平稳。受层高限制，高度超过 1.7 米的乘用车只能装在 1-1、1-2 型下层。轿运车、乘用车规格（第五

问见附件）如下：

乘用车型号	长度(米)	宽度(米)	高度(米)
I	4.61	1.7	1.51
II	3.615	1.605	1.394
III	4.63	1.785	1.77

表 1 乘用车规格

轿运车类型	上下层长度(米)	上层宽度(米)	下层宽度(米)
1-1	19	2.7	2.7
1-2	24.3	3.5	2.7

表 2 轿运车规格

整车物流的运输成本计算较为繁杂,这里简化为：影响成本高低的首先是轿运车使用数量；其次，在轿运车使用数

量相同情况下，1-1 型轿运车的使用成本较低，2-2 型较高，1-2 型略低于前两者的平均值，但物流公司 1-2 型轿运车拥有量小，为方便后续任务安排，每次 1-2 型轿运车使用量不超过 1-1 型轿运车使用量的 20%；再次，在轿运车使用数量及型号均相同情况下，行驶里程短的成本低，注意因为该物流公司是全国性公司，在各地均会有整车物流业务，所以轿运车到达目的地后原地待命，无须放空返回。最后每次卸车成本几乎可以忽略。

请为物流公司安排以下五次运输，制定详细计划，含所需要各种类型轿运车的数量、每辆轿运车的乘用车装载方

案、行车路线。（前三问目的地只有一个，可提供一个通用程序；后两问也要给出启发式算法的程序，优化模型则更佳）：

1．物流公司要运输Ⅰ车型的乘用车 100 辆及Ⅱ车型的乘用车 68 辆。

2．物流公司要运输Ⅱ车型的乘用车 72 辆及Ⅲ车型的乘用车 52 辆。

3．物流公司要运输Ⅰ车型的乘用车 156 辆、Ⅱ车型的乘用车 102 辆及Ⅲ车型的乘用车 39 辆。

4．物流公司要运输166辆Ⅰ车型的乘用车（其中目的地是 A、B、C、D 的分别为 42、50、33、41 辆）和 78 辆Ⅱ车型的乘用车（其中目的地是 A、C 的，

分别为31、47辆），具体路线见图4，各段长度：OD=160，DC=76，DA=200，DB=120，BE=104，AE=60。

5. 附件的表1给出了物流公司需要运输的乘用车类型（含序号)、尺寸大小、数量和目的地，附件的表2给出可以调用的轿运车类型（含序号)、数量和装载区域大小（表里数据是下层装载区域的长和宽, 1-1型及2-2型轿运车上、下层装载区域相同；1-2型轿运车上、下层装载区域长度相同，但上层比下层宽0.8米。此外2-2型轿运车因为层高较低，上、下层均不能装载高度超过1.7米的乘用车。

因为第五问的装载、运输方案太多，提醒研究生，再找最优解是不切实际的，

可以改用启发式算法，就是类似有经验的调度人员的思想去安排任务，简化目标函数为容易求解，并且得到原来问题可能比较好的解。为此目标的简化一定要做到具体问题具体分析，洞察问题的主要矛盾或关键。一定要开阔思路，大胆创新。其实一般情况可行解容易获得，不断设法改进可行解也是常用方法。最后自行设计运输方案的表达。

注：程序可执行文件的电子版名：e队号.exe，如果无法用一个程序来完成，可以分几个程序，但应详细说明使用方法与步骤，最初可执行文件输入接口为EXCEL文件，见表3；最后可执行文件输出格式是一个EXCEL文件，具体字段内

容见表 4。最后统计各型号轿运车使用数量（仍然按轿用车的序号顺序排列，没有使用的类型记为 0），单列一个 EXCEL 文件。

图 1、1-1 型轿运车

图 2、1-2 轿运车

图 3、2-2 型轿运车

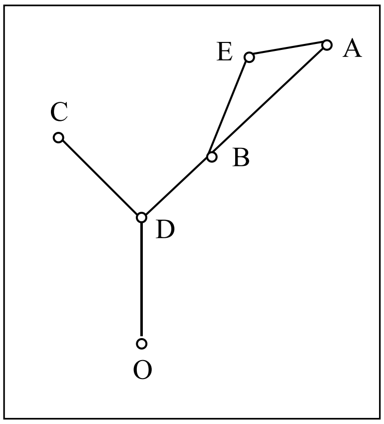
表 3 输入格式

乘用车序号（即类型）	需要运输的乘用车数量（如果没有，对应位置填 0）
1	
2	
3	
4	
…	

表 4 输出格式

轿用车类型（第五问是序号）	相同类型、相同装载方式的车辆数	装在上层序号为 1 乘用车数量	装在上层序号为 2 乘用车数量	……	装在下层序号为 1 乘用车数量	装在下层序号为 2 乘用车数量	……	中间停靠地	目的地
*									
*									
*									
*									
*									

注：（如果没有，对应位置填 0）



D

图 4

序号	类型		长	宽	高	拥有量（辆）
1	八位双桥边轮厢式	1-1 型	19	2.7	4.35	21
2	十位双桥双轮厢式	1-1 型	18.3	2.9	4.4	18
3	十二位双桥双轮厢式	1-1 型	24.3	2.7	4.3	22
4	十位双桥边轮厢式	1-1 型	22	2.7	4.35	15
5	十九位双桥双轮框架	1-2 型	23.7	2.8	3.9	10
6	十位单桥双轮框架	1-1 型	18.2	2.7	3.6	25
7	十位单桥双轮框架	1-1 型	21	2.7	3.6	4
8	十位单桥双轮框架	1-1 型	21	2.7	3.9	16
9	十九位双桥双轮框架	2-2 型	19	3.5	3.4	5

10 十七位双桥双轮框架 1-2 型 23.3 2.7 4.35 15

车型编号	主机厂名称	品牌	车型	长度(mm)	宽度(mm)	高度(mm)	商品车车型类别	A需求数	B需求数	C需求数	D需求数	E需求数
1	北京奔驰-戴克	北京JEEP	大切诺基	4610	1826	1763	普通车	4	2	0	3	1
2	北京奔驰-戴克	北京奔驰-戴克	克莱斯勒300C	5015	1880	1475	中型车	2	3	0	4	2
3	北京现代	北京现代	雅绅特	4310	1695	1480	普通车	12	6	5	10	7
4	北京现代	北京现代	索纳塔	4747	1820	1440	普通车	15	8	4	9	6
5	比亚迪	比亚迪	F0	3460	1618	1465	微型车	12	8	7	21	6
6	比亚迪	比亚迪	F8	4490	1780	1405	普通车	10	12	14	9	13
7	昌河铃木	昌河铃木	利亚纳	4230	1690	1550	普通车	7	0	2	5	7
8	长安福特	长安马自达	马自达2劲翔	4270	1695	1480	普通车	5	3	12	5	4
9	长安福特	长安福特	福克斯三厢	4480	1840	1500	普通车	4	0	6	8	5
10	长安铃木	长安铃木	天语SX4	4135	1755	1605	普通车	6	0	0	3	2
11	长安汽车	长安	志翔	4600	1800	1475	普通车	12	3	5	0	0
12	长城汽车	长城	嘉誉	4574	1704	1845	普通车	6	4	2	0	0
13	东风本田	东风本田	思域	4500	1755	1450	普通车	15	9	5	7	6
14	东风日产	东风日产	骏逸	4420	1690	1590	普通车	7	4	3	4	5
15	东风日产	东风日产	天籁	4930	1795	1475	中型车	4	2	3	1	2
16	东风悦达起亚	东风悦达起亚	赛拉图	4350	1735	1470	普通车	8	9	4	2	5
17	东南汽车	东南	得利卡	4945	1695	1970	中型车	3	0	0	0	2
18	广州本田	广州本田	CITY锋范	4400	1695	1470	普通车	13	7	4	8	5
19	广州本田	广州本田	雅图	4945	1845	1480	中型车	4	3	4	1	2
20	哈飞汽	哈飞汽	路宝	3588	1563	1533	微型车	3	5	15	5	8

	车	车										
21	海马汽车	海马汽车	福美来	4466	1705	1410	普通车	4	5	7	2	0
22	华晨宝马	华晨宝马	325i	4531	1817	1421	普通车	4	2	0	4	3
23	华晨汽车	华晨中华	尊驰	4880	1800	1450	中型车	5	3	2	6	5
24	华翔富奇	华翔富奇	华翔驭虎	5160	1895	1870/1930	中型车	7	2	4	3	2
25	黄海汽车	曙光	领航者CUV	4800	1770	1880	普通车	4	3	8	2	6
26	吉奥汽车	吉奥汽车	帅威	4590	1766	1767	普通车	0	1	5	7	8
27	吉利汽车	吉利	自由舰	4194	1680	1440	普通车	3	4	2	8	7
28	江淮汽车	江淮汽车	江淮宾悦	4865	1805	1450	普通车	12	8	4	2	6
29	南京菲亚特	南京菲亚特	派力奥	3763	1615	1440	微型车	3	5	14	4	7
30	奇瑞汽车	奇瑞	QQ6	3998	1640	1535	普通车	0	3	8	6	9
31	奇瑞汽车	奇瑞	瑞虎	4285	1765	1715	普通车	0	6	4	12	8
32	上海大众	上海大众	朗逸	4608	1743	1465	普通车	15	12	4	6	5
33	上海大众	上海大众	帕萨特	4789	1765	1470	普通车	10	8	6	7	0
34	上海大众	上海大众	桑塔纳	4687	1700	1450	普通车	0	2	12	6	5
35	上海通用	上海通用别克	凯越	4580	1725	1460/1500	普通车	9	4	3	7	5
36	上海通用	上海通用雪佛兰	科鲁兹	4603	1780	1480	普通车	5	6	8	0	9
37	上汽通用五菱	五菱	五菱扬光	3820	1495	1860	微型车	0	4	20	8	5
38	神龙汽车	东风标致	标致307 两厢	4212	1762	1531	普通车	8	7	10	3	5
39	天津一汽	天津一汽	威志三厢	4245	1680	1500	普通车	5	7	8	4	9
40	天津一汽	天津一汽	夏利两厢	3745	1615	1385	微型车	0	0	15	8	4

41	天津一汽丰田	天津一汽丰田	皇冠	4855	1780	1480	普通车	9	5	0	5	6
42	一汽大众	一汽大众	速腾	4544	1760	1464	普通车	8	7	4	5	5
43	一汽大众	一汽奥迪	奥迪 A6	5035	1855	1485	中型车	12	6	0	4	3
44	一汽轿车	红旗	红旗旗舰加长豪华型	6831	1980	1478	大型车	2	0	0	1	1
45	一汽轿车	一汽马自达	马自达 6	4670	1780	1435	普通车	15	13	9	10	6

这条题目有两个显著的优点：一是没有专业门槛，连中学生都可以看懂题目，因而适合所有专业的研究生；二是有比较大合适的创新空间比较大，有利于研究生寻找自身的差距，加速创新能力的培养。这条题目说明的确有一大类创造性，不听就是想不到，但是一听就明白，且效果特别明显。数学建模就是紧紧抓住这个关键，运用优秀的载体，通过研究生的亲身实践显著地提升研究生解决实际问题的能力。

在竞赛中，虽然有一千多队、五千多名研究生选择了这条题目，但完成得不理想，80%的研究生队前四问都没有回答得完全正确，而中学生如果有人指点

一天之内就能得到结果，说明大批研究生数学建模创造性明显不足。同时也暴露出研究生普遍存在思路不开阔、思维不活跃、思考不严谨、迷信书本、迷信权威、迷信计算机、不够踏实、不求甚解、不善于学习等缺点。但坏事也可以变成好事，一方面应该引起研究生培养部门的重视，努力纠正这一不良倾向；另一方面研究生也应该对号入座，寻找差距，尤其要动手做问题，因为创造性培养需要载体，结合实际问题更令人信服，更容易掌握，从而增强实力。因为虽然这条题目的结论对你可能一辈子都没有用到，但是其中的普遍规律、创造性和正确的思想方法可能会经常发挥作用。

前四问解题思路参考

　　这条题目要求回答每辆轿运车应该怎么装，这就是装载方案，每一辆轿车应该装在哪辆轿运车上。但是由于最优

方案中可能有多辆轿运车的装载方案相同，如果设使用每种装载方案的轿运车的辆数为未知数，求出这些未知数问题就解决了。由此首先要求出全部的装载方案，由于上下层装载情况不同，可以先讨论每一层再组合，本质是穷举。这个问题的数学模型也就非常清楚了，这是约束优化问题，目标函数是使用的轿运车最少，约束条件是把给定的轿车全部运走。

前三问的一般模型：前三问的解题思路是一致的，只是在具体求解时难度不一样，本质上可归结为一维下料问题。假设需要运输 m 辆 I 型乘用车、n 辆 II 型乘用车、k 辆 III 型乘用车。设 1-1 型轿运车有 N_1 种摆放方案，其中第 i 种方案中有 a_{1i} 辆 I 型乘用车、b_{1i} 辆 II 型乘用车、c_{1i} 辆 III 型乘用车；1-2 型轿运车有 N_2 种摆放方案，其中第 i 种方案中有 a_{2i} 辆 I

型乘用车、b_{2i} 辆 II 型乘用车、c_{2i} 辆 III 型乘用车。另外，在运输中 1-2 型轿运车的数量不超过 1-1 型轿运车的数量的 20%~~5 辆~~。假设在一次运输任务中，使用了 x_i 次 1-1 型轿运车的第 i 种摆放方案；y_i 次 1-2 型轿运车的第 i 种摆放方案。那么前三问的基本数学模型为

$$
\begin{aligned}
\min\ & P_1\left(\sum_{i=1}^{W_1} x_i + \sum_{i=1}^{W_2} y_i\right) + P_2\left(\sum_{i=1}^{W_2} y_i\right) \\
s.t.\ & \sum_{i=1}^{W_1} a_{1i}x_i + \sum_{i=1}^{W_2} a_{2i}y_i \ge m, \\
& \sum_{i=1}^{W_1} b_{1i}x_i + \sum_{i=1}^{W_2} b_{2i}y_i \ge n, \\
& \sum_{i=1}^{W_1} c_{1i}x_i + \sum_{i=1}^{W_2} c_{2i}y_i \ge k, \\
& \sum_{i=1}^{W_2} y_i \le 0.2\sum_{i=1}^{W_1} x_i, \\
& x_i, y_i \text{ 均为非负整数}
\end{aligned}
$$

其中 P_i 表示目标函数的优先级，即 P_i 中的 i 越小，其对应的目标函数的优先级越

高。这是一个两个目标的整数线性规划问题，且目标函数的重要性已给出，通常这样的问题可用序贯法求解（分散难点，逐次优化），即先求解

$$\min \sum_{i=1}^{N_1} x_i + \sum_{i=1}^{N_2} y_i$$

$$\begin{aligned} s.t.\ & \sum_{i=1}^{N_1} a_{1i} x_i + \sum_{i=1}^{N_2} a_{2i} y_i \ge m, \\ & \sum_{i=1}^{N_1} b_{1i} x_i + \sum_{i=1}^{N_2} b_{2i} y_i \ge n, \\ & \sum_{i=1}^{N_1} c_{1i} x_i + \sum_{i=1}^{N_2} c_{2i} y_i \ge k, \\ & \sum_{i=1}^{N_2} y_i \le 0.2 \sum_{i=1}^{N_1} x_i, \\ & x_i, y_i \text{ 均为非负整数}, \end{aligned}$$

并设其最优值为 v^*，再求解（约束条件几乎相同）

$$\min \sum_{i=1}^{N_2} y_i$$

$$s.t.\ \sum_{i=1}^{N_1} a_{1i}x_i + \sum_{i=1}^{N_2} a_{2i}y_i \ge m,$$

$$\sum_{i=1}^{N_1} b_{1i}x_i + \sum_{i=1}^{N_2} b_{2i}y_i \ge n,$$

$$\sum_{i=1}^{N_1} c_{1i}x_i + \sum_{i=1}^{N_2} c_{2i}y_i \ge k,$$

$$\sum_{i=1}^{N_2} y_i \le 0.2\sum_{i=1}^{N_1} x_i,$$

$$\sum_{i=1}^{N_1} x_i + \sum_{i=1}^{N_2} y_i \le v^*,$$

x_i, y_i 均为非负整数,

以找到最优方案。由于轿运车都有上、下两层，要讨论装载方案，可以从每层开始。

第一问。考虑两种情况。

第一、1-1 型轿运车长 19 米，装载 I 型乘用车和 II 型乘用车的基本摆放方案通过穷举得到如下结果（注意一定考虑

混装）：

基本摆放方案	I 型乘用车	II 型乘用车	余量（米）
1	4	0	0.26
2	3	1	1.255
3	2	2	2.25
4	1	3	3.245
5	0	5	0.525

因此，1-1 型轿运车装载 I 型乘用车和 II 型乘用车的摆放方案通过上、下层组合有以下 9 种（从上述 5 个方案中任抽两种，相同的再合并）：这里关于我的理解：上下层组合不应该是 5*5 种吗，每一层都有 5 种选择，上下层的顺序忽略不计，则 5+4+3+2+1=15 种方案，然后相同的合并后，还有 12 种方案。笔者在这里没有考虑到上下层可以装的一样，通过程序发现，应该为以下 12 种方案：

（8,0,0），（7,1,0），（6,2,0），（5,3,0），（4,5,0），（3,6,0），（2,7,0），（1,8,0），（0,10,0），（2,6），（4,4），（3,5）。其中（2,

6）是一次选择方案 3，一次选择方案 4 的结果。(4,4)是两次都用方案 3 的结果，（2,6）是两次都用方案 4 的结果。

第二、1-2 型轿运车长 24.3 米，装载 I 型乘用车和 II 型乘用车的基本摆放方案如下：

基本摆放方案	I 型乘用车	II 型乘用车	余量（米）
1	5	0	0.85
2	4	1	1.845
3	3	2	2.84
4	2	4	0.12
5	1	5	1.115
6	0	6	2.11

因此，1-2 型轿运车装载 I 型乘用车和 II 型乘用车的摆放方案有以下 16 种：

（15,0,0），（14,1,0），（13,2,0），（12,4,0），（11,5,0），（10,6,0），（9,8,0），（8,9,0），（7,10,0），（6,12,0），（5,13,0），（4,14,0），（3,15,0），（2,16,0），（1,17,0），（0,18,0）。

所以，第一问的数学模型为

$$\min P_1\left(\sum_{i=1}^{9} x_i + \sum_{i=1}^{16} y_i\right) + P_2\left(\sum_{i=1}^{16} y_i\right)$$

$$\begin{aligned}
s.t.\ & 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 2x_7 + x_8 \\
& + 15y_1 + 14y_2 + 13y_3 + 12y_4 + 11y_5 + 10y_6 + 9y_7 \\
& + 8y_8 + 7y_9 + 6y_{10} + 5y_{11} + 4y_{12} + 3y_{13} + 2y_{14} + y_{15} \geq m, \\
& x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 10x_9 \\
& + y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 5y_5 + 6y_6 + 8y_7 \\
& + 9y_8 + 10y_9 + 12y_{10} + 13y_{11} + 14y_{12} + 15y_{13} + 16y_{14} + 17y_{15} + 18y_{16} \geq n, \\
& \sum_{i=1}^{16} y_i \leq 0.2 \sum_{i=1}^{9} x_i, \\
& x_i, y_i \text{ 均为非负整数}
\end{aligned}$$

取 $m=100, n=68$，先使用 LINGO 求解

$$\min \sum_{i=1}^{9} x_i + \sum_{i=1}^{16} y_i$$

$$\begin{aligned}
s.t.\ & 8x_1+7x_2+6x_3+5x_4+4x_5+3x_6+2x_7+x_8 \\
& +15y_1+14y_2+13y_3+12y_4+11y_5+10y_6+9y_7 \\
& +8y_8+7y_9+6y_{10}+5y_{11}+4y_{12}+3y_{13}+2y_{14}+y_{15} \ge 100, \\
& x_2+2x_3+3x_4+5x_5+6x_6+7x_7+8x_8+10x_9 \\
& +y_2+2y_3+4y_4+5y_5+6y_6+8y_7 \\
& +9y_8+10y_9+12y_{10}+13y_{11}+14y_{12}+15y_{13}+16y_{14}+17y_{15}+18y_{16} \ge 68, \\
& \sum_{i=1}^{16} y_i \le 0.2 \sum_{i=1}^{9} x_i, \\
& x_i, y_i \text{ 均为非负整数},
\end{aligned}$$

得最优值为 $v^* = 18$；再使用 LINGO 求解

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{16} y_i \\
&s.t.\ 8x_1+7x_2+6x_3+5x_4+4x_5+3x_6+2x_7+x_8 \\
&\qquad +15y_1+14y_2+13y_3+12y_4+11y_5+10y_6+9y_7 \\
&\qquad +8y_8+7y_9+6y_{10}+5y_{11}+4y_{12}+3y_{13}+2y_{14}+y_{15} \ge 100, \\
&\quad x_2+2x_3+3x_4+5x_5+6x_6+7x_7+8x_8+10x_9 \\
&\qquad +y_2+2y_3+4y_4+5y_5+6y_6+8y_7 \\
&\qquad +9y_8+10y_9+12y_{10}+13y_{11}+14y_{12}+15y_{13}+16y_{14}+17y_{15}+18y_{16} \ge 68, \\
&\quad \sum_{i=1}^{16} y_i \le 0.2\sum_{i=1}^{9} x_i, \\
&\quad \sum_{i=1}^{9} x_i + \sum_{i=1}^{16} y_i \le 18, \\
&\quad x_i, y_i \text{均为非负整数},
\end{aligned}
$$

可得摆放方案如下：$x_1 = 11, x_9 = 5, y_{10} = 2,$ 即使用 16 辆 1-1 型轿运车，装载方案分别为（8,0,0）和（0,10,0）；2 辆 1-2 型轿运车，装载方案为（~~12~~6,~~6~~12,0）。（*注：所用 18 辆轿运车可装载 100 辆 I 型乘用车和 74 辆 II 型乘用车，空了 6 辆 II 型乘用车的车位，这里总共使用了 3 种装载方案*）

第二问。第二问中装载 II 型乘用车和 III 型乘用车，注意 III 型乘用车只能装载在下层。考虑两种情况。

第一、1-1 型轿运车长 19 米。上层单列只能装载 II 型乘用车，在装满的情况下只有一个摆放方案：（5, 0, 0）；下层单列可装载 II 型乘用车和 III 型乘用车，下层的基本摆放方案如下：

基本摆放方案	II 型乘用车	III 型乘用车	余量（米）
1	5	0	0.525
2	3	1	3.225
3	2	2	2.21
4	1	3	1.195
5	0	4	0.18

因此，1-1 型轿运车装载 II 型乘用车和 III 型乘用车的摆放方案有以下 5 种：

（10,0,0），（8,0,1），（7,0,2），（6,0,3），（5,0,4）。

第二、1-2 型轿运车长 24.3 米。上层双列只能装载 II 型乘用车，在装满的情况下只有一个摆放方案：（12, 0, 0）；下层单列可装载 II 型乘用车和 III 型乘用车，其摆放方案如下：

基本摆放方案	II 型乘用车	III 型乘用车	余量（米）
1	6	0	2.11
2	5	1	1.095
3	4	2	0.08
4	2	3	1.78
5	1	4	1.765
6	0	5	0.75

因此，1-2 型轿运车装载 II 型乘用车和 III 型乘用车的摆放方案有以下 6 种：（18,0,0），（17,0,1），（16,0,2），（14,0,3），（13,0,4），（12,0,5）。

所以，第二问的数学模型为

$$\min P_1\left(\sum_{i=1}^{5} x_i + \sum_{i=1}^{6} y_i\right) + P_2\left(\sum_{i=1}^{6} y_i\right)$$

$$s.t.\ 10x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 5x_5$$

$$+18y_1 + 17y_2 + 16y_3 + 14y_4 + 13y_5 + 12y_6 \geq m,$$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5$$

$$+y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 4y_5 + 5y_6 \geq k,$$

$$\sum_{i=1}^{6} y_i \leq 0.2 \sum_{i=1}^{5} x_i,$$

x_i, y_i 均为非负整数

取 $n = 72, k = 52$，先使用 LINGO 求解

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{5} x_i + \sum_{i=1}^{6} y_i \\
&s.t.\ 10x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 5x_5 \\
&\qquad + 18y_1 + 17y_2 + 16y_3 + 14y_4 + 13y_5 + 12y_6 \geq 72, \\
&\qquad x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 \\
&\qquad + y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 4y_5 + 5y_6 \geq 52, \\
&\qquad \sum_{i=1}^{6} y_i \leq 0.2 \sum_{i=1}^{5} x_i, \\
&\qquad x_i, y_i \text{ 均为非负整数}
\end{aligned}
$$

得最优值为 $v^* = 13$；再使用 LINGO 求解

$$\min \sum_{i=1}^{6} y_i$$

$$
\begin{aligned}
s.t.\ & 10x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 5x_5 \\
& \quad + 18y_1 + 17y_2 + 16y_3 + 14y_4 + 13y_5 + 12y_6 \geq 72, \\
& x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 \\
& \quad + y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 4y_5 + 5y_6 \geq 52, \\
& \sum_{i=1}^{6} y_i \leq 0.2 \sum_{i=1}^{5} x_i, \\
& \sum_{i=1}^{5} x_i + \sum_{i=1}^{6} y_i \leq 13, \\
& x_i, y_i \text{ 均为非负整数}
\end{aligned}
$$

可得摆放方案如下：$x_5 = 12, y_6 = 1$，即使用 12 辆 1-1 型轿运车（摆放方案为（0,5,4））和 1 *辆* 1-2 型轿运车（摆放方案为（0,12,5））。（*注：所用 13 辆轿运车可装载 72 辆 I 型乘用车和 53 辆 II 型乘用车，空了 1 辆 III 型乘用车的位子，这里总共使用了 2 种装载方案*）

第三问。第三问中装载 I 型、II 型和 III 型乘用车，注意 III 型乘用车只能装载在下层。考虑两种情况。

第一、1-1 型轿运车长 19 米。上层单列只能装载 I 型和 II 型乘用车，其基本摆放方案有 5 种：（4, 0, 0），（3, 1, 0），（2, 2, 0），（1, 3, 0），（0, 5, 0）。下层单列可装载 I 型、II 型和 III 型乘用车，其基本摆放方案如下：

基本摆放方案	I 型乘用车	II 型乘用车	III 型乘用车	余量（米）
1	4	0	0	0.26
2	3	1	0	1.255
3	2	2	0	2.25
4	1	3	0	3.245
5	0	5	0	0.525
6	3	0	1	0.24
7	2	0	2	0.22
8	1	0	3	0.20
9	0	0	4	0.18
10	0	3	1	3.225
11	0	2	2	2.21

12	0	1	3	1.195
13	2	1	1	1.235
14	1	2	1	2.23
15	1	1	2	1.215

因此，1-1 型轿运车装载 I 、II 型和 III 乘用车的摆放方案有以下 35 种方案：

（8,0,0），

（7,1,0），（7,0,1），

（6,2,0），（6,1,1），（6,0,2），

（5,3,0），（5,2,1），（5,1,2），（5,0,3），

（4,5,0），（4,3,1），（4,2,2），（4,1,3），（4,0,4），

（3,6,0），（3,5,1），（3,3,2），（3,2,3），（3,1,4），

（2,7,0），（2,6,1），（2,5,2），（2,3,3），（2,2,4），

（1,8,0），（1,7,1），（1,6,2），（1,5,3），（1,3,4），

（0,10,0），（0,8,1），（0,7,2），（0,6,3），（0,5,4）。

第二、1-2 型轿运车长 24.3 米。上层只能装载 I 型乘用车和 II 型乘用车，上层单列的基本摆放方案如下：

基本摆放方案	I 型乘用车	II 型乘用车	余量（米）
1	5	0	0.85
2	4	1	1.845
3	3	2	2.84
4	2	4	0.12
5	1	5	1.115
6	0	6	2.11

因此，上层双列装载 I 型和 II 型乘用车的摆放方案有 11 种：

（10,0,0），（9,1,0），（8,2,0），（7,4,0），（6,5,0），（5,6,0），（4,8,0），（3,9,0），（2,10,0），（1,11,0），（0,12,0）。

下层单列可装载 I 型、II 型和 III 型乘用车，其基本摆放方案如下：

基本摆放方案	I 型乘用车	II 型乘用车	III 型乘用车	余量（米）

1	5	0	0	0.85
2	4	1	0	1.845
3	3	2	0	2.84
4	2	4	0	0.12
5	1	5	0	1.115
6	0	6	0	2.11
7	0	5	1	1.095
8	0	4	2	0.08
9	0	2	3	1.78
10	0	1	4	1.765
11	0	0	5	0.75
12	4	0	1	0.83
13	3	0	2	0.81
14	2	0	3	0.79
15	1	0	4	0.77
16	3	1	1	1.825
17	2	2	1	2.82
18	2	1	2	1.805
19	1	4	1	0.1
20	1	2	2	2.8
21	1	1	3	1.785

因此，1-2 型轿运车装载 I 、II 型和 III 乘用车的摆放方案有以下 81 种方案：

（15,0,0），
（14,1,0），（14,0,1），
（13,2,0），（13,1,1），（13,0,2），
（12,4,0），（12,2,1），（12,1,2），（12,0,3），
（11,5,0），（11,4,1），（11,2,2），（11,1,3），
（11,0,4），
（10,6,0），（10,5,1），（10,4,2），（10,2,3），
（10,1,4），（10,0,5），
（9,8,0），（9,6,1），（9,5,2），（9,4,3），
（9,2,4），（9,1,5），
（8,9,0），（8,8,1），（8,6,2），（8,5,3），
（8,4,4），（8,2,5），
（7,10,0），（7,9,1），（7,8,2），（7,6,3），
（7,5,4），（7,4,5），
（6,12,0），（6,10,1），（6,9,2），（6,8,3），
（6,7,4），（6,5,5），
（5,13,0），（5,12,1），（5,10,2），（5,9,3），
（5,8,4），（5,6,5），
（4,14,0），（4,13,1），（4,12,2），（4,10,3），
（4,9,4），（4,8,5），
（3,15,0），（3,14,1），（3,13,2），（3,11,3），
（3,10,4），（3,9,5），

（2,16,0），（2,15,1），（2,14,2），（2,12,3），（2,11,4），（2,10,5），
（1,17,0），（1,16,1），（1,15,2），（1,13,3），（1,12,4），（1,11,5），
（0,18,0），（0,17,1），（0,16,2），（0,14,3），（0,13,4），（0,12,5），

这样共有 116 种装载方案，显然轿车仅增加 1 种，装载方案却是指数式增长。
记

$$
\begin{aligned}
a=(&8,7,7,6,6,6,5,5,5,5,4,4,4,4,4,3,3,3,3,3,2,2,2,2,2,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,\\
&15,14,14,13,13,13,12,12,12,12,11,11,11,11,11,10,10,10,10,10,9,9,9,9,9,9,\\
&8,8,8,8,8,8,7,7,7,7,7,7,6,6,6,6,6,6,5,5,5,5,5,5,4,4,4,4,4,4,3,3,3,3,3,3,2,2,\\
&2,2,2,2,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b=(&0,1,0,2,1,0,3,2,1,0,5,3,2,1,0,6,5,3,2,1,7,6,5,3,2,8,7,6,5,3,10,8,7,6,5,\\
&0,1,0,2,1,0,4,2,1,0,5,4,2,1,0,6,5,4,2,1,0,8,6,5,4,2,1,9,8,6,5,4,2,10,9,8,6,5,4,\\
&12,10,9,8,7,5,13,12,10,9,8,6,14,13,12,10,9,8,15,14,13,11,10,9,16,15,14,12,\\
&11,10,17,16,15,13,12,11,18,17,16,14,13,12),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c=(&0,0,1,0,1,2,0,1,2,3,0,1,2,3,4,0,1,2,3,4,0,1,2,3,4,0,1,2,3,4,0,1,2,3,4,\\
&0,0,1,0,1,2,0,1,2,3,0,1,2,3,4,0,1,2,3,4,5,0,1,2,3,4,5,0,1,2,3,4,5,0,1,2,3,4,5,0,1,\\
&2,3,4,5,0,1,2,3,4,5,0,1,2,3,4,5,0,1,2,3,4,5,0,1,2,3,4,5,0,1,2,3,4,5,0,1,2,3,4,5,\\
&0,1,2,3,4,5),
\end{aligned}
$$

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_{35})^T,\quad y=(y_1,y_2,\cdots,y_{81})^T,$$

那么，第三问的数学模型为

$$\min P_1\left(\sum_{i=1}^{35} x_i + \sum_{i=1}^{81} y_i\right) + P_2\left(\sum_{i=1}^{81} y_i\right)$$

$$s.t. \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} m \\ n \\ k \end{pmatrix},$$

$$\sum_{i=1}^{81} y_i \leq 0.2 \sum_{i=1}^{35} x_i,$$

x_i, y_i 均为非负整数,

取 $m=156, n=102, k=39$，先使用 LINGO 求解

$$\min \sum_{i=1}^{35} x_i + \sum_{i=1}^{81} y_i$$

$$s.t. \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} m \\ n \\ k \end{pmatrix},$$

$$\sum_{i=1}^{81} y_i \leq 0.2 \sum_{i=1}^{35} x_i,$$

x_i, y_i 均为非负整数,

得最优值为 $v^* = 30$；再使用 LINGO 求解

$$\min \sum_{i=1}^{81} y_i$$

$$s.t. \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} m \\ n \\ k \end{pmatrix},$$

$$\sum_{i=1}^{81} y_i \leq 0.2 \sum_{i=1}^{35} x_i,$$

$$\sum_{i=1}^{35} x_i + \sum_{i=1}^{81} y_i \leq 30,$$

$$x_i, y_i \text{ 均为非负整数},$$

可 得 摆 放 方 案 如 下 ：

$$x_1 = 15, x_2 = x_{29} = x_{31} = x_{33} = 1, x_{35} = 6, y_{39} = y_{63} = 1, y_{40} = 3,$$

即使用了 25 辆 1-1 型轿运车（其中，15 辆按（8,0,0）摆放；按方案（7,1,0）、（1,5,3）、（0,10,0）、（0,7,2）各摆放 1 辆；6 辆按（0,5,4）摆放）和 5 辆 1-2 型轿运

车（其中，3 辆按（6,12,0）装载；按方案~~（7,5,4）~~（7，4，5）和（3,9,5）各摆放 1 辆）。　　（*注：所用轿运车可载 156 辆 I 型乘用车、102 辆 II 型乘用车和 39 辆 III 型乘用车，所有轿运车刚好装满，总共使用了 9 种装载方案*）

第四问。分两个阶段进行。

第一阶段、由第一问的方法知最佳摆放方案为（8,0,0），（7,1,0），（6,2,0），（5,3,0），（4,5,0），（3,6,0），（2,7,0），（1,8,0），（0,10,0）、（15,0,0），（14,1,0），（13,2,0），（12,4,0），（11,5,0），（10,6,0），（9,8,0），（8,9,0），（7,10,0），（6,12,0），（5,13,0），（4,14,0），（3,15,0），（2,16,0），（1,17,0），（0,18,0）。假设按照以上摆放方案装运的轿运车~~全部在 D 处卸载~~终点是 D 的轿运车数量分别为 $x_1,,\cdots,x_{25}$；~~全部在 B 处卸载~~终点是 B 的数量分别为 $y_1,\cdots,y_{25}$；~~全部在 C 处卸载~~终点是 C 的

数量分别为 $z_1, , \cdots, z_{25}$; ~~全部在 A 处卸~~载终点是 A 的数量分别为 $w_1, \cdots, w_{25}$.（这里必须成倍地增加自变量，否则约束条件无法表达） 记

$$a=(8,7,6,5,4,3,2,1,0,15,14,13,12,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1,0)^T,$$

$$b=(0,1,2,3,5,6,7,8,10,0,1,2,4,5,6,8,9,10,12,13,14,15,16,17,18)^T,$$

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_{25})^T, \quad y=(y_1,y_2,\cdots,y_{25})^T,$$

$$z=(z_1,z_2,\cdots,z_{25})^T, \quad w=(w_1,w_2,\cdots,w_{25})^T,$$

则以轿运车最少为目标可建立如下数学模型：

$$\min \sum_{i=1}^{25} x_i + \sum_{i=1}^{25} y_i + \sum_{i=1}^{25} z_i + \sum_{i=1}^{25} w_i$$

四个和式代表四个目的地，有25种装载方案

$$s.t.\ a^T x \le 41,$$

$$a^T y + a^T z + a^T w \ge 125,$$

（满足A、B、C处对I型轿车的要求）

$a^T z \ge 33,$（满足C处对I型轿车的要求）

$b^T z \ge 47,$（满足C处对II型轿车的要求）

$a^T y + a^T w \ge 92,$（满足A、B处对I型轿车的要求）

$a^T y \le 50,$（与上式共同满足A处对I型轿车的要求）

$a^T w \ge 42,$（满足A处对I型轿车的要求）

$b^T w \ge 31,$（满足A处对II型轿车的要求）

$$a^T x + a^T y + a^T z + a^T w \ge 166,$$

（满足D处对I型轿车的要求）

$b^T z + b^T w \ge 78,$（满足A、C处对II型轿车的要求）

$$\sum_{i=10}^{25} (x_i + y_i + z_i + w_i) \le 0.2 \sum_{i=1}^{9} (x_i + y_i + z_i + w_i),$$

（满足对1-2型轿运车的比例要求）

---

x_i, y_i, z_i, w_i均为非负整数,

使用 LINGO 求解以上模型，得最优值为

$v^* = 25$；再使用 LINGO 求解

$$
\begin{aligned}
\max\ & \sum_{i=1}^{9} x_i + \sum_{i=1}^{9} y_i + \sum_{i=1}^{9} z_i + \sum_{i=1}^{9} w_i \\
s.t.\ & a^T x \le 41, \\
& a^T y + a^T z + a^T w \ge 125,\text{（可去，车型与目的地 约束共6个）} \\
& a^T z \ge 33, \\
& b^T z \ge 47, \\
& a^T y + a^T w \ge 92, \\
& a^T y \le 50,\text{（可去）} \\
& a^T w \ge 42,\text{（不影响在B卸货）} \\
& b^T w \ge 31, \\
& a^T x + a^T y + a^T z + a^T w \ge 166, \\
& b^T z + b^T w \ge 78,\text{（可去）} \\
& \sum_{i=10}^{25} (x_i + y_i + z_i + w_i) \le 0.2 \sum_{i=1}^{9} (x_i + y_i + z_i + w_i), \\
& \sum_{i=1}^{25} x_i + \sum_{i=1}^{25} y_i + \sum_{i=1}^{25} z_i + \sum_{i=1}^{25} w_i \le 25; \\
& x_i, y_i, z_i, w_i \text{均为非负整数,}
\end{aligned}
$$

可得摆放方案如下：

$x_1 = 5, y_1 = 6, z_1 = z_9 = z_{19} = 2, z_4 = 1, w_1 = 4, w_8 = 1, w_{19} = 2$

，即使用 21 辆 1-1 型轿运车和 4 辆 1-2 型轿运车。

第二阶段、以总里程最短为目标，可建立如下数学模型：

$$\min 160\sum_{i=1}^{9} x_i + (160+120)\sum_{i=1}^{9} y_i + (160+76)\sum_{i=1}^{9} z_i + (160+200)\sum_{i=1}^{9} w_i$$

$$
\begin{aligned}
s.t.\ & a^T x \le 41, \\
& a^T y + a^T z + a^T w \ge 125, \\
& a^T z \ge 33, \\
& b^T z \ge 47, \\
& a^T y + a^T w \ge 92, \\
& a^T y \le 50, \\
& a^T w \ge 42, \\
& b^T w \ge 31, \\
& a^T x + a^T y + a^T z + a^T w \ge 166, \\
& b^T z + b^T w \ge 78, \\
& \sum_{i=10}^{35} (x_i + y_i + z_i + w_i) = 4, \\
& \sum_{i=1}^{9} (x_i + y_i + z_i + w_i) = 21, \\
& x_i, y_i, z_i, w_i \text{均为非负整数}
\end{aligned}
$$

使用 LINGO 求解以上模型得：

$$x_1 = 5, y_1 = 6, z_5 = 8, z_7 = 1, w_1 = 1, w_{13} = 2, w_{19} = 2.$$

因此，

- 有 5 辆按方案（8,0,0）装载的 1-1 型轿运车全部在 D 处卸载完毕（卸载

40 辆 I 型乘用车，比要求的少了 1 辆 I 型乘用车，它可从其他轿运车车上卸载）；

- 有 8 辆按（4,5,0）装载的 1-1 型轿运车和 1 辆按（2,7,0）装载的 1-1 型车全部在 C 处卸载完毕（以上 9 辆车可装载 34 辆 I 型乘用车和 47 辆 II 型乘用车，比实际要求的多了 1 辆 I 型乘用车，这辆乘用车可安排在 D 处卸载）；
- 有 6 辆 1-1 型轿运车在 B 处全部卸载完毕（卸载了 48 辆 I 型乘用车，比要求的少了 2 辆 I 型乘用车，它可从余下的轿运车车上卸载）；
- 有 1 辆按（8,0,0）装载的 1-1 型轿运车、2 辆按（12,4,0）装载的 1-2 型轿运车和 2 辆按（6,12,0）装运的 1-2 型轿运车在 A 处卸载（这 5 辆轿运车可装载 44 辆 I 型乘用车和 32 辆 II 型乘用车，比要求的多了 2 辆 I 型乘用车和 1 辆 II 型乘用车，多的 2 辆 I 型乘用车刚好可在 B 处卸载，多的 1

辆 II 型乘用车表明有 1 辆按（12,4,0）或（6,12,0）装载的 1-2 型轿运车刚开始有一个 II 型乘用车的空位）。

第四问结论：此运输任务共使用轿运车 25 辆，其中有 21 辆 1-1 型轿运车和 4 辆 1-2 型轿运车；总运输里程为 6404；具体运输方案有很多种，上面只给出了其中的一种方案。

这条题目的难点就在第五问，而实际问题就如同第五问，甚至更复杂一些。所以创新也蕴藏在~~其中~~第五问，第五问

解答的优劣~~能够体现~~反映了数学建模和解决实际问题的能力的高低。

从竞赛的情况看，参赛队在这一问上确实拉开了差距。不少队没有结果或结果不理想，但也有个别队得到了非常好的答案（见两种 113 辆轿运车及 114 辆轿运车的装载方案）。其实用启发式方法也能够得到比较好的解答（见~~启发式方法寻找第五问的较优解~~后面）~~。~~，这条题目并非如许多研究生想象的那么困难。

下面介绍竞赛中没有研究生考虑过的几个问题，看看怎样开辟新的思路、另辟蹊径。

一． 证明前面几个问题的答案都是最优解。

首先需要先建立可行解的必要条件，用以判定不符合这些条件的解方案都不可行，其原理就是总体大于等于部分和。

1，可行方案的所有被运送的乘用车的总长度再加上所有被运送的乘用车的总数与被
使用的轿运
车的列的总~~数~~和之差乘 0.1（安全间隔）应小于等于被使用的轿运车的总长度。(轿运车每列的间隔数比所装载的轿车数小 1)。

2，~~2，~~可行方案的所有被运送的乘用车的总长度加上所有被运送的乘用车的总数与被使
用的轿运
车的列的总和~~总数~~之差乘 0.1（安全间隔）再加上每辆轿运车的最小浪费长度（因轿运车及装载乘用车种类而异，如前面 0.08 或 0.12 等）之和应小于等于被使用的轿运车的总长度。

3，~~3，~~可行方案的所有被运送的乘用车的总长度加上所有被运送的乘用车的总数与被使
用的轿运
车的列的总和~~总数~~之差乘 0.1（安全间

隔）再加上可以采用的轿运车的最小浪费长度（如前面 2 辆 III 型乘用车、4 辆 II 型乘用车安排在一辆 24.3 米长的 1-2 轿运车上浪费 0.08 米），还要加上其余轿运车因为乘用车变化以至最小浪费长度无法实现而必须采用的次小浪费长度之和应小于等于被使用的轿运车的总长度。

据此可以证明第一问的解答（16，2）是最优解。

因为根据题目的要求首先是被使用的轿运车的总数达到最少，在被使用的轿运车的总数一定的前提下，1-2 轿运车使用最少的就是最优解。这样装载方案之间是离散的，而且可以排序，如果比某个可行方案排序在前的方案都不可行，显然这个方案就是最优方案。而轿运车总数减少或轿运车总数不变而 1-2 轿运车使用量减少，一般轿运车的总长度会变短，所以排序在后的方案不满足必要条件，则一般排在前面的方案也不

满足必要条件，所以只要检验与某个可行方案排序相邻的方案是不满足必要条件，则该可行方案就是最优解。

又因为1-2轿运车的长度大于1-1轿运车的长度但又小于1-1轿运车的长度的两倍，所以可能比（16，2）好的解只能是（17，1）、（18，0）、（16，1）、（15，2）等，前两个轿运车的总数不变，但1-2轿运车使用更少，后两个轿运车的总数比（16，2）少。~~但~~因为~~其中~~这四个方案中排序最后~~轿运车的总长度最大~~的是（17，1），它的轿运车的总长度最大，如果这种情况下所有被运送的乘用车的总长度再加上所有被运送的乘用车的总数与被使用的轿运车的总数之差乘0.1（安全间隔）大于被使用的轿运车的总长度，则（17，1）~~因为~~就不~~符合~~满足可行解的必要条件，从而是不可行的，~~所以~~这样（16，2）既是可行解，也是最优解就被证明。

24.3*3+19*2*17=718.9<7~~21.32~~19.92=3~~0~~.615*68+4.61*100+(68+100-1~~6~~7*2-~~2~~3)

*0.1

因此（17，1）方案不是第一问的可行解，故方案（16，2）是最优解得证。

~~类似可以证明（12，1）是第二问的最优解，（25，5）是第三问的最优解，（21，4）是第四问在仅考虑轿运车的总数情况下的最优解。~~因 4.63*72+3.615*52+（72+52-13*2-~~1~~3）*0.1>~~〉~~13*2*19，（13，0）辆轿运车方案不可行。

因 4.61*156+3.615*102+4.63*39+（156+102+39-2~~5~~6*2-~~5~~4*3 ）~~8~~*0.1>19*2*26+24.3*3*4,故（26，4）辆轿运车方案不可行。

因 4.61*166+3.615*78+（166+78-22*2~~1~~-43*3 ）*0.1>1~~〉~~9*2*22+24.3*3*3，故（22，3）辆轿运车方案不可行。

类似~~可以~~第一问的证明，（12，1）是第二问的最优解，（25，5）是第三问的最优解，（21，4）是第四问在仅考虑轿运车的总数情况下的最优解可以得到

证明。

前面得到~~在~~使用（21，4）辆轿运车~~的前提下，要证明~~里程为 6404 公里的方案，要证明这是第四问的最优解又困难一些，因为没有类似的必要条件可用，为此必须对问题进一步分析。

~~我们~~可以这样考虑问题。里程总数是 25 辆轿运车行驶里程的总和，即 25 个正数之和，又因为只有四个目的地，如果可以不考虑折返运输（考虑折返，则显然里程变长，不影响最小值）则这里仅是四种正数之和。因此如果能够得到四种正数的个数或者得到从大到小四种正数的最少个数就能够得到总和的极~~小值~~下界。

关于这点，有以下三点结论：

1， 若 1-2 型轿运车使用不超过 4 辆，~~在使用 1-2 型轿运车不超过 4 辆的前提下，~~到达 A 点的轿运车不能少于 5 辆；

2， 若 1-2 型轿运车使用不超过 4 辆，~~在使用 1-2 型轿运车不超过 4 辆的前提下，~~到达 A~~、~~或 B 点的轿运车不能少于 11 辆；

3， ~~在~~若~~使用~~1-2 型轿运车使用不超过 4 辆~~的前提下~~，到达 A~~、~~或 B~~、~~或 C 的轿运车不能少于 20 辆；

因为到达 A 点的轿运车不少于 5 辆，故至少 5 辆轿运车的总里程大于等于 360 公里；

因为到达 A~~、~~或 B 点的轿运车不少于 11 辆；故至少 11 辆轿运车的总里程大于等于 280 公里，因此除去总里程大于等于 360 公里的 5 辆，至少还有 6 辆轿运车的总里程大于等于 280 公里；又因为到达 A~~、~~或 B~~、~~或 C 点的轿运车不少于 20 辆，故除去总里程大于等于 280 公里的 11 辆轿运车，至少还有 9 辆轿运车的总里程大于等于 236 公里（到 C 的最短距离）；由于一定使用轿运车 25 辆，至少都到达 D；故至少还有 5 辆轿运车的总里程大于等于 160 公里。将上述结论用不等式表

示：

$$\sum_{i=1}^{5} x_i \geq 5 \times 360$$

$$\sum_{i=6}^{11} x_i \geq 6 \times 280$$

$$\sum_{i=12}^{20} x_i \geq 9 \times 236$$

$$\sum_{i=21}^{25} x_i \geq 5 \times 160$$

将上述同向不等式相加，得

$$\sum_{i=1}^{25} x_i \geq 5\times360+6\times280+9\times236+5\times160=640$$

其中 x_i 上按里程长短顺序排列的第 i 辆轿运车的里程，因此 6404 公里是总里程的下界，~~从而一定~~因为又是可行的，所以是最小值。

至于~~证明~~三个结论的证明~~成立~~并不困难。

因为 A 目的地需要乘用车（42，31）

辆，合计 73 辆，而每辆 1-2 轿运车最多可以运送 6×3 辆乘用车（每列最多运 6 辆），4 辆 1-2 轿运车最多可以运送 72 辆乘用车，无法满足要求，至于换成 1-1 轿运车运输，因为每辆 1-1 轿运车能够运送的乘用车更少，所以 A 地至少需要轿运车 5 辆。

因为 A、B 目的地需要乘用车（92，31）辆，1-2 型轿运车使用又不超过 4 辆，如果到 A、B 目的地的轿运车少于 11 辆，则 1-1 轿运车最多使用 6 辆。但

$$24.4\times3\times4+19.1\times2\times6=522$$ 小于

$$3.715\times31+4.71\times92=548.485$$ 故 10 辆轿运车不可行，A、B 目的地需要轿运车至少 11 辆。~~根据必要条件 3，采用最小浪费长度的装载方案，每辆 1-2 轿运车可以装载乘用车（2，4）×3 辆，但由于 II 型乘用车仅需要 31 辆，所以这种方案最多装载 7 列。剩余乘用车（78，3）辆，1-2 轿运车另外 5 列，采用次小浪费长度~~

~~的装载方案，装载（5，0）辆，还有乘用车（53，3）辆没有运输。因为1-2轿运车已经用完，下面只能采用1-1轿运车运输。按1-1轿运车的最小浪费长度的装载方案和次小浪费长度的装载方案，各需要~~

~~53~~÷~~4=13.25，3~~÷~~5=0.6列~~

~~所以至少还需要7辆1-1轿运车，所以到达A、或B点的轿运车不少于11辆；~~

~~如果4辆1-2轿运车不完全使用，由于1-2轿运车有3列，每列长度24.3米，而1-1轿运车只有2列，每列长度仅19米，显然一定要使用更多的轿运车。由于每辆1-2轿运车装载乘用车（2，4）~~×~~3辆的方案仅浪费长度0.12米，平均每辆乘用车浪费仅2厘米，是最小浪费长度，因此必须优先使用。~~

因为A、B、C目的地需要乘用车（125，78）辆，1-2型轿运车使用又不超过4辆，如果到A、B、C目的地的轿

运车少于 20 辆，则 1-1 轿运车最多使用 15 辆。~~按上面推理必要条件，优先使用每辆 1-2 轿运车每辆装载乘用车（2，4）×3 辆方案，共可以运送（24，48）辆乘用车，。剩余乘用车（101，30）辆，只能采用 1-1 轿运车装载，根据必要条件 3，采用最小浪费长度的装载方案和次小浪费长度的装载方案，各需要~~

但

$24.4\times3\times4+19.1\times2\times15=865.8$小于 ~~3.715×78+4.71×125=878.52~~ ~~1~~

~~01÷4=25.25, 30÷5=6 列~~

所以~~至少还需要 16 辆 1-1 轿运车（32 列），~~不可行，~~所以~~故到达 A~~、~~或 B~~、~~或 C 点的轿运车不能少于 16+4=20 辆。

二， 第四问的数学模型。

前面第四问的第二阶段的数学模型，~~实际上~~前提是假定轿运车不存在折返运输，所以目标函数是四~~项~~种里程之和。但实际中完全可能存在按第一阶段得到的最少轿运车使用量必须折返运输才能完成全部运输任务。这时前面第四问的第二阶段的数学模型就可能无解，~~。~~有必要加以完善~~第四问的第二阶段的数学模型~~。尽管这个模型可能~~求解~~比不考虑折返运输要复杂、而且求解也困难得多，但它对建模能力的培养很有意义。

~~实际上依据~~第一阶段的数学模型已经得到需要使用的1-1和1-2型轿运车中采用第 i 种装载方案的~~的~~数量记为

$x^*{}_i, y^*{}_i$ ~~及每辆轿运车的装载方案，~~ I_{xk}

~~即在 1-1 型轿运车第 i1 个装载方案中装~~

~~载 k 型乘用车的数量~~。

由于第二阶段存在运输方案，每种运输方案可以简化用轿运车~~经过~~卸货的地点集合来描述（隐含可以折返），因为有四个地点，故有 15 种运输方案分别是：1-D,2-B,3-C,4-A,5-DB,6-DC,7-DA，8—BA，9-BC,10-A C,11-D BA,12-DCB,13-BCA，14-ACD，15-ABCD。经过这些地点~~点~~集合的最短里程都是唯一的，第 j 种运输方案（应该考虑卸货的地点和乘务车种类及数量）的最短里程记为 d_j。

采用各种装载方案的轿运车~~都~~均可以使用上述~~15~~若干种运输方案其中的一种，分别~~记~~设 1-1 和 1-2 型轿运车中采用第 i 种装载方案的车辆里又采用第 j 种运输方案的车辆数为 x_{ij}，y_{ij}。所以应该有 $\sum_{j=1}^{u} x_{ij} = x^*_i, \sum_{j=1} y_{ij} = y^*_i$。

这时第三层次的目标函数为

$$\min \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{u} x_{ij} d_j + \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1} y_{ij} d_j$$

其中 N_1，N_2 是 1-1 和 1-2 型轿运车分别采用的不同-装载方案的总数，这里的装载方案应该都完全满足题目的约束条件。

因为允许折返，仅用轿运车卸货的地点集合来描述还不够，应该对每种装载方案给出全部的满足题目要求的卸货方案，要求在所有卸货地点卸下的轿车种类及其数量之和与装载方案完全一致。卸货种类不同、数量不同、卸货地点不同都属于不同的卸货方案。这样就要求第二个下标代表不同的卸货方案，

当然同前，X_{ij}，y_{ij} 必须是非负整数。

至于约束条件显然增加了，对每种型号的轿车在每个目的地都不想满足供

应量不小于需求量。

~~要描述运输方案是否满足题目的要求，所以要增加变量~~ x_{ijmlk}, y_{ijmlk} ~~分别代表执行i装载方案和j运输方案的第m辆1-1或1-2轿运车在l目的地卸载k型乘用车的数量。它们应该都是非负整数。显然~~

$$x_{ijmlk} \le x_{ij}, \quad y_{ijmlk} \le y_{ij}$$

~~同时~~ x_{ijmlk}, y_{ijmlk} ~~还应该满足只有当j运输方案经过在l目的地卸货且i装载方案中包含k型乘用车时才可能为正；应该满足在l目的地卸载的由全部1-1和1-2型轿运车运来的k型乘用车总数与l目的地对k型乘用车的需求总数相同；每辆执行i装载方案j运输方案的轿运车所包含的k型乘用车的总数应该与该车在j运输方案经过的全部目的地卸载的k型乘用车的总数相同。请读者练习写出上述约束条件的表达式。这里模型的一个优点是对轿运车和乘用车的数量没有限制，很容易推广。~~

当然这样的模型求解可能相当困难，是否有简单一些的数学模型，读者

大家不妨试一试。

三，启发式方法及推广

不少研究生队在竞赛的前四问就“卡”住了，或者没有结果或者结果很不理想。其实这四个问题并不复杂，不用计算机就可以在一天之内得到很好的结果。这说明不少研究生思维不活跃、思路不开阔，把简化复杂问题~~简化~~的能力、~~出现~~创新的能力比较差，是到了数学建模方面应该认真“补课”的时候了。

第一问要运送 100 辆 I 型乘用车，68 辆 II 型乘用车。而每辆 1-1 型轿运车最少可以运送 8 辆乘用车，最多能够运送 10 辆乘用车，每辆 1-2 型轿运车最多能够运送 18 辆乘用车，所以轿运车的使用总量小于等于 20 辆，1-2 型轿运车最多可以使用 3 辆（不超过总量 1/6）。为了减少轿运车的使用量，显然应该多用 1-2 型轿运车，而且采用长度浪费小的装

载方案。对 1-2 型轿运车长度浪费最小的装载方案是每列装载（2，4）辆乘用车。3 辆 1-2 型轿运车最多能够运送（18，36）辆乘用车，剩余（82，32）辆乘用车等待 1-1 型轿运车运送。对 1-1 型轿运车长度浪费最小的装载方案是每列装载（4，0）辆 ~~I~~型乘用车或（0，5）辆 ~~II~~型乘用车。共需要 1-1 型轿运车 82/4+32/5=26.9 列，即 14 辆 1-1 型轿运车。但这样 1-2 型轿运车使用量超过 1-1 型轿运车使用量的 20%，不合题目的要求。可以将原来由 1 辆 1-2 型轿运车运输的乘用车改由 2 辆 1-1 型轿运车来运送。立即获得使用（16，2）辆轿运车运送 100 辆 I 型乘用车，68 辆 II 型乘用车的最优方案，极其简单。

类似第一问，第二问要运送 72 辆 II 型乘用车，52 辆 III 型乘用车，共计 124 辆。同前可得，轿运车的使用总量小于等于 15 辆，1-2 型轿运车最多可以使用 2 辆。为了减少轿运车的使用量，显然应该多用 1-2 型轿运车，而且采用长度浪

费小的装载方案。对 1-2 型轿运车长度浪费最小的装载方案是每列装载（4，2）辆乘用车，每列仅浪费 8Cm，但由于 III 型乘用车必须装载在轿运车的下层，上层只能采用（6，0）装载方案，2 辆 1-2 型轿运车最多能够运送（~~28~~32，~~8~~4）辆乘用车，剩余（440，4~~8~~48）辆乘用车等待 1-1 型轿运车运送。对 1-1 型轿运车长度浪费最小的装载方案是每列装载（5，0）辆 ~~II 型~~乘用车或（0，4）辆 ~~III 型~~乘用车。需要 1-1 型轿运车 440/5+4~~8~~48/4=~~2019.8~~20 列，即 1~~1~~0 辆 1-1 型轿运车。 然而这样~~浪费~~下层只有 10 列~~多~~，~~少用~~无法装载完必须装在下层的 III 型乘用车，~~1 辆~~故至少需要 12 辆 1-1 型轿运车~~（11 辆 1-1 型轿运车虽然可以装完是不行的，但 1-2 型轿运车 2 辆，不如但可能能够将其中 1 辆 1-2 型轿运车换成 1-1 型轿运车）~~。，同时可以减少 1 辆 1-2 型轿运车~~按题意，这样是实现了优化~~。1 辆 1-2 型轿运车最多能够运送（16，2）辆乘用车，剩余（56，50）辆

乘用车等待 1-1 型轿运车运送。对 1-1 型轿运车采用装载方案是每列装载（5，0）辆 II 型乘用车或（0，4）辆 III 型乘用车的装载方案。共需要 1-1 型轿运车 56/4+50/5=24 列，恰好 12 辆 1-1 型轿运车可以运送完。前已证明这也是最优方案。

类似第一问，第三问要运送 156 辆 I 型乘用车，102 辆 II 型乘用车，39 辆 III 型乘用车，共计 297 辆。根据前两问的最优解，对需要使用的轿运车的数量可以作出更精确的估计。

168/18=9.33，

124/13=9.54

因此第三问需要使用轿运车的约 31 辆，1-2 型轿运车最多可以使用 5 辆。~~有~~又因为 III 型乘用车与 I 型乘用车在长度上仅相差 2Cm，可以与 I 型乘用车一起考虑。对 1-2 型轿运车长度浪费最小的装载方案是每列装载（2，4，0）辆乘用车或（0，4，2）辆乘用车（只能用于下层）。5 辆 1-2 型轿运车最多能够运送(20，

60，10）辆乘用车，剩余（136，42，29）辆乘用车等待 1-1 型轿运车运送。对 1-1 型轿运车长度浪费最小的装载方案是每列装载~~（4，0）~~辆 I 型或 III 型乘用车或~~（0，5）~~辆 II 型乘用车。共需要 1-1 型轿运车（136+29）/4+42/5=49.75 列，即 25 辆 1-1 型轿运车。共计使用轿运车（25，5）辆，前已证明这是最优方案。 至于 III 型乘用车必须装载在轿运车的下层，~~因为总共才 39 辆，~~5 辆 1-2 型轿运车装载后只剩下 29 辆 III 型乘用车，但有 25 辆 1-1 型轿运车，有 25 个下层，所以没有任何问题。

第四问是多目标规划问题，~~同前~~分段决策，先只考虑减少轿运车的使用量，则第四问的第一阶段与前三问完全一致。第四问要运送 166 辆 I 型乘用车，78 辆 II 型乘用车，共计 244 辆。根据前两问的最优解，对需要使用的轿运车的数量可以作出更精确的估计 26 辆左右，1-2 型轿运车最多可以使用 ~~5~~4 辆。对 1-2 型轿运车长度浪费最小的装载方案是每

列装载（2，4）辆乘用车。~~5~~4 辆 1-2 型轿运车最多能够运送（~~30~~24，~~60~~48）辆乘用车，剩余（~~13~~1~~6~~42，~~18~~30）辆乘用车等待 1-1 型轿运车运送。对 1-1 型轿运车长度浪费最小的装载方案是每列装载（4，0）辆~~I 型~~乘用车或（0，5）辆~~II 型~~乘用车，需要 1-1 型轿运车 1~~36~~42/4+~~18~~30/5=~~37~~41.~~6~~5 列，即 ~~19~~21 辆 1-1 型轿运车。~~但这样 1-2 型轿运车使用量超过 1-1 型轿运车使用量的 20%，不合题目的要求，改为使用 4 辆 1-2 型轿运车。4 辆 1-2 轿运车最多能够运送（24，48）辆乘用车，剩余（142，30）辆乘用车等待 1-1 型轿运车运送。需要 1-1 型轿运车 142/4+30/5=41.5 列，即 21 辆 1-1 型轿运车。~~前已证明这也是轿运车的使用量最优的方案。

第四问的第二阶段是在轿运车使用总量为（21，4）的前提下，使运输里程最短。在轿运车的使用量（包括 1-2 轿运车使用量）一定的前提下，要使运输总里程最短，即数目给定情况下全体正

数的和要小，显然应该大数个数小，即使里程最长的轿运车数量最少（启发式思维，不是理论证明），反之使里程~~最~~短的轿运车数量~~最~~多。又因为各地点需要运送的乘务车的数量~~及地点~~给定，所以要实现这一点，应该让容量大的轿运车去里程最远的目的地（任务相同的情况下，每辆轿运车装的轿车多，则使用的轿运车就少）。对于第四问的第二阶段即应该让 1-2 轿运车去 A 点（可能还包括 B、C 点，视 1-2 轿运车使用量和 A 点需要的乘务车的数量而定）。因 A 点需要的乘~~务~~用车（42，31）辆，

不能完全采用最小浪费长度的装载乘用车（2，4）的方案，只能使用 ~~8~~7 列~~（其中一列留有一辆 II 型乘用车的空位）~~，另 45 列采用次小浪费长度的装载乘用车（5，0）的方案，剩余 I 型乘用车 ~~6~~3 辆，II 型乘用车 3 辆，再用 1 辆 1-1 型轿运车就可以完全运完（同时留下 2 辆 I 型乘用车空位），即 5 辆轿运车就可以完成 A 点的乘务车运输任务，前已证

明这是轿运车使用数量的最小值~~。~~（注意这里只是求一个较优的可行解，不排除有更好的方案，无须在这里花费太多的时间）。

由于 1-2 轿运车已经用完，下面任务很简单了，就是让到 B、C 点的 1-1 型轿运车尽量装满，减少 1-1 型轿运车即可。

因为 A、B 在一条路线上，而且到 B 的里程比到 C 的里程长，所以优先考虑 B 点。B 点的乘务车运输任务是 50 辆 I 型乘用车，因为去 A 点的轿运车上留有 2 辆 I 型乘用车空位，应该充分利用，故（50-2）/8=6 辆 1-1 型轿运车就可以完成 B 点的运输任务。

再考虑 C 点，C 点的乘务车运输任务是 33 辆 I 型乘用车，47 辆 II 型乘用车，对 1-1 型轿运车长度浪费最小的装载方案是每列装载（4，0）辆 ~~I~~型乘用车或（0，5）辆 ~~II~~型乘用车，需要 1-1 型轿运车 33/4+47/5=17.65 列，即 9 辆 1-1 型轿运车就可以完成 C 点的运输任务。

最后再考虑 D 点，D 点的乘务车运

输任务是 41 辆 I 型乘用车，因为去 ~~A~~C 点的轿运车上留有 1 辆 I 型乘用车空位，应该充分利用。对 1-1 型轿运车长度浪费最小的装载方案是每列装载~~（4，0）~~辆 I 型乘用车，需要 1-1 型轿运车 40/4=10 列，即 5 辆 1-1 型轿运车就可以完成 C 点的运输任务。显然这样与第一阶段得到的最优解使用了相同数量的轿运车（包括 1-2 轿运车使用量）（21，4）辆。其运送总里程是

5*360+6*280+9*236+5*160=6404 公里，前已证明是第四问的最短里程。

可能有部分研究生对此不以为然，甚至嗤之以鼻，这等”小儿科“的方法简直不登大雅之堂。这充分暴露这些研究生盲目自大、不善于学习的缺点。其实方法决定效率，抓住规律问题就可以引刃而解，启发式方法为什么能够如此简单地解决实际问题是有其本质原因的。

首先是这种方法选择了正确的技术路线，分散难点，分步逐个击破。

其次它选择了正确的突破口——被

使用轿运车的估计数，它既容易求解，也立即确定 1-2 轿运车使用量，对下面问题解决有很大帮助。

局部优化代替整体优化，极大地降低了求解的难度， 1-2 型轿运车用足，采用长度浪费最小的装载方案，把容量比较大的轿运车派往路程最远的目的地，不产生选择问题，工作量显著减少。解决了 1-2 型轿运车装载问题之后，只剩下 1-1 型轿运车，方案大大减少，求解难度大大降低。

简化约束，在解决主要问题之前不考虑所有的约束，只在找到解后进行调整，大大降低起始地难度。

先找较优解，迭代寻找更好的解。

前几问容易求解就是因为维数低。找到最优解的范围对简化求解方程有利，有了目标，也不至于做无用功。

这些都是非常重要的思想方法值得学习，部分研究生看他人东西往往只看具体内容而忽略其背后的思想，所以学习效率低下。

前四问现在都已经用启发式方法求出了最优解，这短短两页纸的推理，都无须使用计算机就实现了，应该在一天之内能够办到。如果在竞赛中做到这些，还有三天多的时间就可以非常从容地做前四问的数学模型和第五问了。

当然如果论文仅是上面两页纸，估计不会有很好的奖励级别，但是如果能够从中发现解决这个问题的规律，并得到第五问的好结果，就大不一样了，而这是完全可能的。

对第五问，首先也有对轿运车使用量的估计及 1-2 型轿运车的最大使用量问题（显然多使用 1-2 型轿运车可以减少轿运车使用总量）。

21 米长的轿运车每列可以运送 4 辆乘用车，长 21 米以上的轿运车每列可以运送 5 辆乘用车，由于这两种轿运车数目大致相等，可以认为轿运车的每列平均可以装载乘用车 4.5 辆，则

4*5+25*3+x*2=1207/4.5=2~~80~~68,其中 x 代表 1-1 轿运车的使用量，为了减少轿运车使用总量，这里让 1-2、2-2 型轿运车全部使用，可能偏大，后面再修正。解得

X=~~93~~87 ,则 1-2 型轿运车最大使用量为 ~~20~~18 辆。因而

4*5+~~20~~18*3+x*2=1207/4.5=268~~0~~，解得

X=~~100~~97 ,则 1-2 型轿运车最大使用量为 ~~20~~19 辆，得到轿运车使用量的第一次估计为 5+18+97=12~~5~~10 辆。

可以利用必要条件来推导轿运车使用量的下界。

设 D_i 为轿用车长度，d_i 为乘用车长度，W_i 为轿用车~~车辆~~拥有数目，S_i 为轿用车装车列数，对 1-1，$s_i = 2$，1-2，$s_i = 3$，2-2，$s_i = 4$

序号	类型	长	宽	高	拥有量（辆）	使用数量
9	十九位双桥双轮框架 2-2 型	19	3.5	3.4	5	p1
5	十九位双桥双轮框架 1-2 型	23.7	2.8	3.9	10	p2
10	十七位双桥双轮框架 1-2 型	23.3	2.7	4.35	15	p3
3	十二位双桥双轮厢式 1-1 型	24.3	2.7	4.3	22	p4
4	十位双桥边轮厢式 1-1 型	22	2.7	4.35	15	p5
7	十位单桥双轮框架 1-1 型	21	2.7	3.6	4	p6
8	十位单桥双轮框架 1-1 型	21	2.7	3.9	16	p7
1	八位双桥边轮厢式 1-1 型	19	2.7	4.35	21	p8
2	十位双桥双轮厢式 1-1 型	18.3	2.9	4.4	18	p9
6	十位单桥双轮框架 1-1 型	18.2	2.7	3.6	25	p10

假设 10 种轿用车使用的数量分别为 $p_i(i=1,2,\cdots,10)$，考虑以下约束条件

（1）~~（1）~~总长度限制：

$$\sum_{i=1}^{10} p_i s_i (D_i + 0.1) \ge \sum_{i=1}^{1207} (d_i + 0.1)$$

这是根据必要条件。

（2）20%限制：$p_2 + p_3 \le 0.2 \sum_{i=4}^{10} p_i$

（3）车辆资源限制，使用车辆不超过能提供的车辆：$p_i \le W_i (i=1,2,\cdots,10)$

代入具体数据得到：

$$76.4p_1 + 71.4p_2 + 70.2p_3 + 48.8p_4 + 44.2p_5 + 42.2p_6$$

$$+ 44.2p_7 + 38.2p_8 + 36.8p_9 + 36.6p_{10} >= 545.725$$

显然 2-2 轿运车使用量应该就等于拥有量，23.8 米长的 1-2 轿运车的使用量也应该等于拥有量，依长度递减的顺序代人入不等式，可以明白 24.3、22.1、21.1、19 米长的 1-1 轿运车的使用量也应该等于使用量。18.2 米长的 1-1 轿运车可能没有使用。这样只剩下 p_3 和 p_9 两个未知数。

用尝试方法就可以求出 p_3 和 p_9 两个未知数的极小值是 ~~3~~8、12（因为要使轿运车使用量达最小）。因此得到第五问轿运车使用量的下界是 2-2 轿运车 5 辆，1-2 轿运车 18 辆，1-1 轿运车 90 辆，合计 113 辆。

$$
\begin{aligned}
&76.4p_1+71.4p_2+70.2p_3+48.8p_4+44.2p_5+42.2p_6\\
&\quad+42.2p_7+38.2p_8+36.8p_9+36.6p_{10}\geq 5452.759\\
&p_2+p_3\leq 0.2\sum_{i=4}^{10}p_i\\
&p_1\leq 5\\
&p_2\leq 10\\
&p_3\leq 15\\
&p_4\leq 22\\
&p_5\leq 15\\
&p_6\leq 4\\
&p_7\leq 16\\
&p_8\leq 21\\
&p_9\leq 18\\
&p_{10}\leq 25\\
&N_1\quad p_i(i=1,2,\cdots,10)\text{为非负整数}
\end{aligned}
$$

~~**定理 1** 如果~~ $p_i(i=1,2,\cdots,10)$ ~~满足上述约束条件，则有~~ $\sum_{i=1}^{10}p_i\geq 113$ ~~。~~

– 因为已经找到仅使用 113 辆轿运车就可以将题目要求的 1207 辆乘用车全部装载的方案，所以 113 辆就是第五问关于轿运车使用量的最优解。

还可以有更简单的方法，即让轿运车的长度从长到短排序，从最长的开始，逐个相加，最先实现轿运车总长度大于等于轿车总长度和间隔总长度之和的轿运车数就是第五问的下界。

~~前面~~第一到第四问的做法还有值得

借鉴的地方~~，~~。这个实际问题有许多约束条件，例如：长度、高度、宽度、目的地、1-2 型轿运车与 1-1 轿运车数量比、安全间隔、上层对称、下层装满~~选择~~等等限制。如果在建模初期无一例外地全部加以考虑，显然会极大地增加建模和求解的难度，我们应该采取启发式解决问题时的做法，对这些约束区别对待，因为这些约束有些很容易实现；有些影响不大，事先不考虑，事后进行微调即可。例如第一阶段就不考虑地点，安全间隔可以让轿运车的每列、乘用车长度都增加 10Cm 就行了；上层对称、下层装满可以到每辆轿运车所要装载的乘用车确定以后再安排或选择方案时就剔除无法满足题目要求的方案；1-2 型轿运车与 1-1 轿运车数量比可以事先对轿运车使用数量及 1-2 型轿运车最大使用量作出估计，求解时~~暂不考虑~~作为已知，在方案大致有了之后再根据情况微调。

再如高度、宽度约束，可以按启发式方法先进行分析。因为高度超过

1700Mm 的乘用车只有 8 种 156 辆，而轿运车使用量就达 113 辆以上，1-1 轿运车及 1-2 型轿运车的下层都可以装载高度超过 1700Mm 的乘用车，平均每列不到 1 辆，事先完全可以不考虑高度约束，最多事后上下层之间微调即可。宽度超过 1700Mm 的乘用车一般无法安排在 2-2 型轿运车和 1-2 型轿运车的上层，而且超宽乘用车有 30 种，数量也比较大，似乎必须考虑，然而定量分析，1-1 型轿运车的上下层和 1-2 型轿运车的下层均可装载超宽乘用车，而且 1-1 型轿运车的数量是 1-2 型轿运车数量的 5 倍以上，2-2 型轿运车仅占轿运车总量的 5%不到。所以可以装载超宽乘用车的轿运车列数占轿运车总列数 85%，调节的余地还是比较大的，仍然可以采用事后调整的方法解决。当然有的队采取先安排超宽乘用车的办法也是可以的，但是~~也~~可能会降低轿运车的利用率。

这样先不考虑这些约束条件，就大大简化~~子~~问题，使原来几乎无法解决的

问题可以找到解答。所以分步决策、分散难点是重要的思想方法。

从前四问的启发式方法获得的结果~~可以~~明显发现，虽然符合题目的装载方案不少，但是最优解中采用的装载方案却很少，而且利用率不高的方案的绝大多数甚至全部都没有采用。这对简化第五问很有价值。

对于每类轿运车每层分别考虑装载1、2、3、4、5和6种不同类型乘用车的情况。~~以力求~~各列装满~~为前提~~，穷举可得~~具体~~各种轿运车每层装载不同种类的乘用车可能~~出现的~~方案的~~情况~~总数[6]如下表~~16~~所示。

~~表16~~各种轿运车每层装载~~不同种类的~~乘用车不同的~~出现~~方案次数 表

序号		乘用车种类数					
		1种	2种	3种	4种	5种	6种
1	下层	13	238	874	28	1	0
	上层	13	238	874	28	1	0

2	下层	45	2235	24597	51087	0	0
	上层	37	1525	14076	24190	0	0
3	下层	45	2559	34218	65102	2	0
	上层	37	1740	19193	27703	1	0
4	下层	45	2962	42575	32189	22517	0
	上层	37	1990	23269	16977	10130	0
5	下层	45	3038	47482	92180	168950	0
	上层	37	2047	26390	45036	70551	0
6	下层	45	3408	75186	160833	295828	3897
	上层	37	2299	41484	63411	87711	1384
7	下层	45	3268	63449	208777	483770	19

	上层	13	280	1641	248	13	3
8	下层	45	3348	68994	212244	462694	234
	上层	17	493	3904	875	107	28

可能对这批数据有怀疑，但由于有45种轿车，如果某列装载其中的5种，则一个估计是有

$C_{45}^{5}=45\times44\times43\times42\times41\div(1\times2\times3\times4\times5)$ 大约120万种。所以48万是可信的。

上述表格中已经将长度相同的轿运车合在一起。由于装载方案随着轿运车和乘用车~~的数量~~种类的增加而指数式的增长，使得利用计算机求解问题的最优解甚至比较好的解都无法实现。

事实~~是~~上~~这里~~好方案只~~有~~使用100多辆轿运车，大约28~~0~~70列。因此装载方案充其量~~至多~~使用了2870种，即~~数十上~~几百万种装载方案（如果包括未装满的方案有上~~百~~千万种）其中仅极少数可

能被采用，因此绝大多数装载方案无须考虑。这对问题的简化极其关键。

~~进一步分析，乘用车最短3460Mm，次长5160Mm，相差1700Mm，而乘用车有44种，立即可知，不同乘用车长度平均相差不足4Cm，因此不少情况下，轿运车长度方面的浪费就小于等于4Cm，而轿运车每列长度平均20米，相对误差损失0.2%。所以在求解时根本无须考虑浪费比较大（例如浪费超过2%）的方案，这对为我们剔除装载方案提供极大的方便理论依据。~~

竞赛中有两个队找到使用113辆轿运车就能够运送全部1207辆乘用车的装载方案，可以看到其中使用的装载方案绝大多数都是浪费仅几Cm的，甚至有一批是没有1Mm浪费的。而且两种113辆轿运车装载最优的方案之间差别很大，说明即使最优解~~可能~~也不是唯一的，最优解的个数可能还不~~在~~是少数，因此即使开始选择的装载方案有不太适合的，只~~有~~要其比重不大，对最后结果影

响也不会太大。

上述事实还启发我们，装载方案随着轿运车和乘用车的~~数量~~种类增加而指数式的增长，即使开始就~~按~~考虑按目的地装载，由于轿运车和乘用车的种类还是比较多，因此装载~~的~~方案的数量仍然相当大，所以对最优解影响不大，可能仅个别乘用车需要综合考虑，这就大大简化了问题的难度。

下面给出根据上述启发式思想求解第五问的过程。这里大约需要一个人一整天的时间，相比计算机三四天都得不到一个结果，这已经是重大的进步了。

因为乘用车高度超过 1700 毫米对装载限制比较多，所以可以首先安排高度超过 1700 毫米的乘用车。由题目这样的乘用车共有 8 种 156 辆。它们是 1 号车，宽度为 4610 毫米，共 10 辆车；12 号车，长度为 4574 毫米，共 12 辆车；17 号车，长度为 4945 毫米，共 5 辆车；24 号车，长度为 5160 毫米，共 18 辆车；25 号车，

长度为 4800 毫米，共 23 辆车；26 号车，长度为 4590 毫米，共 21 辆车；31 号车，长度为 4285 毫米，共 30 辆车；37 号车，长度为 3820 毫米，共 37 辆车。下面安排思想是尽量乘用车安排完一种再安排下一种。

一),9 辆 19 米长 1-1 轿运车仅下层，每层装载 2 辆 24 号车，1 辆 1 号车，1 辆 29 号车（长度 3763 毫米）；5260*2+4710+3863=19093<19100。

24 号车运完。1 号车剩 1 辆，29 号车剩 24 辆（总共需要运送 33 辆）

二)，4 辆 19 米长 1-1 轿运车仅下层，每层装载 1 辆 17 号车，3 辆 12 号车；4674*3+5045=19067<19100。

12 号车运完。17 号车剩 1 辆。

三)，1 辆 19 米长 1-1 轿运车仅下层，每层装载 1 辆 1 号车，1 辆 17 号车，1 辆 25 号车，1 辆 31 号车；5045+4710+4900+4385=19040<19100。

1、17 号车运完。31 号车剩 29 辆，25 号车剩 22 辆。

四)，14 辆 18.3 米长 1-1 轿运车仅下层，每层装载 1 辆 26 号车，2 辆 31 号车，1 辆 25 号车；4900+4690+4385*2=18360<18400。

31 号车剩 1 辆，25 号车剩 8 辆，26 号车剩 7 辆。

五)，1 辆 19 米长 1-1 轿运车仅下层，每层装载 1 辆 31 号车，3 辆 25 号车；4900*3+4385=19085<19100。

31 号车运完，25 号车剩 5 辆。

六)，5 辆 19 米长 1-1 轿运车仅下层，每层装载 1 辆 25 号车，1 辆 26 号车，2 辆 32 号车（长度 4608 毫米）。4900+4690+4708*2=19006<19100。

25 号车运完， 26 号车剩 2 辆，32 号车剩 32 辆（总共需要运送 42 辆）

七)，1 辆 19 米长 1-1 轿运车仅下层，每层装载 2 辆 26 号车，2 辆 4 号车（长度 4747 毫米)；

4690*2+4847*2=19074<19100。

26 号车运完， 4 号车剩 40 辆（总共需要运送 42 辆）

八)，4 辆 24.3 米长 1-1 轿运车仅下层，每层装载 4 辆 37 号车，2 辆 39 号车长度 4245

毫米)；4345*2+3920*4=24370<24400。

37 号车剩 21 辆，39 号车剩 25 辆（总共需要运送 33 辆）

九）5 辆 19 米长 2-2 轿运车仅下层，每列装载 2 辆 37 号车，3 辆 5 号车（长度 3560 毫米)；3560*3+3920*2=18520<19100，而且两种乘用车均适合装载 2 列。

37 号车剩 1 辆，5 号车剩 24 辆（总共需要运送 54 辆）

十)，1 辆 18.3 米长 1-1 轿运车仅下层，每层装载 1 辆 37 号车，3 辆 34 号车（长度 4687 毫米)；

3920+4787*3=18281<18400。

37 号车运完， 34 号车剩 22 辆（总共需要运送 25 辆）

至此高度超过 1700 毫米的 8 种乘用车已经全部装载。共用 5 辆 19 米长 2-2 轿运车、4 辆 24.3 米长 1-1 轿运车、21 辆 19 米长 1-1 轿运车、15 辆 18.3 米长 1-1 轿运车的全部下层。

下面安排宽度超过 1700 毫米的乘用车，因为它们无法将两列装载在同一层。它们有 24 种：10 号车，长度 4135 毫米，11 辆；38 号车，长度 4212 毫米，33 辆；16 号车，长度 4350 毫米，28 辆；21 号车，长度 4466 毫米，18 辆；9 号车，长度 4480 毫米，23 辆；6 号车，长度 4490 毫米，58 辆；13 号车，长度 4500 毫米，42 辆；22 号车，长度 4531 毫米，13 辆；42 号车，长度 4544 毫米，29 辆；35 号车，长度 4580 毫米，28 辆；11 号车，长度 4600 毫米，20 辆；36 号车，长度 4603 毫米，28 辆；32 号车，长度 4608 毫米，现在剩 32 辆；45 号车，长度 4670 毫米，53 辆；4 号车，长度 4747 毫米，现在剩 40 辆；33 号车，长度 4789 毫米，31 辆；41 号车，长度 4855 毫米，25 辆；28 号车，长度 4865 毫米，32 辆；23 号车，长度 4880 毫米，21 辆；15 号车，长度 4930 毫米，12 辆；19 号车，长度 4945 毫米，14 辆；2 号车，长度 5015 毫米，11 辆；43 号车，长度 5035 毫米，25 辆；44 号车，长度 6831 毫米，4 辆。

首先用上面用过的 40 辆轿运车的上层来装载（5 辆 19 米长 2-2 轿运车除外），因为它们都只有一列，宽度不是问题。

一)，2 辆 18.3 米长 1-1 轿运车仅上层，每层装载 1 辆 16 号车（长度 4350 毫米)，2 辆 44 号车；6931*2+4450=18312<18400。

44 号车运完，16 号车剩 26 辆。

二)，9 辆 24.3 米长 1-1 轿运车仅上层，每层装载 2 辆 43 号车，3 辆 32 号车；5135*2+4708*3=24394<24400。

43 号车剩 7 辆，32 号车剩 5 辆.

三)，7 辆 19 米长 1-1 轿运车仅上层，每层装载 1 辆 43 号车，1 辆 19 号车，2 辆 16 号车（长度 4350 毫米)，5135+5045+4450*2=19080<19100。

43 号车运完，19 号车剩 7 辆，16 号车剩 12 辆

四)，7 辆 19 米长 1-1 轿运车仅上层，其中 6 辆每层装载 1 辆 2 号车，1 辆 19 号车，2 辆 16 号车，5115+5045+4450*2=19060<19100。

另 1 辆轿运车上层 1 辆 19 号车，3 辆 35 号车，5115+4680*3=19085 <19100。

19、16 号车运完，2 号车剩 5 辆，35 号车剩 25 辆。

五)，5 辆 19 米长 1-1 轿运车仅上层，每层装载 1 辆 2 号车，3 辆 42 号车，5115+4644*3=19047<19100。

2 号车运完，42 号车剩 14 辆。

六)，2 辆 19 米长 1-1 轿运车仅上层，每层装载 2 辆 15 号车， 2 辆 18 号车，5030*2+4500*2=19060<19100。

15 号车剩 8 辆，18 号车剩 33 辆（总共需要运送 37 辆)。

七)，1 辆 21 米长 1-1 轿运车，上下层都装载 4 辆 15 号车；5030*43=20120<21100。

15 号车运完。

八)，2 辆 18.3 米长 1-1 轿运车仅上层，其中 1 辆上层装载 3 辆 32 号车，1 辆 10 号车；4235+4708*3=18359<18400。

另 1 辆上层装载 2 辆 32 号车，1 辆 35 号车，1 辆 10 号车；4235+4680+4708*2=18331<18400。

32 号车运完，10 号车剩 9 辆（总共需要运送 11 辆），35 号车剩 24 辆。

九），3 辆 18.3 米长 1-1 轿运车仅上层，每层装载 2 辆 28 号车，2 辆 10 号车；4235*2+4965*2=18400。

28 号车剩 26 辆，10 号车剩 3 辆。

至此用完了前一阶段用了的 4 辆、现在又增加 5 辆计 9 辆 24.3 米长 1-1 轿运车、21 辆 19 米长 1-1 轿运车、7 辆 18.3 米长 1-1 轿运车的全部上层；同时用了一辆 21 米长 1-1 轿运车。

十），5 辆 24.3 米长 1-1 轿运车上下层，每层 1 辆 23 号车，4 辆 4 号车；4980+4847*4=24368<24400。

4 号车运完，23 号车剩 11 辆。

十一），2 辆 24.3 米长 1-1 轿运车上下层，其中 2 辆上层和 1 辆下层 3 辆 23 号车，2 辆 36 号车；4980*3+4703*2=24346<24400。

另 1 辆下层 2 辆 23 号车，2 辆 36 号车，1 辆 28 号车；4980*2+4703*2+4965=24331<24400。

23 号车运完，36 号车剩 20 辆，28 号车剩 25 辆。

十二），4 辆 24.3 米长 1-1 轿运车上下层，其中 3 辆每层 4 辆 28 号车，1 辆 14 号车；4965*4+4520=24380<24400。

第四辆下层 1 辆 28 号车，3 辆 41 号车，1 辆 21 号车；4965+4566+4955*3=24396<24400。上层 4 辆 41 号车，1 辆 21 号车；4566+4955*4=24386<24400。

28 号车运完，14 号车剩 17 辆，41 号车剩 18 辆，21 号车剩 16 辆。

十三），1 辆 24.3 米长 1-1 轿运车上下层，每层装载 4 辆 41 号车，1 辆 21 号车；4566+4955*4=24386<24400。

41 号车剩 10 辆，21 号车剩 14 辆。

十四），5 辆 24.3 米长 1-2 轿运车仅下层，每层装载 1 辆 41 号车，4 辆 36 号车；4955+4703*4=23767<24400。上层前面已经装载。

36 号车运完，41 号车剩 5 辆。

十五），5 辆 23.7 米长 1-2 轿运车仅下层，每层装载 1 辆 41 号车，4 辆 11 号车，4955+4700*4=23755<23800。轿运车上层暂未装载。

41、11 号车运完。

十六），5 辆 23.3 米长 1-2 轿运车仅下层，每层装载 2 辆 33 号车，3 辆 14 号车；4520*3+4889*2=23338<23400。轿运车上层暂未装载。

33 号车剩 21 辆，14 号车剩 2 辆。

十七），7 辆 23.3 米长 1-2 轿运车仅下层，每层装载 3 辆 33 号车，2 辆 7 号车；4330*2+4889*3=23327<23400。轿运车上层暂未装载。

33 号车运完，7 号车剩 7 辆（总共需要运送 21 辆）。

十八），3 辆 23.3 米长 1-2 轿运车仅下层，每层装载 2 辆 45 号车，3 辆 13 号车；4770*2+4600*3=23340<23400。轿运车上层暂未装载。

45 号车剩 47 辆，13 号车剩 33 辆。

十九），7 辆 22 米长 1-1 轿运车上下层，其中 6 辆轿运车每层装载 3 辆 45 号车，2 辆

29 号车； 4770*3+3883*2=22076<22100。另一辆轿运车下层装载 1 辆 45 号车，4 辆 7 号车。4770+4330*4=22090 <21100 。 上 层 装 载 2 辆 35 号 车 ， 3 辆 10 号 车 ；4680*2+4235*3=22065<22100。

10、29 号车运完，7 号车剩 3 辆，35 号车剩 22 辆，45 号车剩 10 辆。

二十)，1 辆 22 米长 1-1 轿运车上下层，其中下层装载 1 辆 35 号车，3 辆 7 号车，1 辆 3 号车； 4680+4330*3+4410 =22080<22100。上层装载 1 辆 35 号车，3 辆 38 号车，1 辆 3 号车。4680+4312*3+4410 =22026<22100。

7 号车运完，35 号车剩 20 辆，3 号车剩 38 辆，38 号车剩 30 辆。

二十一)，5 辆 22 米长 1-1 轿运车上下层每层 1 辆 35 号车，3 辆 38 号车，1 辆 3 号车。4680+4312*3+4410 =22026<22100。

38 号车运完，35 号车剩 10 辆，3 号车剩 28 辆。

二十二)，2 辆 22 米长 1-1 轿运车上下层，其中 1 辆轿运车每层装载 2 辆 35 号车，1 辆 40 号车，2 辆 3 号车。4680*2+4410*2+3845=22025<22100。另 1 辆轿运车上层装载 3 辆 35 号车，1 辆 5 号车，1 辆 8 号车。4680*3+4370+3560=21970<22100；下层装载 3 辆 35 号车，1 辆 5 号车，1 辆 18 号车。4680*3+4500+3560=22100

35 号车运完，40 号车剩 25 辆，5 号车剩 22 辆， 18 号车剩 32 辆，8 号车剩 28 辆，3 号车剩 24 辆。

二十三)，3 辆 18.3 米长 1-1 轿运车上下层，每层装载 2 辆 22 号车， 2 辆 21 号车。4566*2+4631*2=18394<18400。

22 号车剩 1 辆，21 号车剩 2 辆。

二十四)，1 辆 21 米长 1-1 轿运车上下层，上层装载 1 辆 22 号车，2 辆 21 号车，2 辆 5 号车。4566*2+4631+3560*2 =20883<21100。下层装载 3 辆 42 号车，2 辆 5 号车。4644*3+3560*2 =21052<21100。

21、22 号车运完，42 号车剩 11 辆，5 号车剩 18 辆。

二十五)，2 辆 21 米长 1-1 轿运车上下层，2 辆上层及 1 辆下层均装载 3 辆 42 号车，2 辆 5 号车。4644*3+3560*2 =21052<21100。另一辆下层装载 2 辆 42 号车，2 辆 5 号车，1 辆 13 号车；4644*2+3560*2 +4600=21008<21100。

42 号车运完，13 号车剩 32 辆，5 号车剩 10 辆。

二十六)，3 辆 21 米长 1-1 轿运车上下层，其中 3 辆上层及 2 辆下层装载 2 辆 45 号车，3 辆 40 号车。4770*2+3845*3 =21075<21100。另一辆下层装载 3 辆 13 号车，2 辆 5 号车；4600*3+3560*2=20920<21100。

45 号车运完，40 号车剩 10 辆，5 号车剩 8 辆，13 号车剩 29 辆。

二十七)，2 辆 21 米长 1-1 轿运车上下层，每层装载 3 辆 13 号车，2 辆 5 号车；4600*3+3560*2=20920<21100。

5 号车运完，13 号车剩 17 辆。

二十八)，8 辆 18.3 米长 1-1 轿运车上层，每层装载 6 号车 4 辆；4590*4=18360<18400。6 号车剩 26 辆。

二十九)，5 辆 21 米长 1-1 轿运车上下层，每层装载 20 号车 2 辆、8 号车 1 辆，先装 13 号车 2 辆，13 号车装完后替换为 6 号车； 4600*2+4370+3688*2=20946<21100。

13 号车运完，20 号车剩 16 辆，6 号车剩 23 辆，8 号车剩 18 辆，。

二十九)，6 辆 21 米长 1-1 轿运车上下层，每辆上层及 5 辆下层装载 4 辆 9 号车或 6 号车； 4590*4=18360<21100。第六辆下层装载 2 辆 9 号车，2 辆 18 号车；4580*2+4500*2=18160<21100。

9、6 号车运完。18 号车剩 30 辆。

至此宽度超过 1700 毫米的乘用车全部装载完毕，除使用了 4 辆 24.3 米长 1-1 轿运车、21 辆 19 米长 1-1 轿运车、15 辆 18.3 米长 1-1 轿运车的全部上层；又使用了 3 辆 18.3 米长 1-1 轿运车、15 辆 22 米长 1-1 轿运车、20 辆 21 米长 1-1 轿运车、17 辆 24.3 米长 1-1 轿运车、5 辆 23.7 米长 1-2 轿运车、15 辆 23.3 米长 1-2 轿运车的全部上层。尚有 24 辆 3 号车（长度 4310 毫米）、18 辆 8 号车（长度 4270 毫米）、2 辆 14 号车（长度 4420 毫米）、30 辆 18 号车（长度 4400 毫米）、16 辆 20 号车（长度 3588 毫米）、24 辆 27 号车（长度 4194 毫米）、26 辆 30 号车（长度 3998 毫米）、22 辆 34 号车（长度 4687 毫米）、25 辆 39 号车（长度 4245 毫米）没有装载。

因为 5 辆 23.7 米长 1-2 轿运车、15 辆 23.3 米长 1-2 轿运车、5 辆 19 米长 2-2 轿运车的全部上层没有使用，而且现在乘用车的高度、宽度适合装在上层两列。

一），3 辆 23.7 米长 1-2 轿运车上层，其中 2 列每列装载 4 辆 34 号车，1 辆 14 号车；4520+4787*4=23668<23800。第三、四、五列每列装载 4 辆 34 号车，1 辆 27 号车；4294+4787*4=23442<23800。第六列装载 2 辆 34 号车，3 辆 8 号车；4370*3+4787*2=22684<23800。

14、34 号车运完。27 号车剩 21 辆，8 号车剩 15 辆。

二），2 辆 23.7 米长 1-2 轿运车上层，每列装载 5 辆 18 号车。4500*5=22500<23800。

18 号车剩 10 辆。

三），1 辆 23.3 米长 1-2 轿运车上层，每列装载 5 辆 18 号车。4500*5=22500<23400。

18 号车运完。

四），3 辆 23.3 米长 1-2 轿运车上层，每列装载 4 辆 3 号车，1 辆 8 号车。4410*4+4370=22010<23400。

3 号车运完。8 号车剩 9 辆。

五），3 辆 23.3 米长 1-2 轿运车上层，前 5 列每列装载 5 辆 39 号车，4345*5=21725<23400。第六列装载 5 辆 8 号车。4370*5=21850<23400。

39 号车运完。8 号车剩 1 辆。

六），3 辆 23.3 米长 1-2 轿运车上层，每列装载 4 辆 27 号车，1 辆 30 号车。4294*4+4098=21274<23400。

27 号车运完。30 号车剩 20 辆。

五），4 辆 23.3 米长 1-2 轿运车上层，2 辆每列装载 5 辆 30 号车，4098*5=20490<23400。另两辆的 3 列每列装载 5 辆 20 号车。3688*5=18440<23400。第四列装载 1 辆 20 号车，1 辆 8 号车。

30、8 号车运完。

1207 辆乘用车装载完毕，1 辆 23.3 米长 1-2 轿运车上层及 5 辆 19 米长 2-2 轿运车上层没有使用。由于 25 辆 18.2 米长 1-1 轿运车、5 辆 23.7 米长 1-2 轿运车以及 1 辆 24.3 米长 1-1 轿运车没有使用，总共使用轿运车 120 辆。

为了克服许多研究生的方案漏发送乘用车的情况，可以造两张表，一张是 45 种乘用车的，开始全部注上需要运送的数目，安排运送了几辆之后，就再写上剩余需要运送的数目，直至为零。另一张是 10 种轿运车的，开始注上拥有的车辆数，装载了几辆之后，再写上还没有安排的这种轿运车数目，直至为零或乘用车装载完。为提高效率，1-2 轿运车不一定在 1-1 轿运车装载 5 辆之后安排 1 辆，只要不超过预先估计的数目之内即可。

四，~~可能的~~创新的做法

从前面的表格可以获知，当有 8 种轿运车、45 种轿车时满载的装载方案达 200 多万种，加上不是满载的装载方案可能达 500 万种以上，所以一方面难度是极其明显的，但是我们绝不应该忘记问题的另一面，最优解仅需要 113 辆轿运车，254 列。即使被采用的 254 列中还有不少列的装载方案是相同的，因此真实

被采用的装载方案不超过 100 种。由于考虑全部装载方案实际上 349999/450000 都是无用功，而且整数规划的计算与整数变量的个数是指数式关系，所以 lingo 软件在几天之内无法求解就是非常正常的事了，这又一次说明完全依赖计算机，一切迷信计算机是不行的，必须发挥人的创造性，必须让计算机的优异的性能与人的聪明才智有机地结合。现在的问题是尽管我们知道其中绝大多数是无用功，但并不准确知道谁是有用的。退一步，我们能否大概知道哪些装载方案是有用的，适当扩大装载方案的集合，再利用计算机的优势来解决这个困难的问题。当然我们不应该指望一次就可能一个不漏地找到全部有用的装载方案，但我们可以借用常用优化方法的思想，通过迭代的方式逐步寻优，只有保证每次迭代目标函数值是单调的即可，如果能够是严格单调的更好。根据 lingo 软件的实际情况求解几千个整数变量问题不大，结合问题选取 4800 个

整数变量。

~~各种轿运车每层装载不同种类的乘用车的解空间过于庞大，所有情况全部考虑不切实际。本模型采取如下措施解决该问题：根据装载方案中绝大多数无用的实际情况，~~对每种轿运车上下层所有装载方案按照装满后剩余空间由小到大进行排序，各取前 200 组装载方案（方案越多，利用率越高）。考虑到单台轿运车每层剩余空间最小不~~能~~一定是~~完全反映~~总体最佳装载方案~~最佳~~，~~因而，~~所以再~~另外对~~从每种轿运车上下层~~，在~~剩余的装~~在~~载方案中各~~各再~~随机取出 100 组不重复的装载方案（借用模拟退火、遗传算法的思想），并就~~这 100 组装载方案与之前 200 组共同组成~~用这 300 组装载方案去~~作为~~寻找装载方案解~~空间的代表~~的最优解或较优解。

将这些装载方案的解空间代表放在 16 个（18.2 米轿运车暂不使用，两个 21 米长的轿运车合在一起，这样轿运车有~~轿运车~~ 8 种长度，每种轿运车再分上下

两层，层共有 16 种~~层 18.2 米暂不使用~~）300×45（300 是方案组数，45 是乘用车种~~属~~数）矩阵中。这些矩阵为

$$\boldsymbol{N}_{1\mathrm{D}},\boldsymbol{N}_{2\mathrm{D}},\cdots,\boldsymbol{N}_{8\mathrm{D}},\boldsymbol{N}_{1\mathrm{U}},\boldsymbol{N}_{2\mathrm{U}},\cdots,\boldsymbol{N}_{8\mathrm{U}}$$

。各种装载方案出现次数用 ~~1~~300 维的行~~矩阵~~向量表示，为

$$\boldsymbol{x}_{1\mathrm{D}},\boldsymbol{x}_{2\mathrm{D}},\cdots,\boldsymbol{x}_{8\mathrm{D}},\boldsymbol{x}_{1\mathrm{U}},\boldsymbol{x}_{2\mathrm{U}},\cdots,\boldsymbol{x}_{8\mathrm{U}}$$

（总共 4800 个未知数）。将这些数据代入第一阶段优化模型，以轿运车使用数量最小作为目标函数，考虑上下层约束、乘用车供需约束、1-2 和 1-1 型轿运车数量约束等。第一阶段优化模型仅考虑各类乘用车的总供应量，而不考虑目的地。因为以各层装载方案出现次数为自变量，所以模型比前面以轿运车各种装载方案出现次数为自变量要多几个约束条件。

具体优化模型及说明如下：

$$\min \ C_{\text{sum}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{300} x_{1\text{D}i} + \sum_{j=2}^{8} \sum_{i=1}^{300} x_{j\text{D}i}$$

~~因为2-2型轿运车下层有两列~~ (36)

s.t.

$$\sum_{i=1}^{300} x_{1\text{D}i} = \sum_{i=1}^{300} x_{1\text{U}i}, \sum_{i=1}^{300} x_{1\text{D}i}, \text{mod}\left(\sum_{i=1}^{300} x_{1\text{D}i}, 2 \right) = 0$$

~~2-2型轿运车上、下层均为两列，上层列数一定偶数~~ (37)

$$\sum_{i=1}^{300} x_{j\text{D}i} = \sum_{i=1}^{300} x_{j\text{U}i}, j = 2, 3, \cdots, 6$$

~~1-1型轿运车上、下层都是1列~~ (38)

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{300} x_{j\text{D}i} = \sum_{i=1}^{300} x_{j\text{U}i}, j = 7, 8$$

~~1-2轿运车上层列数是下层的两倍~~ (39)

$$\sum_{j=1}^{8} \boldsymbol{x}_{j\text{D}} \boldsymbol{N}_{j\text{D}} + \sum_{j=1}^{8} \boldsymbol{x}_{j\text{U}} \boldsymbol{N}_{j\text{U}} \geq \left[P_1 \quad P_2 \quad \cdots \quad P_{45} \right]$$

~~几个目的地对45种轿车的需求得到满足~~ (40)

$$\sum_{j=7}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{jDi}\le 20\%\sum_{j=2}^{6}\sum_{i=1}^{300}x_{jDi}$$

1-2型轿运车数量不超过1-1型轿运车数量的20%

(41)

$$x_{jDi}\in \mathrm{N}, x_{jUi}\in \mathrm{N} \quad (42)$$

利用 LINGO 软件求解上述整数规划模型，得到该搜索空间下轿运车使用数量的最优解。

每种轿运车每层有 300 种乘用车装载方案，将求得的可行解中被采用的乘用车装载方案保留，删除没有采用的运载方案(即对后来产生的 100 组进行淘汰~~过程~~)。重新~~重新~~在总的运载方案空间随机搜索乘用车运载方案，加入已有运装载方案中，被删除的装运载方案~~并不是被永久删除，~~后来仍有可能再次被加入新的装运载方案中(~~即搜索过程，~~目的在于不断~~增加~~变化搜索空间)。~~采用此策略生成新的运载方案解空间代表~~将新 300 组乘用车装载方案~~，~~重新代入第一阶段

优化。同时，将已经找到轿运车使用数量的最小值 ~~LINGO 软件求解的初值~~设为~~上步优化的结果~~约束，即在上步结果的基础寻找更优的可行解。

从理论上~~而言~~讲，当启发式-淘汰搜索空间足够大，寻优到的可行解也会逐渐逼近真实最优解，但实际上装载、运输方案过于庞大，搜索到全部解空间是不切实际的，上述方法在有限的解空间获得满意的可行解，并且在可行解的基础上淘汰-搜索，不断优化，因而由上述方法得到的可行解易于实现，满足实际整车物流运输需求。

经过实际验证，当按照上述规则改变运载方案 10~15 次（每次计算机约运行 15 分钟），所得的轿运车使用数量不再减少，则认为该优化模型已经找到最优解，终止寻优过程。

进一步分析，乘用车最短 3460Mm，次长 5160Mm，相差 1700Mm，而乘用车有 44 种，立即可知，不同乘用车长度平均相差不足 4Cm，因此不少情况下，

轿运车长度方面的浪费就小于等于4Cm，而轿运车每列长度平均20米，相对损失0.2%。所以在求解时根本无须考虑浪费比较大（例如浪费超过2%）的方案，这为我们剔除装载方案提供理论依据。

上述方案仍然有应当修改的地方，各取前200组装载方案

是不够的，因为45种轿车都要运走，可能其中有部分轿车因为长度或其他原因搭配不理想，这样在前200组装载方案中就可能被包括这种轿车，肯定找不到比较好的解。因此必须再按照包含各种轿车的装载方案按照装满后剩余空间由小到大进行排序，保证200组装载方案中包含全部轿车的装载方案。

也可能某种轿车的数量比较大，虽然可以与其他轿车很好地搭配浪费很小，但由于其他轿车数量小，前面搭配完了，这时这种轿车必须采用浪费比较大的方案，因此在200组装载方案中应该多考虑数量比较大的轿车的装载方

案。

比较前四问得到的解答，可以发现虽然都是最优解，但是采用的装载方案并不完全相同，甚至采用的装载方案的个数也不相同，因此在迭代的过程中，~~被~~不应该把未使用的全部装载方案从集合中剔除，而应该保留其中重要的及曾经使用过的装载方案。

第二阶段优化模型以轿运车使用成本最小(即 1-2 型轿运车使用数量最小)为目标函数，将第一阶段优化模型得到的轿运车总量作为该阶段优化的等式约束。优化模型同 ~~5.1.1~~ 第四问的第二阶段优化模型类似，此处不再赘述。

上述两个阶段优化模型得到的结果作为第三阶段优化模型的约束，进行第三阶段优化。第三阶段优化的目标函数为行驶里程数最短，同时需要满足各个地点的乘用车供应需求。

将所有轿运车按照行驶路线分为以下 6 种路线：

1、线路 1：O-D，用下标 D 表示；

2、线路 2：O-D-B，用下标 B 表示；

3、线路 3：O-D-C，用下标 C 表示；

4、线路 4：O-D-B-E，用下标 E 表示；

5、线路 5：O-D-B-A，用下标 A 表示；

6、线路 6：O-D-B-A-E，用下标 AE 表示。

假设模型中线路不考虑绕行情况，且不考虑线路 O-D-B-E-A。当轿运车需要在 A 地和 E 地卸车时，线路 O-D-B-E-A 和 O-D-B-A-E 均能达到这一效果，且线路 O-D-B-A-E 的里程数小于线路 O-D-B-E-A，因而只考虑线路 O-D-B-A-E 是合理的。

设这 6 种路线，各型轿运车上下层每列各种方案出现的次数分别为

$$\boldsymbol{x}_{i\mathrm{DM}}=\begin{bmatrix}x_{i\mathrm{DM}1} & x_{i\mathrm{DM}2} & \cdots & x_{i\mathrm{DM}300}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_{i\mathrm{UM}}=\begin{bmatrix}x_{i\mathrm{UM}1} & x_{i\mathrm{UM}2} & \cdots & x_{i\mathrm{UM}300}\end{bmatrix},$$

$i=1,2,\cdots,8$，$M\in\{\mathrm{D,C,B,A,E,AE}\}$。

这样自变量个数达到 28800，求解难度大为增加。

第三阶段优化模型如下：

$$\min S_{\mathrm{sum}} = S_{\mathrm{D}} \times \left[\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{300} x_{1\mathrm{DD}i} + \sum_{j=2}^{8} \sum_{i=1}^{300} x_{j\mathrm{DD}i} \right] + S_{\mathrm{C}} \times \left[\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{300} x_{1\mathrm{DC}i} + \sum_{j=2}^{8} \sum_{i=1}^{300} x_{j\mathrm{DC}i} \right] +$$

$$S_{\mathrm{B}} \times \left[\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{300} x_{1\mathrm{DB}i} + \sum_{j=2}^{8} \sum_{i=1}^{300} x_{j\mathrm{DB}i} \right] + S_{\mathrm{A}} \times \left[\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{300} x_{1\mathrm{DA}i} + \sum_{j=2}^{8} \sum_{i=1}^{300} x_{j\mathrm{DA}i} \right] +$$

$$S_{\mathrm{E}} \times \left[\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{300} x_{1\mathrm{DE}i} + \sum_{j=2}^{8} \sum_{i=1}^{300} x_{j\mathrm{DE}i} \right] + S_{\mathrm{AE}} \times \left[\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{300} x_{1\mathrm{DAE}i} + \sum_{j=2}^{8} \sum_{i=1}^{300} x_{j\mathrm{DAE}i} \right]$$

六条路线上铲运车里程和最小

(43)

$$\sum_{i=1}^{300} x_{1\mathrm{D}i} = \sum_{i=1}^{300} x_{1\mathrm{U}i}, \sum_{i=1}^{300} x_{1\mathrm{D}i}, \mathrm{mod}\left(\sum_{i=1}^{300} x_{1\mathrm{D}i}, 2 \right) = 0$$

(44)

$$\sum_{i=1}^{300} x_{j\mathrm{D}i} = \sum_{i=1}^{300} x_{j\mathrm{U}i}, j = 2, 3, \cdots, 6$$

(45)

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{300} x_{j\mathrm{D}i} = \sum_{i=1}^{300} x_{j\mathrm{U}i}, j = 7, 8$$

(4

6)

$$\sum_{j=7}^{8}\sum_{i=1}^{300} x_{j\mathrm{D}i} \leq 20\% \cdot \sum_{j=2}^{6}\sum_{i=1}^{300} x_{j\mathrm{D}i}$$

(47)

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300} x_{1\mathrm{DD}i} + \sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300} x_{j\mathrm{DD}i} + \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300} x_{1\mathrm{DC}i} + \sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300} x_{j\mathrm{DC}i} + \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300} x_{1\mathrm{DB}i} + \sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300} x_{j\mathrm{DB}i} +$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300} x_{1\mathrm{DA}i} + \sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300} x_{j\mathrm{DA}i} + \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300} x_{1\mathrm{DE}i} + \sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300} x_{j\mathrm{DE}i} + \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300} x_{1\mathrm{DAE}i} + \sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300} x_{j\mathrm{DAE}i} = C_{\mathrm{sum}}$$

(48)

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{D}} = \sum_{j=1}^{8} \boldsymbol{x}_{j\mathrm{DD}} \boldsymbol{N}_{j\mathrm{D}} + \sum_{j=1}^{8} \boldsymbol{x}_{j\mathrm{UD}} \boldsymbol{N}_{j\mathrm{U}}$$

~~D目的地各种轿车的可以卸货数, $N_{j\mathrm{D}}$是下层装载方案~~

(49)

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{C}} = \sum_{j=1}^{8} \boldsymbol{x}_{j\mathrm{DC}} \boldsymbol{N}_{j\mathrm{D}} + \sum_{j=1}^{8} \boldsymbol{x}_{j\mathrm{UC}} \boldsymbol{N}_{j\mathrm{U}}$$

(50)

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{B}} = \sum_{j=1}^{8} \boldsymbol{x}_{j\mathrm{DB}} \boldsymbol{N}_{j\mathrm{D}} + \sum_{j=1}^{8} \boldsymbol{x}_{j\mathrm{UB}} \boldsymbol{N}_{j\mathrm{U}}$$

(51)

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{A}} = \sum_{j=1}^{8} \boldsymbol{x}_{j\mathrm{DA}} \boldsymbol{N}_{j\mathrm{D}} + \sum_{j=1}^{8} \boldsymbol{x}_{j\mathrm{UA}} \boldsymbol{N}_{j\mathrm{U}}$$

(52)

$$T_{E}=\sum_{j=1}^{8} x_{jDE} N_{jD}+\sum_{j=1}^{8} x_{jUE} N_{jU} \quad (53)$$

$$T_{AE}=\sum_{j=1}^{8} x_{jDAE} N_{jD}+\sum_{j=1}^{8} x_{jUAE} N_{jU} \quad (54)$$

$T_{C} \geq P_{C}$，C处各种轿车可卸货量不小于需求量 (55)

$$T_{E}+T_{AE} \geq P_{E} \quad (56)$$

$$T_{A}+T_{AE} \geq P_{A} \quad (57)$$

$T_{A}+T_{E}+T_{AE} \geq P_{A}+P_{E}$

与上两个不等式何在一起，保证A、E处需求得到满足，因为A、E均可以从两条路线的轿运车上卸载轿车，AE路线可保证A、E各自的需求，总体又可保证总量需求。 (58)

$$T_B + T_A + T_E + T_{AE} \geq P_A + P_B + P_E$$

A、B、E的路线都经过B,不等式左边是到达B的轿运车总量，不等式右边是A、B、E的轿运车需求总量，两边同减去A、E的轿运车需求总量，不等式仍然成立，即B的轿运车剩余量超过B的轿运车需求总量

(59)

$$T_D + T_C + T_B + T_A + T_E + T_{AE} \geq P_A + P_B + P_C + P_D + P_E$$

(60)

$$x_{jDMi} \in N, x_{jUMi} \in N$$

(61)

式(55)~(60)为乘用车供需约束，表示经过该点的轿运车所运载的乘用车数量大于该点乘用车的需求量。

需要说明的是，式(48)原则上应为等式约束，由于前两阶段优化模型为不考虑线路情况下得到的轿用车使用量和装载情况，**本文假设第三阶段模型不考虑绕行情况，因而前两阶段的最优可行解**

实际上是第三阶段可行解的下限解，故本模型引入松弛变量μ，将等式约束(48)转化为如下不等式约束：

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1DD'i}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{jDD'i}+\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1DCi}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{jDCi}+\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1DB'i}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{jDB'i}+$$
$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1DAi}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{jDAi}+\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1DEi}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{jDEi}+\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{300}x_{1DAEi}+\sum_{j=2}^{8}\sum_{i=1}^{300}x_{jDAEi}\le C_{sum}+\mu \tag{62}$$

式中：μ 为大于 0 的整数变量。

引入松弛变量简化分析后，本文提出以下两种求解方法：

方法一：

方法一的首要目标在于最小化总轿运车总数量，**即在松弛变量μ尽可能小的条件下，最小化总行驶里程。**

方法二：

~~实际上，~~由于方法一中在松弛变量μ很小(例如$\mu=1$)的情况下，可行的解空间非常有限，寻找最优里程更为困难，较难得到最优解，~~因而本文~~下面提出一种局部整数-分散连续的逐步优化方法。

考虑到相比于离散变量，连续变量

的优化问题更易于求解[7]**，本文的方法二考虑将离散变量连续化。**首先，将线路 1 各型轿运车上下层每列各种方案出现的次数设为整型变量，其余线路均为连续变量，求得线路 1 各型轿运车上下层每列的方案，线路 1 的装载方案在之后的连续化过程中保持恒定（这样自变量的个数回到 4800 个）；接着设定线路 *i* 装载方案次数为整型变量，线路 1……*i*-1 装载为恒定不变的整数，线路 *i*+1……6 装载方案为连续变量；重复该过程（自变量的个数始终是 4800 个），直到所有线路对应各种方案的出现次数全部固定。显然该方法各线路最终求得的装载方案均为整数，在松弛变量固定的情况下，该方法对应的装载方案所需的里程数是可以接受的可行解。

具体步骤如下：

STEP1：m=1；

STEP2：固定 $x_{j\mathrm{D}pi}, x_{j\mathrm{U}pi}$ 的值保持不变，$p=1,2,\cdots,m-1$，保持前 m-1 种路

线各型轿运车上下层每列各种方案出现的次数不变；$x_{j\mathrm{D}mi}\in\mathrm{N}, x_{j\mathrm{U}mi}\in\mathrm{N}$，第 m 条路线各型轿运车上下层每列各种方案出现的次数设为整型变量；$x_{j\mathrm{D}qi}\in\mathrm{R}, x_{j\mathrm{U}qi}\in\mathrm{R}, q=m+1,\cdots 6$，后 6-m 条路线各型轿运车上下层每列各种方案出现的次数设为连续变量；

STEP3：将上述变量代入第三阶段优化模型进行求解；

STEP4：IF m<6，则 $m=m+1$，转至 STEP2；ELSE 结束程序，输出结果。

~~5.3.2~~ 计算结果

利用 LINGO 软件实现上述启发式-淘汰搜索三阶段优化模型。第一、二阶段得到的最优解为搜索空间内的全局最优解，对于第三阶段优化模型，由于求解规模过于庞大，加上松弛变量后，仍然很难获得全局最优解，因此本模型通过第三阶段优化得到的结果是搜索空间内的局部最优解。

启发式优化过程中轿运车使用量最

小值~~的变化过程如图1所示。~~，通过第一阶段求解得到轿运车使用量的最优可行解为113辆，通过第二阶段优化求得2-2、1-1和1-2型轿运车数量分别为~~10~~5，90和18辆。具体~~各种类型~~的~~使用量~~方案~~如表17所示~~见附表。不允许绕行的情况下，113辆轿运车的方案没有找到解，增加一辆轿运车，即114两轿运车的可行方案也见附表。

五，另一种启发式方法

我们感到非常奇怪，为什么前四问与第五问的求解难度有如此巨大的差距，一个手工一小时之内就可能求解，另一个却使三名优秀研究生采用先进的计算机并使用先进的LINGO软件在四天100小时都无法求解。问题几乎没有变化，仅仅是轿运车、乘用车的种类增加了一些。而问题恰恰处在这一点，那么能否借用前四问的“捷径”呢？

~~这种~~下面启发式方法的思想就是通过对轿运车、乘用车分类的办法将问题简化为前三问的规模，即将轿运车、乘用车各自合并成 3-5 类，轿运车、乘用车内部各类~~，各类~~车辆长度之间没有交集。每类轿运车以该类中最短的轿运车长度作为该类轿运车长度，每类乘用车以该类中最长的乘用车长度作为该类乘用车长度。这时就可以按照前三问的方法和程序进行计算机求解，花时间仅以秒计就可以得到可行解。但得到类似前三问的解答时并不全部执行，因为其中有些方案浪费非常大。所以仅执行既~~包含~~不超过最长的乘用车数量、~~而且~~又不超过最短的轿运车数量~~而~~并且浪费很小的方案，并将它们从现有任务总体中去除，这样剩下的轿运车、乘用车又形成新的问题，但由于此时各类中最长的乘用车、最短的轿运车的运输任务已经完成，故有关类的轿运车长度可能变大、有关类的乘用车长度可能~~分别变大、~~变小，但规模同前。而且在这样的迭代过程中轿

运车、乘用车的总种数是严格单调下降的，特别要指出的是这种方法以极小的计算工作量换取问题规模的单调下降，多次迭代后应该可以找到较优解。有研究生按这种方法来做第五问（难度在于将从现有任务总体中去除已经执行的部分运输任务，并形成新的问题程序化），很快可以得到120多辆轿运车的较优解。这种方法也可以变化分类的标准以及分类数进行优化，特别要指出这种优化非常简单，只要计算机编个并不复杂的程序就能够实现。

考虑到在给定轿运车长度、乘用车长度后，明显发现有些乘用车很容易安排，例如长度小于等于轿运车长度的1/5或1/4或1/6减去安全间隔的，因为它们在极不利的情况下都可以自我搭配而使浪费极小，甚至为零。当然也会有些乘用车难于安排。因此在启发式方法中优先考虑难于安排的乘用车，为此可以在分

类时让这些难于安排的乘用车作为某类乘用车的最长者~~作为某类乘用车的最长者~~或让长度小于等于轿运车长度的 1/5 或 1/4 或 1/6 减去安全间隔的作为某类乘用车的最短者，在迭代中找不到浪费小的方案时~~也可以~~再通过调整乘用车分类标准来改进。

这个方法的一个显著优点是其计算的时间主要与轿运车、乘用车的分类数有关，在两个分类数确定之后，计算工作量与真实的轿运车、乘用车的种数是线性关系而不是指数式增长，因而更方便应用于实际。~~应用于实际。~~

~~这种启发式方法的思想是通过对轿运车、乘用车分类的办法将问题简化为前三问的规模，即合并成 3-5 类，各类之间车辆长度之间没有交集。每类轿运车以该类中最短的轿运车长度作为该类轿运车长度，每类乘用车以该类中最长~~

~~的乘用车长度作为该类轿运车长度。这时就可以按照前三问的方法和程序进行计算机求解，花时间仅以秒计。但等到类似前三问的解答时并不全部执行，仅执行包含最长的乘用车、最短的轿运车而且浪费很小的方案，并将它们从任务总体中去除，这样形成新的问题，但由于关于最长的乘用车、最短的轿运车的运输任务已经完成，故有关类的轿运车长度、有关类的乘用车长度可能分别变大、变小。而且这样的迭代过程中轿运车、乘用车的总数是严格单调下降的，多次迭代后应该可以找到较优解。~~

~~在给定轿运车长度、乘用车长度后，明显发现有些乘用车很容易安排，例如小于等于轿运车长度的 1/5 或 1/4 或 1/6 减去安全间隔，因为它们极不利的情况下都可以自我搭配而使浪费极小，甚至为零。当然也会有些乘用车难于安排。因此在启发式方法中优先考虑难于安排的乘用车，为此可以在分类时让这些难于安排的乘用车作为某类乘用车的最长~~

~~者，在迭代中找不到浪费小的方案时也可以通过调整乘用车分类标准来改进。~~