网络空间安全导论

第五章实验报告

基于 Paillier 算法的匿名电子投票流程实现

目录

1 课程实验原理及要求

1.1 实验原理

1.1.1 Paillier算法简介

密钥生成:

1.随机选择两个大素数p,q满足$gcd(pq,(p-1)(q-1))=1$，且满足p,q长度相等

2.计算$n=pq$以及$\lambda=lcm(p-1,q-1)$，这里lcm表示最小公倍数，$|n|$为n的比特长度

3.随机选择整数$g \leftarrow Z_{n^2}^*$

4.定义L函数：$L(x)=\dfrac{x-1}{n}$，计算$\mu=(L(g^\lambda \mod n^2))^{-1} \mod n$

5.公钥$\{n,g\}$，私钥$\{\lambda,\mu\}$

加密：

1.输入明文消息m，满足$0 \le m < n$

2.选择随机数r，满足$0 \le r < n$且$r \in Z_n^*$

3.计算密文$c=g^m r^n \mod n^2$

解密：

1.输入密文c，满足$c \in Z_{n^2}^*$

2.计算明文消息$m=L(c^\lambda \mod n^2)\cdot\mu \mod n$

同态加：

1.对于密文$c1$和$c2$，计算$c=c_1\cdot c_2 \mod n^2$

1.1.2 Paillier算法简化

在实验过程中，发现如果完全随机选择素数以及，g，r随机，会造成加解密时间比较长，运算复杂度比较高，在计算较大数时很不便捷，因此查阅资料，在实现Paillier算法时，对参数的生成做出了以下调整：

首先，在p,q等长时，有

1.$n=p\cdot q$

2.$\lambda=(p-1)(q-1)$

3.$g=n+1$

4.$\mu=\Phi(n)^{-1} \mod n$，$\Phi(n)=(p-1)(q-1)$

1.2 实验要求

1.2.1 实验描述

1、编写Paillier算法（密钥生成、加密和解密算法）并验证其加法同态性质

2、模拟实现基于Paillier 算法的匿名电子投票流程，了解该算法的应用，加深对同态加密算法的认识

1.2.2 实验分析

1、使用python语言编写程序实现paillier算法的密钥生成、加密、解密过程，并且设计程序验证其加法同态性

2、使用python语言设计、编写匿名投票程序

2 实验环境

Windows11，python3.9，PyCharm 2021.3.3 (Professional Edition)

3 实验步骤

3.1 设计程序

为了完成实验，设计4个python程序，第一个程序实现Paillier算法的的封装，第二个程序展示Paillier算法加解密过程，第3个程序验证Paillier算法同态加密的特性，第4个程序模拟基于Paillier算法的投票流程

3.1.1 Paillier程序设计

为了方便其他几个程序的调用，将Paillier算法封装成Paillier类，其中属性有pubKey与priKey分别表示公钥和私钥，其中有12种方法，对外提供四个方法，分别是$gen_Key()$、$encode()$、$decode()$、$plus()$

```python
import math
import random
import gmpy2 as gy
from time import *

class Paillier(object):

    def __init__(self,pubKey=None,priKey=None):
        self.pubKey = pubKey
        self.priKey = priKey

    #密钥生成算法第一步，获得p和q
    def get_pq(self):
        list=[521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599,
              601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661,
              673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751,
              757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829,
              839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919,
              929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997, 1009,
              1013, 1019, 1021]
        pq=[]
        while True:
            p=list[random.randint(0,74)]
            q=list[random.randint(0,74)]
            if (math.gcd(p*q,(p-1)*(q-1))==1):
                pq.append(p)
                pq.append(q)
                break
            else:
                continue
        return p,q
```

这部分代码是Paillier算法中密钥生成的第一步：获得p,q

定义了$get_pq()$方法，$list=[...]$中存放的是提前用脚本生成好的素数

利用$while$结构来检测生成的参数，当满足$gcd(pq,(p-1)(q-1))=1$时，退出循环，返回p,q的值

```python
#密钥生成算法第二步，获得N和栏目大（x）
def calculate_N(self,p,q):
    N=p*q
    x=(p-1)*(q-1)
    return N,x

#密钥生成算法第三步，获得g，y
def get_random(self,N,X):
    u=0
    while u==0:
        g=N+1
        u=gy.invert(X,N)
    return g,u

#构建L（x）
def L_x(self,N,x):
    z=(x-1)//N
    return z

#加密过程
def enc_m(self,publicKey,message):
    N=publicKey[0]
    g=publicKey[1]
    r = random.randint(1,N)
    c = (g ** message % N ** 2) * (r ** N % N ** 2) % N **2
    return c

#解密过程
def dec_c(self,N,priverKey,crypto):
    if crypto > N**2:
```

这部分代码主要包含$calculate_N()$、$get\_random()$、$L\_x()$、$enc\_m()$

其中x表示算法中的λ，u表示算法中的μ

对于构造的L_x函数，在编写程序调试的过程中发现，采用“/”有时会计算出错，后来上网查找资料发现python使用“/”计算结果为浮点数，导致有bug，于是改为“//”，其计算结果仍然是整数

在加密函数$enc_m()$中，编写程序后发现加密计算时间很长，于是对计算密文的方式进行了化简，在一定程度上减小了算法的时间复杂度，原理为幂模运算的性质，即$(a*b) \mod p = (a \mod p * b \mod p) \mod p$，化简后得到计算密文的公式为$c = (g^m \mod n^2 * r^n \mod n^2) \mod n^2$

```python
#解密过程
def dec_c(self,N,priverKey,crypto):
    if crypto > N**2:
        return 0
    else:
        x=priverKey[0]
        u=priverKey[1]
        z=self.L_x(N,crypto**x % N**2)
        m=z*u % N
        return m

#同态加法验证
def com(self,message1,message2,publicKey,N):
    N = publicKey[0]
    g = publicKey[1]
    r = random.randint(1, N)
    c1 = (g ** message1 % N ** 2) * (r ** N % N ** 2) % N **2
    print("明文1加密后的密文为：",c1)
    c2 = (g ** message2 % N ** 2) * (r ** N % N ** 2) % N **2
    print("明文2加密后的密文为：", c2)
    c=c1*c2 % N ** 2
    print("密文为相乘后得到：", c)
    return c

def gen_Key(self):
    p,q=self.get_pq()
    print('p = ',p)
    print('q = ',q)

    N,x=self.calculate_N(p,q)
```

这部分代码主要包含$dec_c()$、$com()$

$com()$主要功能是实现两个明文加密后，密文相乘，返回相乘后的结果，用于验证Paillier算法的同态加性质

```python
    def gen_Key(self):
        p,q=self.get_pq()
        print('p = ',p)
        print('q = ',q)

        N,x=self.calculate_N(p,q)
        print("N = ",N)
        print("x = ",x)
        g,u=self.get_random(N,x)
        print("g = ",g)
        print("u = ",u)

        self.pubKey=[N,g]
        self.priKey=[x,u]
        print("publicKey = ",self.pubKey)
        print("priverKey = ",self.priKey)

    #加密
    def encode(self,message):
        return self.enc_m(self.pubKey,message)

    #解密
    def decode(self,message):
        return self.dec_c(self.pubKey[0],self.priKey,message)

    #相加
    def plus(self,message1,message2):
        return self.com(message1,message2,self.pubKey,self.pubKey[0])
```

这部分代码主要包含$gen_Key()$、$encode()$、$decode()$、$plus()$

$gen_Key()$实现密钥生成，$encode()$实现加密，$decode()$实现解密，$plus()$实现对两个明文分别加密后计算密文的乘积

3.1.2 test_Paillier程序设计

```python
from Paillier import Paillier
from time import *

if __name__=="__main__":
    print("------------------------------------------")
    pa = Paillier()
    print("加解密参数如下：")
    pa.gen_Key()
    print("------------------------------------------")
    message=eval(input("请输入需要加密的明文："))
    Enc_begin_time=time()
    print("加密前明文：  ",message)
    c=pa.encode(message)
    Enc_end_time=time()
    Enc_time=Enc_end_time-Enc_begin_time
    print("加密后密文：  ",c)
    print("加密运行时间：  ",Enc_time)
    print("------------------------------------------")
    Dec_begin_time=time()
    print("需要解密的密文：",c)
    m=pa.decode(c)
    Dec_end_time=time()
    Dec_time=Dec_end_time-Dec_begin_time
    print("解密后的明文：",m)
    print("解密运行时间: ",Dec_time)
```

这个程序用于测试Paillier算法的密钥生成、加密解密过程，通过命令台输入参数，引入Paillier.py中的Paillier类实现Paillier加解密过程，其中引入了time库，来查看加解密的计算时间

3.1.3 test_Paillier_plus程序设计

```python
from Paillier import Paillier
import time

if __name__=="__main__":
    print("-----------------------------------------")
    print("加解密参数如下：")
    pa=Paillier()
    pa.gen_Key()
    print("-----------------------------------------")
    m1=eval(input("请输入需要加密的明文1："))
    m2=eval(input("请输入需要加密的明文2："))
    print("-----------------------------------------")
    c=pa.plus(m1,m2)
    m=pa.decode(c)
    print("解密后明文为：",m)
```

这个程序用于验证Paillier算法的同态加法，引入Paillier.py中的Paillier类，通过命令行输入变量，来查看密文相乘后，解密出来的明文是否等于原明文之和

3.1.4 Vote_Paillier程序设计

程序流程图如下：

编写程序模拟投票流程，从程序流程图可以发现主要有3方参与，在程序中，考虑用3个不同的函数来模拟投票方、计算方、公布方，在主函数中对其依次调用，实现模拟投票的流程

```python
from Paillier import Paillier


#投票工作：每个elector对每个candidate进行投票，然后将每个elector的投票结果进行加密，返回chiper_lists
def vote(can,ele):
    chiper_lists=[]
    for i in range(1,ele+1):
        chiper_list = []

        print("-------------Elector{},Please vote.-------------".format(i))
        for j in range(1,can+1):
            chiper_list.append(pa.encode(eval(input("Candidate{}:".format(j)))))
        print("Elector{},your result is : ".format(i),chiper_list)
        chiper_lists.append(chiper_list)

    return chiper_lists

#计数方主要的工作：获得vote的结果，然后运算其乘积，返回一个候选人得分密文列表
def count(chiper_lists,can,ele,N):
    chiper_list=[]
    for i in range(can):
        chiper_list.append(1)
    print('-------------------------------------------------')
    print("Please wait for a moment, the cpu is computing.")
    for i in chiper_lists:
        count=0
        for j in i:
            chiper_list[count]=(chiper_list[count] % N**2) * (j % N ** 2) % N**2
            count=count+1

    return chiper_list
```

这部分的代码主要包括$vote()$、$count()$，分别用来模拟投票方与计算方，引入编写的Paillier.py中的Paillier类

其中，主函数向$vote()$中传递候选人数can以及投票人数ele，随后在for循环中依次进行投票，将每个人的结果保存在列表里($chiper\_lists$)，该列表的每个元素是不同投票人的投票结果（经过加密后的），不同投票人的结果也是一个列表($chiper\_list$)

$count()$函数，接受从主函数传递过来的所有投票结果列表($chiper\_lists$)以及其他必要参数，对投票结果进行计算聚合，最后返回密文状态下的候选人的最终票数结果列表($chiper\_list$)

```python
#公布者：拿到count的密文列表对其解密，输出候选人得分
def theority(chiper_list):
    result=[]
    for i in chiper_list:
        result.append(pa.decode(i))

    return result

#对结果进行排序
def sort(result):
    index=[]
    for i in range(0,len(result)):
        index.append(i)

    #冒泡排序
    for i in range(0,len(result)):
        for j in range(i,len(result)):
            if result[j] > result[i]:
                t=index[i]
                index[i]=index[j]
                index[j]=t
            else:
                continue

    return index
```

这部分代码主要包括$theority()$、$sort()$，用来模拟公布方以及对结果的排序

$theority()$函数将传递过来的密文状态下的投票结果$chiper_list$ 进行解密，最后返回明文状态下的投票结果$result$

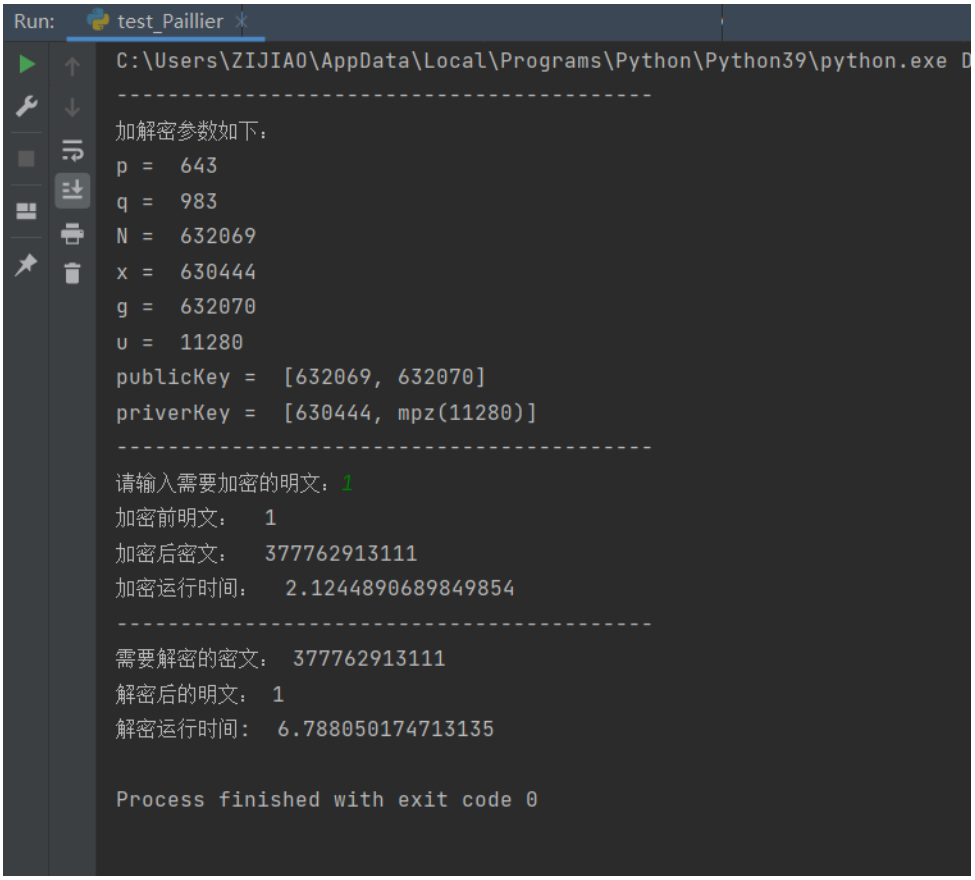
$sort()$函数对明文结果从大到小进行排序，返回候选人排名的索引$Index$

```
if __name__=="__main__":
    candidate=eval(input("Please input the number of candidates:"))
    electors=eval(input("Please input the number of electors:"))

    #System init
    pa=Paillier()
    pa.gen_Key()
    publicKey=pa.pubKey
    chiper_lists=vote(candidate,electors)

    chiper_list=count(chiper_lists,candidate,electors,publicKey[0])

    result=theority(chiper_list)

    print("--------------------result--------------------")
    for i in range(len(result)):
        print("Candidate{}:".format(i+1),result[i])

    print("--------------------sorted--------------------")

    index=[]
    index=sort(result)

    for i in index:
        print("Candidate{}".format(i+1),result[i])
    print(index)
```

这部分代码是主函数的代码部分，首先获得候选人以及选举人的数量，然后初始化，生成密钥，接着依次调用$vote()$、$count()$、$theority()$、$sort()$，并且对结果进行展示

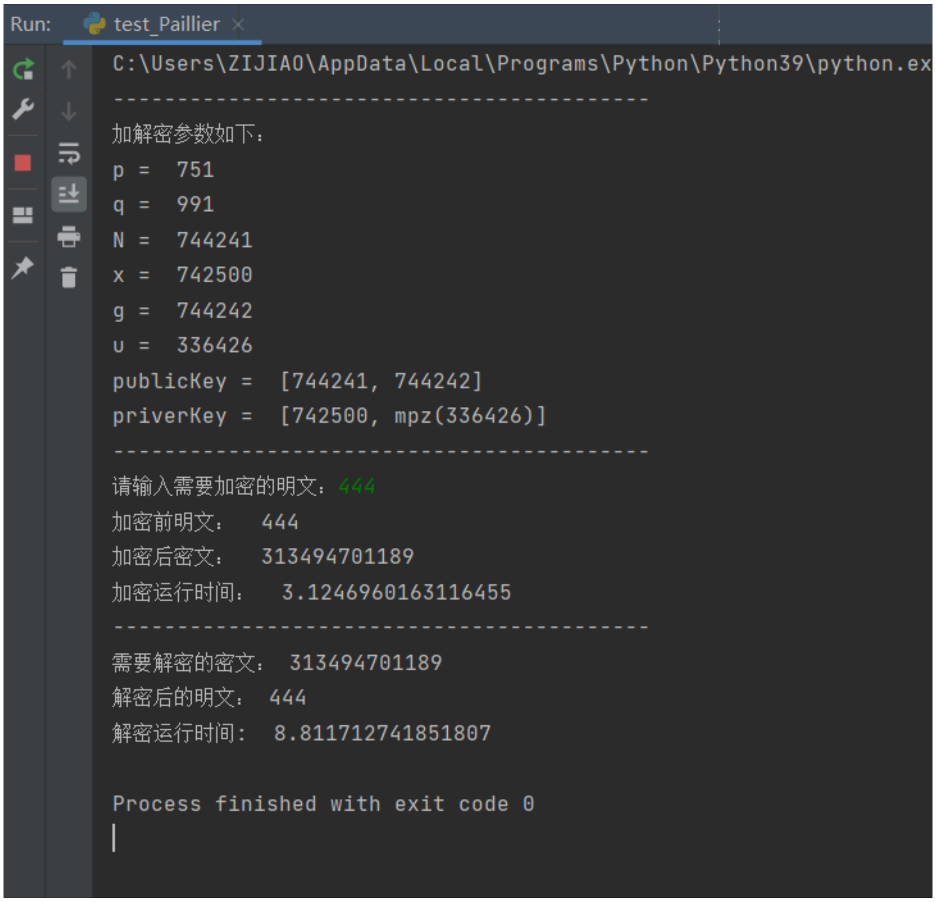
3.2 运行程序

3.2.1 test_Paillier程序运行展示



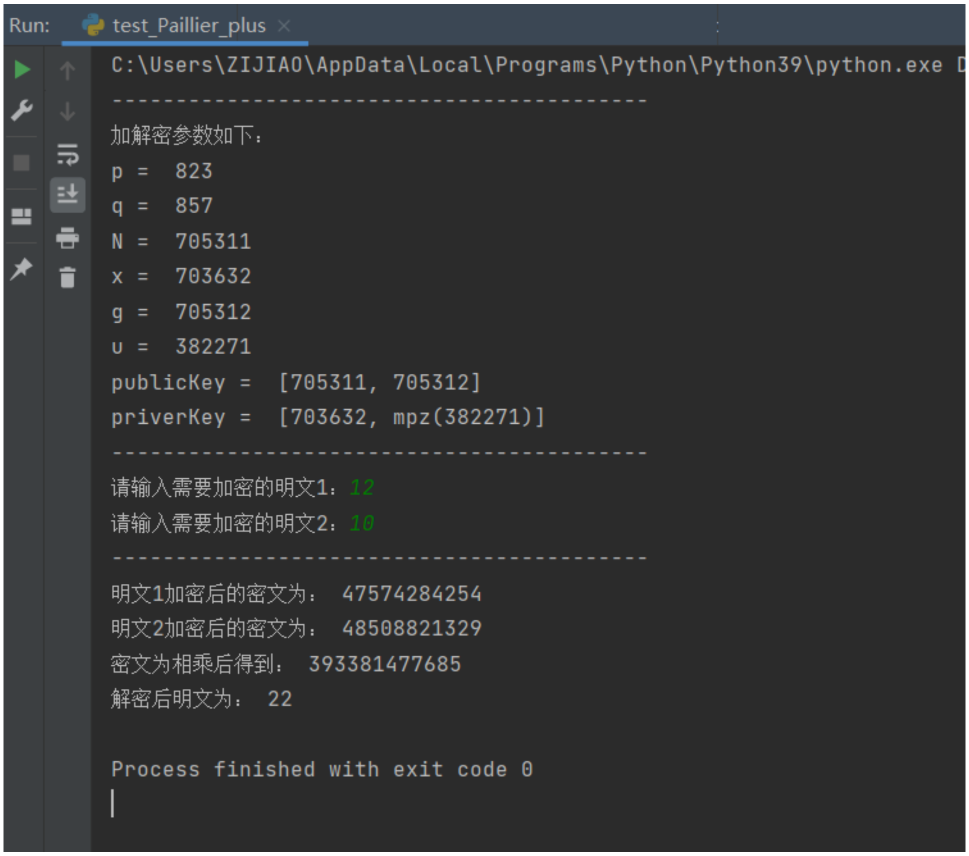
```
Run:  test_Paillier
C:\Users\ZIJIAO\AppData\Local\Programs\Python\Python39\python.exe D
-----------------------------------------
加解密参数如下：
p =  643
q =  983
N =  632069
x =  630444
g =  632070
u =  11280
publicKey =  [632069, 632070]
priverKey =  [630444, mpz(11280)]
-----------------------------------------
请输入需要加密的明文：1
加密前明文：  1
加密后密文：  377762913111
加密运行时间：  2.1244890689849854
-----------------------------------------
需要解密的密文：  377762913111
解密后的明文：  1
解密运行时间:  6.788050174713135

Process finished with exit code 0
```

输入明文为1时程序运行结果展示

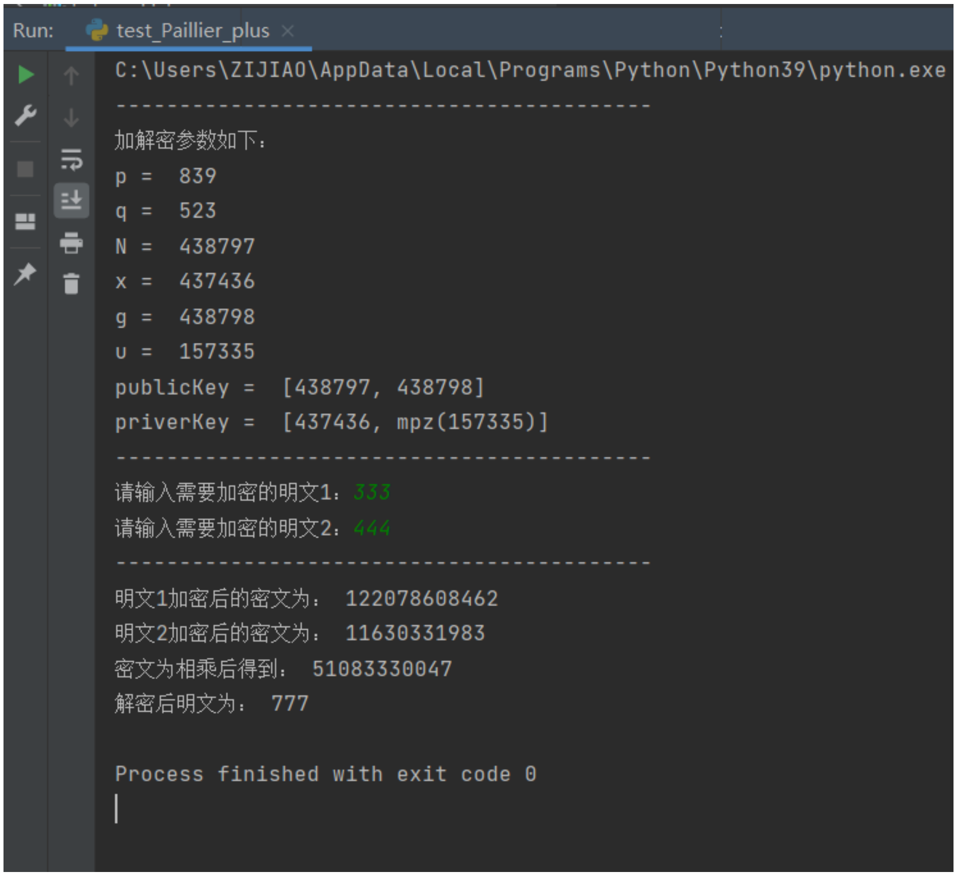


输入明文为444时程序运行结果展示

3.2.2 test_Paillier_plus程序运行展示



输入的两个明文分别为12、10时程序运行结果展示

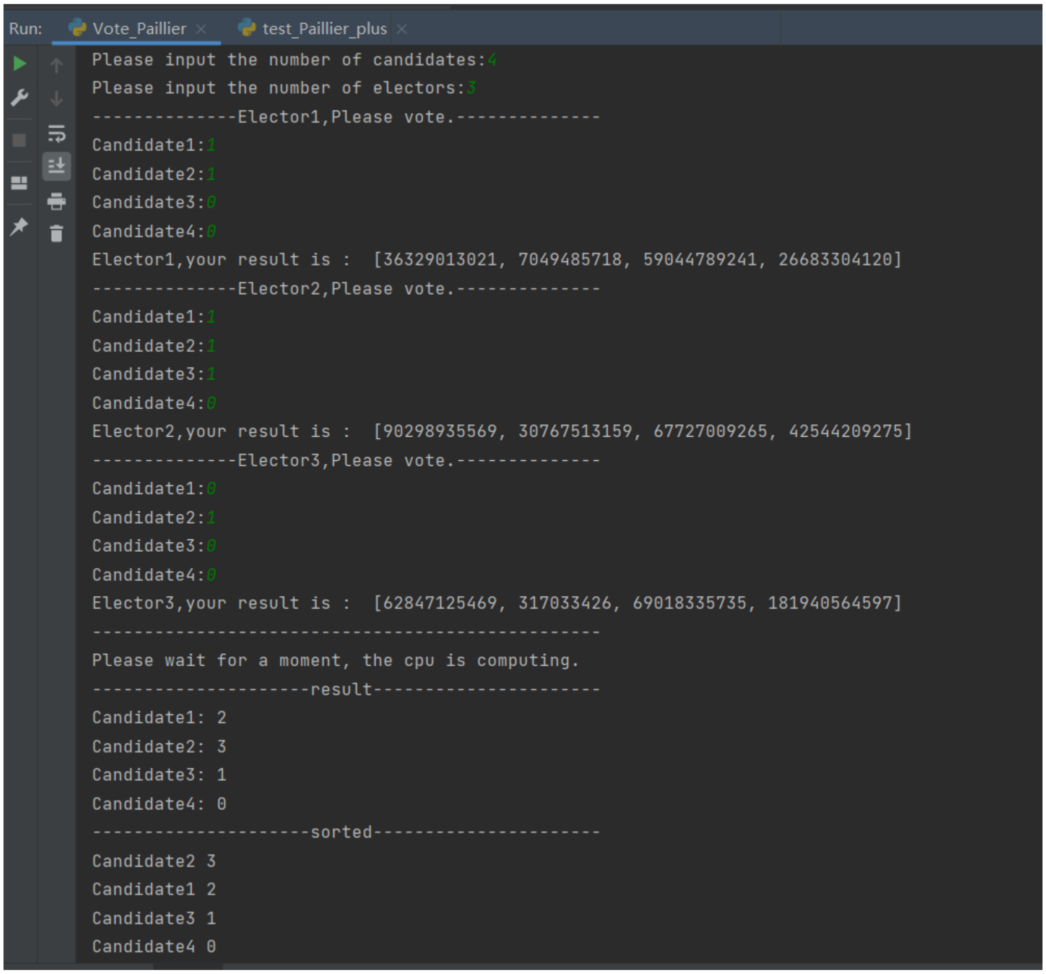


输入的两个明文分别为444，333时程序运行结果展示

3.2.3 Vote_Paillier程序运行展示

```
Run: Vote_Paillier × test_Paillier_plus ×
C:\Users\ZIJIAO\AppData\Local\Programs\Python\Python39\python.exe D:/Study_space/
Please input the number of candidates:3
Please input the number of electors:3
-------------Elector1,Please vote.-------------
Candidate1:1
Candidate2:0
Candidate3:0
Elector1,your result is :  [2086415087, 75610748924, 25463104096]
-------------Elector2,Please vote.-------------
Candidate1:0
Candidate2:0
Candidate3:1
Elector2,your result is :  [66324429373, 32913189093, 1207253583]
-------------Elector3,Please vote.-------------
Candidate1:1
Candidate2:1
Candidate3:1
Elector3,your result is :  [170395219835, 71469225330, 186540318933]
-------------------------------------------------
Please wait for a moment, the cpu is computing.
---------------------result---------------------
Candidate1: 2
Candidate2: 1
Candidate3: 2
---------------------sorted---------------------
Candidate1 2
Candidate3 2
Candidate2 1
[0, 2, 1]

Process finished with exit code 0
```

输入3个候选人，3个选举者的运行情况



输入4个候选人，3个选举者的运行情况

4 总结

这学期我选到了张川老师的《数据安全与治理》课程，其中同样学到了Paillier算法，而且期末考试还考了Paillier算法的题，两门课程内容的交汇，让我感觉很幸运。将所学的知识转换成代码与程序的过程中遇到了很多问题，首先就是数幂运算导致数很大，自己编写的程序加解密速度很慢，而且会有bug，但是所有的代码都是自己一点一点实现的，有非常高的成就感，同时也对Paillier算法有了更加深入的了解，感叹密码学家的才华与能力，通过这次实验我也意识到了自己的不足，继续努力，还有很多内容要学，还有很多东西不懂。

我自己编写的代码中存在一个问题，就是当数非常大的时候，程序会运行错误，可能是在Paillier算法封装的方法中没有大量使用库函数，导致运算效率很低，运算速度比较慢，解决方法是使用python的gmpy2库中的函数来替换自己编写的简单求模、求幂的运算，或者使用一些优化效果更明显的算法。如Paillier-DJN优化方案，或者中国剩余定理。

5 参考文献

[1] Paillier P. Public-key cryptosystems based on composite degree residuosity classes[C]//International conference on the theory and applications of cryptographic techniques. Springer, Berlin, Heidelberg, 1999: 223-238.

[2]https://developer.aliyun.com/article/793131

[3]部分算法原理内容来源于CSDN、知乎、百度百科等平台。