6.4 Symmetric Matrices

- 대칭 행렬의 경우 Eigenvalue와 pivot값의 관계
  - Eigenvalue는 $\det(A - \lambda I) = 0$에서 얻음
  - Pivot값들은 가우스 소거 과정에서 얻음

  - 지금까지 배운 유일한 관련성
    - (pivot값들의 곱)=행렬식=(eigenvalue값들의 곱)

  - **대칭**행렬의 경우 다음이 성립
    - (양수인 pivot값들의 개수)=(양수인 eigenvalue들의 개수)

6.4 Symmetric Matrices

- (계속) 대칭 행렬의 경우 Eigenvalue와 pivot값의 관계
  - Example
    - $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ➔ 소거법 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$

    ➔ eigenvalue의 합이 2, 곱이 -8이므로 eigenvalue는 4, -2

    ➔ pivot값은 1, -8 이므로 양수의 eigenvalue와 pivot은 1개임

    - $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ ➔ 소거법 $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

    ➔ eigenvalue의 합이 -3, 곱이 2이므로 eigenvalue는 -2, -1

    ➔ pivot값은 1, 2 이므로 eigenvalue와 pivot의 양수의 개수가 다름

    ➔대칭이 아님

6.4 Symmetric Matrices

- (계속) 대칭 행렬의 경우 Eigenvalue와 pivot값의 관계
  - (양수인 pivot값들의 개수)=(양수인 eigenvalue들의 개수)
  - (증명) 대칭 행렬이 주어졌을 때, pivot값이 존재하려면 $A = L_1 U_2$의 형태로 분리가 가능해야 함. 소거법을 적용하기 위해 행교환이 필요한 경우에는 pivot값이 없는 것으로 고려대상에서 제외.
  - Upper triangle인 U는 대각선에 pivot값들이 존재하므로 다음과 같은 분해가 가능함.
  - $$U_2 = DU_3 = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \square & \cdots & \square \\ 0 & 1 & & \square \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$
  - $A = L_1 DU_3$ ➔ $A^T = (U_3)^T D^T L_1^T = L_3 DU_1$. 여기서 $L_3 \equiv U_3^T, U_1 \equiv L_1^T$의 대각선은 모두 1임.
  - A는 대칭 행렬이므로 $A^T = (U_3)^T DL_1^T = A = L_1 DU_3$
  - 이 경우 L_1과 U_3사이에는 transpose 관계가 성립해야 함. 따라서 $A = LDL^T$ 형태의 분해가 가능함

6.4 Symmetric Matrices

- (계속) 대칭 행렬의 경우 Eigenvalue와 pivot값의 관계
  - (증명 계속) 앞에서 $A = LDL^T$ 형태로 분해가 됨을 보였음.
  - $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - 만약 L 행렬과 L^T 행렬을 천천히 단위 행렬로 변형시킬 때 $(A \rightarrow D)$, eigenvalue의 변화를 고려.
  - L 행렬과 L^T 행렬이 0으로 변화하려면 대각이 아닌 성분(위의 경우 "3")이 점차 0으로 변해야 함.
  - 대각이 아닌 성분이 모두 0으로 변하면 $A = LDL^T = IDI^T$ 의 eigenvalue는 처음 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$에서 행렬의 pivot값인 $d_1 = 1, d_2 = -8$로 변하게 됨.
  - 이 과정에서 만약 서로 대응되는 eigenvalue λ_j와 pivot d_j의 부호가 달랐다면 λ_j가 변하면서 0으로 거쳐야 하므로, 중간에 eigenvalue가 0이 되는 시점이 발생하고, 이 순간에는 행렬이 singular가 되어야 함.
  - 하지만, 위의 과정에서 $A = LDL^T$형태는 계속 유지되고, 따라서 L의 값이 바뀌어도 D는 일정하여 pivot값은 바뀌지 않고 계속 유지되므로 A는 계속 가역행렬이라 singular가 될 수 없음.
  - 따라서, Eigenvalue와 pivot값의 부호는 일치해야 함.

6.5 Positive Definite Matrices

- Positive definite 행렬 (정부호 행렬)
  - **대칭** 행렬 중 모든 eigenvalue값들이 0보다 큰 행렬
  - 그러면 positive semidefinite 행렬이란?

  - 또 다른 형태의 정의: 임의의 모든 0이 아닌 벡터 x에 대해 $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} > 0$이 항상 성립하면, 행렬 A는 positive definite 행렬이다.
  - 만약 행렬 A와 B가 positive definite 행렬이면, A+B도 positive definite 행렬이다. Why?
  - 임의의 행렬 R이 주어졌을 때, $A = R^T R$에 대해 다음 중 틀린 것은?
    - 1. $A = R^T R$은 항상 정사각 행렬이다.
    - 2. $A = R^T R$은 항상 대칭 행렬이 된다.
    - 3. $A = R^T R$은 항상 positive definite 행렬이 된다.

6.5 Positive Definite Matrices

- 행렬 R의 열이 모두 독립이면, $A = R^T R$은 항상 positive definite 행렬이 된다.
  - (증명) $\boldsymbol{x}^T R^T R \boldsymbol{x} = (R\boldsymbol{x})^T (R\boldsymbol{x}) \geq 0$ 이다.
  - 여기서 항상 positive definite 이 되려면, 0이 아닌 벡터 $\boldsymbol{x}$에 대해 항상 $R\boldsymbol{x}$ 는 0이 아니어야 한다.
  - 0이 아닌 벡터 $\boldsymbol{x}$에 대해 $R\boldsymbol{x} = 0$ 인 경우가 존재하면, R의 모든 열은 독립일 수 없다. Why?
- 위의 증명으로부터 임의의 행렬 R이 주어지면, 열의 독립여부에 상관없이 $A = R^T R$은 항상 positive semidefinite 행렬이 된다.

- 행렬 A가 positive definite 행렬이면, 그 역행렬도 positive definite 행렬인가?
  - 행렬 A는 대칭 행렬이므로 대각 행렬로 변환 가능하고, 동시에 변환된 역행렬도 대각 행렬의 형태이어야 함. A의 eigenvalue들이 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$이면, 역행렬의 eigenvalue는 $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \ldots, 1/\lambda_d$이 됨 ➔ positive definite

6.5 Positive Definite Matrices

- Cholesky 분해
  - 주어진 행렬 A가 positive definite이면, $R^T R$의 형태로 분해 가능하다.
  - (증명) A가 positive definite이면 모든 pivot값들이 0보다 커서 $A = LU$ 분해가 존재한다. 또한 대칭 행렬이므로 $A = LDL^T$로 표현이 가능하다.
  - 예: $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & \sqrt{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & \sqrt{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
  - 위와 같이 $A = LDL^T$는 $A = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^T = \left(L\sqrt{D}\right)\left(L\sqrt{D}\right)^T = R^T R$의 형태로 분해 가능하고, $R = \sqrt{D}L^T$의 형태이므로 열들이 독립이므로 positive definite임
  - 위와 같이 positive definite행렬을 분해하는 것을 Cholesky 분해라고 부름

6.5 Positive Definite Matrices

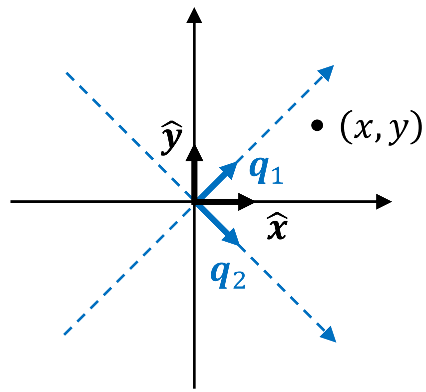
- 임의의 모든 0이 아닌 벡터 $\boldsymbol{x}$에 대해 $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} > 0$이 항상 성립하면, 행렬 A는 positive definite 행렬이다.
  - 만약 $ax^2 + by^2$이 주어졌다면, $x = y = 0$ 이외의 값에서 이 식이 항상 0보다 크기 위한 조건은?
  - 행렬 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$가 2×2인 경우,
  - $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ➔ $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3x - y \\ -x + 3y \end{bmatrix} = x(3x - y) + y(-x + 3y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$
  - 위의 식은 임의의 x, y에 대해 항상 0보다 큰가?
  - $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$의 eigenvalue는 4와 2
  - 위의 식은 $(x + y)^2 + 2(x - y)^2$로 정리 가능. 이러한 형태는 우연일까?
  - $2\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2$와 관련됨. 앞의 숫자들은?

6.5 Positive Definite Matrices

- (빠른 증명) 임의의 모든 0이 아닌 벡터 $\boldsymbol{x}$에 대해 $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} > 0$이 항상 성립하면, 행렬 A는 positive definite 행렬이다.
  - 벡터 $\boldsymbol{x}$는 행렬 A의 eigenvector들의 1차 결합으로 표현 가능하므로, $\boldsymbol{x} = q_1\boldsymbol{q}_1 + q_2\boldsymbol{q}_2 + \cdots + q_n\boldsymbol{q}_n$
  - $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T A(q_1\boldsymbol{q}_1 + q_2\boldsymbol{q}_2 + \cdots + q_n\boldsymbol{q}_n)$
    $= \boldsymbol{x}^T(q_1\lambda_1\boldsymbol{q}_1 + q_2\lambda_2\boldsymbol{q}_2 + \cdots + q_n\lambda_n\boldsymbol{q}_n)$
    $= (q_1\boldsymbol{q}_1^T + q_2\boldsymbol{q}_2^T + \cdots + q_n\boldsymbol{q}_n^T)(q_1\lambda_1\boldsymbol{q}_1 + q_2\lambda_2\boldsymbol{q}_2 + \cdots + q_n\lambda_n\boldsymbol{q}_n)$
    $= q_1^2\lambda_1\boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{q}_1 + q_2^2\lambda_2\boldsymbol{q}_2^T\boldsymbol{q}_2 + \cdots + q_n^2\lambda_n\boldsymbol{q}_n^T\boldsymbol{q}_n$
    $= \lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2 + \cdots + \lambda_n q_n^2$
  - 기하학적 의미?

6.5 Positive Definite Matrices

- 좌표 변환
  - 2차원 평면의 좌표가 주어졌을 때, 이를 새로운 좌표축에 대한 좌표를 구하는 방법은?



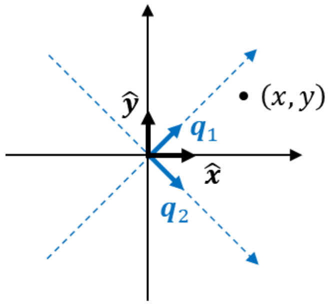
  - xy-좌표계 상에서 한 벡터$\boldsymbol{v}$의 좌표가 (x, y)이면, 이 벡터는 좌표계의 단위 벡터들로 표현 가능함.

$$\boldsymbol{v} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}}$$

  - 새로운 q_1q_2-좌표계가 주어졌을 때, 같은 벡터$\boldsymbol{v}$를 서로 직교하는 단위 벡터 $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$의 좌표 (q_x, q_y)를 이용하여 아래와 같이 나타내려고 할 때, q_x, q_y의 값을 결정하는 방법은?

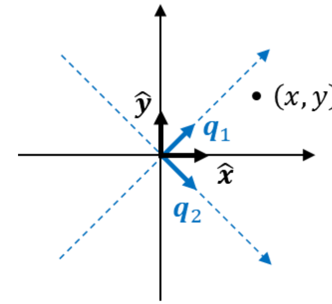
$$\boldsymbol{v} = q_x\boldsymbol{q}_1 + q_y\boldsymbol{q}_2$$

6.5 Positive Definite Matrices



- $\boldsymbol{v} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} = q_x\boldsymbol{q}_1 + q_y\boldsymbol{q}_2$
  - q_x를 결정하기 위해서는 $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$가 서로 직교하는 성질을 이용.
  - $q_x = \boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{v} = \boldsymbol{q}_1^T(x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}}) = (\boldsymbol{q}_1^T\hat{\boldsymbol{x}})x + (\boldsymbol{q}_1^T\hat{\boldsymbol{y}})y$
  - $\boldsymbol{q}_1^T\hat{\boldsymbol{x}}$를 결정하기 위해서는 $\boldsymbol{q}_1^T$ 벡터를 $\hat{\boldsymbol{x}}$와 $\hat{\boldsymbol{y}}$의 벡터로 표현해야 함.
  - $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$가 xy-좌표계 상에서 다음과 같은 좌표를 가진다고 가정
  - $\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$
  - $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$벡터는 다음과 같이 $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}$의 1차결합으로 표현가능
  - $\begin{cases} \boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{y}} \\ \boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{y}} \end{cases}$ 또는 일반적으로 $\begin{cases} \boldsymbol{q}_1 = q_{11}\hat{\boldsymbol{x}} + q_{12}\hat{\boldsymbol{y}} \\ \boldsymbol{q}_2 = q_{21}\hat{\boldsymbol{x}} + q_{22}\hat{\boldsymbol{y}} \end{cases}$
  - $\begin{cases} q_x = \boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{q}_1^T\hat{\boldsymbol{x}})x + (\boldsymbol{q}_1^T\hat{\boldsymbol{y}})y = q_{11}x + q_{12}y \\ q_y = \boldsymbol{q}_2^T\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{q}_2^T\hat{\boldsymbol{x}})x + (\boldsymbol{q}_2^T\hat{\boldsymbol{y}})y = q_{21}x + q_{22}y \end{cases}$ ➔ $\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

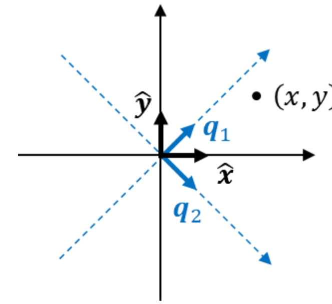
6.5 Positive Definite Matrices



- $\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$의 의미
  - $\begin{cases} \boldsymbol{q}_1 = q_{11}\hat{\boldsymbol{x}} + q_{12}\hat{\boldsymbol{y}} \\ \boldsymbol{q}_2 = q_{21}\hat{\boldsymbol{x}} + q_{22}\hat{\boldsymbol{y}} \end{cases}$으로부터

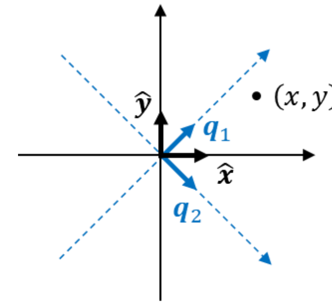
  q_{ij}는 n개의 직교하는 단위 벡터들 $(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \dots, \boldsymbol{q}_n)$중 i번째 단위 행렬의 j번째 좌표 값을 나타냄을 알 수 있음
  - 이들 단위벡터들로 이루어진 orthogonal 행렬 Q를 고려하면 $Q = [\boldsymbol{q}_1 \quad \boldsymbol{q}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{q}_n]$, 위의 식은 다음과 같다.
  - $\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots \\ q_{21} & q_{22} & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \vdots \end{bmatrix} = Q^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ \vdots \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \vdots \end{bmatrix}$
  - 단위 벡터들은 어디서 구할까? 행렬 A의 eigenvector
  - $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T (QQ^{-1}) A (QQ^{-1}) \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^T Q)(Q^{-1}AQ)(Q^{-1}\boldsymbol{x}) = (Q^{-1}\boldsymbol{x})^T (Q^{-1}AQ)(Q^{-1}\boldsymbol{x})$
  - $(Q^{-1}AQ)$은 어떤 형태의 행렬인가?

6.5 Positive Definite Matrices



- $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = (Q^{-1}\boldsymbol{x})^T(Q^{-1}AQ)(Q^{-1}\boldsymbol{x})$
- $\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ \vdots \end{bmatrix} = Q^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \\ \vdots \end{bmatrix}$
- $(Q^{-1}AQ) = \Lambda$은 대각 행렬이므로
- $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = (Q^{-1}\boldsymbol{x})^T(Q^{-1}AQ)(Q^{-1}\boldsymbol{x}) =$
  $$[q_x \quad q_y \quad \cdots]\begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_x & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ \vdots \end{bmatrix} = \lambda_x q_x^2 + \lambda_y q_y^2 + \cdots$$
- $q_x = q_y = \cdots = 0$ 이외의 값에서 이 식이 항상 0보다 크기 위한 조건은?

6.5 Positive Definite Matrices



- Example
  - $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$가 주어졌을 때, 간략화 된 $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$의 식을 구하려면?
  - A 의 eigenvalue와 eigenvector는 다음과 같음.
  - $\lambda_1 = 2, q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_2 = 4, q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
  - $Q = [\boldsymbol{q}_1 \quad \boldsymbol{q}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, Q^{-1} = Q^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
  - $\Lambda = Q^{-1}AQ = Q^{-1}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = Q^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}$
  - $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = (Q^{-1}\boldsymbol{x})^T (Q^{-1}AQ)(Q^{-1}\boldsymbol{x}) = (Q^{-1}\boldsymbol{x})^T \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}[x+y \quad x-y]\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 2(x+y) \\ 4(x-y) \end{bmatrix} = 2\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2$

6.5 Positive Definite Matrices

- 요약
  - 언제 $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$를 $[q_x \quad q_y \quad \cdots] \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_x & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ \vdots \end{bmatrix}$와 같은 형태로 변형이 가능?
    - Q가 대칭행렬이면 항상 직교하는 eigenvector를 구할 수 있음
  - 만약 eigenvalue중 음수가 발생하면?
    - 대칭행렬이면 여전히 직교하는 좌표계에 대해 $ax^2 + by^2 + \cdots$의 형태를 얻음
    - 하지만, 전체적인 함수는 말안장 형태(saddle point)를 띄게 되어 최소값이 존재하지 않음
  - 만약 특정 eigenvalue가 0이면?
    - 대칭행렬이면 여전히 직교하는 좌표계에 대해 $ax^2 + by^2 + \cdots$의 형태를 얻음
    - 하지만, 이중 eigenvalue가 0에 해당하는 축으로는 값이 계속 0이 됨 ➔ positive semidefinite

6.6 Similar Matrices

- 닮은 행렬
  - 행렬 A와 B사이에 $B = M^{-1}AM$형태의 변환을 해줄 수 있는 M을 찾을 수 있는 경우 두 행렬은 닮았다고 정의한다.
  - 닮은 행렬들을 모은 집합을 family라고 부른다.
  - 같은 family에 있는 행렬들은 대각 행렬 (또는 거의 대각 행렬에 가까운 행렬)에 의해 대표될 수 있다.
  - 행렬이 가진 eigenvector들만으로 전체 공간을 생성할 수 있는 경우, $S^{-1}AS = \Lambda$의 관계를 가지므로 A와 Λ은 닮은 행렬이다.
  - Example) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$은?
  - $M = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, M^{-1} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$
  - $B = M^{-1}AM$

6.6 Similar Matrices

- 닮은 행렬은 같은 eigenvalue를 가진다.
  - $B = M^{-1}AM$가 주어진 경우, A의 eigenvector $\boldsymbol{x}$가 주어지면 $M^{-1}\boldsymbol{x}$는 B의 eigenvector이고, 같은 eigenvector를 가진다.
  - 거꾸로 2개의 행렬이 가진 n개의 서로 다른 eigenvalue가 모두 같다면, 두 행렬은 같은 대각 행렬과 닮은 관계이다.
  - 만약 행렬이 중복된 eigenvalue를 가진다면 대각화가 불가능한 경우도 존재한다.
  - $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ 두 행렬 모두 4,4의 eigenvalue를 가진다.
  - 행렬 A는 1개의 eigenvector를 가지기 때문에 대각화가 불가능
  - 행렬 B는 2개의 eigenvector를 가지므로 대각화가 가능 ➔ 행렬 B는 닮은 행렬은 자기 자신밖에 없다.

6.7 Singular Value Decomposition

- 특이값 분해 (Singular Value Decomposition, SVD)
  - $A = U\Sigma V^T$, 여기서 U, V는 직교행렬, Σ는 대각 행렬임
  - A는 정사각 행렬일 필요가 없음
  - A가 대칭, positive definite 행렬의 경우 $A = Q\Lambda Q^T$는 SVD의 특수한 경우임
  - A가 대칭이 아닐 경우 좀 더 일반적인 경우는 A가 n개의 다른 eigenvector 를 가지는 경우 $A = S\Lambda S^{-1}$가 가능함을 배움
  - 행렬 A를 행벡터 공간내 임의의 벡터 $\boldsymbol{v}_1$를 열벡터 공간내 다른 벡터 $\boldsymbol{u}_1 = A\boldsymbol{v}_1$에 mapping하는 함수로 생각할 수 있음.
  - SVD는 열벡터 공간의 직교하는 기저에 mapping될 수 있는 행벡터 공간의 직교하는 기저에 찾는 문제임: $Av_i = \sigma_i u_i$
  - 다음을 만족하는 행벡터 공간의 직교하는 기저 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$를 찾아야 함
  - $A[\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_r] = [\sigma_1\boldsymbol{u}_1 \quad \sigma_2\boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad \sigma_r\boldsymbol{u}_r] = [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{u}_r]\begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix}$
  - 여기서 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r$는 열벡터 공간의 직교하는 기저임

6.7 Singular Value Decomposition

- 다음을 만족하는 행벡터 공간의 직교하는 기저 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$를 찾아야 함
- $A[\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_r] = [\sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \quad \sigma_2 \boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad \sigma_r \boldsymbol{u}_r] = [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{u}_r] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix}$
- 여기서 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r$는 열벡터 공간의 직교하는 기저임
- 행벡터 공간의 $\mathbf{R}^n$공간의 부분 공간이지만, nullspace의 기저 $\boldsymbol{v}_{r+1}, , \dots, \boldsymbol{u}_n$ 까지 합친 경우에는 전체 $\mathbf{R}^n$공간을 span할 수 있고, 이때 해당하는 $\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n$은 모두 0임
- $AV = U\Sigma$ ➔ $A = U\Sigma V^T$
- ➔ $A^T A = V\Sigma U^{-1} U\Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T = V \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r^2 \end{bmatrix} V^T$