5.1 The Properties of Determinants

- 행렬식의 성질
  1. 단위행렬의 행렬식은 1임. $\det I = 1$
  2. 행렬의 두개의 행을 교환하면 행렬식의 부호가 바뀜
  3. 행렬식은 각각의 행의 1차결합의 형태를 따른다

  (a) 행렬내 한 행에 t값을 곱하면, 행렬식도 t만큼 증가함

$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

  (b) 행렬내 1개의 행을 제외한 다른 행들이 모두 동일한 행렬 A, B 가 주어진 경우, 두 행렬의 합$(A + B)$의 행렬식은 개별 행렬들의 행렬식의 합과 같다.

$$\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

5.1 The Properties of Determinants

- (계속) 행렬식의 성질

  4. 행렬의 두개의 행이 같으면, 행렬식은 0이다.

  5. $i \neq j$인 경우, i행에 t를 곱한 후 j행에서 뺄 경우 행렬식은 변하지 않는다.

  6. 모든 값이 0인 행이 있는 행렬의 행렬식은 0이다.

  7. 삼각형 형태의 행렬의 행렬식은 대각 원소값들 $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$의 곱이다.

  8. 행렬이 singular인 경우 행렬식의 값은 0이다.

  9. $\det AB = (\det A)(\det B)$

  10. $\det A^T = \det A$

5.1 The Properties of Determinants

- (어제 수업) 행렬식의 성질

  10. $\det A^T = \det A$
    - $|A| = |LU| = |L||U| = |U^T| = |U^T||L^T| = |U^T L^T| = |(LU)^T| = |A^T|$
    - $PA = LU$ 인 경우에도 증명
      - 간단하게 우선 P가 2행과 3행만 치환하는 경우만 먼저 생각
      - $|PA| = |LU| = |L||U| = |U^T| = |U^T||L^T| = |U^T L^T| = |(LU)^T| = |(PA)^T| = |A^T P^T| = |A^T||P^T|$
      - P가 2행과 3행만 치환하는 경우: $P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$은 대칭행렬이므로 $P_{23}^T = P_{23}$ ➔ $\left|P_{23}^T\right| = |P_{23}|$ ➔ $|PA| = |P||A| = |A^T||P^T|$ ➔ $|A| = |A^T|$
      - P가 여러 permutation행렬들의 곱이라도 $|P| = \left|P_{ij} \cdots P_{kl}\right| = \left|P_{ij} \cdots P_{kl}\right| = \left|P_{ij}\right| \cdots |P_{kl}| = \left|P_{kl}^T\right| \cdots \left|P_{ij}^T\right| = \left|P_{kl}^T \cdots P_{ij}^T\right| = \left|\left(P_{ij} \cdots P_{kl}\right)^T\right|$

4.2 Projections

- (어제 수업) 부분 공간에 projection하는 방법
  - 어제 수업에서 $P = A(A^TA)^{-1}A^T$ 는 대칭행렬임을 증명시 $\left((A^TA)^{-1}\right)^T = (A^TA)^{-1}$ 임을 증명 못함
  - (증명) 만약 행렬 B가 가역행렬이면, $B^{-1}B = I$ 을 만족하는 B^{-1} 가 존재함.
  - $B^{-1}B = I$ 식 전체에 transpose를 가하면,
$$(B^{-1}B)^T = I = B^T(B^{-1})^T$$
  - ➔ 위의 식은 B^T의 역행렬은 $(B^{-1})^T$임을 의미. 따라서 $(B^{-1})^T = (B^T)^{-1}$ 이 성립함
  - 그런데, 어제 수업 시간에 A의 모든 열들이 독립인 경우에는 A^TA 가 항상 역행렬을 가짐을 증명함. 따라서 $\left((A^TA)^{-1}\right)^T = \left((A^TA)^T\right)^{-1} = (A^TA)^{-1}$가 성립

5.2 Permutations and Cofactors

- 행렬식의 계산
  - $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ad - bc$
  - $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
  - $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$는 몇 개의 성분으로 분해되는가? 경우의 수는 3^2

5.2 Permutations and Cofactors

- 행렬식의 계산

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

  - 위의 행렬식을 계산하기 위해서 총 9개의 항으로 전개했다고 가정.
  - 9개의 항 중 두번째 행을 a_{21}으로 채웠다면 세번째 행을 어느 곳을 선택하더라도 항상 전체가 0인 열이 발생하므로 행렬식의 값은 0이 됨.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ \square & \square & \square \end{vmatrix}$$

  - 따라서 0이 아닌 항을 얻기 위해서는 두번째 행은 두번째 열 또는 세번째 열이 채워져야 함
  - 마찬가지로 세번째 행은 위의 두개의 행과 다른 위치로 결정
  - 따라서 첫번째 행의 위치가 결정된 경우 가능한 경우의 수는 2x1

5.2 Permutations and Cofactors

- 행렬식의 계산

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & \boxed{\begin{matrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{matrix}} \\ a_{31} & & \end{vmatrix}$$

  - 위의 행렬식의 0이 아닌 항은 아래와 같다.
  - $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \end{vmatrix}$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23})$$

  - 위의 결과는 $a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$로도 표현 가능

5.2 Permutations and Cofactors

- 행렬식의 계산

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

  - 위의 행렬식의 0이 아닌 항은 아래와 같다.
  - $-\left(\begin{vmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{31} & 0 \end{vmatrix}\right) = -\left(a_{12}a_{21}a_{33} - \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{31} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \end{vmatrix}\right)$

$$= -(a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{31}a_{23}) = -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})$$

  - 위의 결과는 $a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$로도 표현 가능

5.2 Permutations and Cofactors

- 행렬식의 계산

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{13} & 0 & 0 \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

  - 위의 행렬식의 0이 아닌 항은 아래와 같다.
  - $$\begin{vmatrix} a_{13} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 \\ 0 & 0 & a_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} \\ 0 & a_{31} & 0 \end{vmatrix} = a_{13}a_{21}a_{32} - \begin{vmatrix} a_{13} & 0 & 0 \\ 0 & a_{31} & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} = a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

  - 위의 결과는 $a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$로도 표현 가능

5.2 Permutations and Cofactors

- $\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}$$
- Cofactor
  - a_{ij}의 cofactor C_{ij} 는 a_{ij}와 같은 행 또는 같은 열에 있는 성분을 제외한 나머지 성분 들로만 이루어진 행렬의 행렬식에 $(-1)^{i+j}$를 곱한 값을 나타낸다.
  - 전체 행렬 A의 행렬식은 다음과 같다:
  - $\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$
  - 위의 합은 반드시 첫번째 행을 따라가면서 계산할 때 뿐만 아니라, 다른 행이나 다른 열을 따라가면서 계산해도 동일함

5.3 Inverses

- Cofactor 행렬
  - 행렬 A의 cofactor 행렬 C는 행렬의 그 자리에 해당하는 cofactor를 원소로 갖는 행렬임
  - Example: 행렬 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$의 cofactor를 구하시오.
  - $C = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ ➔ 연관된 행렬?
  - Cofactor와 역행렬의 관계는? $A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T$

5.3 Inverses

- Cofactor 행렬
  - $A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T$을 확인하기 위해서는 $AC^T = (\det A)I$임을 보여야 함
  - $AC^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$
  - 행렬 곱의 첫번째 행 첫번째 열의 원소는 $\sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{1j} = \det A$
  - 마찬가지로 대각 원소들은 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \det A$
  - 첫번째 행 두번째 열의 원소는 $\sum_{j=1}^{n} a_{1j} C_{2j}$으로 나타남.
    - 만약 이 합에 a_{1j} 대신 a_{2j}가 사용되었다면 이는 $\det A$에 해당함
  - $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \boxed{a_{21} \quad \cdots \quad a_{2n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$
  - 이것은 거꾸로 현재 형태의 합은 행렬 A의 두번째 행을 행렬 A의 첫번째 행으로 대체한 후 행렬식의 값을 계산한 것과 동일한 결과임
  - 따라서 대각 원소를 제외한 모든 나머지 값들은 0임. ➔ $AC^T = (\det A)I$

5.2 Permutations and Cofactors

- Example: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 의 역행렬 구하기
    - 행렬식: $1 \cdot 6 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 2$
    - Cofactor 행렬: $C = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
    - 역행렬: $\frac{1}{\det A} C^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
    - 확인: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6.1 Eigenvalues and Eigenvectors

- Eigenvector와 Eigenvalue
  - 행렬 A가 주어졌을 때 eigenvector는 행렬에 곱했을 때, 자기 자신과 평행한 결과를 얻을 수 있는 벡터임

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

  - 위의 관계에서 λ는 eigenvalue라고 불린다.
  - Eigenvector와 Eigenvalue는 정사각 행렬에 대해서만 고려함
- Eigenvector와 eigenvalue를 구하는 방법
  - Eigenvector와 eigenvalue를 둘 다 모르므로, 불확실성을 줄이기 위해 eigenvalue를 먼저 구하고 이를 이용해서 eigenvector를 구함
  - $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ ➔ $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$를 만족하는 λ를 먼저 구함
  - 위의 식을 만족하는 0이 아닌 벡터가 존재하기 위해서는 $(A - \lambda I)$의 역행렬이 존재하면 안됨. ➔ 행렬식이
  - $\det(A - \lambda I) = 0$을 만족하는 λ를 구함 ➔ Characteristic equation

6.1 Eigenvalues and Eigenvectors

- $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$의 eigenvector와 eigenvalue를 구하시오.
  - $\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$
  - ➔ Characteristic equation: $(3-\lambda)^2 - 1 = 0$
  - $\lambda = 3 \pm 1 = 4, 2$
  - $\lambda = 4$인 경우
  - $\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ➔ 확인: $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
  - $\lambda = 2$인 경우
  - $\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ➔ 확인: $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

6.1 Eigenvalues and Eigenvectors

- 특징
  - 주의: 소거법에 사용되는 하나의 행을 다른 행에 더하거나 치환하는 연산들은 eigenvalue값을 바꿈
  - 행렬이 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$을 eigenvalue로 가질 때, 행렬의 행렬식 값은 모든 eigenvalue값들의 곱 $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$과 같다.
    - (증명) $(A - \lambda I)$의 행렬식은 항상 $(\lambda_i - \lambda)$들의 곱으로 나타낼 수 있다.
    - $\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$
    - 위 식의 λ를 0으로 잡으면,
    - 왼쪽: 주어진 행렬의 행렬식
    - 오른쪽: 모든 eigenvalue값들의 곱 $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$
  - 삼각 행렬의 대각성분들의 곱은 모든 eigenvalue값들의 곱과 같다.

6.1 Eigenvalues and Eigenvectors

- 복소수의 eigenvalues
  - $Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$은 평면내에서 모든 벡터를 90도 회전시킴
  - Eigenvector가 존재할 수 있을까?
  - $\det(Q - \lambda I) = \det(\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$
  - $\lambda = i \Rightarrow \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ix_1 - x_2 \\ x_1 - ix_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -ix_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$
  - $\lambda = -i \Rightarrow \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ix_1 - x_2 \\ x_1 + ix_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ ix_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$
  - 일반적으로는 eigenvalue가 실수가 되는 것을 보장할 수 없지만, 대칭 행렬은 항상 실수의 eigenvalue를 가짐

6.1 Eigenvalues and Eigenvectors

- $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$의 eigenvector와 eigenvalue를 구하시오.
  - $\det(A - \lambda I) = \det(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}) = 0$
  - ➔ Characteristic equation: $(3-\lambda)^2 = 0$ ➔ $\lambda = 3$
  - 일반적으로 2차방정식은 2개의 해를 가지지만 이와 같이 2개의 해가 같은 경우에는 eigenvector가 1개만 존재할 수도 있음
  - $\lambda = 3$ ➔ $\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ➔ 확인: $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
  - 위와 같은 경우 다른 eigenvector가 존재할 방법이 없음

6.2 Diagonalizing a Matrix

- 행렬의 대각화
  - 행렬 A가 n개의 서로 **독립**인 eigenvector들을 갖는다면, 이 eigenvector들을 열로 가지는 정사각형렬 S를 다음과 같이 정의하면
  $$S = [\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_n]$$
  - S와 A사이에는 다음의 관계가 존재한다.
  - $AS = A[\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_n] = [\lambda_1\boldsymbol{x}_1 \quad \lambda_2\boldsymbol{x}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\boldsymbol{x}_n] =$
  $$[\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = S\Lambda$$
  - 행렬 Λ는 행렬 A의 모든 eigenvalue들을 대각 원소로 가지는 행렬임
  - 행렬 S는 가역행렬. Why?
  - $S^{-1}AS = \Lambda$ 또는 $A = S\Lambda S^{-1}$임

6.2 Diagonalizing a Matrix

- $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$의 S 행렬을 구하고, 이를 이용하여 Λ를 구하시오.
  - 앞의 문제 풀이에서 $\lambda = 4, 2$이고, 다음의 eigenvector들을 구할 수 있음을 보임.
  - $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
  - $S = [\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
  - ➔ $S^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$
  - $S^{-1}AS = S^{-1}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = S^{-1}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \Lambda$$

6.2 Diagonalizing a Matrix

- 행렬의 대각화는 왜 유용할까?
  - $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$가 주어졌을 경우, A^3을 구해야 한다면?
  - $A^3 = \mathrm{AA}^2 = \mathrm{A}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{A}\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 28 \\ 28 & 36 \end{bmatrix}$
  - $A = S\Lambda S^{-1}$임을 이용하면,

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix},\ \Lambda = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

  - $A^3 = AA^2 = A(S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1}) = A(S\Lambda^2 S^{-1}) = (S\Lambda S^{-1})(S\Lambda^2 S^{-1}) = S\Lambda^3 S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} S^{-1} = \begin{bmatrix} 64 & 8 \\ 64 & -8 \end{bmatrix} S^{-1} = \begin{bmatrix} 64 & 8 \\ 64 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 28 \\ 28 & 36 \end{bmatrix}$

6.2 Diagonalizing a Matrix

- 행렬의 trace
  - 정사각 행렬의 대각 성분의 합을 trace라고 한다.
  - 행렬 A의 성분을 a_{ij}라고 하면, $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
  - $tr(AB) = tr(BA)$ Why?

  - $A = S\Lambda S^{-1}$임을 이용하면, $tr(A) = tr(\Lambda)$. Why?
  - 일반적으로 A의 eigenvector가 n개 보다 작을 경우에도 행렬의 trace는 모든 eigenvalue의 합과 같다.

6.4 Symmetric Matrices

- 특수한 관계를 가진 벡터들($\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$)을 열로 가진 행렬 A의 응용 예
  - $A = [\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_n]$
  - $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$가 모두 $\mathbf{R}^n$공간에 속하고 서로 독립인 경우 A는 가역행렬
  - Projection 행렬: $P = A(A^TA)^{-1}A^T$
  - 정규 직교 벡터($\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n$)들을 열로 가지는 행렬 $Q = [\boldsymbol{q}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{q}_n]$
  - 직교 행렬: 위의 행렬이 정사각행렬일 경우
  - Gram-Schmidt직교화를 거친 $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n$를 이용 ➔ QR 분해, $A = QR$
  - 독립인 eigenvector로만 이루어진 행렬 ➔ $S = [\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_n]$, $S^{-1}AS = \Lambda$

6.4 Symmetric Matrices

- 대칭 행렬의 특징
  - 모든 성분이 실수(real number)인 대칭 행렬은 모든 eigenvalue 들이 실수이다.
    - (증명) 어떤 값 λ가 실수임으로 보이려면, λ의 켤레 복소수 (complex conjugate) $\lambda^* \equiv \bar{\lambda}$가 원래 값 λ와 같음을 보이면 됨: $\lambda^* = \lambda$
    - $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ ➔ $A^*\boldsymbol{x}^* = \lambda^*\boldsymbol{x}^* = A\boldsymbol{x}^*$ ➔ $A\boldsymbol{x}^* = \lambda^*\boldsymbol{x}^*$
    - Transpose를 취하면,${\boldsymbol{x}^*}^T A^T = \lambda^* {\boldsymbol{x}^*}^T$ ➔ ${\boldsymbol{x}^*}^T A = \lambda^* {\boldsymbol{x}^*}^T$ Why?
    - 양변의 오른쪽에 벡터 $\boldsymbol{x}$를 곱하면, ${\boldsymbol{x}^*}^T A\boldsymbol{x} = \lambda^* {\boldsymbol{x}^*}^T \boldsymbol{x}$
    - 만약 원래 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$식의 왼쪽에 ${\boldsymbol{x}^*}^T$를 곱하면, ${\boldsymbol{x}^*}^T A\boldsymbol{x} = \lambda {\boldsymbol{x}^*}^T \boldsymbol{x}$
    - 따라서 $\lambda^* {\boldsymbol{x}^*}^T \boldsymbol{x} = \lambda {\boldsymbol{x}^*}^T \boldsymbol{x}$ ➔ $\boldsymbol{x}$가 0이 아니면, $\lambda^* = \lambda$

6.4 Symmetric Matrices

- 대칭 행렬의 특징
  - (증명 계속) 모든 성분이 실수(real number)인 대칭 행렬은 모든 eigenvalue들이 실수이다.
    - 벡터의 성분이 복소수일 경우에는 벡터의 크기의 제곱은 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$이 아니라 ${\boldsymbol{x}^*}^T\boldsymbol{x}$로 계산해야 함
    - ${\boldsymbol{x}^*}^T\boldsymbol{x} = [x_1^* \quad x_2^* \quad \cdots \quad x_n^*]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2$

6.4 Symmetric Matrices

- 대칭 행렬의 특징
  - 서로 다른 eigenvalue를 가진 모든 eigenvector들은 서로 직교한다.
    - eigenvector $\boldsymbol{x}$는 λ_1을 eigenvalue로 가지고, eigenvector $\boldsymbol{y}$는 λ_2을 eigenvalue로 가진다고 가정 $\lambda_1 \neq \lambda_2$
    - $A\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}$, $A\boldsymbol{y} = \lambda_2 \boldsymbol{y}$
    - 각각의 양변에 $\boldsymbol{y}^T$와 $\boldsymbol{x}^T$를 곱함. ➔$\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^T \lambda_1 \boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T \lambda_2 \boldsymbol{y}$
    - 첫번째 등식의 transpose를 구하면, $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T \lambda_1 \boldsymbol{y}$
    - 따라서 $\boldsymbol{x}^T \lambda_2 \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T \lambda_1 \boldsymbol{y}$
    - $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}(\lambda_2 - \lambda_1) = 0$ ➔ 누가 0일까?
  - 만약 eigenvalue들이 같다면?
    - Eigenvector들은 부분 공간을 이룸.
    - Gram-Schmidt 직교화를 통해 직교하는 eigenvector 공간의 기저를 구할 수 있음

6.4 Symmetric Matrices

- 대칭 행렬에 $S = [\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_n]$, $A = S\Lambda S^{-1}$관계를 적용
  - $Q = [\boldsymbol{q}_1 \quad \boldsymbol{q}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{q}_n]$
  - $A = Q\Lambda Q^{-1} = [\boldsymbol{q}_1 \quad \boldsymbol{q}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{q}_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1^T \\ \boldsymbol{q}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_n^T \end{bmatrix} =$
    $\lambda_1 \boldsymbol{q}_1 \boldsymbol{q}_1^T + \lambda_2 \boldsymbol{q}_2 \boldsymbol{q}_2^T + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{q}_n \boldsymbol{q}_n^T$
  - $\boldsymbol{q}_k \boldsymbol{q}_k^T$는 $\boldsymbol{q}_k$벡터에 대한 projection이므로 projection을 한 후 그 성분을 λ_k배 했다고 해석 가능