# 선형 대수 숙제 #4

**숙제 제출 기한: 1/16(목) 오후 1:30**

문제지가 아닌 다른 종이에 별도로 이름과 답을 작성하여 제출해주세요.

(문제 1~2) 벡터 $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$를 벡터 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$와 $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$로 이루어진 평면으로 projection하는 문제이다.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$일 때, projection 행렬 $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ 를 구하시오.

2. 벡터 $\boldsymbol{b}$를 주어진 평면에 projection한 결과인 $P \cdot \boldsymbol{b}$와 이를 다시 평면에 projection한 결과인 $PP \cdot \boldsymbol{b}$를 구하시오.

3. 정규 직교 벡터를 열로 가지는 행렬 $Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$의 $Q^T Q$ 와 $QQ^T$ 를 구하시오.

(문제 4~7) 직교 행렬 $Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 로 주어진 벡터들을 변환시켰을 때 주어진 벡터들과 변환된 벡터들 사이의 관계를 구하는 문제이다.

4. 벡터 $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 을 변환시켜 벡터 $Qv_1 = w_1$ 를 얻었을 때 $v_1, w_1$ 의 길이 $\|v_1\|, \|w_1\|$ 을 구하고 두 길이가 같은지 비교하시오.

5. 벡터 $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ 을 변환시켜 벡터 $Qv_2 = w_2$ 를 얻었을 때 $v_2, w_2$ 의 길이 $\|v_2\|, \|w_2\|$ 을 구하고 두 길이가 같은지 비교하시오.

6. 변환하기 전의 $v_1, v_2$ 두 벡터 사이의 각도를 $\theta_1$ 라 했을 때 $\cos\theta_1 = \frac{v_1^T}{\|v_1\|} \cdot \frac{v_2}{\|v_2\|}$ 의 값을 구하시오.

7. 변환한 후의 $w_1, w_2$ 두 벡터 사이의 각도를 $\theta_2$ 라 했을 때 $\cos\theta_2 = \frac{w_1^T}{\|w_1\|} \cdot \frac{w_2}{\|w_2\|}$ 의 값을 구하고, 문제 5의 $\cos\theta_1$ 와 비교하시오.

(문제 8~10) 직교 행렬 $Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 과 단위 벡터 $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ 가 주어졌을 때, $v$를 변환시켜

$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = Qv = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ 을 얻을 수 있다. 이 때 아래 문제의 답을 구하시오.

8. $\|w\|$를 구하시오.

9. $v, w$ 두 벡터 사이 각도의 cosine 값인 $v^T w$ 의 값을 구하시오.

(10~12) 1차 독립인 세 벡터 $\mathrm{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathrm{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathrm{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ 이 주어졌을 때 Gram-Schmidt 방법으로 직교하는 세 단위 벡터 $q_1, q_2, q_3$ 를 구하는 문제이다.

10. 아래의 세 백터 A, B, C를 구하시오.

$A = a$

$B = b - \frac{A^T b}{A^T A} A$

$C = c - \frac{A^T c}{A^T A} A - \frac{B^T c}{B^T B} B$

11. A, B, C로부터 단위 벡터 $q_1, q_2, q_3$ 를 구하시오.

$\mathrm{q}_1 = \frac{A}{\|A\|}, \mathrm{q}_2 = \frac{B}{\|B\|}, \mathrm{q}_3 = \frac{C}{\|C\|}$

12. 단위 벡터 $q_1, q_2, q_3$ 는 서로 직교하는가?

13. 위의 문제의 벡터들을 이용해 행렬 $\mathrm{A} = [\mathrm{a}\ \ \mathrm{b}\ \ \mathrm{c}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, 행렬 $Q = [q_1\ q_2\ q_3]$ 라 정의한다. A=QR 꼴로 분해할 때 행렬 R을 구하시오.