선형 대수 숙제 #5

숙제 제출 기한: 1/17(금) 오후 1:30

문제지가 아닌 다른 종이에 별도로 이름과 답을 작성하여 제출해주세요.

(문제 1~2) 주어진 행렬의 행렬식을 구하시오.

1. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

(문제 3~6) 행렬 A의 i번째 행과 j번째 열을 제외한 부분행렬 M_{ij} 들에 대해 cofactor $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ 이다. cofactor 행렬 $C = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$ 일 때, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} AC^T$ 임을 주어진 행렬 A에 대해 보이는 문제이다.

3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ 의 cofactor 행렬 C를 구하시오.

4. $\frac{1}{\det A} AC^T$ 임을 보이시오. (문제 1에서 구한 $\det A$를 사용하세요.)

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ 의 cofactor 행렬 C를 구하시오.

6. $\frac{1}{\det A} AC^T$ 임을 보이시오. (문제 2에서 구한 $\det A$를 사용하세요.)

(문제 7~8) 주어진 행렬의 eigenvalue와 eigenvector를 구하는 문제이다.

7. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$의 행렬의 eigenvalue와 eigenvector를 구하시오.

8. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$의 행렬의 eigenvalue와 eigenvector를 구하시오.

(문제 9~11) n by n 행렬 A의 eigenvector들이 $x_1, \dots, x_n$ 이고 이에 대응되는 eigenvalue들이 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 일 때 eigenvector 행렬 $S = [x_1 \;\; \cdots \;\; x_n]$ 로 정의하였다. 이 때 eigenvector $x_1, \dots, x_n$ 들이 서로 독립인 경우 S의 역행렬이 존재하고, 행렬 A를 $S^{-1}AS = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ 로 대각화 할

수 있음을 배웠다. 다음 문제는 주어진 행렬 A를 대각화하는 문제이다.

9. $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$의 eigenvalue와 eigenvector를 문제 7에서 구하였다. 이를 이용해 행렬 S, S^{-1}, Λ를 구하시오.

10. $S^{-1}AS = \Lambda$임을 보이시오.

11. $A = S\Lambda S^{-1}$ 을 이용하면 A^3을 구할 때 직접 A를 3번 곱하지 않고 대각화의 결과를 이용해, $A^3 = S\Lambda S^{-1}S\Lambda S^{-1}\ S\Lambda S^{-1} = S\Lambda^3 S^{-1}$ 로 계산할 수 있다. 두 방식으로 구한 A^3의 값이 같음을 확인하시오.

(문제 12~13) n by n 행렬 A의 eigenvector들이 $x_1, \ldots, x_n$ 이고 이에 대응되는 eigenvalue들이 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 일 때 $\det A = \lambda_1 * \ldots * \lambda_n$, $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$가 성립한다. 다음 문제는 이를 확인하는 문제이다.

12. $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$의 eigenvalue와 eigenvector를 문제 7에서 구하였다. A의 행렬식 $\det A$을 구하고, eigenvalue들의 곱과 비교하시오.

13. tr(A)를 구하고 eigenvalue들의 합과 비교하시오.

14. n by n 행렬 A와 B가 있을 때, tr(AB)=tr(BA) 가 성립한다. $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ 일 때 이를 확인하시오.

15. 대칭 행렬의 eigenvalue들은 실수이고, 서로 직교하는 eigenvector들을 찾을 수 있다. 대칭 행렬 $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$의 eigenvalue가 실수임을 확인하고, 서로 직교하는 eigenvector들을 구하시오.