

7.1 Linear Transformation

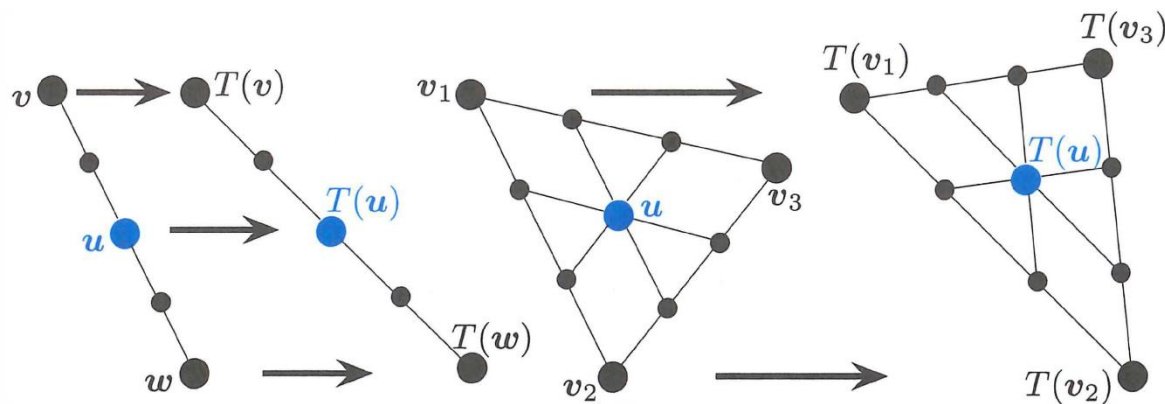
- 선형변환 (Linear Transformation)
 - 행렬 A 가 벡터 \boldsymbol{v} 에 곱해지면, 입력벡터 \boldsymbol{v} 는 다른 출력벡터 $A\boldsymbol{v}$ 로 변환됨.
 - 이것은 일반적인 함수의 형태, 즉 입력값 x 가 들어오면 출력값 벡터 $f(x)$ 를 얻는 것과 유사하므로, $T(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ 의 형태로도 표현함
 - 일반적인 변환(Transformation) T 는 입력벡터 공간 V 에 속한 벡터 \boldsymbol{v} 에 다른 출력벡터 $T(\boldsymbol{v})$ 를 연결하는 것을 말한다.
 - 벡터에 행렬이 곱해지는 변환의 경우 모든 입력에 대한 출력을 미리 알지 않아도, 예를 들어 입력벡터 \boldsymbol{v} 는 $A\boldsymbol{v}$ 로 변환되는 것을 알고 \boldsymbol{w} 는 $A\boldsymbol{w}$ 로 변환되는 것을 안다면 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ 의 관계인 \boldsymbol{u} 는 $A\boldsymbol{v} + A\boldsymbol{w}$ 로 변환될 것을 안다. 이런 변환을 선형변형(linear transformation 또는 linear mapping 선형사상)이라 부른다.

7.1 Linear Transformation

- 선형변환 (linear transformation)의 정의
 - 모든 입력 \mathbf{v} 와 \mathbf{w} 에 대해 다음의 관계가 성립하면 그 변환은 선형이라고 부름
 - (a) $T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$
 - (b) 임의의 c 에 대해 $T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$
- Example
 - 입력 벡터 \mathbf{v} 에 0이 아닌 벡터 \mathbf{u}_0 를 더하는 변환 $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{u}_0$ 은 선형인가?
 - 입력 벡터 \mathbf{v} 를 30도씩 회전시키는 변환은 선형인가?
 - 변환 T 가 선형이면 $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 이 무조건 성립하는가?
 - 입력 벡터 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 가 들어왔을 때, $\mathbf{u}_0 = (1, 2, 3)$ 을 내적하는 변환 $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \mathbf{u}_0$ 은 선형인가?
 - 입력은 벡터, 출력은 스칼라임
 - 입력 벡터 \mathbf{v} 의 길이를 구하는 변환 $T(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\| = \mathbf{v}^T \mathbf{v}$ 은 선형인가?

7.1 Linear Transformation

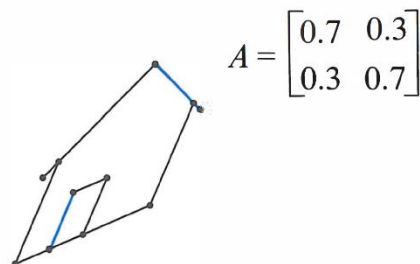
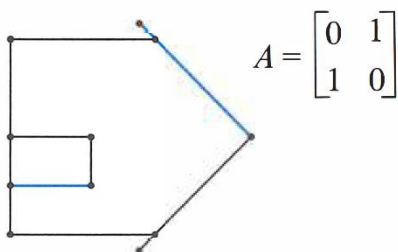
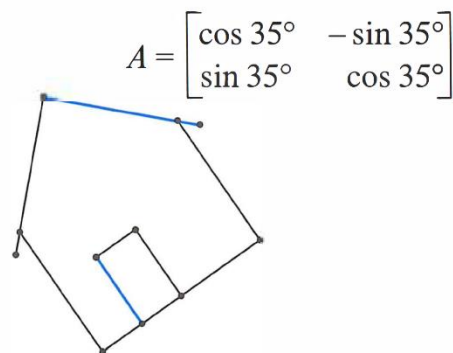
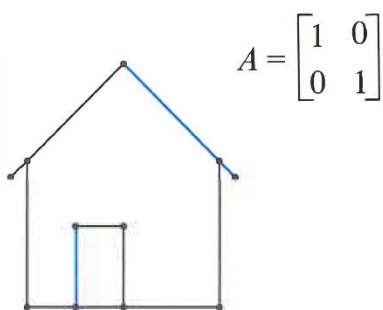
- 선형변환의 특징
 - ▣ 두 점을 잇는 선 위에 있는 점은 변환 후에도 두 점을 잇는 선 위로 변환된다.
 - ▣ 입력 공간에서 등간격인 점들은 변환후에도 등간격을 유지한다.
 - ▣ 입력 공간의 삼각형은 출력 공간의 삼각형으로 변환되고, 등간격 역시 유지된다.



7.1 Linear Transformation

- 아래 그림의 11개의 좌표에 2x2 행렬을 곱할 경우 새로운 11개의 좌표로 변환됨

House matrix $H = \begin{bmatrix} -6 & -6 & -7 & 0 & 7 & 6 & 6 & -3 & -3 & 0 & 0 & -6 \\ -7 & 2 & 1 & 8 & 1 & 2 & -7 & -7 & -2 & -2 & -7 & -7 \end{bmatrix}$



7.1 Linear Transformation

- 선형변환시 차원간의 관계

- ▣ 2차원의 입력 공간(\mathbf{R}^2)에 있는 벡터를 3차원의 출력 공간 (\mathbf{R}^3)에 있는 벡터에 mapping 시키는 선형변환 행렬을 잘 선택하면, 선형변환만으로 3차원 전체 공간을 생성(span)할 수 있을까?

- ▣ 예를 들어 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 가 주어진 경우,

2차원 공간(\mathbf{R}^2)에 속하는 2개의 입력 벡터 ($\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$)에

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

행렬을 곱하면 얻게 되는 3차원 공간(\mathbf{R}^3)에 속하는 출력벡터는 아래와 같음

$$\mathbf{u}_1 = A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- ▣ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 는 직교하는가?
- ▣ 선형 변환 행렬 A 와 2차원 공간의 입력 벡터 \mathbf{v} 의 선택을 잘하면 $A\mathbf{v}$ 을 통해 3차원 공간(\mathbf{R}^3)내 임의의 벡터를 얻을 수 있지 않을까?

7.1 Linear Transformation

- (계속) 선형변환시 차원간의 관계
 - 2차원의 입력 공간(\mathbf{R}^2)에 있는 벡터를 3차원의 출력 공간(\mathbf{R}^3)에 있는 벡터에 mapping 시키는 선형변환만으로 3차원 전체 공간을 생성(span)할 수 없다.
 - (증명) 만약 가능하다고 가정하면, 3차원 공간 전체를 생성해야 하므로 선형변환의 출력 중 3개의 독립인 벡터를 얻을 수 있어야 한다.
 - 3차원 공간내에 있는 이들 3개의 독립인 벡터를 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ 라 하고, 이들에 해당하는 2차원 입력 공간의 벡터를 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 라 하면, $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2, T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{w}_3$ 의 관계가 성립.
 - 입력 공간은 2차원이므로 최대 2개까지의 벡터만 독립임. 따라서 $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$ 의 선형결합을 $\mathbf{0}$ 으로 만드는 0이 아닌 c_1, c_2, c_3 가 존재함.
 - 변환 T 는 선형이므로 다음의 관계가 존재함
$$T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3) = \mathbf{0}$$
$$= c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2) + c_3T(\mathbf{v}_3) = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + c_3\mathbf{w}_3$$
 - 따라서 3개의 독립인 벡터의 선형결합을 $\mathbf{0}$ 으로 만들 수 있는 0이 아닌 c_1, c_2, c_3 가 존재한다는 결론을 얻으므로 가정이 모순임.

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- **(Reminder)** 선형변환 (linear transformation)의 정의
 - 모든 입력 \mathbf{v} 와 \mathbf{w} 에 대해 다음의 관계가 성립하면 그 변환은 선형이라고 부름
 - (a) $T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$
 - (b) 임의의 c 에 대해 $T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$
- 위의 정의는 행렬의 곱과 무관
 - 입력 벡터를 일정한 각도로 회전시키거나 고정된 벡터와 내적을 통해 스칼라값을 얻는 변환도 선형변환임. → 행렬의 곱과 무관함
 - 임의의 선형변환은 항상 그에 대응하는 행렬을 찾을 수 있을까?

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- 선형변환 $T(v)$ 에 대해 완벽하게 알기 위해 필요한 최소한의 정보는?
 - 만약 1개의 입력 벡터 v_1 이 선형변환에 의해 $T(v_1)$ 로 변환된다는 것을 알고 있다면, 모든 입력 벡터 cv_1 에 대한 결과를 알 수 있음
 - 만약 2개의 입력 벡터 v_1, v_2 이 선형변환에 의해 $w_1 = T(v_1), w_2 = T(v_2)$ 로 변환된다는 것을 알고 있다면, 벡터 v_1, v_2 의 1차결합으로 생성되는 부분공간에 포함된 모든 입력 벡터 $c_1v_1 + c_2v_2$ 에 대해서도 결과를 알 수 있음
 - 전체 입력 공간에 포함된 입력 벡터가 어떻게 변환될지 알고 싶으면, 입력 공간의 모든 기저 벡터 v_1, \dots, v_n 가 어떻게 변환될지 알면 됨. 그러면 변환 T 의 선형성에 의해 모든 결과를 예측할 수 있음. Why?
 - 입력 공간의 임의의 벡터 v 는 기저 벡터들의 선형결합으로 나타낼 수 있음
$$v = c_1v_1 + \dots + c_nv_n$$
$$T(v) = c_1T(v_1) + \dots + c_nT(v_n)$$

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- (계속) 선형변환 $T(\mathbf{v})$ 에 대해 완벽하게 알기 위해 필요한 최소한의 정보는?
 - 입력 공간의 임의의 벡터 \mathbf{v} 는 기저 벡터들의 선형결합으로 나타낼 수 있음 $\rightarrow \mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$
$$T(\mathbf{v}) = c_1T(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_nT(\mathbf{v}_n)$$
 - c_1, \dots, c_n 은 벡터 \mathbf{v} 의 기저 벡터 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 에 대한 좌표값에 해당
 - 만약 기저가 다른 기저 벡터의 집합 $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ 으로 바뀌면 같은 벡터 \mathbf{v} 의 좌표값도 바뀜

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- 선형변환 T 를 행렬 A 를 이용해 나타내는 방법
 - 입력 공간과 출력 공간의 기저 벡터를 결정해야 함
 - 입력 공간 \mathbf{R}^n 의 기저: $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$
 - 출력 공간 \mathbf{R}^m 의 기저: $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$
 - 입력 공간의 기저 \mathbf{v}_1 이 선형변환 T 를 통해 벡터 $\mathbf{u}_1 = T(\mathbf{v}_1)$ 로 변환되었다면 벡터 \mathbf{u}_1 은 출력 공간 \mathbf{R}^m 에 포함되므로, $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ 의 1차결합으로 표현 가능함
 - $\mathbf{u}_1 = a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{m1}\mathbf{w}_m$
 - 마찬가지로 기저 \mathbf{v}_j 가 벡터 $\mathbf{u}_j = T(\mathbf{v}_j)$ 로 변환되면, $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ 의 1차결합으로 표현 가능함
 - $\mathbf{u}_j = a_{1j}\mathbf{w}_1 + a_{2j}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{mj}\mathbf{w}_m$
 - 이 경우 임의의 입력 벡터 \mathbf{v} 가 주어지면, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 의 1차결합으로 표현 가능:
 $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$
 - 이 벡터의 선형변환 결과는
$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= c_1T(\mathbf{v}_1) + \dots + c_nT(\mathbf{v}_n) = c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n \\ &= c_1(a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{m1}\mathbf{w}_m) + \dots + c_n(a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{mn}\mathbf{w}_m) \\ &= (a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n)\mathbf{w}_1 + \dots + (a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \dots + a_{mn}c_n)\mathbf{w}_m \end{aligned}$$

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- (계속) 선형변환 T 를 행렬 A 를 이용해 나타내는 방법

- ▣ 입력 공간과 출력 공간의 기저 벡터를 결정해야 함
- ▣ 입력 공간 \mathbf{R}^n 의 기저: $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$
- ▣ 출력 공간 \mathbf{R}^m 의 기저: $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$
- ▣ 임의의 입력 벡터 \mathbf{v} 는 $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$
- ▣ 이 벡터의 선형변환 결과는

$$T(\mathbf{v}) = c_1T(\mathbf{v}_1) + \dots + c_nT(\mathbf{v}_n) = c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n$$

$$= (a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n)\mathbf{w}_1 + \dots + (a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \dots + a_{mn}c_n)\mathbf{w}_m$$

- ▣ 선형변환 결과로 얻은 벡터 $T(\mathbf{v})$ 를 기저 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ 의 1차결합으로 나타낼 때 좌표값을 d_1, \dots, d_m 라고 하면, 입력 좌표값 c_1, \dots, c_n 와 출력 좌표값 d_1, \dots, d_m 사이에는 다음의 관계가 성립

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{d} = A\mathbf{c}$$

- ▣ 행렬 A 의 i 행 j 열의 값은 입력 공간의 j 번째 기저 \mathbf{v}_j 가 $\mathbf{u}_i = T(\mathbf{v}_j)$ 로 변환 되었을 때, 출력 공간의 기저 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ 에 대한 i 번째 좌표값이다.

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- Example: 선형변환 T 를 행렬 A 를 이용해 나타내는 방법
 - 입력 공간이 \mathbf{R}^3 , 출력 공간은 \mathbf{R}^2 라고 가정하고, 기존 좌표축을 기저로 사용한다고 가정
 - $(1,0,0) \rightarrow (1,1)$, $(0,1,0) \rightarrow (-1,0)$, $(0,0,1) \rightarrow (3,0)$ 으로 변환된다고 가정
 - $(c_1, c_2, c_3) \Rightarrow (d_1, d_2)$
 - 행렬 A 의 i 행 j 열의 값은 입력 공간의 j 번째 기저 v_j 가 $u_j = T(v_j)$ 로 변환되었을 때, 출력 공간의 기저에 대한 i 번째 좌표값이다.
 - $$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$
 - 변환에 대한 visualization
 - Null벡터?
 - 3차원 공간 중 실제 mapping이 일어나는 공간은?

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

■ Summary

- ▣ 임의의 선형변환 T 가 주어지면 이를 나타내는 행렬 A 를 항상 찾을 수 있다.

$$T(\mathbf{v}_j) = a_{1j}\mathbf{w}_1 + a_{2j}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mj}\mathbf{w}_m$$

- ▣ 행렬 A 는 위의 계수를 이용하여 만들 수 있고, 이때 입력 벡터는 입력 공간의 좌표값이고 출력 벡터는 출력 공간의 좌표값이다.
- ▣ 연속된 2개의 선형변환의 합성
 - ▣ 벡터 공간 V 에 포함되는 벡터 \mathbf{v} 를 선형변환 $T_1: V \rightarrow W$ 을 통해 벡터 공간 W 에 포함되는 벡터 \mathbf{w} 로 변환시킨 후, 다시 벡터 \mathbf{w} 를 선형변환 $T_2: W \rightarrow X$ 을 통해 벡터 공간 X 에 포함되는 벡터 \mathbf{x} 로 변환시킬 경우를 가정
 - ▣ 이에 해당하는 행렬은 각각의 변환 T_1, T_2 에 해당하는 행렬이 A_1, A_2 일 경우 A_2A_1 이다.

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- 항등변환과 기저변환 행렬
 - ▣ 항등변환 (identity transformation)
 - $M(v) = v$ 은 아무것도 변화시키지 않는 변환임
 - 해당하는 행렬은?
 - 만약 변환 후 출력 공간의 기저가 입력 공간의 기저와 다르다면?
 - ▣ 기저변환 행렬 (change of basis matrix)
 - 입력 공간 \mathbf{R}^n 의 기저: v_1, \dots, v_n
 - 출력 공간 \mathbf{R}^n 의 기저: w_1, \dots, w_n
 - 입력 공간의 기저 v_j 은 항등변환 T 를 통해 아무 변화가 없지만, 변환 결과인 벡터 v_j 은 새로운 기저 벡터 w_1, \dots, w_n 의 1차결합으로 표현해야 함
 - $M(v_j) = v_j = m_{1j}w_1 + m_{2j}w_2 + \dots + m_{nj}w_n$

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

■ Example: 기저 변환 행렬

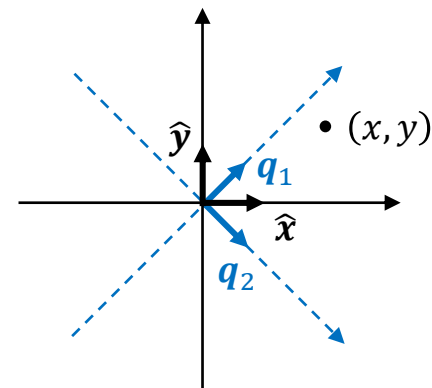
- 입력 공간 \mathbf{R}^2 의 기저: \hat{x} 와 \hat{y}
- 출력 공간 \mathbf{R}^2 의 기저: q_1, q_2

- $q_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, q_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

- q_1, q_2 벡터는 다음과 같이 \hat{x}, \hat{y} 의 1차결합으로 표현가능

- $$\begin{cases} q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{y} \\ q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}q_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}q_2 = m_{11}q_1 + m_{21}q_2 \\ \hat{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}q_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}q_2 = m_{12}q_1 + m_{22}q_2 \end{cases}$$

- $$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- 기저변환의 특징

$$M(\mathbf{v}_j) = \mathbf{v}_j = m_{1j}\mathbf{w}_1 + m_{2j}\mathbf{w}_2 + \cdots + m_{nj}\mathbf{w}_n$$

- 기저변환 행렬은 가역행렬임
 - 정사각 행렬이고, 열들이 모두 독립임
- 기저변환에 사용된 입력 공간의 기저와 출력 공간의 기저가 정규화된 직교 벡터들이라면, 기저변환 행렬은 직교 행렬임
- 기저 변환에 사용된 입력 벡터와 변환된 결과 벡터는 같은 벡터임

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

■ 기저 변환전

$$\square \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

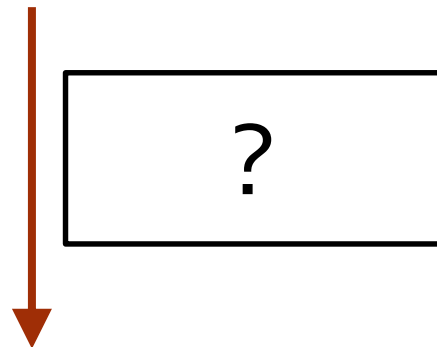


$$\square \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$



■ 기저 변환후

$$\square \quad \mathbf{c}' = \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_n \end{bmatrix} = M\mathbf{c}$$



$$\square \quad \mathbf{d}' = \begin{bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ \vdots \\ d'_n \end{bmatrix} = M\mathbf{d}$$



7.2 The Matrix of a Linear Transformation

■ 기저변환의 특징

$$v_j = m_{1j}w_1 + m_{2j}w_2 + \cdots + m_{nj}w_n$$

- 기저변환은 벡터에만 일어나는 것이 아니라 **같은 공간내에서 일어나는 선형변환 T** 를 나타내는 행렬 A 에도 적용되어야 함
 - 변환전 기저가 v_1, \dots, v_n 이고, 변환후 기저가 w_1, \dots, w_n 라고 가정하고, 기저변환을 나타내는 행렬을 M 으로 나타냄
 - 어떤 벡터 v 가 변환전 기저 v_1, \dots, v_n 에서 c_1, \dots, c_n 의 좌표값을 가지고 있을 때, 선형변환 T 를 적용하면 아래와 같이 출력 벡터의 좌표값 d_1, \dots, d_n 과는 다음의 관계를 가짐

- $$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \Rightarrow d = Ac$$

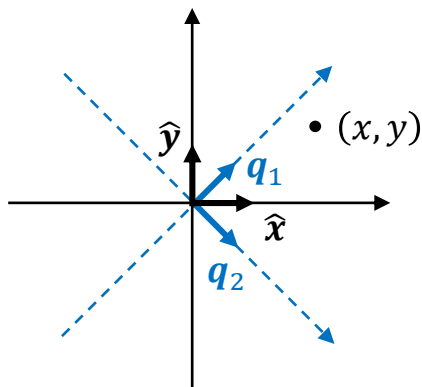
- 위의 d 벡터는 v_1, \dots, v_n 기저에서 좌표값이므로, 새로운 기저 w_1, \dots, w_n 에서의 좌표값은 Md 를 통해 얻게 됨.
- $Md = MAc = MA(M^{-1}M)c = (MAM^{-1})(Mc)$

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- 기저 변환전: \hat{x}, \hat{y}

- $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{d} = A\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- 기저 변환후: $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$

- $\mathbf{c}' = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = M\mathbf{c}$

$$\begin{aligned} A' &= MAM^{-1} \\ &= M \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

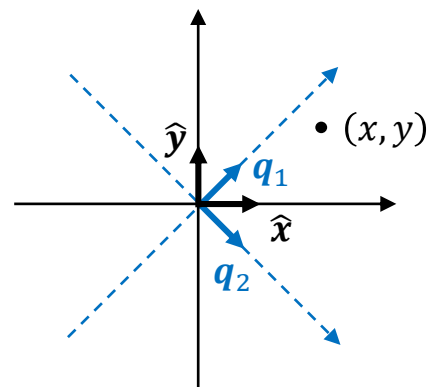
- $\mathbf{d}' = A'\mathbf{c}' = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = M\mathbf{d}$

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- 기저 변환전: \hat{x}, \hat{y}

- $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{d} = A\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- 기저 변환후: $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$

- $\mathbf{c}' = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = M\mathbf{c}$

$$\begin{aligned} A' &= MAM^{-1} \\ &= M \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- $\mathbf{d}' = A'\mathbf{c}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 4\sqrt{2} \end{bmatrix} = M\mathbf{d}$

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- (Revisited) Positive definite 행렬

- $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x})^T (\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}) (\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x})$

- $\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \vdots \end{bmatrix}$

- $(\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}) = \Lambda$ 은 대각 행렬이므로

- $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x})^T (\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}) (\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x}) =$

$$\begin{bmatrix} q_x & q_y & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_y & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ \vdots \end{bmatrix} = \lambda_x q_x^2 + \lambda_y q_y^2 + \cdots$$

- 좌표축 변화에 따라 좌표값들이 \mathbf{x} 에서 $\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x}$ 로 바꿀 때, 왜 행렬 \mathbf{A} 는 $\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}$ 로 바뀌었나?

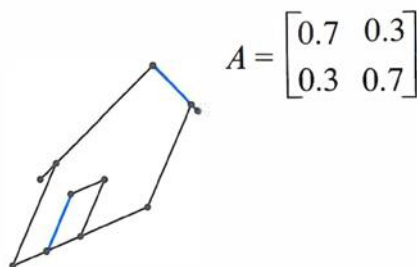
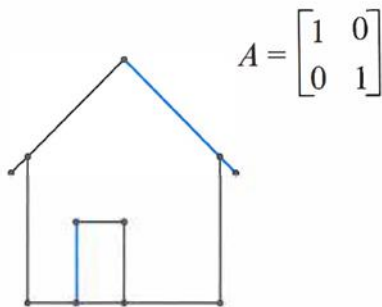
7.2 The Matrix of a Linear Transformation

■ 기저변환 summary

변환전 기저가 v_1, \dots, v_n 이고, 변환후 기저가 w_1, \dots, w_n 라고 가정하면, 기저 변환을 나타내는 행렬을 M 으로 나타냄

$$v_j = m_{1j}w_1 + m_{2j}w_2 + \dots + m_{nj}w_n$$

- 기저변환 미적용시 (기존 기저 v_1, \dots, v_n)
 - 어떤 벡터 v 가 c_1, \dots, c_n 의 좌표값을 가지고 있고 선형변환 T 를 적용한 출력 벡터의 좌표값은 d_1, \dots, d_n 로 나타냄 ($d = Ac$)
- 기저변환 적용시 (새로운 기저 w_1, \dots, w_n)
 - $c \rightarrow Mc, d \rightarrow Md$
 - $A \rightarrow MAM^{-1}$
- 행렬이 특정한 선형변환을 나타낼 경우에는 기저의 선택에 따라 행렬의 값이 달라짐 \Leftrightarrow 벡터의 경우와 유사
- 이럴 경우 행렬을 주어진 선형변환의 representation이라고 부름



6.7 Singular Value Decomposition

- 특이값 분해 (Singular Value Decomposition, SVD)
 - 임의의 선형변환에 해당하는 행렬 A 가 주어졌을 때, SVD는 열벡터 공간의 직교하는 기저에 mapping될 수 있는 행벡터 공간의 직교하는 기저를 찾는 문제임
- Example
 - 입력 공간이 \mathbf{R}^3 , 출력 공간은 \mathbf{R}^2 , 기존 좌표축을 기저로 사용하는 선형변환이 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 의 형태로 주어졌다고 가정.
 - 입력 공간의 직교하는 두 벡터 $(1,0,0)$, $(0,0,1)$ 에 해당하는 출력 공간의 벡터는 직교하는가?
 - $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
 - “직교하는 기저” → “직교하는 기저”의 장점
 - 좌표값에 일종의 eigenvalue만 곱하면 됨 → 직교하지 않으니 포기?

6.7 Singular Value Decomposition

- 특이값 분해 (Singular Value Decomposition, SVD)
 - $A = U\Sigma V^T$ (여기서 U, V 는 직교행렬, Σ 는 대각 행렬임)
 - 위와 같은 형태를 목표로 다시 도전

- $A^T A = V\Sigma^T U^{-1} U\Sigma V^T = V\Sigma^T \Sigma V^T = V \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r^2 \end{bmatrix} V^T$

- Example

- 입력 공간이 \mathbf{R}^3 , 출력 공간은 \mathbf{R}^2 ,
 - $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ 대칭행렬 우연?
 - Eigenvalue & eigenvector: $\lambda = 3, 2, 0, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

6.7 Singular Value Decomposition

- (계속) Example $A = U\Sigma V^T$

- $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- Eigenvalue & eigenvector: $\lambda = 3, 2, 0, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

- $V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \Sigma^T \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \sigma_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$

- 만약 eigenvalue가 음수이면?

- $AV = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

6.7 Singular Value Decomposition

- (계속) Example $A = U\Sigma V^T$
 - 일반적으로 U 를 모르므로 $AA^T = U\Sigma V^T V\Sigma^T U^T = U\Sigma\Sigma^T U^T$
 - $AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
 - Eigenvalue & eigenvector: $\lambda = 3, 2, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
 - $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \Sigma\Sigma^T = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \\ & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \\ & 2 \end{bmatrix}$
 - Using $AV = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

$$= [\sigma_1 \mathbf{u}_1 \quad \sigma_2 \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \sigma_r \mathbf{u}_r] = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_r] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix}$$
 - $A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
 - 부호가 왜 틀린 것일까?
 - 행렬의 크기?

6.7 Singular Value Decomposition

- 특이값 분해 (Singular Value Decomposition, SVD)
 - $A = U\Sigma V^T$, 여기서 U, V 는 직교행렬, Σ 는 대각 행렬임
 - A 는 정사각 행렬일 필요가 없음
 - A 가 대칭, positive definite 행렬의 경우 $A = Q\Lambda Q^T$ 는 SVD의 특수한 경우임
 - A 가 대칭이 아닐 경우 좀 더 일반적인 경우는 A 가 n 개의 다른 eigenvector를 가지는 경우 $A = S\Lambda S^{-1}$ 가 가능함을 배움
 - 행렬 A 를 행벡터 공간내 임의의 벡터 v_1 를 열벡터 공간내 다른 벡터 $u_1 = Av_1$ 에 mapping하는 함수로 생각할 수 있음.
 - SVD는 열벡터 공간의 직교하는 기저에 mapping될 수 있는 행벡터 공간의 직교하는 기저를 찾는 문제임: $Av_i = \sigma_i u_i$
 - 다음을 만족하는 행벡터 공간의 직교하는 기저 v_1, v_2, \dots, v_r 를 찾아야 함
 - $A[v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_r] = [\sigma_1 u_1 \ \sigma_2 u_2 \ \cdots \ \sigma_r u_r] =$
 $[u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_r] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix}$
 - 여기서 u_1, u_2, \dots, u_r 는 열벡터 공간의 직교하는 기저임

6.7 Singular Value Decomposition

- 다음을 만족하는 행벡터 공간의 직교하는 기저 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ 를 찾아야 함
- $A[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_r] = [\sigma_1 \mathbf{u}_1 \ \sigma_2 \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \sigma_r \mathbf{u}_r] =$
$$[\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_r] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix}$$
- 여기서 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ 는 열벡터 공간의 직교하는 기저임
- 행벡터 공간의 \mathbf{R}^n 공간의 부분 공간이지만, nullspace의 기저 $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_n$ 까지 합친 경우에는 전체 \mathbf{R}^n 공간을 span할 수 있고, 이때 해당하는 $\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n$ 은 모두 0임
- $AV = U\Sigma \rightarrow A = U\Sigma V^T$
- $\rightarrow A^T A = V\Sigma U^{-1} U\Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T = V \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r^2 \end{bmatrix} V^T$

6.7 Singular Value Decomposition

- $AV = U\Sigma \rightarrow A = U\Sigma V^T$
- $\rightarrow A^T A = V\Sigma U^{-1}U\Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T = V \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r^2 \end{bmatrix} V^T$
- 위의 행렬은 $Q\Lambda Q^T$ 의 형태이고, $A^T A$ 는 positive semidefinite 행렬이므로 대각화가 가능함. V 는 $A^T A$ 행렬의 eigenvector이고 σ_i^2 는 $A^T A$ 행렬의 eigenvalue임.
- U 행렬 역시 유사한 방식으로 구할 수 있음.