선형대수

- 2주차 1/13(월) ~ 1/17(금) 오후 세션
- Lecturer: 김태현 (taehyun@snu.ac.kr, 사무실: 301동 407호)
- TA: 김채원 (kcwchae@gmail.com)
- 교재: Introduction to Linear Algebra, International edition Gilbert Strang (2019)
  - 참고자료: https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/video-lectures/
  - 영어로 된 동영상 강의지만, 본 강의에서 1시간에 다루는 내용을 2~3시간 분량으로 설명하고 쉬운 영어를 사용하기 때문에 본 수업에서 다룬 내용을 다시 공부하고 싶을 때 도움이 될 것으로 생각함.

수업 운영 계획

- 성적: 숙제 (10%), 퀴즈 (50%), 전체 시험 (40%)
- 수업 운영 계획
  - 매일 강의가 끝날 때 당일 배운 내용에 대한 숙제가 주어짐
  - 다음날 수업 시작 첫15분 동안 전날 배운 내용에 대한 퀴즈 진행 (퀴즈의 내용은 대부분 숙제와 유사한 문제가 나올 예정임)
  - 퀴즈 답안지는 채점 후 수업시간 중에 돌려주고 조교 세션에서 많이 틀린 문제 위주로 풀이를 해줄 예정임.
  - 하지만, 조교세션 후에 **퀴즈 시험문제를 모두 수거할 예정**이니, 조교세션 설명을 답안지에 적지 말 것
  - 전체 시험은 1/20(월) 오후 1:30~2:30 사이에 진행 예정
    - 전체 시험에는 그동안 배운 내용을 요약한 A4용지 1장 (양면)을 사용할 수 있음
- 수업 일정
  - 오후 1:30~1:45 (조교) 전날 배운 내용을 퀴즈로 확인 및 숙제 수거
  - 오후 1:45~4:45 (교수) 강의 – (조교) 성적 처리
  - 오후 4:45~5:30 (조교) 퀴즈 및 전날 숙제 내용 풀이, 당일 새로운 숙제에 대한 해설 (연습풀이) 및 질의 응답

Review: Gauss-Jordan 소거법 (2.5절)

- 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 의 역행렬 구하기
  - $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$
  - 역행렬?
    - Pivot이 1이 아닌 경우
      ➔ 1로 만들기 위해 전체 행을 pivot의 값으로 나눠줘야 함.

      확인: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
    - 만약 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$이면 둘째 행의 pivot값이 0이 됨.
      ➔ 2행과 3행을 치환 행렬을 이용하여 교환 P_{23}
    - 만약 둘째열의 대각선 아래 값들이 모두 0인 경우?
      ➔ 비가역 행렬

2.4 Rules for Matrix Operations

- 2개 행렬 곱의 크기: $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = ?$
- 2개 행렬의 곱($AB = C$)의 다양한 계산 방법
  - 예) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

  1) A의 행과 B의 열을 내적하여 C의 원소를 계산

  2) 행렬 A와 B의 각각 열을 곱하여 C의 각각 열을 계산 ➔ C의 열들은 행렬 A의 열들의 1차 결합

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

  3) A의 각각 행들을 행렬 B에 곱하여 C의 각각 행을 계산 ➔ C의 행들은 행렬 B의 행들의 1차 결합

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \end{bmatrix}$$

2.4 Rules for Matrix Operations

- (계속) 2개 행렬의 곱($AB = C$)의 다양한 계산 방법
  - 예) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

  4) 행렬 C는 A의 열과 B의 행을 곱하여 얻은 개별 행렬들의 합으로 계산

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

  - $\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [& \cdots &] \\ [& \cdots &] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1^T \\ \boldsymbol{b}_2^T \end{bmatrix} = \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{b}_1^T + \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{b}_2^T$

Block 행렬과 곱 (2.4절)

- 이전 행렬의 곱: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$
- Block 행렬의 곱: $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & \dots \\ B_{21} & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & \dots \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & \dots \end{bmatrix}$
- Example: $\left[\begin{array}{c|cc} a & 2 & 0 \\ \hline 0 & b & c \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 3 & -1 \\ \hline x & y \\ 0 & z \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 3a+2x & -a+2y \\ \hline bx & by+cz \\ -3 & 1+z \end{array}\right]$를 block 행렬의 곱으로 표현하면

$$\begin{bmatrix} [a] & [2 \quad 0] \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} [3] & [-1] \\ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [3a+2x] & [-a+2y] \\ \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bx \\ 0 \end{pmatrix}\right] & \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} by+cz \\ z \end{pmatrix}\right] \end{bmatrix}$$

- Block 행렬의 곱은 표현 방식이 한가지가 아니라, 상황에 따라 다르게 나눌 수 있음.

Review: LU 분해 (2.6~2.7절)

- 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ 의 LU분해
  - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ➔ 2번째 행의 pivot이 0
  - 치환(Permutation) 행렬 P_{23} 적용
- 임의의 행렬 A가 주어졌을 때, upper triangle 형태의 행렬(U)을 만들기 위해 치환 행렬이 중간에 사용됨.

$$(E_{ij} \ldots P_{mn} \ldots E_{kl})A = U$$

- 만약 치환 행렬 P_{mn} 이 바꾸는 행이 E_{kl}의 계산에 포함된 경우에는, P_{mn}을 E_{kl}의 왼쪽에서 오른쪽으로 옮길 때 E_{kl}의 아래 첨자가 변해야 함 ➔ $P_{mn}E_{nl} = E_{ml}P_{mn}$

  예) $P_{23}E_{21} = E_{31}P_{23}$
- 치환 행렬들을 모든 elementary 행렬들의 오른쪽으로 옮긴 후, LU 분해를 진행 ➔ $PA = LU$

3.1 Spaces of Vectors

- $\mathbf{R}^n$공간 (space): n개의 실수 성분으로 이루어진 열벡터들의 모음
- Example
  - $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 2개의 열벡터들의 1차결합으로 만들 수 모든 열벡터는 $\mathbf{R}^2$공간 (실수 좌표를 갖는 2차원 공간)의 원소임
  - $\mathbf{R}^3$ 벡터 공간은 임의의 실수 a, b, c로 만들 수 있는 모든 열벡터 $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$들로 이루어진 공간임
- 벡터 공간 (vector space)이 만족해야 하는 성질
  - 닫힘성 (closure): 벡터 공간을 $\mathbb{V}$라고 할 때, 이 공간안에 있는 임의의 두 벡터를 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{V}$라 하고 임의의 스칼라 값을 c라고 하면, $c\boldsymbol{a}$와 합 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 모두 벡터 공간 $\mathbb{V}$ 에 포함되어야 한다. ⇔ $c\boldsymbol{a} \in \mathbb{V}$ and $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in \mathbb{V}$
  - 벡터 공간 $\mathbb{V}$는 $\mathbf{0}$-벡터를 포함해야 한다.

3.1 Spaces of Vectors

- 벡터 공간의 예
  - 임의의 양수 a, b로 이루어진 모든 열벡터 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$들만 포함하는 집합은 벡터 공간인가? N
  - 임의의 2×2 행렬들로 이루어진 집합은 벡터 공간인가? Y
  - $\mathbf{0}$-벡터 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 1개만으로 이루어져 있는 집합은 벡터 공간인가? Y
  - 어떤 집합에 포함되는 임의의 원소 2개를 뽑아서 이들의 임의의 1차결합을 만들었을 때, 이 결과가 항상 원래 집합에 포함되면 이 집합은 벡터 공간이라 함.

3.1 Spaces of Vectors (Subspace)

- 부분공간 (subspace)
  - 벡터 공간 $\mathbb{W}$가 다른 더 큰 벡터 공간 $\mathbb{V}$에 포함될 때 $\mathbb{W}$는 $\mathbb{V}$의 부분 공간이라고 부른다.

  - Example
    - $\mathbf{R}^2$공간 내 특정한 벡터 $\boldsymbol{v}$를 생각할 때, 임의의 실수 c를 곱한 $c\boldsymbol{v}$로 이루어진 1차원 공간은 $\mathbf{R}^2$공간의 부분 공간임.
    - $\mathbf{R}^2$공간 (평면)내 원점을 지나지 않는 직선은 부분 공간이 안됨.
    - 원점을 지나는 2차원 평면은 $\mathbf{R}^3$공간의 부분공간임
    - 원점을 지나는 직선은 $\mathbf{R}^n$공간의 부분공간임

3.1 The Column Space of A

- 열벡터 공간 (column space) $C(A)$
  - 행의 개수가 3인 행렬 A가 주어졌을 때, 행렬의 열벡터는 R^3공간에 포함된다. 이때 행렬 A의 열벡터들의 1차결합으로 만들어진 **부분공간(subspace)**을 행렬 A의 column space $C(A)$이라고 부른다.
  - 이 경우 열벡터들이 $C(A)$를 생성(span)한다고도 말한다.

- Example
  - $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$의 column space $C(A)$ 는 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ 와 $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 을 동시에 포함하는 평면임.

3.1 The Column Space of A

- (O, X) 문제
  - 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$가 주어진 경우, 3개의 열벡터들은 $\mathbf{R}^4$공간내의 벡터들이다. $C(A)$ 는 열벡터들의 1차결합으로 생성(span)된 열벡터 공간 (column space)라고 할 때, 아래에서 맞는 설명들을 고르시오 (중복가능).

    1. 위에 주어진 3개의 열벡터는 독립이다. (   )

    2. 위에 주어진 3개의 열벡터 대신 특성을 고려한 3개의 열벡터를 잘 선택할 경우, 열벡터 3개의 1차결합만으로 $\mathbf{R}^4$공간을 생성할 수 있다. (   )

    3. 위의 주어진 열벡터들의 1차결합만으로는 $\mathbf{R}^4$공간을 생성할 수 없다. (   )

    4. $\mathbf{R}^4$공간을 생성하기 위해서는 반드시 4개 이상의 열벡터가 필요하다. (   )

- $\mathbf{R}^3$공간내 특성을 고려한 2개의 벡터를 잘 선택할 경우, 2개 벡터의 1차결합만으로 $\mathbf{R}^3$공간을 생성할 수 있다?

3.1 The Column Space of A

- $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$의 column space
  - $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$가 주어진 경우, $C(A)$ 는 $\mathbf{R}^4$공간의 부분공간임.
  - $\boldsymbol{b}$가 $C(A)$ 부분공간에 포함되지 않는 경우, $\boldsymbol{x}$가 존재하지 않음.
  - $\boldsymbol{b}$가 $C(A)$ 부분공간에 포함되는 경우, $\boldsymbol{x}$가 존재함.
    - 이 경우 만족하는 해의 개수는?
    - 만약 해가 여러 개일 경우 어떻게 모든 가능한 경우를 찾을 수 있을까?
  - 여러 개의 해가 생기는 원인
    - 열벡터들이 1차종속일 경우
    - Nullspace가 **0**-벡터 이외의 다른 해를 가질 경우
    - 위의 두가지 원인은 같은 조건임

3.2 The Nullspace of A: $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

- $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$
  - $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$를 만족하는 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$?
    - $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$?
    - ➔ 일반적으로 $\boldsymbol{x} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$의 형태를 가진 해는 모두 만족.
    - 등식의 오른쪽을 null(0)로 만드는 해들은 subspace를 이룸. ⇔위의 해는 0-벡터도 포함하고, 다른 두 벡터의 합이 여전히 등식의 오른쪽을 null(0)로 만듦.
    - 위의 해와 독립적으로 null(0)로 만드는 해가 존재하는가?

3.2 The Nullspace of A: $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

- $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$의 해 $\boldsymbol{x}$를 구하시오.
  - 가우스 소거법 이용
  - $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$
  - $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ -x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 + 1 \\ -x_3 - 1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.2 The Nullspace of A: $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

- $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$의 해 $\boldsymbol{x}$를 구하시오.
  - $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
  - $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$: particular solution
  - $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$: special solution (or homogeneous solution)
- $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$의 해 $\boldsymbol{x}$들의 집합은 부분공간을 이루는가? No

3.2 The Nullspace of A: $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

- Nullspace (영공간)은 주어진 행렬 A에 곱해져서 영벡터를 만드는 해들로 이루어진 공간임. 즉, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$을 만족하는 모든 $\boldsymbol{x}$들의 집합임.
- (문제) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$의 Nullspace(영공간)를 구하시오.
  - $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$을 만족하는 해 $\boldsymbol{x}$를 구하기
  - 가우스 소거법 적용: $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$를 만족하는 해가 변하지 않음
  - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

    ➔ 계단형 (echelon) 또는 사다리꼴 형태의 upper triangle 행렬을 얻음

3.2 The Nullspace of A: $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

- (계속) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$의 Nullspace(영공간)를 구하시오.
  - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

    ➔ Pivot의 개수는?
  - **행렬의 Rank**: 사다리꼴 행렬의 pivot의 개수=독립인 행의 개수
  - Pivot column: 1, 3
  - Free column: 2, 4
- **Row reduced echelon form (rref) – 행간소 사다리꼴**
  - $R = \mathbf{rref}(A)$로 표시
  - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3.2 The Nullspace of A: $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

- (계속) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$의 Nullspace(영공간)를 구하시오.
  - Row reduced echelon form (rref) – 행간소 사다리꼴
  - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$을 만족하는 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$을 구할 때, 자유변수의 개수는? 2개, 해는 $x_3 + 2x_4 = 0,\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0$
  - $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + 2x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_4 \\ 0 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

3.2 The Nullspace of A: $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

- (계속) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$의 Nullspace(영공간)를 구하시오.
  - $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$
  - 열벡터 $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$과 $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$은 행렬 A에 대해 영벡터임. ➔ special solution
  - 열벡터 $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$과 $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$의 1차결합은 항상 행렬 A를 0으로 만듦.

  ➔ 부분공간 ➔ Nullspace라고 불리고 $\boldsymbol{N}(A)$으로 표시

3.3 The Rank and the Row Reduced Form

- 주어진 행렬 A 의 크기가 $m \times n$ 일 때, nullspace의 차원과 rank의 관계
  - 행간소 사다리꼴 (Row Reduced Echelon Form, RREF)의 일반적인 형태

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

➔ Pivot 값은 모두 1이고, pivot 열은 pivot값을 제외하고는 위, 아래 모두 0인 형태

  - 행렬 A 의 rank는 행간소 사다리꼴(rref)의 pivot column의 개수로 결정되고 보통 r 로 표시
  - Nullspace는 $\boldsymbol{N}(A)$으로 표시되고 독립적인 special solution의 개수는 free column의 개수로 결정된다.
  - 공간의 차원: 공간을 생성(span)하는데 필요한 최소의 벡터의 개수
  - $\dim\big(\boldsymbol{N}(A)\big) + r = ?$ 행렬 A의 열의 개수 n으로 결정

3.3 The Rank and the Row Reduced Form

- Rank 1 행렬
  - [열벡터]x[행벡터]로 만들어지는 행렬의 rank는 1임
  - $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ ➔ 모든 행이 다른 행에 스칼라 값을 곱한 결과이고 (모든 행벡터들이 평행), 마찬가지로 모든 열도 다른 열의 스칼라 곱 형태임 (모든 열벡터들이 평행).

3.4 The Complete Solution to $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

- 임의의 행렬 A의 행벡터의 rank와 열벡터의 rank는 같다.
  - (증명)
  - $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$의 형태를 가정하고, 행간소 사다리꼴 (rref)로 변형

$$[A|\mathbf{0}] \xrightarrow{rref} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  - $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$를 만족하는 해 $\boldsymbol{x}$는 행렬 A가 행간소 사다리꼴 (rref)로 변형되어도 ($R = \text{rref}(A)$) 여전히 $R\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 를 만족하고, 그 역도 성립함.
  - Free column에 해당하는 모든 x_i값들을 모두 0으로 설정한 경우, 행간소 사다리꼴에 곱해서 $\mathbf{0}$벡터를 얻을 수 있는 $\boldsymbol{x}$벡터는 모두 0인 경우밖에 없음.
    예) $x_2 = 0, x_5 = 0$ 으로 설정한 경우 나머지 x_1, x_3, x_4는 모두 0이 되어야 함.
    ➔ 주어진 행렬 A의 pivot column들은 서로 독립임을 의미함
  - 모든 free column들은 pivot column들의 1차결합으로 생성할 수 있음.
    예) $x_2 = 0, x_5 = 1$이면, $x_1 = -b, x_3 = -c, x_4 = -d$는 null 벡터가 됨 ➔ 5번째 열은 1, 3, 4번 열들의 1차결합임
  - 따라서 열벡터는 pivot column들만 서로 독립임
    ➔ (열벡터들의 rank) = (pivot column의 개수)

3.4 The Complete Solution to $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

- Rank
  - (행렬의 rank) = (pivot의 개수)
  - 행렬 A의 크기가 $m \times n$인 경우, rank r은 $r \leq m$ and $r \leq n$
- Full column rank
  - 만약 $r = n$이면, nullspace의 차원은? $\dim\big(N(A)\big) = n - r = 0$
    - nullspace의 차원=free column의 개수
  - 만약 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$의 해가 존재하면, 해는 유일함 ➔ 해의 개수는 0 또는 1
  - $r \leq m$이므로 $r = n$이면, 행렬의 행의 개수는 열의 개수보다 크거나 같다.
  - 행간소 사다리꼴(rref)은 모든 성분이 0인 행을 $(m - n)$개 가짐

3.4 The Complete Solution to $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

- Rank
  - (행렬의 rank) = (pivot의 개수)
  - 행렬 A의 크기가 $m \times n$인 경우, rank r은 $r \leq m$ and $r \leq n$
- Full row rank
  - 만약 $r = m$이면, 행간소 사다리꼴(rref)는 모든 성분이 0인 행이 없음
  - Pivot의 개수가 m개이면, 모든 행에 대해 원소의 값이 1인 pivot column을 가지고, 방정식 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$의 경우 임의의 $\boldsymbol{b}$에 대한 해가 항상 존재한다.
    - 예를 들어 $\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$인 경우, free column 성분을 모두 0으로 잡으면 $(x_2 = x_5 = 0)$, $x_1 = b_1, x_3 = b_2, x_4 = b_3$의 해를 얻게 된다.
  - $r \leq n$이므로, $r = m$이면, 행렬의 열의 개수는 행의 개수보다 $(n - m)$개 많다.
  - Free column 개수는 $(n - m)$이므로, nullspace의 차원도 $(n - m)$임.

3.4 The Complete Solution to $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

- Rank
  - (행렬의 rank) = (pivot의 개수)
  - 행렬 A의 크기가 $m \times n$인 경우, rank r은 $r \le m$ and $r \le n$
- Full row and column rank
  - 만약 $r = m = n$이면, 행간소 사다리꼴(rref)는 단위 행렬 (identity matrix)이 되어 항상 역행렬이 존재한다.
  - Nullspace의 차원은 0이고, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$은 항상 1개의 유일한 해를 가진다.

Summary

- $\mathbf{R}^n$공간은 n개의 실수값을 성분으로 갖는 모든 열벡터들을 포함한다.
- $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 2개의 벡터가 주어진 벡터공간에 포함될 때, 1차결합인 $c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}$ 도 포함되어야 한다.
- 부분 공간: 다른 벡터 공간에 포함되면서 동시에 자체적으로도 벡터 공간의 성질을 만족하는 집합
- 열벡터 공간 $C(A)$: 주어진 행렬 A의 모든 열벡터들의 1차결합으로 생성된 벡터 공간
- Null공간 $N(A)$: $\mathbf{R}^n$의 부분 공간으로 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$을 만족하는 모든 해 $\boldsymbol{x}$로 이루어진 벡터공간
- 가우스 소거법은 upper triangle 형태의 행렬 U를 만들고, 더 나가서 행간소 사다리꼴 (RREF) 행렬 R을 만듦. RREF 행렬은 pivot column과 free column으로 이루어짐.

Summary

- 행간소 사다리꼴 (RREF) 행렬 R의 free column 1개당 special solution 1개가 존재함.
- 행렬의 열의 개수가 행의 개수보다 많은 경우 반드시 special solutio이 존재하고, 따라서 0이 아닌 벡터가 null공간에 존재함.
- 행렬 A의 rank r은 pivot의 개수임.
- Null공간의 차원은 (행렬의 열 개수)- r 임