최적화 숙제 #1

이름: ___________

숙제 제출 기한: 1/22(수) 오후 1:30

1. 행렬 C = $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$에 대하여

   (a) $C^T C$를 구하시오

   (b) $C^T C$의 고유값분해 $V \Lambda V^{-1}$를 구하시오 (V는 orthogonal 행렬). $V = [\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2]$, $\boldsymbol{v}_i$는 길이가 1인 벡터, $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

   (c) $\Sigma = \sqrt{\Lambda} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix}$를 구하시오.

   (d) $CV = W = U\Sigma$일때 W의 각 열을 normalize한 행렬 $U = [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2]$를 구하시오.

   (e) 위에서 구한 U, Σ, V를 이용하여 $U\Sigma V^T$ 계산하면, C가 됨을 확인하시오.

(f) $\mathrm{U}^{\mathrm{T}}CV = \Sigma$가 대각행렬임을 보이시오

(g) 주어진 행렬 C를 rank-1 행렬들로 분해하고, C와 일치하는지 확인하시오.

(힌트: $C = U\Sigma V^T = [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2]\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1^T \\ \boldsymbol{v}_2^T\end{bmatrix} = \sigma_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1^T + \sigma_2\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2^T$)

(h) 행렬 C 와 가장 가까운 rank-1 행렬을 구하시오

2. 행렬 A = $\begin{bmatrix}4 & 1 \\ 1 & 4\end{bmatrix}$에 대하여

(a) 고유값 분해(eigenvalue decomposition) $\mathrm{A} = \mathrm{U\Lambda U^{-1}}$를 구하시오

(b) SVD A = $\mathrm{U\Sigma V^T}$를 구하시오

3. 각 행렬들과 가장 가까운 rank-1 행렬을 구하시오

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(e) A $=\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

4. 다음은 선형 변환 $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$을 다른 두가지 기저에서 계산한 결과가 같음을 확인하기 위한 문제이다. 편의상 처음 기저를 basis-1, 새로운 기저를 basis-2로 표기하면, basis-1은 {(1,0),(0,1)}를 기저로 가지고 basis-2는 $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$를 기저로 가진다. 그리고, 선형 변환 T를 basis-1에서 나타낸 행렬이 $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$라고 가정할 때, 다음 물음에 답하시오.

(a) 임의의 벡터 $\boldsymbol{v}$를 basis-1의 1차 결합으로 나타낼 때 필요한 좌표값을 (x_1, x_2)라고 하고 같은 벡터$\boldsymbol{v}$를 basis-2의 1차 결합으로 나타낼 때 필요한 좌표값을 (x_1', x_2')라고 표시하면, $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$를 만족시키는 기저 변환 행렬 M을 구하시오.

(b) 입력 공간내 벡터 $\boldsymbol{v}_{in}$이 basis-1에서 좌표값 $(x_1, x_2) = (2,3)$ 를 가질 때, 선형 변환 T를 통해 변환된 벡터 $\boldsymbol{v}_{out}$의 basis-1에서 좌표값 (y_1, y_2)를 구하시오. $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

(c) 문제 (b)에서 주어진 것과 같이 벡터 $\boldsymbol{v}_{in}$이 basis-1에서 좌표값 $(x_1, x_2) = (2,3)$을 가질 때, 같은 벡터 $\boldsymbol{v}_{in}$이 basis-2에서 가지게 될 좌표값 (x_1', x_2')을 구하시오.

(d) 선형 변환 T가 새로운 basis-2에서 가지게 될 새로운 representation 행렬 $A' = MAM^{-1}$을 구하시오.

(e) basis-2에서 선형 변환 T가 입력 벡터 $\boldsymbol{v}_{in}$을 어떤 출력 벡터 $\boldsymbol{v}_{out}$으로 변환시키는지 확인하기 위해서는 문제 (c)에서 구한 벡터 $\boldsymbol{v}_{in}$의 basis-2를 이용한 좌표값 (x_1', x_2')을 문제 (d)에서 구한 새로운 representation 행렬 A'에 곱하면 된다. 이 곱에 의해 얻게 될 벡터 $\boldsymbol{v}_{out}$의 basis-2에서의 좌표값 (y_1', y_2')을 구하시오. $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$

(f) 문제 (b)에서 얻은 (y_1, y_2)는 벡터 $\boldsymbol{v}_{out}$을 basis-1의 1차결합으로 나타낼 때 얻게 되는 좌표값이고, 문제 (e)에서 얻은 (y_1', y_2')는 같은 벡터 $\boldsymbol{v}_{out}$을 basis-2의 1차결합으로 나타낼 때 얻게 되는 좌표값이다. 이 두 좌표값이 같은 벡터를 나타낸다는 것을 확인하기 위해서는 하나의 좌표값을 다른 기저의 좌표값으로 변환해야 한다. $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$관계를 이용하여, 2개의 좌표값이 같은 벡터 $\boldsymbol{v}_{out}$을 나타내고 있음을 확인하시오.

5. 선형사상 $\mathrm{T}: \mathrm{R}^2 \rightarrow R^2$가 {(1,0), (0,1)} 기저에서 $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ 일 때, 새로운 기저 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ 에서 대각행렬로 표현된다고 한다. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$를 구하시오 ($|\boldsymbol{v}_1| = |\boldsymbol{v}_2| = 1$)