

## 3.4 The Complete Solution to $Ax = b$

▪  $Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ 의 해를 구하기

▣  $\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & b_2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & b_3 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_3 - 3b_1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - 3b_1 - (b_2 - 2b_1) \end{array} \right]$

▣ 해가 존재하기 위해서는 3행의 우변도 0이 되어야 함.  $\rightarrow$

▣  $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_2 + b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow b$ 는  $(1,0,1)$ ,  $(0,1,1)$  2개의 벡터로 생성(span)되는 2차원 공간(평면)에 포함되어야 함

- ▣ (1열):  $b_1 = 1, b_2 = 2$ , (2열):  $b_1 = 2, b_2 = 4$ , (3열):  $b_1 = 2, b_2 = 6$ , (3열):  $b_1 = 2, b_2 = 8$
- ▣  $C(A)$  열벡터 공간의  $\text{rank}=2 \Leftrightarrow C(A)$  행벡터 공간의  $\text{rank}=2$

## 3.4 The Complete Solution to $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

- $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ 의 해를 구하기
  - 앞페이지로부터  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 를 만족해야 함을 이미 알고 있음
  - $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$  ( $b_1 = 1, b_2 = 5$ )이면, 이를 만족하는  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ ?
    - 앞페이지 결과로부터  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$  얻음
    - Free column들의 계수  $x_2 = x_4 = 0$ 이면,  $x_3 = \frac{3}{2}, x_1 = -2$ 를 얻음.
    - Particular solution:  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

## 3.4 The Complete Solution to $Ax = b$

▪ (계속)  $Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ 의 해를 구하기

▪ (앞장으로부터) Particular solution:  $x_p = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

▪ 이것은 유일한 해인가?

▪ Nullspace구하기

▪ 행간소 사다리꼴(rref)로 변형 후, 이를 만족하는 벡터  $n$ 을 구함

▪  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -2 + 2x_2 \\ x_3 = -2x_2 \\ x_4 = 0 \end{array} \right\}$

$\rightarrow n = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 2x_2 \\ x_2 \\ -2x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

▪ Complete solution

▪  $x = x_p + n = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

## 3.5 Independence, Basis and Dimension

- 1차 독립 (linear independence)
  - 벡터  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 가 주어졌을 때  $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ 을 만족하는 해가  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ 밖에 없을 경우 주어진 벡터들은 서로 1차 독립이라고 함
  - 행렬  $A$ 가 주어졌을 때,  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 을 만족하는 해가  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  밖에 없으면 행렬  $A$ 의 열벡터들은 서로 1차 독립이라고 한다.  $\Leftrightarrow$  행렬의 nullspace가  $\mathbf{0}$ -벡터만 포함한다.
- Vectors that span a space
  - 주어진 벡터 공간이 벡터  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 들의 1차결합으로만 채워져 있을 때, 벡터  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 들이 공간을 생성(span)한다고 부른다.
  - 행렬  $A$ 가 주어졌을 때 열벡터들은 행렬  $A$ 의 열벡터 공간  $C(A)$ 을 생성한다.

## 3.5 Independence, Basis and Dimension

- Basis for a vector space
  - 벡터공간의 기저(basis)는 다음의 두가지 성질을 가진 벡터들의 집합이다.
    - 기저 벡터들은 서로 1차 독립이어야 한다.
    - 기저 벡터들만으로 전체 벡터공간을 생성할 수 있어야 한다.
- Examples
  - $\mathbf{R}^3$ 의 한가지 기저는  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ 임. → 정의 확인
  - $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$ 은  $\mathbf{R}^3$ 공간의 기저가 될 수 있는가?
  - 행렬의 pivot column 들은 주어진 행렬의 열벡터 공간  $C(A)$ 의 기저가 됨.

## 3.5 Independence, Basis and Dimension

- 임의의 벡터공간에 대해 기저의 선택은 유일한가?
- 임의의 벡터공간에 포함된 벡터  $v$ 와 이 공간의 기저( $v_1, v_2, \dots, v_n$ )가 주어졌을 때,  $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$ 와 같이 벡터  $v$ 를 기저의 1차결합으로 나타낼 수 있는  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 의 조합은 유일한가?

□ (증명) 만약 유일하지 않다고 가정하면, 아래의 두가지 경우가 존재한다.

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$$

$$v = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_n v_n$$

- 위의 첫번째 식에서 두번째 식을 빼면,

$$0 = (x_1 - y_1)v_1 + (x_2 - y_2)v_2 + \dots + (x_n - y_n)v_n$$

$$\equiv z_1 v_1 + z_2 v_2 + \dots + z_n v_n$$

- 만약  $z_i = (x_i - y_i)$ 로 정의된 값이 하나라도 0이 아니면, 기저벡터는 서로 독립이라는 조건을 위배한다. 따라서 모든  $z_i = (x_i - y_i)$ 은 0이어야 함.

- $\rightarrow$  모든  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 들은  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 와 같아야 함.  $\rightarrow$  유일함

## 3.5 Independence, Basis and Dimension

- Dimension of a vector space
  - 벡터 공간의 차원은 그 공간의 기저에 포함된 벡터의 개수임
- 임의의 벡터공간에 대해 서로 다른 두가지의 기저를 선택을 했을 때, 다른 두 기저내에 속하는 벡터의 개수는 항상 같은가?
  - (증명) 만약 두 기저에 속하는 벡터의 개수가 다르다고 가정하면, 아래와 같은 두가지 기저가 존재함. ( $m \neq n$ )

$$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m) \text{ 와 } (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$$

- 좀 더 구체적인 예를 위해,  $m = 3 > n = 2$ 로 가정하면,  $\mathbf{w}_i$  와  $\mathbf{v}_i$  모두 같은 공간에 있으므로 다음과 같이  $\mathbf{w}_i$  들을  $\mathbf{v}_i$  들의 1차결합으로 표현 가능해야 함.

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1 = c_{11}\mathbf{v}_1 + c_{21}\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{w}_2 = c_{12}\mathbf{v}_1 + c_{22}\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{w}_3 = c_{13}\mathbf{v}_1 + c_{23}\mathbf{v}_2 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} &(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) \text{는 서로 독립이므로 } a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2 + a_3\mathbf{w}_3 = \mathbf{0} \text{을 만족하는 } a_i \text{들은} \\ &a_1 = a_2 = a_3 = 0 \text{밖에 없어야 함.} \end{aligned}$$

## 3.5 Independence, Basis and Dimension

- (증명 계속) 임의의 벡터공간에 대해 기저에 대한 다른 선택을 했을 때, 다른 두 기저내에 속하는 벡터의 개수는 항상 같은가?

$$\begin{aligned} \square \quad \begin{cases} \mathbf{w}_1 = c_{11}\mathbf{v}_1 + c_{21}\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{w}_2 = c_{12}\mathbf{v}_1 + c_{22}\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{w}_3 = c_{13}\mathbf{v}_1 + c_{23}\mathbf{v}_2 \end{cases} \rightarrow & \quad (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) \text{는 서로 독립이므로 } a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2 + a_3\mathbf{w}_3 = \mathbf{0} \text{을 만족하는 } a_i \text{들은} \\ & \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0 \text{밖에 없어야 함.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2 + a_3\mathbf{w}_3 \\ &= a_1(c_{11}\mathbf{v}_1 + c_{21}\mathbf{v}_2) + a_2(c_{12}\mathbf{v}_1 + c_{22}\mathbf{v}_2) + a_3(c_{13}\mathbf{v}_1 + c_{23}\mathbf{v}_2) \\ &= (c_{11}a_1 + c_{12}a_2 + c_{13}a_3)\mathbf{v}_1 + (c_{21}a_1 + c_{22}a_2 + c_{23}a_3)\mathbf{v}_2 \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\square \quad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{nullspace는 차원은?}$$

→ 열의 개수는 3, rank는 최대 2 이므로, nullspace는 적어도 1 차원임.

→  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$  이외의 해가 존재함.

□ 따라서 가정이 잘못되었음을 알 수 있음



## 3.5 Independence, Basis and Dimension

- 지난 시간 (O, X) 문제

- 행렬  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ 가 주어진 경우, 3개의 열벡터들은  $\mathbf{R}^4$ 공간내의 벡터들이다.  $C(A)$ 는 열벡터들의 1차결합으로 생성(span)된 열벡터 공간 (column space)라고 할 때, 아래에서 맞는 설명들을 고르시오 (중복가능).
  1. 위에 주어진 3개의 열벡터는 독립이다. ( )
  2. 위에 주어진 3개의 열벡터 대신 특성을 고려한 3개의 열벡터를 잘 선택할 경우, 열벡터 3개의 1차결합만으로  $\mathbf{R}^4$ 공간을 생성할 수 있다. ( )
  3. 위의 주어진 3개의 열벡터들의 1차결합만으로는  $\mathbf{R}^4$ 공간을 생성할 수 없다. ( )
  4.  $\mathbf{R}^4$ 공간을 생성하기 위해서는 반드시 4개 이상의 열벡터가 필요하다. ( )

- $\mathbf{R}^n$ 공간의 기저는 반드시  $n$ 개의 벡터로만 이루어져 있다.

## 3.5 Independence, Basis and Dimension

- 임의의 벡터공간  $\mathbb{V}$ 의 (직교하지 않는) 기저( $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ )와 그 공간내 하나의 벡터  $\mathbf{w}$ 가 주어졌다고 가정
  - 기저의 정의로부터  $\mathbf{w}$ 는 기저 벡터들의 1차 결합  $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n$ 의 형태로 나타낼 수 있음.
  - $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 의 값을 어떻게 결정할까?
    - $[\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{w}$ 와 같이 기저들을 열로 가지는 행렬의 방정식을 세우고, 해를 구함.
    - 기저들은 모두 독립이므로 행렬의 rank  $r$ 은  $r = n$ 이고,  $\dim(N(A)) = n - r = 0$  이므로 nullspace에는 0벡터밖에 없으므로 유일한 해를 가짐.

## 3.6 Dimensions of the Four Subspaces

- 4가지 근본적인 부분공간 (Four fundamental subspaces)
  - 크기가  $m \times n$ 인 임의의 행렬  $A$ 가 주어지면 이와 관련된 4가지 부분공간들이 결정된다.
- 열벡터 공간  $C(A)$  (Column space)
  - 주어진 행렬  $A$ 의 열벡터들로 생성한 벡터 공간.  $\mathbf{R}^m$ 의 부분 공간임
- Null벡터 공간  $N(A)$  (Nullspace)
  - 주어진 행렬  $A$ 에 대해  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 을 만족하는 모든 해  $\mathbf{x}$ 로 이루어진 공간.  $\mathbf{R}^n$ 의 부분 공간임
- 행벡터 공간  $C(A^T)$  (Row space)
  - 주어진 행렬  $A$ 의 행벡터들로 생성한 벡터 공간.  $\mathbf{R}^n$ 의 부분 공간임
- 왼쪽 null벡터 공간  $N(A^T)$  (Left nullspace)
  - 주어진 행렬  $A$ 에 대해  $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$  또는  $(A^T\mathbf{x})^T = \mathbf{x}^T A = \mathbf{0}$  을 만족하는 모든 해  $\mathbf{x}$ 로 이루어진 공간.  $\mathbf{R}^m$ 의 부분 공간임

## 3.6 Dimensions of the Four Subspaces

- 기저(basis)와 차원(dimension)
  - 크기가  $m \times n$ 인 임의의 행렬  $A$ 의 행간소 사다리꼴 행렬을  $R = \text{rref}(A)$ 라고 하고 이 때 pivot column의 개수(rank)를  $r$ 이라 하면...
  - 열벡터 공간  $C(A)$  (Column space)
    - $r$ 개의 행렬  $A$ 의 pivot column들이  $C(A)$ 의 기저가 됨. 따라서
$$\dim(C(A)) = r$$
    - Note that  $C(A) \neq C(R)$ .
  - Null 공간  $N(A)$  (Nullspace)
    - $Ax = \mathbf{0}$  또는  $Ux = \mathbf{0}$  를 만족하는 자유변수들에 해당하는 special solution 이 null공간  $N(A)$  의 기저를 이룸.
    - 행렬  $A$ 는  $(n - r)$ 개의 자유변수를 가지므로
$$\dim(N(A)) = n - r$$

## 3.6 Dimensions of the Four Subspaces

- (계속) 기저(basis)와 차원(dimension)
  - 크기가  $m \times n$ 인 임의의 행렬  $A$ 의 행간소 사다리꼴 행렬을  $R = \text{rref}(A)$ 라고 하고 이 때 pivot column의 개수(rank)를  $r$ 이라 하면...
  - 행벡터 공간  $C(A^T)$  (Row space)
    - 행간소 사다리꼴 행렬  $R$ 의 각 행이 행벡터 공간의 기저가 됨.  
$$\dim(C(A^T)) = r$$
  - 왼쪽 null 공간  $N(A^T)$  (Left nullspace)
    - 행렬  $A^T$ 는  $m$ 개의 열을 가짐. 또한  $A^T$ 의 rank가  $r$  이므로  $A^T$ 의 free column은  $m - r$ 이므로  
$$\dim(C(A^T)) = m - r$$
    - 왼쪽 null 공간의 기저를 구하는 방법
      1. 행렬  $A^T$ 를 구하고, rref형태로 바꿔서 nullspace 계산하기
      2.  $[A_{m \times n} | I_{m \times m}] \xrightarrow{\text{RREF}} [R_{m \times n} | E_{m \times m}]$ 를 계산 (다음 페이지 설명)

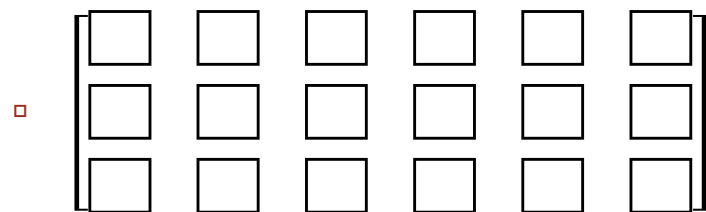
## 3.6 Dimensions of the Four Subspaces

- 왼쪽 null 공간  $N(A^T)$ 의 기저
  - $N(A^T)$ 는  $A^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$  또는  $\mathbf{x}^T A = \mathbf{0}$  를 만족하는 모든 해  $\mathbf{x}$ 로 이루어 공간임.
  - 임의의 행렬  $A$ 가 주어졌을 때,  $\mathbf{x}^T A = \mathbf{0}$  만족하는  $\mathbf{x}$ 를 찾는 방법
    - $A$ 의 역행렬을 구하듯이 행간소 사다리꼴 형태로 변형
$$[A_{m \times n} | I_{m \times m}] \xrightarrow{\text{RREF}} [R_{m \times n} | E_{m \times m}]$$
    - 이 과정에서 얻는  $E_{m \times m}$ 는  $E_{m \times m} A_{m \times n} = R_{m \times n}$ 의 관계를 만족함.
    - $EA = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$
    - $E$ 의 밑으로부터  $m - r$ 개의 행들은 행렬  $A$ 와 곱했을 때, 모두 0-행 벡터가 됨. → 왼쪽 null공간의 기저임

## 3.6 Dimensions of the Four Subspaces

### ■ Example

- 임의의 행렬  $A$ 의 크기가  $3 \times 6$ 이고 rank가 2이라고 가정



- Nullspace

- Nullspace내의 모든 벡터들은  $\mathbf{R}^6$ 공간에 포함되고, 따라서 부분 공간임.
- Nullspace의 기저내 벡터의 개수는?

- 행벡터

- 모든 행벡터는  $\mathbf{R}^6$ 내의 벡터임. 행벡터 공간  $C(A^T)$ 은 차원이 2이므로  $\mathbf{R}^6$ 의 부분 공간임.
- $C(A^T)$ 의 기저는 2개의 벡터를 가지고 이는  $\mathbf{R}^6$ 의 기저의 일부로 사용 가능함.

- Nullspace의 기저의 개수 + 행벡터 공간의 기저의 개수 =?

- 이들을 합쳐서  $\mathbf{R}^6$ 의 기저로 사용할 수 있을까?

## 3.6 Dimensions of the Four Subspaces

- Example: 행렬  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ 의 행벡터 공간과 Nullspace를 찾으시오.
  - 행간소 사다리꼴로 변형
    - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
  - 행벡터 공간
    - 2차원이고  $[1 \ 0 \ -1]$ 과  $[0 \ 1 \ 1]$ 을 기저로 가짐
  - Nullspace
    - $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix} \right.$
  - 행벡터 공간의 기저와 nullspace의 기저 모두  $\mathbf{R}^3$ 공간에 포함됨.
  - 3개를 합쳐서 기저로 사용가능한가?
  - 행벡터 공간의 기저와 nullspace의 기저 사이의 내적은?
  - 독립성과 직교성은 우연?



## 4.1 Orthogonality of the Four Subspaces

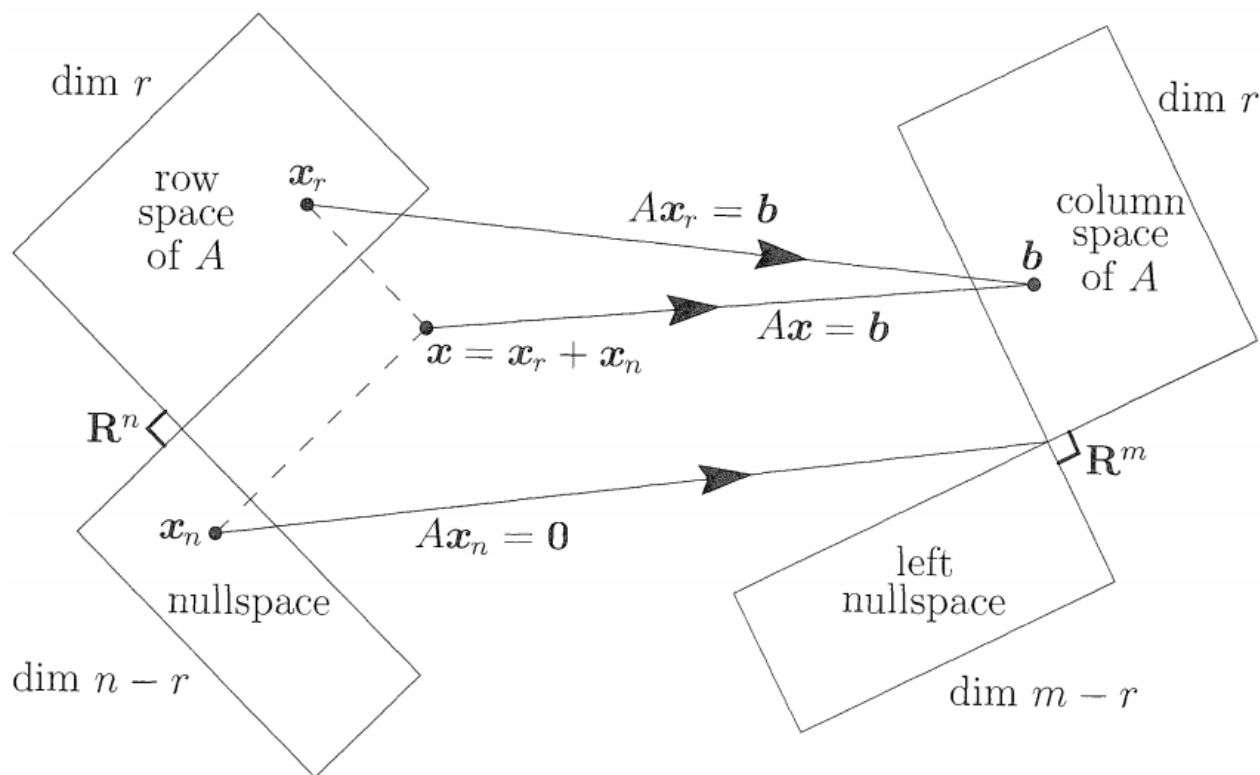
- 직교하는 벡터 (Orthogonal vectors)
  - 두 벡터의 내적이 0이 될 때, 두 벡터는 직교한다고 정의함
- 직교하는 부분 공간 (Orthogonal subspaces)
  - 부분 공간  $\mathbb{V}$ 에 속하는 모든 벡터  $\mathbf{v}$ 와 부분 공간  $\mathbb{W}$ 에 속하는 모든 벡터  $\mathbf{w}$ 가 서로 직교할 때, 두 부분 공간이 직교한다고 부름
  - 예) 3차원 공간내 xy평면과 z축?
  - 예) 칠판과 바닥은?
- Orthogonal complements (직교 여집합?)
  - 임의의 부분 공간  $\mathbb{V}$ 에 직교하는 모든 벡터를 가진 부분 공간을  $\mathbb{V}$ 의 orthogonal complement라고 부르고  $\mathbb{V}^\perp$ 로 표기함

## 4.1 Orthogonality of the Four Subspaces

- 크기가  $m \times n$ 인 임의의 행렬  $A$ 의 행벡터 공간과 nullspace는 서로 직교하고 orthogonal complement관계임
  - (증명)  $Ax = \mathbf{0} \rightarrow A$ 의 모든 행과  $x$ 벡터와의 내적은 0임을 의미
  - 예를 들어  $Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
  - 행벡터들과 nullspace내의 null벡터들은 모두  $\mathbf{R}^n$ 공간에 포함됨
  - 두공간의 차원의 합은  $n$ 임
- 마찬가지로 열벡터 공간과 왼쪽 nullspace는 서로 직교함

## 4.1 Orthogonality of the Four Subspaces

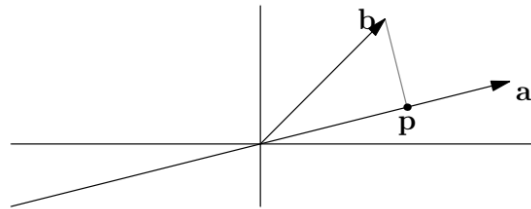
- 4가지 부분 공간들 간의 관계



## 4.2 Projections

### ■ Projection

- 아래 그림과 같이 벡터  $\mathbf{a}$ 와 평행하고 원점을 지나는 직선상의 점 중 벡터  $\mathbf{b}$ 와 가까운 점을 찾는 방법은?



- 직선상의 점  $p$ 와 벡터  $\mathbf{b}$ 를 이어주는 선은 벡터  $\mathbf{a}$ 에 직교해야 함
  - 점  $p$ 는 직선상의 점이므로  $\square$ 와 같이 표현 가능
  - $x$ 는 어떻게 찾을 수 있을까?
  - $\mathbf{b} - p$ 를 이어주는 선과 벡터  $\mathbf{a}$ 가  $\square$ 는 조건을 이용
- ➔  $\mathbf{a}^T(\mathbf{b} - x\mathbf{a}) = 0 \rightarrow x\mathbf{a}^T\mathbf{a} = \mathbf{a}^T\mathbf{b} \rightarrow x = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$
- $x$ 를 구한 후  $p$ 를 구하기 위해서는  $\square$



## 4.2 Projections

### ■ Projection 행렬

- 행렬의 곱을 바라보는 다른 관점
  - 입력으로 벡터를 받아서 새로운 벡터를 출력으로 만들어내는 연산
  - 입력으로 행렬을 받아서 새로운 행렬을 출력으로 만들어내는 연산
- $p = ax = a \frac{a^T b}{a^T a}$  관계를 임의의 벡터  $b$  가 주어졌을 때, 벡터  $a$  와 평행한 벡터 성분만 뽑아내는 행렬로 표현가능
- $$p = a \frac{a^T b}{a^T a} = \frac{aa^T b}{a^T a} = \frac{(aa^T)b}{a^T a} = \frac{aa^T}{a^T a} b = Pb$$

➔ 벡터도  $n \times 1$  크기의 행렬로 생각하면 결합법칙 성립
- Projection 행렬은  $P = \frac{aa^T}{a^T a}$ 와 같이 정의 가능.
- $aa^T$ 은 (열)x(행)이므로  ,  $a^T a$ 은 (행)x(열)이므로



## 4.2 Projections

### ■ Projection 행렬

- $P = \frac{aa^T}{a^T a}$
- $P$  는  $aa^T$  에 비례하고,  $aa^T$  의 모든 column은 벡터  $a$  에 비례함.
- $(aa^T)b$  는  $aa^T$  의 모든 column의 1차 결합 형태로 나타나므로 벡터  $a$  에 평행해야 함.
- $P$  의 rank는?
- $P$  는 대칭 (symmetric) 행렬임
- $P^2 b = Pb$  ?
- 일반적으로 projection 행렬은  $P^T = P$ 와  $P^2 = P$ 의 성질을 가짐
- 또 다른 관점
  - $\frac{a}{\sqrt{a^T a}}$ 은  $a$ 방향의 단위 벡터임. 이를 벡터  $e$ 라고 부르면  $e = \frac{a}{\sqrt{a^T a}}$
  - $e \cdot b = e^T b$ 는 벡터  $b$ 에 포함된  $a$ 와 평행한 성분의 크기를 나타냄.
  - 이 크기를 단위 벡터  $e$ 에 곱하면,  $e(e^T b) = \frac{a}{\sqrt{a^T a}} \left( \frac{a^T}{\sqrt{a^T a}} b \right)$

## 4.2 Projections

- 부분 공간에 projection하는 방법
  - 예를 들어  $\mathbf{R}^3$ 공간에서 벡터  $\mathbf{b}$ 를 어떤 평면에 가장 가까운 점에 projection하는 방법은?
  - 만약 벡터  $\mathbf{a}_1$ 와  $\mathbf{a}_2$ 가 평면의 기저이면, 평면은 이 두 벡터를 열로 가지는 행렬  $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2]$ 의   공간에 해당한다.
  - 이 평면에 projection된 벡터  $\mathbf{p}$ 는  $\mathbf{p} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 의 형태로 나타남.
  - $x_1, x_2$ 는 어떻게 구할까?
  - $\mathbf{b} - \mathbf{p}$ 를 이어주는 선과 평면의 모든 기저 벡터  $\mathbf{a}_i$ 가  는 조건을 이용.  $\mathbf{b} - \mathbf{p} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$
  - $$\begin{cases} \mathbf{a}_1^T (\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = 0 \\ \mathbf{a}_2^T (\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \rightarrow \text{ } = 0$$



## 4.2 Projections

- (계속) 부분 공간에 projection하는 방법
  - $A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = \mathbf{0} \rightarrow$
  - $\mathbf{x}$ 를 구하는 방법은?
    - (참고) 1개의 벡터였을 때는  $\mathbf{a}^T \mathbf{a} \mathbf{x} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{b}}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}}$
  - 행렬의 경우에는  $\rightarrow \mathbf{x} =$
  - 위의 과정은  $x_1, x_2$ 을 구하지만, 이 값 자체는 project 된 벡터가 아님.
  - 벡터를 얻기 위해서는  $x_1, x_2$ 를 이용하여 벡터  $\mathbf{a}_1$ 와  $\mathbf{a}_2$ 의 1차결합을 얻어야 함
- 따라서 부분 공간 projection 행렬은  $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ 
  - (참고) 1개의 벡터였을 때 projection 행렬은  $P = \frac{\mathbf{a} \mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}}$
- 부분 공간의 projection 행렬도  $P^T = P$ 와  $P^2 = P$ 의 성질을 가질까?





## 4.2 Projections

- Example: 벡터  $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 와  $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 로 이루어진 평면으로 projection 하는 행렬을 구하시오.
  - 어떤 행렬을 얻을까?
  - $A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, P = A(A^T A)^{-1} A^T, A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{역행렬?}$
  - $(A^T A)^{-1} A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
  - $P = A(A^T A)^{-1} A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - $P^T = P$ 와  $P^2 = P$ 의 성질 확인



## 4.2 Projections

- Projection 행렬은  $P = A(A^T A)^{-1}A^T$ 와 같이  $A$ 가 정사각행렬이 아니더라도  $A^T A$ 의 역행렬을 구해야 함. 역행렬이 항상 존재하는가?
  - ▣  $A$ 가 정사각행렬이 아니더라도  $A^T A$ 는 항상 정사각행렬의 형태를 가짐
  - ▣ 하지만  $A^T A$ 가 역행렬을 항상 가진다고 항상 기대할 수는 없으며, 대신  $A$ 의 모든 열들이 독립인 경우에는 항상 역행렬을 가짐
  - ▣ (증명)  $(A^T A)$ 가 주어졌을 때, 여기에 곱해서 0이 되는 벡터  $x$ 를 찾았다고 가정.  $(A^T A)x = 0$
  - ▣ 여기에 같은 벡터의 행벡터를 왼쪽에 곱해도  $x^T(A^T A)x = 0$  성립해야 함.
    - ➔  $x^T(A^T A)x = x^T A^T A x = (x^T A^T)(A x) = (A x)^T(A x) = 0$
  - ▣ 따라서  $A x = 0$ 는 반드시 성립해야 함
  - ▣  $A$ 의 모든 열들이 독립이면,  $A x = 0$ 을 만족하는  $x$ 는?
  - ▣ 행렬  $(A^T A)$ 이 주어졌을 때  $(A^T A)x = 0$ 을 만족하는  $x$ 는 **0-벡터** 밖에 없음을 보임. ➔  $(A^T A)$ 는 행렬이어야 함