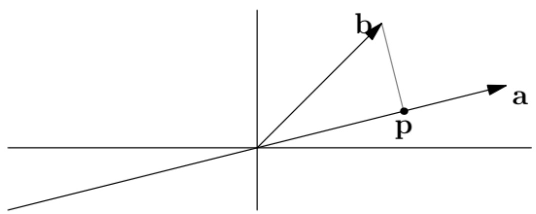
4.2 Projections

- Projection
  - 아래 그림과 같이 벡터 $\boldsymbol{a}$와 평행하고 원점을 지나는 직선상의 점 중 벡터 $\boldsymbol{b}$와 가까운 점을 찾는 방법은?



    - 직선상의 점 $\boldsymbol{p}$와 벡터 $\boldsymbol{b}$ 를 이어주는 선은 벡터 $\boldsymbol{a}$에 직교해야 함
    - 점 $\boldsymbol{p}$는 직선상의 점이므로 $\boldsymbol{p} = x\boldsymbol{a}$와 같이 표현 가능
    - x는 어떻게 찾을 수 있을까?
    - $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}$를 이어주는 선과 벡터 $\boldsymbol{a}$가 직교한다는 조건을 이용

    ➔ $\boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{b} - x\boldsymbol{a}) = 0$ ➔ $x\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}$ ➔ $x = \dfrac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}$

  - x를 구한 후 $\boldsymbol{p}$ 를 구하기 위해서는 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a}x = \boldsymbol{a}\dfrac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}$

4.2 Projections

- Projection 행렬
  - 행렬의 곱을 바라보는 다른 관점
    - 입력으로 벡터를 받아서 새로운 벡터를 출력으로 만들어내는 연산
    - 입력으로 행렬을 받아서 새로운 행렬을 출력으로 만들어내는 연산
  - $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a}x = \boldsymbol{a}\frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}$관계를 임의의 벡터 $\boldsymbol{b}$ 가 주어졌을 때, 벡터 $\boldsymbol{a}$ 와 평행한 벡터 성분만 뽑아내는 행렬로 표현가능
  - $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a}\frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}} = \frac{(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T)\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = P\boldsymbol{b}$

    ➔ 벡터도 $n \times 1$ 크기의 행렬로 생각하면 결합법칙 성립
  - Projection 행렬은 $P = \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}$와 같이 정의 가능.
  - $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T$은 (열)x(행)이므로 행렬, $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}$은 (행)x(열)이므로 스칼라

4.2 Projections

- Projection 행렬
  - $P = \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}$
  - P 는 $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T$에 비례하고, $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T$ 의 모든 column은 벡터 $\boldsymbol{a}$ 에 비례함.
  - $(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T)\boldsymbol{b}$ 는 $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T$ 의 모든 column의 1차 결합 형태로 나타나므로 벡터 $\boldsymbol{a}$ 에 평행해야 함.
  - P 의 rank는? 1
  - P 는 대칭 (symmetric) 행렬임
  - $P^2\boldsymbol{b} = P\boldsymbol{b}$?
  - 일반적으로 projection 행렬은 $P^T = P$와 $P^2 = P$의 성질을 가짐
  - 또 다른 관점
    - $\frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}}$은 $\boldsymbol{a}$방향의 단위 벡터임. 이를 벡터 $\boldsymbol{e}$라고 부르면 $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}}$
    - $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{b}$는 벡터 $\boldsymbol{b}$에 포함된 $\boldsymbol{a}$와 평행한 성분의 크기를 나타냄.
    - 이 크기를 단위 벡터 $\boldsymbol{e}$ 에 곱하면, $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}}\left(\frac{\boldsymbol{a}^T}{\sqrt{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}}\boldsymbol{b}\right)$

4.2 Projections

- 부분 공간에 projection하는 방법
  - 예를 들어 $\mathbf{R}^3$공간에서 벡터 $\boldsymbol{b}$를 어떤 평면에 가장 가까운 점에 projection하는 방법은?
  - 만약 벡터 $\boldsymbol{a}_1$와 $\boldsymbol{a}_2$ 가 평면의 기저이면, 평면은 이 두 벡터를 열로 가지는 행렬 $A = [\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2]$의 열벡터 공간에 해당한다.
  - 이 평면에 projection된 벡터 $\boldsymbol{p}$는 $\boldsymbol{p} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 = A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$의 형태로 나타남.
  - x_1, x_2는 어떻게 구할까?
  - $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}$를 이어주는 선과 평면의 모든 기저 벡터 $\boldsymbol{a}_i$가 직교한다는 조건을 이용. $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p} = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}$
  - $\begin{cases} \boldsymbol{a}_1^T(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) = 0 \\ \boldsymbol{a}_2^T(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) = 0 \end{cases}$ ➔ $A^T(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$

4.2 Projections

- (계속) 부분 공간에 projection하는 방법
  - $A^T(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ ➔ $A^T A\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b}$
  - $\boldsymbol{x}$를 구하는 방법은?
    - (참고) 1개의 벡터였을 때는 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}x = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}$ ➔ $x = \frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}$
  - 행렬의 경우에는 역행렬을 이용 ➔ $\boldsymbol{x} = (A^T A)^{-1}A^T\boldsymbol{b}$
  - 위의 과정은 x_1, x_2을 구하지만, 이 값 자체는 project 된 벡터가 아님.
  - 벡터를 얻기 위해서는 x_1, x_2를 이용하여 벡터 $\boldsymbol{a}_1$와 $\boldsymbol{a}_2$ 의 1차결합을 얻어야 함

$$\boldsymbol{p} = A\boldsymbol{x} = A(A^T A)^{-1}A^T\boldsymbol{b}$$

  - 따라서 부분 공간 projection 행렬은 $P = A(A^T A)^{-1}A^T$
    - (참고) 1개의 벡터였을 때 projection 행렬은 $P = \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}$
  - 부분 공간의 projection 행렬도 $P^T = P$와 $P^2 = P$의 성질을 가질까?

4.2 Projections

- Example: 벡터 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$와 $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$로 이루어진 평면으로 projection 하는 행렬을 구하시오.
  - 어떤 행렬을 얻을까?
  - $A = [\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, P = A(A^T A)^{-1} A^T, A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ➔ 역행렬?
  - $(A^T A)^{-1} A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
  - $P = A(A^T A)^{-1} A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - $P^T = P$와 $P^2 = P$의 성질 확인

4.2 Projections

- Projection 행렬은 $P = A(A^TA)^{-1}A^T$와 같이 A가 정사각행렬이 아니더라도 A^TA의 역행렬을 구해야 함. 역행렬이 항상 존재하는가?
  - A가 정사각행렬이 아니더라도 A^TA는 항상 정사각행렬의 형태를 가짐
  - 하지만 A^TA가 역행렬을 항상 가진다고 항상 기대할 수는 없으며, 대신 A의 모든 열들이 독립인 경우에는 항상 역행렬을 가짐
  - (증명) (A^TA)가 주어졌을 때, 여기에 곱해서 0이 되는 벡터 $\boldsymbol{x}$를 찾았다고 가정. $(A^TA)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
  - 여기에 같은 벡터의 행벡터를 왼쪽에 곱해도 $\boldsymbol{x}^T(A^TA)\boldsymbol{x} = 0$ 성립해야 함.

  ➔ $\boldsymbol{x}^T(A^TA)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^TA^TA\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^TA^T)(A\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x})^T(A\boldsymbol{x}) = 0$
  - 따라서 $A\boldsymbol{x} = 0$는 반드시 성립해야 함
  - A의 모든 열들이 독립이면, $A\boldsymbol{x} = 0$을 만족하는 $\boldsymbol{x}$는?
  - 행렬 (A^TA) 이 주어졌을 때 $(A^TA)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$을 만족하는 $\boldsymbol{x}$는 $\boldsymbol{0}$-벡터 밖에 없음을 보임. ➔ (A^TA)는 가역행렬이어야 함

4.4 Orthogonal Bases and Gram-Schmidt

- Orthonormal vectors (정규 직교 벡터)
  - 벡터 $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n$들이 다음과 같은 조건을 만족하면 정규 직교 벡터라고 부른다.

$$\boldsymbol{q}_i^T \boldsymbol{q}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ (직교 벡터의 성질)} \\ 1, & i = j \text{ (단위 벡터의 성질)} \end{cases}$$

  - 정규 직교 벡터의 가장 대표적인 예?
  - 정규 직교 벡터의 가장 좋은 응용처는?

- 직교하는 벡터들은 항상 독립이다.
  - (증명) $x_1\boldsymbol{q}_1 + x_2\boldsymbol{q}_2 + \cdots x_n\boldsymbol{q}_n = \boldsymbol{0}$ 에 오른쪽에서 $\boldsymbol{q}_i^T$를 내적할 경우, $x_i = 0$을 얻음. 모든 $i = 1 \cdots n$에 반복 적용

4.4 Orthogonal Bases and Gram-Schmidt

- A matrix Q with orthonormal columns
  - 행렬의 모든 열이 정규 직교 벡터들로만 이루어진 행렬
  - $Q = [\boldsymbol{q}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{q}_n]$
  - $Q^T Q = ?$
  - 정사각 행렬일 필요는 없음 ➔ 정사각 행렬일 경우에는 orthogonal matrix (직교 행렬)라고 불림

- 정규 직교 벡터를 열로 가지는 행렬의 예
  - $Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ➔ $Q^T Q = ?$

4.4 Orthogonal Bases and Gram-Schmidt

- (계속) 정규 직교 벡터를 열로 가지는 행렬의 예
  - Q의 열벡터 공간으로 projection하는 행렬
    - $P = Q(Q^TQ)^{-1}Q^T = QQ^T$
    - 임의의 벡터 $\boldsymbol{b}$가 주어지면
    - $P = [\boldsymbol{q}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{q}_n]\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_n^T\end{bmatrix} \rightarrow P\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{q}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{q}_n]\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_n^T\end{bmatrix}\boldsymbol{b} =$

      $[\boldsymbol{q}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{q}_n]\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_n^T\boldsymbol{b}\end{bmatrix} = \boldsymbol{q}_1(\boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{q}_2(\boldsymbol{q}_2^T\boldsymbol{b}) + \cdots + \boldsymbol{q}_n(\boldsymbol{q}_n^T\boldsymbol{b})$
    - $\boldsymbol{q}_i^T\boldsymbol{b}$은 $\boldsymbol{b}$가 가진 $\boldsymbol{q}_n$벡터 방향의 성분의 크기를 나타내고, n 개의 단위벡터 $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \dots, \boldsymbol{q}_n$를 새로운 좌표축으로 할 때 각 좌표값을 나타냄.

4.4 Orthogonal Bases and Gram-Schmidt

- Orthogonal matrix (직교 행렬)
  - 정사각의 정규 직교 벡터를 열로 가지는 행렬
  - $Q^T Q = I$ ➔ $Q^T = Q^{-1}$
    - 예) $Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
  - 행렬의 행의 개수(m)는 열벡터가 포함되는 전체 공간($\mathbf{R}^m$)의 차원임
  - Orthogonal 행렬은 행의 개수와 열의 개수가 같으므로 열벡터들은 전체 공간($\mathbf{R}^m$)의 기저를 이루고, 열벡터 공간은 전체 공간과 같다.
  - 예) Projection 행렬
    - Orthonormal 행렬의 예에서 $P = QQ^T$
    - Q 가 orthogonal 행렬이면, $Q^T = Q^{-1}$ 이므로 $P = I$

    ➔ Orthogonal 행렬의 열벡터 공간은 전체 공간($\mathbf{R}^m$)과 같으므로, 열벡터 공간에 projection하는 것은 벡터를 그대로 유지하는 것과 같다.

4.4 Orthogonal Bases and Gram-Schmidt

- (계속) Orthogonal matrix (직교 행렬)
  - 직교 행렬 Q의 행들도 정규 직교 벡터이다.
    - (증명) $Q^T = Q^{-1}$이므로, $QQ^T = I$. 이것은 Q의 행과 Q^T의 열(Q의 행)을 내적했을 때, 같은 행의 내적만 1이고 다른 행의 내적은 0임을 의미 ➔ 정규 직교 벡터의 정의

- Examples
  - $Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
  - 회전 변환 행렬: $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

4.4 Orthogonal Bases and Gram-Schmidt

- 행렬에 의한 벡터의 변환

  - 행렬에 벡터를 곱하여 새로운 벡터를 얻는 과정을 벡터의 변환이라고도 부른다.

  - 크기가 $n \times n$인 orthogonal 행렬에 $\mathbf{R}^n$공간내 벡터를 곱하면, 변환된 벡터는 여전히 $\mathbf{R}^n$공간의 원소이다.

  - Orthogonal 행렬에 의해 변환은 벡터의 길이를 유지한다.
    - (증명) 변환전의 벡터를 $\boldsymbol{v}$라 하고, 변환된 후의 벡터를 $\boldsymbol{w}$라 하면, $\boldsymbol{w} = Q\boldsymbol{v}$의 관계를 가진다.
    - 벡터 $\boldsymbol{w}$의 길이의 제곱은 $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{w} = (Q\boldsymbol{v})^T(Q\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}^T Q^T(Q\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}^T(Q^T Q)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}$ 로 변환 전 벡터 $\boldsymbol{v}$의 길이의 제곱과 같다.

4.4 Orthogonal Bases and Gram-Schmidt

- (계속) 행렬에 의한 벡터의 변환
  - Orthogonal 행렬에 의해 변환된 2개의 벡터는 변환되기 전 각도를 유지한다.
    - (증명) 단위 길이를 가진 2개 벡터($\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$) 사이의 각도를 θ라 하고 orthogonal 행렬에 의해 변환된 결과 벡터를 $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$라고 하면, 벡터 $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$사이의 각도의 cosine값은 두 벡터의 내적과 같다.
    - $\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{W} = (Q\boldsymbol{v})^T(Q\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}^T Q^T(Q\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}^T(Q^T Q)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{w} = \cos\theta$
  - Orthogonal 행렬에 의한 변환은 일종의 일반화된 회전과 유사함

4.4 Orthogonal Bases and Gram-Schmidt

- The Gram-Schmidt Process
  - 공간내 임의의 벡터 $\boldsymbol{v}$를 기저 벡터$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n)$의 1차결합으로 나타낼 때, 정규 직교하는 기저 벡터를 사용하면 계수의 결정이 간단해짐.

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$$

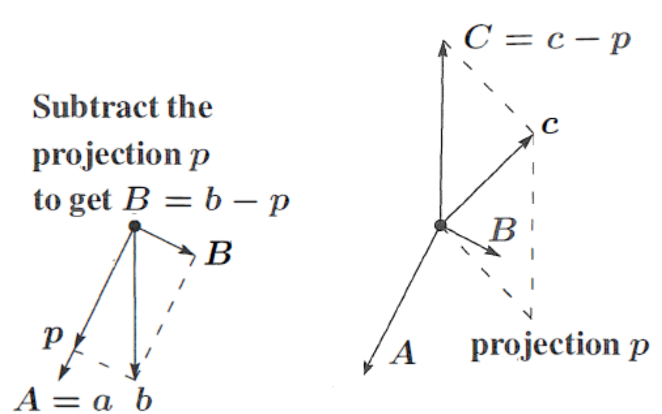
    - x_i를 계산하는 방법은? $x_i = \boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{v}$
  - 만약 기저 벡터가 정규 직교하지 않으면, 연립방정식을 풀어야 함.
    - $\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_i^T(x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n) = x_1(\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{v}_1) + x_2(\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{v}_2) + \cdots + x_n(\boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{v}_n)$

$\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{v}_n^T\boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n^T\boldsymbol{v}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v} \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_n^T\boldsymbol{v} \end{bmatrix}$ 또는 $[\boldsymbol{v}_1 \quad \dots \quad \boldsymbol{v}_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}$ 를 풀어야 함

  - 기저 벡터들은 일반화된 좌표계에서 좌표축의 역할을 하므로, 서로 직교하는 기저 벡터들을 찾는 것이 유리함

4.4 Orthogonal Bases and Gram-Schmidt

- The Gram-Schmidt Process
  - 2개의 독립인 벡터 $\boldsymbol{a}$와 $\boldsymbol{b}$가 주어지면, 같은 공간을 생성할 수 있는 정규 직교하는 벡터 $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$를 찾고자 함.
  - 우선 벡터 $\boldsymbol{a}$와 $\boldsymbol{b}$가 생성한 벡터 공간과 같은 공간을 생성할 수 있는 직교하는 벡터 $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$를 찾음
  - $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}$로 잡고, $\boldsymbol{b}$를 $\boldsymbol{A}$에 projection시켜서 벡터 $\boldsymbol{p}$를 얻음. 벡터 $\boldsymbol{b}$에서 벡터 $\boldsymbol{p}$를 빼면 $\boldsymbol{A}$에 직교하는 벡터 $\boldsymbol{B}$를 얻을 수 있음.
  - $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{p} = \boldsymbol{b} - \frac{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}$ ➔ $\boldsymbol{A}$와 직교확인
  - $\boldsymbol{q}_1 = \frac{\boldsymbol{A}}{\|\boldsymbol{A}\|}, \boldsymbol{q}_2 = \frac{\boldsymbol{B}}{\|\boldsymbol{B}\|}$
  - 세번째 벡터 $\boldsymbol{c}$가 주어지면, 앞에서 찾은 직교하는 두 벡터 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$와 수직인 벡터 $\boldsymbol{C}$를 찾음.
  - $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{c} - \frac{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A} - \frac{\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}}\boldsymbol{B}$ ➔ $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$와 직교확인



4.4 Orthogonal Bases and Gram-Schmidt

- Example: $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ and $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$
  - $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{b} - \frac{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{3}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
  - $Q = [\boldsymbol{q}_1 \quad \boldsymbol{q}_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$
- $A = [\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 행렬과 $Q = [\boldsymbol{q}_1 \quad \boldsymbol{q}_2]$ 행렬간의 관계?

4.4 Orthogonal Bases and Gram-Schmidt

- $A = [\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$와 $Q = [\boldsymbol{q}_1 \quad \boldsymbol{q}_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$간의 관계
  - $\boldsymbol{a}$벡터는 $\boldsymbol{q}_1$만 평행하고 $\boldsymbol{q}_2$ 또는 그 이후의 단위 행렬과는 직교함
  - $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{q}_1 \boldsymbol{q}_1^T)\boldsymbol{a}$
  - $\boldsymbol{b}$벡터는 $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$와는 겹치지만, $\boldsymbol{q}_2$ 이후에 얻게되는 단위 행렬과는 직교함
  - $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{q}_1 \boldsymbol{q}_1^T)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{q}_2 \boldsymbol{q}_2^T)\boldsymbol{b}$
  - 만약 $\boldsymbol{c}$벡터가 있고 $\boldsymbol{q}_3$벡터를 얻었다면 다음의 관계가 성립
  - $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{q}_1 \boldsymbol{q}_1^T)\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{q}_2 \boldsymbol{q}_2^T)\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{q}_3 \boldsymbol{q}_3^T)\boldsymbol{c}$
  - $[\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{q}_1 \quad \boldsymbol{q}_2 \quad \boldsymbol{q}_3] \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1^T \boldsymbol{a} & \boldsymbol{q}_1^T \boldsymbol{b} & \boldsymbol{q}_1^T \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{q}_2^T \boldsymbol{b} & \boldsymbol{q}_2^T \boldsymbol{c} \\ & & \boldsymbol{q}_3^T \boldsymbol{c} \end{bmatrix}$ ➔ **A=QR 분해**

4.4 Orthogonal Bases and Gram-Schmidt

- Example: $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ and $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$
  - $A = [\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $Q = [\boldsymbol{q}_1 \quad \boldsymbol{q}_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$
  - $R = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{a} & \boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{q}_2^T\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ & \sqrt{2} \end{bmatrix}$
  - $QR = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

5.1 The Properties of Determinants

- 행렬식 (determinant)
  - 행렬식 값은 정사각행렬이 주어졌을 때, 행렬을 대표할 수 있는 숫자임. 예를 들면 0이 아니면, 가역행렬임.
  - 행렬식은 $\det A$ 또는 $|A|$로 표기함
  - 가역행렬인 경우, A^{-1}의 행렬식은 $\frac{1}{\det A}$ 임.
- 행렬식의 특성
  - 행렬식은 3가지 중요한 특성을 가지고 있고, 나머지 결과들은 모두 이 성질로부터 유도 가능함
  - 잘 알려진 2x2 행렬 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$의 행렬식 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$으로부터 이러한 성질들이 맞는지 확인 가능

5.1 The Properties of Determinants

- 행렬식의 성질
  1. 단위행렬의 행렬식은 1임. $\det I = 1$
  2. 행렬의 두개의 행을 교환하면 행렬식의 부호가 바뀜
  3. 행렬식은 각각의 행의 1차결합의 형태를 따른다

  (a) 행렬내 한 행에 t값을 곱하면, 행렬식도 t만큼 증가함

$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

  (b) 행렬내 1개의 행을 제외한 다른 행들이 모두 동일한 행렬 A, B 가 주어진 경우, 두 행렬의 합$(A + B)$의 행렬식은 개별 행렬들의 행렬식의 합과 같다.

$$\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

5.1 The Properties of Determinants

- (계속) 행렬식의 성질
  - 다음의 성질들은 이전 3개의 성질들에서 유도됨

4. 행렬의 두개의 행이 같으면, 행렬식은 0이다.
   - 같은 두개의 행을 바꾸면 2번 성질에 의해 부호가 반대가 되어야 함. 예를 들어 2x2의 경우 $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}$ ➔?

5. $i \neq j$인 경우, i행에 t를 곱한 후 j행에서 뺄 경우 행렬식은 변하지 않는다.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c - ta & d - tb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ -ta & -tb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - t\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

6. 모든 값이 0인 행이 있는 행렬의 행렬식은 0이다.
   - 3(a)번 성질에서 $t = 0$으로 잡으면 증명됨

5.1 The Properties of Determinants

- (계속) 행렬식의 성질

  7. 삼각형 형태의 행렬의 행렬식은 대각 원소값들 $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$의 곱이다.

     - 5번 성질을 이용하여 삼각형 형태의 행렬에서 소거법을 이용하여 대각행렬의 형태로 변형해도 행렬식의 값은 불변함. 대각 원소가 1이 아닌 경우 3(a)성질을 이용하여 대각 원소값들을 행렬식 밖의 곱으로 나타내면 남은 대각 행렬은 단위 행렬의 형태가 됨
     - 대각 원소가 0인 경우에는 6번 성질에 의해 0이 되고, 7번 성질은 여전히 성립함
     - $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

5.1 The Properties of Determinants

- (계속) 행렬식의 성질

8. 행렬이 singular인 경우 행렬식의 값은 0이다.
   - Singular라는 것은 가우스 소거법 적용시 대각 원소가 0이 되는 경우로 7번 성질에 의해 0이 됨

9. $\det AB = (\det A)(\det B)$
   - $\left|\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{vmatrix} = (ap+br)(cq+ds) - (aq+bs)(cp+dr)$
   - $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = (ad-bc)(ps-qr)$
   - $\det A^{-1} = ?$

10. $\det A^T = \det A$
   - $|A| = |LU| = |L||U| = |U^T| = |U^T||L^T| = |U^T L^T| = |(LU)^T| = |A^T|$

5.1 The Properties of Determinants

- 행렬식의 계산
  - $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ad - bc$
  - $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
  - $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$는 9개의 성분으로 분해. 이중 0이 아닌 경우는?