3.4 The Complete Solution to $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$

- $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$의 해를 구하기
  - $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & b_2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & b_3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_3 - 3b_1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array}\right]$
  - 해가 존재하기 위해서는 3행의 우변도 0이 되어야 함. ➔ $b_3 - b_2 - b_1 = 0$
  - $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_2 + b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

  ➔ $\boldsymbol{b}$는 (1,0,1), (0,1,1) 2개의 벡터로 생성(span)되는 2차원 공간(평면)에 포함되어야 함
  - (1열): $b_1 = 1, b_2 = 2$, (2열): $b_1 = 2, b_2 = 4$, (3열): $b_1 = 2, b_2 = 6$, (3열): $b_1 = 2, b_2 = 8$
  - $C(A)$ 열벡터 공간의 rank=2 ⇔ $C(A)$ 행벡터 공간의 rank=2

3.4 The Complete Solution to $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

- $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$의 해를 구하기
  - 앞페이지로부터 $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$를 만족해야 함을 이미 알고 있음
  - $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ $(b_1 = 1, b_2 = 5)$이면, 이를 만족하는 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$?
    - 앞페이지 결과로부터 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$얻음
    - Free column들의 계수 $x_2 = x_4 = 0$이면, $x_3 = \frac{3}{2}, x_1 = -2$를 얻음.
    - Particular solution: $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

3.4 The Complete Solution to $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

- (계속) $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$의 해를 구하기
  - (앞장으로부터) Particular solution: $\boldsymbol{x}_p = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$
  - 이것은 유일한 해인가?
    - No. Nullspace의 모든 벡터가 particular solution에 더해져도 방정식을 만족함.
    - Nullspace내 임의의 벡터를 $\boldsymbol{n}$이라고 하고 ($\boldsymbol{n} \in N(A)$), $A\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$와 $A\boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{b}$가 만족되면,

$$A(\boldsymbol{n} + \boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{n} + A\boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$$

  - Nullspace구하기
    - 행간소 사다리꼴(rref)로 변형 후, 이를 만족하는 벡터 $\boldsymbol{n}$을 구함
    - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + 2x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_4 \\ 0 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - Complete solution
    - $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

3.5 Independence, Basis and Dimension

- 1차 독립 (linear independence)
  - 벡터 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$가 주어졌을 때 $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$을 만족하는 해가 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$밖에 없을 경우 주어진 벡터들은 서로 1차 독립이라고 함
  - 행렬 A가 주어졌을 때, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 을 만족하는 해가 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 밖에 없으면 행렬 A의 열벡터들은 서로 1차 독립이라고 한다. ⇔ 행렬의 nullspace가 $\mathbf{0}$-벡터만 포함한다.
- Vectors that span a space
  - 주어진 벡터 공간이 벡터$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$들의 1차결합으로만 채워져 있을 때, 벡터$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$들이 공간을 생성(span)한다고 부른다.
  - 행렬 A가 주어졌을 때 열벡터들은 행렬 A의 열벡터 공간 $C(A)$을 생성한다.

3.5 Independence, Basis and Dimension

- Basis for a vector space
  - 벡터공간의 기저(basis)는 다음의 두가지 성질을 가진 벡터들의 집합이다.
    - 기저 벡터들은 서로 1차 독립이어야 한다.
    - 기저 벡터들만으로 전체 벡터공간을 생성할 수 있어야 한다.
- Examples
  - $\mathbf{R}^3$의 한가지 기저는 $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$임. ➔ 정의 확인
  - $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\3\\8\end{bmatrix}\right\}$은 $\mathbf{R}^3$공간의 기저가 될 수 있는가?
  - 아니오. 3개의 행들이 독립이 아니므로, rank=2. 따라서 열들은 독립이 아님
  - 행렬의 pivot column 들은 주어진 행렬의 열벡터 공간 $C(A)$의 기저가 됨.

3.5 Independence, Basis and Dimension

- 임의의 벡터공간에 대해 기저의 선택은 유일한가?

- 임의의 벡터공간에 포함된 벡터 $\boldsymbol{v}$와 이 공간의 기저$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n)$가 주어졌을 때, $\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$와 같이 벡터 $\boldsymbol{v}$를 기저의 1차결합으로 나타낼 수 있는 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$의 조합은 유일한가?
  - (증명) 만약 유일하지 않다고 가정하면, 아래의 두가지 경우가 존재한다.

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$$
$$\boldsymbol{v} = y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{v}_n$$

  - 위의 첫번째 식에서 두번째 식을 빼면,

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= (x_1 - y_1)\boldsymbol{v}_1 + (x_2 - y_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (x_n - y_n)\boldsymbol{v}_n \\ &\equiv z_1\boldsymbol{v}_1 + z_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + z_n\boldsymbol{v}_n\end{aligned}$$

  - 만약 $z_i = (x_i - y_i)$로 정의된 값이 하나라도 0이 아니면, 기저벡터는 서로 독립이라는 조건을 위배한다. 따라서 모든 $z_i = (x_i - y_i)$은 0이어야 함.
  - ➔ 모든 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$들은 $(y_1, y_2, \dots, y_n)$와 같아야 함. ➔ 유일함

3.5 Independence, Basis and Dimension

- Dimension of a vector space
  - 벡터 공간의 차원은 그 공간의 기저에 포함된 벡터의 개수임

- 임의의 벡터공간에 대해 서로 다른 두가지의 기저를 선택을 했을 때, 다른 두 기저내에 속하는 벡터의 개수는 항상 같은가?
  - (증명) 만약 두 기저에 속하는 벡터의 개수가 다르다고 가정하면, 아래와 같은 두가지 기저가 존재함. $(m \neq n)$

$$(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_m) \text{ 와 } (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n)$$

  - 좀 더 구체적인 예를 위해, $m = 3 > n = 2$로 가정하면, $\boldsymbol{w}_i$ 와 $\boldsymbol{v}_i$ 모두 같은 공간에 있으므로 다음과 같이 $\boldsymbol{w}_i$ 들을 $\boldsymbol{v}_i$ 들의 1차결합으로 표현 가능해야 함.
  - $\begin{cases} \boldsymbol{w}_1 = c_{11}\boldsymbol{v}_1 + c_{21}\boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{w}_2 = c_{12}\boldsymbol{v}_1 + c_{22}\boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{w}_3 = c_{13}\boldsymbol{v}_1 + c_{23}\boldsymbol{v}_2 \end{cases}$ ➔ $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3)$는 서로 독립이므로 $a_1\boldsymbol{w}_1 + a_2\boldsymbol{w}_2 + a_3\boldsymbol{w}_3 = 0$을 만족하는 a_i들은 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$밖에 없어야 함.

3.5 Independence, Basis and Dimension

- (증명 계속) 임의의 벡터공간에 대해 기저에 대한 다른 선택을 했을 때, 다른 두 기저내에 속하는 벡터의 개수는 항상 같은가?
  - $\begin{cases} \boldsymbol{w}_1 = c_{11}\boldsymbol{v}_1 + c_{21}\boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{w}_2 = c_{12}\boldsymbol{v}_1 + c_{22}\boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{w}_3 = c_{13}\boldsymbol{v}_1 + c_{23}\boldsymbol{v}_2 \end{cases}$ ➔ $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3)$는 서로 독립이므로 $a_1\boldsymbol{w}_1 + a_2\boldsymbol{w}_2 + a_3\boldsymbol{w}_3 = 0$을 만족하는 a_i들은 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$밖에 없어야 함.

$$\begin{aligned} & a_1\boldsymbol{w}_1 + a_2\boldsymbol{w}_2 + a_3\boldsymbol{w}_3 \\ & = a_1(c_{11}\boldsymbol{v}_1 + c_{21}\boldsymbol{v}_2) + a_2(c_{12}\boldsymbol{v}_1 + c_{22}\boldsymbol{v}_2) + a_3(c_{13}\boldsymbol{v}_1 + c_{23}\boldsymbol{v}_2) \\ & = (c_{11}a_1 + c_{12}a_2 + c_{13}a_3)\boldsymbol{v}_1 + (c_{21}a_1 + c_{22}a_2 + c_{23}a_3)\boldsymbol{v}_2 \\ & = \mathbf{0} \end{aligned}$$

  - $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ➔ nullspace는 차원은?

➔ 열의 개수는 3, rank는 최대 [ ] 이므로, nullspace는 적어도 [ ] 차원임.

➔ $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ 이외의 해가 존재함.

  - 따라서 가정이 잘못되었음을 알 수 있음

3.5 Independence, Basis and Dimension

- 지난 시간 (O, X) 문제
  - 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$가 주어진 경우, 3개의 열벡터들은 $\mathbf{R}^4$공간내의 벡터들이다. $C(A)$ 는 열벡터들의 1차결합으로 생성(span)된 열벡터 공간 (column space)라고 할 때, 아래에서 맞는 설명들을 고르시오 (중복가능).

    1. 위에 주어진 3개의 열벡터는 독립이다. (　　)
    2. 위에 주어진 3개의 열벡터 대신 특성을 고려한 3개의 열벡터를 잘 선택할 경우, 열벡터 3개의 1차결합만으로 $\mathbf{R}^4$공간을 생성할 수 있다. (　　)
    3. 위의 주어진 3개의 열벡터들의 1차결합만으로는 $\mathbf{R}^4$공간을 생성할 수 없다. (　　)
    4. $\mathbf{R}^4$공간을 생성하기 위해서는 반드시 4개 이상의 열벡터가 필요하다. (　　)

- $\mathbf{R}^n$공간의 기저는 반드시 n개의 벡터로만 이루어져 있다.

3.5 Independence, Basis and Dimension

- 임의의 벡터공간 $\mathbb{V}$의 (직교하지 않는) 기저$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n)$와 그 공간내 하나의 벡터 $\boldsymbol{w}$가 주어졌다고 가정
  - 기저의 정의로부터 $\boldsymbol{w}$는 기저 벡터들의 1차 결합 $\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ 의 형태로 나타낼 수 있음.
  - $(x_1, x_2, \dots, x_n)$의 값을 어떻게 결정할까?
    - $[\boldsymbol{v}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{w}$와 같이 기저들을 열로 가지는 행렬의 방정식을 세우고, 해를 구함.
    - 기저들은 모두 독립이므로 행렬의 rank r은 $r = n$이고, $\dim\big(N(A)\big) = n - r = 0$ 이므로 nullspace에는 0벡터밖에 없으므로 유일한 해를 가짐.

3.6 Dimensions of the Four Subspaces

- 4가지 근본적인 부분공간 (Four fundamental subspaces)
  - 크기가 $m \times n$인 임의의 행렬 A가 주어지면 이와 관련된 4가지 부분 공간들이 결정된다.
- 열벡터 공간 $C(A)$ (Column space)
  - 주어진 행렬 A의 열벡터들로 생성한 벡터 공간. $\mathbf{R}^m$의 부분 공간임
- Null벡터 공간 $N(A)$ (Nullspace)
  - 주어진 행렬 A에 대해 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$을 만족하는 모든 해 $\boldsymbol{x}$로 이루어진 공간. $\mathbf{R}^n$의 부분 공간임
- 행벡터 공간 $C(A^T)$ (Row space)
  - 주어진 행렬 A의 행벡터들로 생성한 벡터 공간. $\mathbf{R}^n$의 부분 공간임
- 왼쪽 null벡터 공간 $N(A^T)$ (Left nullspace)
  - 주어진 행렬 A에 대해 $A^T\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 또는 $(A^T\boldsymbol{x})^T = \boldsymbol{x}^T A = \mathbf{0}$ 을 만족하는 모든 해 $\boldsymbol{x}$로 이루어진 공간. $\mathbf{R}^m$의 부분 공간임

3.6 Dimensions of the Four Subspaces

- 기저(basis)와 차원(dimension)
  - 크기가 $m \times n$인 임의의 행렬 A의 행간소 사다리꼴 행렬을 $R = \mathrm{rref}(A)$라고 하고 이 때 pivot column의 개수(rank)를 r이라 하면…

  - 열벡터 공간 $C(A)$ (Column space)
    - r개의 행렬 A의 pivot column들이 $C(A)$의 기저가 됨. 따라서
      $$\dim\big(C(A)\big) = r$$
    - Note that $C(A) \neq C(R)$.

  - Null 공간 $N(A)$ (Nullspace)
    - $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 또는 $U\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 를 만족하는 자유변수들에 해당하는 special solution 이 null공간 $N(A)$ 의 기저를 이룸.
    - 행렬 A는 $(n-r)$개의 자유변수를 가지므로
      $$\dim\big(N(A)\big) = n - r$$

3.6 Dimensions of the Four Subspaces

- (계속) 기저(basis)와 차원(dimension)
  - 크기가 $m \times n$인 임의의 행렬 A의 행간소 사다리꼴 행렬을 $R =$ rref(A)라고 하고 이 때 pivot colum의 개수(rank)를 r이라 하면…

  - 행벡터 공간 $C(A^T)$ (Row space)
    - 행간소 사다리꼴 행렬 R 의 각 행이 행벡터 공간의 기저가 됨.

$$\dim\big(C(A^T)\big) = r$$

  - 왼쪽 null 공간 $N(A^T)$ (Left nullspace)
    - 행렬 A^T는 m개의 열을 가짐. 또한 A^T의 rank가 r 이므로 A^T의 free column은 $m-r$이므로

$$\dim\big(C(A^T)\big) = m - r$$

    - 왼쪽 null 공간의 기저를 구하는 방법

1. 행렬 A^T를 구하고, rref형태로 바꿔서 nullspace 계산하기
2. $[A_{m\times n}|I_{m\times m}] \xrightarrow{\text{RREF}} [R_{m\times n}|E_{m\times m}]$를 계산 (다음 페이지 설명)

3.6 Dimensions of the Four Subspaces

- 왼쪽 null 공간 $N(A^T)$의 기저
  - $N(A^T)$는 $A^T\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 또는 $\boldsymbol{x}^T A = \mathbf{0}$ 를 만족하는 모든 해 $\boldsymbol{x}$로 이루어 공간임.
  - 임의의 행렬 A 가 주어졌을 때, $\boldsymbol{x}^T A = \mathbf{0}$ 만족하는 $\boldsymbol{x}$를 찾는 방법
    - A 의 역행렬을 구하듯이 행간소 사다리꼴 형태로 변형

$$[A_{m\times n}|I_{m\times m}] \xrightarrow{\text{RREF}} [R_{m\times n}|E_{m\times m}]$$

    - 이 과정에서 얻는 $E_{m\times m}$는 $E_{m\times m}A_{m\times n} = R_{m\times n}$의 관계를 만족함.
    - $EA = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$
    - E의 밑으로부터 $m - r$ 개의 행들은 행렬 A 와 곱했을 때, 모두 0-행벡터가 됨. ➔ 왼쪽 null공간의 기저임

3.6 Dimensions of the Four Subspaces

- Example
  - 임의의 행렬 A의 크기가 3×6이고 rank가 2이라고 가정
  - $\begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}$
  - Nullspace
    - Nullspace내의 모든 벡터들은 $\mathbf{R}^6$공간에 포함되고, 따라서 부분 공간임.
    - Nullspace의 기저내 벡터의 개수는? 4
  - 행벡터
    - 모든 행벡터는 $\mathbf{R}^6$내의 벡터임. 행벡터 공간 $C(A^T)$은 차원이 2이므로 $\mathbf{R}^6$의 부분 공간임.
    - $C(A^T)$의 기저는 2개의 벡터를 가지고 이는 $\mathbf{R}^6$의 기저의 일부로 사용 가능함.
  - Nullspace의 기저의 개수 + 행벡터 공간의 기저의 개수 =? 6
  - 이들을 합쳐서 $\mathbf{R}^6$의 기저로 사용할 수 있을까?

3.6 Dimensions of the Four Subspaces

- Example: 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$의 행벡터 공간과 Nullspace를 찾으시오.
  - 행간소 사다리꼴로 변형
    - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
  - 행벡터 공간
    - 2차원이고 $[1 \quad 0 \quad -1]$과 $[0 \quad 1 \quad 1]$을 기저로 가짐
  - Nullspace
    - $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
  - 행벡터 공간의 기저와 nullspace의 기저 모두 $\mathbf{R}^3$공간에 포함됨.
  - 3개를 합쳐서 기저로 사용가능한가? ➔ 1차독립인지 확인 필요
  - 행벡터 공간의 기저와 nullspace의 기저 사이의 내적은?
  - 독립성과 직교성은 우연?

4.1 Orthogonality of the Four Subspaces

- 직교하는 벡터 (Orthogonal vectors)
  - 두 벡터의 내적이 0이 될 때, 두 벡터는 직교한다고 정의함

- 직교하는 부분 공간 (Orthogonal subspaces)
  - 부분 공간 $\mathbb{V}$에 속하는 모든 벡터 $\boldsymbol{v}$와 부분 공간 $\mathbb{W}$에 속하는 모든 벡터 $\boldsymbol{w}$가 서로 직교할 때, 두 부분 공간이 직교한다고 부름
  - 예) 3차원 공간내 xy평면과 z축?
  - 예) 칠판과 바닥은? 서로 직교하는 부분 공간이 아님

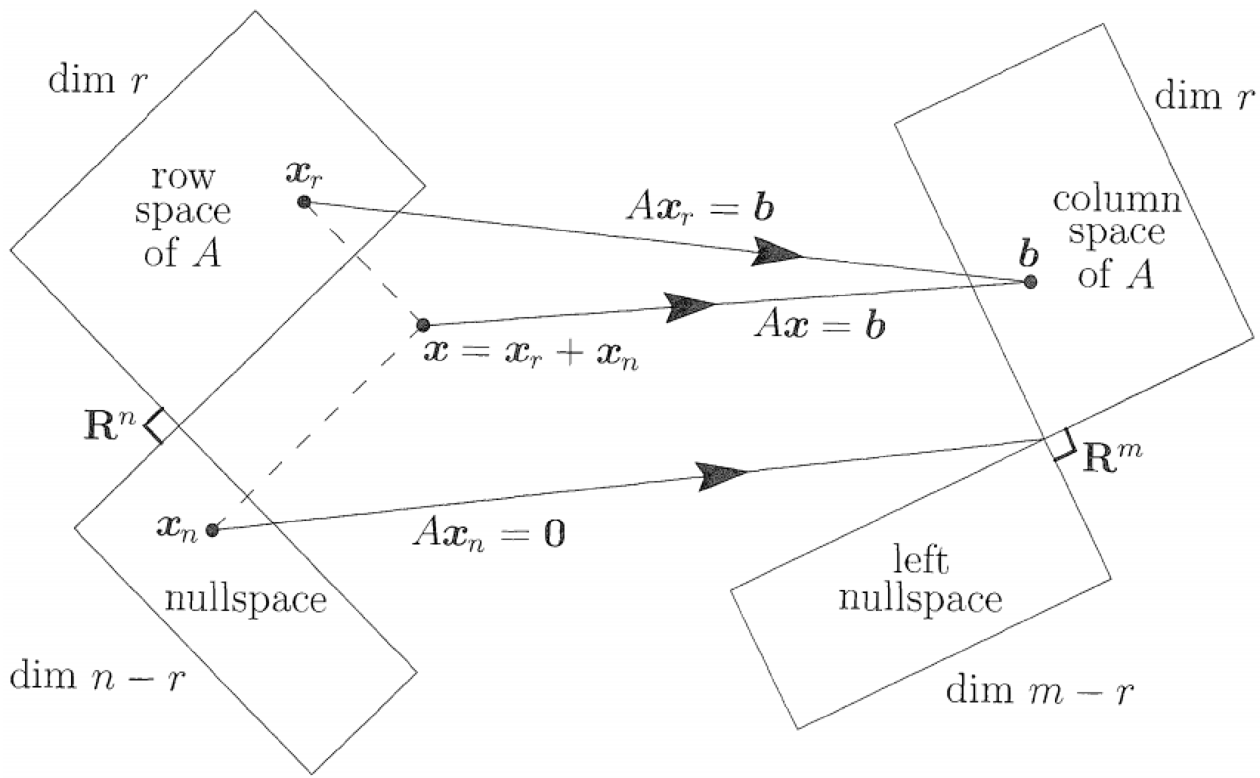
- Orthogonal complements (직교 여집합?)
  - 임의의 부분 공간 $\mathbb{V}$에 직교하는 모든 벡터를 가진 부분 공간을 $\mathbb{V}$의 orthogonal complement라고 부르고 $\mathbb{V}^{\perp}$로 표기함

4.1 Orthogonality of the Four Subspaces

- 크기가 $m \times n$인 임의의 행렬 A의 행벡터 공간과 nullspace는 서로 직교하고 orthogonal complement관계임
  - (증명) $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ ➔ A의 모든 행과 $\boldsymbol{x}$벡터와의 내적은 0임을 의미
  - 예를 들어 $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
  - 행벡터들과 nullspace내의 null벡터들은 모두 $\mathbf{R}^n$공간에 포함됨
  - 두공간의 차원의 합은 n임
- 마찬가지로 열벡터 공간과 왼쪽 nullspace는 서로 직교함

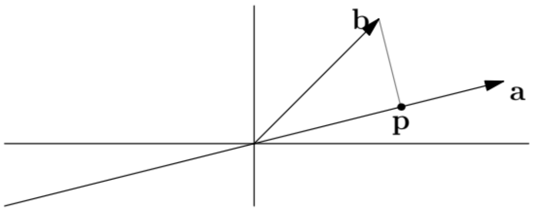
4.1 Orthogonality of the Four Subspaces

- 4가지 부분 공간들 간의 관계



4.2 Projections

- Projection
  - 아래 그림과 같이 벡터 $\boldsymbol{a}$와 평행하고 원점을 지나는 직선상의 점 중 벡터 $\boldsymbol{b}$와 가까운 점을 찾는 방법은?



    - 직선상의 점 $\boldsymbol{p}$와 벡터 $\boldsymbol{b}$ 를 이어주는 선은 벡터 $\boldsymbol{a}$에 직교해야 함
    - 점 $\boldsymbol{p}$는 직선상의 점이므로 $\boldsymbol{p} = x\boldsymbol{a}$와 같이 표현 가능
    - x는 어떻게 찾을 수 있을까?
    - $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}$를 이어주는 선과 벡터 $\boldsymbol{a}$가 직교한다는 조건을 이용

    ➔ $\boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{b} - x\boldsymbol{a}) = 0$ ➔ $x\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}$ ➔ $x = \dfrac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}$

  - x를 구한 후 $\boldsymbol{p}$ 를 구하기 위해서는 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a}x = \boldsymbol{a}\dfrac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}$

4.2 Projections

- Projection 행렬
  - 행렬의 곱을 바라보는 다른 관점
    - 입력으로 벡터를 받아서 새로운 벡터를 출력으로 만들어내는 연산
    - 입력으로 행렬을 받아서 새로운 행렬을 출력으로 만들어내는 연산
  - $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a}x = \boldsymbol{a}\frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}$관계를 임의의 벡터 $\boldsymbol{b}$ 가 주어졌을 때, 벡터 $\boldsymbol{a}$ 와 평행한 벡터 성분만 뽑아내는 행렬로 표현가능
  - $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a}\frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}} = \frac{(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T)\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = P\boldsymbol{b}$

    ➔ 벡터도 $n \times 1$ 크기의 행렬로 생각하면 행렬의 결합법칙 성립
  - Projection 행렬은 $P = \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}$와 같이 정의 가능.
  - $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T$은 (열)x(행)이므로 행렬, $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}$은 (행)x(열)이므로 스칼라

4.2 Projections

- Projection 행렬
  - $P = \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}$
  - P 는 $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T$에 비례하고, $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T$ 의 모든 column은 벡터 $\boldsymbol{a}$ 에 비례함.
  - $(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T)\boldsymbol{b}$ 는 $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T$ 의 모든 column의 1차 결합 형태로 나타나므로 벡터 $\boldsymbol{a}$ 에 평행해야 함.
  - P 의 rank는? 1
  - P 는 대칭 (symmetric) 행렬임
  - $P^2\boldsymbol{b} = P\boldsymbol{b}$?
  - 일반적으로 projection 행렬은 $P^T = P$와 $P^2 = P$의 성질을 가짐
  - 또 다른 관점
    - $\frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}}$은 $\boldsymbol{a}$방향의 단위 벡터임. 이를 벡터 $\boldsymbol{e}$라고 부르면 $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}}$
    - $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{b}$는 벡터 $\boldsymbol{b}$에 포함된 $\boldsymbol{a}$와 평행한 성분의 크기를 나타냄.
    - 이 크기를 단위 벡터 $\boldsymbol{e}$ 에 곱하면, $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}}\left(\frac{\boldsymbol{a}^T}{\sqrt{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}}\boldsymbol{b}\right)$