7.1 Linear Transformation

- 선형변환 (Linear Transformation)
  - 행렬 A가 벡터 $\boldsymbol{v}$에 곱해지면, 입력벡터 $\boldsymbol{v}$는 다른 출력벡터 $A\boldsymbol{v}$로 변환됨.
  - 이것은 일반적인 함수의 형태, 즉 입력값 x가 들어오면 출력값 벡터 $f(x)$를 얻는 것과 유사하므로, $T(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$의 형태로도 표현함
  - 일반적인 변환(Transformation) T는 입력벡터 공간 V에 속한 벡터 $\boldsymbol{v}$에 다른 출력벡터 $T(\boldsymbol{v})$를 연결하는 것을 말한다.
  - 벡터에 행렬이 곱해지는 변환의 경우 모든 입력에 대한 출력을 미리 알지 않아도, 예를 들어 입력벡터 $\boldsymbol{v}$는 $A\boldsymbol{v}$로 변환되는 것을 알고 $\boldsymbol{w}$는 $A\boldsymbol{w}$로 변환되는 것을 안다면 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$의 관계인 $\boldsymbol{u}$는 $A\boldsymbol{v} + A\boldsymbol{w}$로 변환될 것을 안다. 이런 변환을 선형변형(linear transformation 또는 linear mapping 선형사상)이라 부른다.

7.1 Linear Transformation

- 선형변환 (linear transformation)의 정의
  - 모든 입력 $\boldsymbol{v}$와 $\boldsymbol{w}$에 대해 다음의 관계가 성립하면 그 변환은 선형이라고 부름

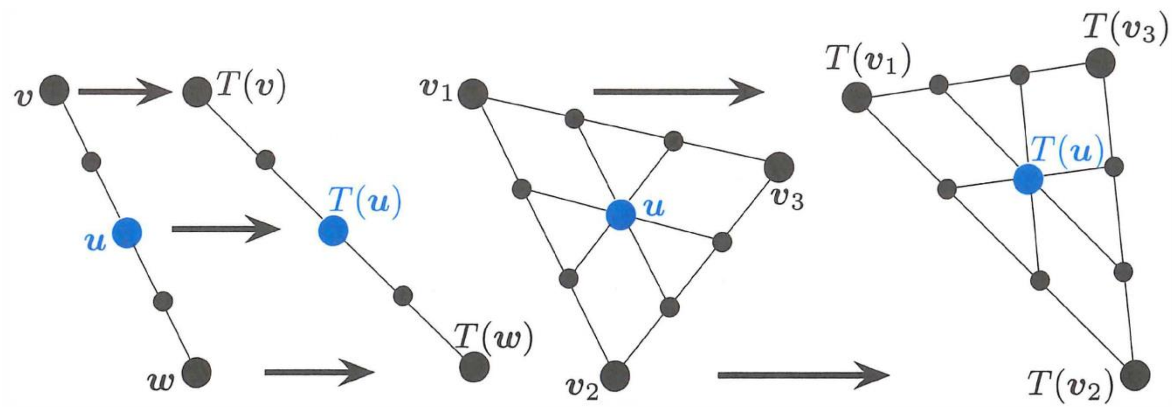
  (a) $T(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = T(\boldsymbol{v}) + T(\boldsymbol{w})$

  (b)임의의 c에 대해 $T(c\boldsymbol{v}) = cT(\boldsymbol{v})$

- Example
  - 입력 벡터 $\boldsymbol{v}$에 0이 아닌 벡터 $\boldsymbol{u}_0$를 더하는 변환 $T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}_0$은 선형인가?
  - 입력 벡터 $\boldsymbol{v}$를 30도씩 회전시키는 변환은 선형인가?
  - 변환 T 가 선형이면 $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$이 무조건 성립하는가?
  - 입력 벡터 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$가 들어왔을 때, $\boldsymbol{u}_0 = (1,2,3)$을 내적하는 변환 $T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u}_0$은 선형인가?
    - 입력은 벡터, 출력은 스칼라임
  - 입력 벡터 $\boldsymbol{v}$의 길이를 구하는 변환 $T(\boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{v}\| = \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}$은 선형인가?

7.1 Linear Transformation

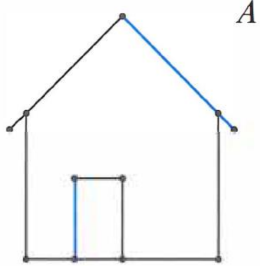
- 선형변환의 특징
  - 두 점을 잇는 선 위에 있는 점은 변환 후에도 두 점을 잇는 선 위로 변환된다.
  - 입력 공간에서 등간격인 점들은 변환후에도 등간격을 유지한다.
  - 입력 공간의 삼각형은 출력 공간의 삼각형으로 변환되고, 등간격 역시 유지된다.



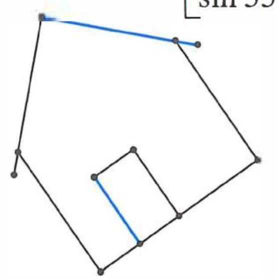
7.1 Linear Transformation

- 아래 그림의 11개의 좌표에 2x2 행렬을 곱할 경우 새로운 11개의 좌표로 변환됨

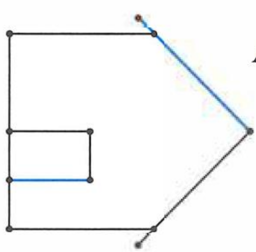
House matrix $$H = \begin{bmatrix} -6 & -6 & -7 & 0 & 7 & 6 & 6 & -3 & -3 & 0 & 0 & -6 \\ -7 & 2 & 1 & 8 & 1 & 2 & -7 & -7 & -2 & -2 & -7 & -7 \end{bmatrix}$$



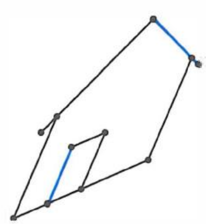
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$A = \begin{bmatrix} \cos 35° & -\sin 35° \\ \sin 35° & \cos 35° \end{bmatrix}$$



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

7.1 Linear Transformation

- 선형변환시 차원간의 관계
  - 2차원의 입력 공간($\mathbf{R}^2$)에 있는 벡터를 3차원의 출력 공간 ($\mathbf{R}^3$)에 있는 벡터에 mapping 시키는 선형변환 행렬을 잘 선택하면, 선형변환만으로 3차원 전체 공간을 생성(span)할 수 있을까?
  - 예를 들어 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$가 주어진 경우,

  2차원 공간($\mathbf{R}^2$)에 속하는 2개의 입력 벡터 $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$에

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  행렬을 곱하면 얻게 되는 3차원 공간($\mathbf{R}^3$)에 속하는 출력벡터는 아래와 같음

$$\boldsymbol{u}_1 = A\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_1 = A\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$는 직교하는가?
  - 선형 변환 행렬 A와 2차원 공간의 입력 벡터 $\boldsymbol{v}$의 선택을 잘하면 $A\boldsymbol{v}$을 통해 3차원 공간($\mathbf{R}^3$)내 임의의 벡터를 얻을 수 있지 않을까?

7.1 Linear Transformation

- (계속) 선형변환시 차원간의 관계
  - 2차원의 입력 공간($\mathbf{R}^2$)에 있는 벡터를 3차원의 출력 공간 ($\mathbf{R}^3$)에 있는 벡터에 mapping 시키는 선형변환만으로 3차원 전체 공간을 생성(span)할 수 없다.
  - (증명) 만약 가능하다고 가정하면, 3차원 공간 전체를 생성해야 하므로 선형변환의 출력 중 3개의 독립인 벡터를 얻을 수 있어야 한다.
  - 3차원 공간내에 있는 이들 3개의 독립인 벡터를 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3$라 하고, 이들에 해당하는 2차원 입력 공간의 벡터를 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$라 하면, $T(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{w}_1, T(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{w}_2, T(\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{w}_3$의 관계가 성립.
  - 입력 공간은 2차원이므로 최대 2개까지의 벡터만 독립임. 따라서 $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3$의 선형결합을 $\mathbf{0}$으로 만드는 0이 아닌 c_1, c_2, c_3가 존재함.
  - 변환 T는 선형이므로 다음의 관계가 존재함

    $$T(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3) = \mathbf{0}$$

    $$= c_1T(\boldsymbol{v}_1) + c_2T(\boldsymbol{v}_2) + c_3T(\boldsymbol{v}_3) = c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2 + c_3\boldsymbol{w}_3$$
  - 따라서 3개의 독립인 벡터의 선형결합을 0으로 만들 수 있는 0이 아닌 c_1, c_2, c_3가 존재한다는 결론을 얻으므로 가정이 모순임.

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- **(Reminder)** 선형변환 (linear transformation)의 정의
  - 모든 입력 $\boldsymbol{v}$와 $\boldsymbol{w}$에 대해 다음의 관계가 성립하면 그 변환은 선형이라고 부름

  (a) $T(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = T(\boldsymbol{v}) + T(\boldsymbol{w})$

  (b)임의의 c에 대해 $T(c\boldsymbol{v}) = cT(\boldsymbol{v})$

- 위의 정의는 행렬의 곱과 무관
  - 입력 벡터를 일정한 각도로 회전시키거나 고정된 벡터와 내적을 통해 스칼라값을 얻는 변환도 선형변환임. ➔ 행렬의 곱과 무관함
  - 임의의 선형변환은 항상 그에 대응하는 행렬을 찾을 수 있을까?

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- 선형변환 $T(\boldsymbol{v})$에 대해 완벽하게 알기 위해 필요한 최소한의 정보는?
  - 만약 1개의 입력 벡터 $\boldsymbol{v}_1$이 선형변환에 의해 $T(\boldsymbol{v}_1)$로 변환된다는 것을 알고 있다면, 모든 입력 벡터 $c\boldsymbol{v}_1$에 대한 결과를 알 수 있음
  - 만약 2개의 입력 벡터 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$이 선형변환에 의해 $\boldsymbol{w}_1 = T(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{w}_2 = T(\boldsymbol{v}_2)$로 변환된다는 것을 알고 있다면, 벡터 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$의 1차결합으로 생성되는 부분공간에 포함된 모든 입력 벡터 $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2$에 대해서도 결과를 알 수 있음
  - 전체 입력 공간에 포함된 입력 벡터가 어떻게 변환될지 알고 싶으면, 입력 공간의 모든 기저 벡터 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$가 어떻게 변환될지 알면 됨. 그러면 변환 T의 선형성에 의해 모든 결과를 예측할 수 있음. Why?
    - 입력 공간의 임의의 벡터 $\boldsymbol{v}$는 기저 벡터들의 선형결합으로 나타낼 수 있음 ➔ $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$

$$T(\boldsymbol{v}) = c_1T(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + c_nT(\boldsymbol{v}_n)$$

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- (계속) 선형변환 $T(\boldsymbol{v})$에 대해 완벽하게 알기 위해 필요한 최소한의 정보는?
  - 입력 공간의 임의의 벡터 $\boldsymbol{v}$는 기저 벡터들의 선형결합으로 나타낼 수 있음 ➔ $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$

$$T(\boldsymbol{v}) = c_1T(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + c_nT(\boldsymbol{v}_n)$$

  - $c_1, \ldots, c_n$은 벡터 $\boldsymbol{v}$의 기저 벡터 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$에 대한 좌표값에 해당
  - 만약 기저가 다른 기저 벡터의 집합($\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$)으로 바뀌면 같은 벡터 $\boldsymbol{v}$의 좌표값도 바뀜

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- 선형변환 T를 행렬 A를 이용해 나타내는 방법
  - 입력 공간과 출력 공간의 기저 벡터를 결정해야 함
  - 입력 공간 $\mathbf{R}^n$의 기저: $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$
  - 출력 공간 $\mathbf{R}^m$의 기저: $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$
  - 입력 공간의 기저 $\boldsymbol{v}_1$이 선형변환 T를 통해 벡터 $\boldsymbol{u}_1 = T(\boldsymbol{v}_1)$로 변환되었다면 벡터 $\boldsymbol{u}_1$은 출력 공간 $\mathbf{R}^m$에 포함되므로, $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$의 1차결합으로 표현 가능함
  - $\boldsymbol{u}_1 = a_{11}\boldsymbol{w}_1 + a_{21}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{w}_m$
  - 마찬가지로 기저 $\boldsymbol{v}_j$가 벡터 $\boldsymbol{u}_j = T(\boldsymbol{v}_j)$로 변환되면, $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$의 1차결합으로 표현 가능함
  - $\boldsymbol{u}_j = a_{1j}\boldsymbol{w}_1 + a_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{w}_m$
  - 이 경우 임의의 입력 벡터 $\boldsymbol{v}$가 주어지면, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$의 1차결합으로 표현 가능: $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$
  - 이 벡터의 선형변환 결과는

$$T(\boldsymbol{v}) = c_1T(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + c_nT(\boldsymbol{v}_n) = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n$$

$$= c_1(a_{11}\boldsymbol{w}_1 + a_{21}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{w}_m) + \cdots + c_n(a_{1n}\boldsymbol{w}_1 + a_{2n}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{w}_m)$$

$$= (a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n)\boldsymbol{w}_1 + \cdots + (a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n)\boldsymbol{w}_m$$

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- (계속) 선형변환 T를 행렬 A를 이용해 나타내는 방법
  - 입력 공간과 출력 공간의 기저 벡터를 결정해야 함
  - 입력 공간 $\mathbf{R}^n$의 기저: $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$
  - 출력 공간 $\mathbf{R}^m$의 기저: $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m$
  - 임의의 입력 벡터 $\boldsymbol{v}$는 $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$
  - 이 벡터의 선형변환 결과는

$$T(\boldsymbol{v}) = c_1T(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + c_nT(\boldsymbol{v}_n) = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n$$

$$= (a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n)\boldsymbol{w}_1 + \cdots + (a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n)\boldsymbol{w}_m$$

  - 선형변환 결과로 얻은 벡터 $T(\boldsymbol{v})$ 를 기저 $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m$의 1차결합으로 나타낼 때 좌표값을 $d_1, \dots, d_n$라고 하면, 입력 좌표값 $c_1, \dots, c_n$와 출력 좌표값 $d_1, \dots, d_n$ 사이에는 다음의 관계가 성립
  - $$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{d} = A\boldsymbol{c}$$
  - 행렬 A의 i행 j열의 값은 입력 공간의 j번째 기저 $\boldsymbol{v}_j$가 $\boldsymbol{u}_j = T(\boldsymbol{v}_j)$ 로 변환되었을 때, 출력 공간의 기저 $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m$에 대한 i번째 좌표값이다.

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- Example: 선형변환 T를 행렬 A를 이용해 나타내는 방법
  - 입력 공간이 $\mathbf{R}^3$, 출력 공간은 $\mathbf{R}^2$라고 가정하고, 기존 좌표축을 기저로 사용한다고 가정
  - (1,0,0)➔(1,1), (01,0)➔(-1,0), (0,0,1)➔(3,0)으로 변환된다고 가정
  - $(c_1, c_2, c_3) \Rightarrow (d_1, d_2)$
  - 행렬 A의 i행 j열의 값은 입력 공간의 j번째 기저 $\boldsymbol{v}_j$가 $\boldsymbol{u}_j = T(\boldsymbol{v}_j)$로 변환되었을 때, 출력 공간의 기저에 대한 i번째 좌표값이다.
  - $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$
  - 변환에 대한 visualization
  - Null벡터?
  - 3차원 공간 중 실제 mapping이 일어나는 공간은?

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- Summary
  - 임의의 선형변환 T가 주어지면 이를 나타내는 행렬 A를 항상 찾을 수 있다.

$$T(\boldsymbol{v}_j) = a_{1j}\boldsymbol{w}_1 + a_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{w}_m$$

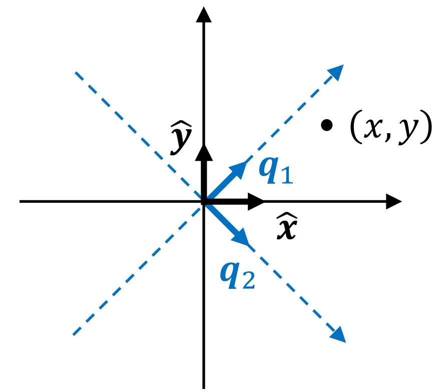
    - 행렬 A는 위의 계수를 이용하여 만들 수 있고, 이때 입력 벡터는 입력 공간의 좌표값이고 출력 벡터는 출력 공간의 좌표값이다.

  - 연속된 2개의 선형변환의 합성
    - 벡터 공간 V에 포함되는 벡터 $\boldsymbol{v}$를 선형변환 $T_1: V \rightarrow W$을 통해 벡터 공간 W에 포함되는 벡터 $\boldsymbol{w}$로 변환시킨 후, 다시 벡터 $\boldsymbol{w}$를 선형변환 $T_2: W \rightarrow X$을 통해 벡터 공간 X에 포함되는 벡터 $\boldsymbol{x}$로 변환시킬 경우를 가정
    - 이에 해당하는 행렬은 각각의 변환 T_1, T_2에 해당하는 행렬이 A_1, A_2일 경우 이다.

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- 항등변환과 기저변환 행렬
  - 항등변환 (identity transformation)
    - $M(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$은 아무것도 변화시키지 않는 변환임
    - 해당하는 행렬은?
    - 만약 변환 후 출력 공간의 기저가 입력 공간의 기저와 다르다면?
  - 기저변환 행렬 (change of basis matrix)
    - 입력 공간 $\mathbf{R}^n$의 기저: $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$
    - 출력 공간 $\mathbf{R}$ 의 기저: $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}$
    - 입력 공간의 기저 $\boldsymbol{v}_j$은 항등변환 T를 통해 아무 변화가 없지만, 변환 결과인 벡터 $\boldsymbol{v}_j$은 새로운 기저 벡터 $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$의 1차결합으로 표현해야 함
    - $M(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{v}_j = m_{1j}\boldsymbol{w}_1 + m_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + m_{nj}\boldsymbol{w}_n$

7.2 The Matrix of a Linear Transformation



- Example: 기저변환 행렬
  - 입력 공간 $\mathbf{R}^2$의 기저: $\hat{\boldsymbol{x}}$와 $\hat{\boldsymbol{y}}$
  - 출력 공간 $\mathbf{R}^2$의 기저: $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$
  - $\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$
  - $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$벡터는 다음과 같이 $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}$의 1차결합으로 표현가능
  - $\begin{cases} \boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{y}} \\ \boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{y}} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}} = \quad \boldsymbol{q}_1 \quad \boldsymbol{q}_2 = m_{11}\boldsymbol{q}_1 + m_{21}\boldsymbol{q}_2 \\ \hat{\boldsymbol{y}} = \quad \boldsymbol{q}_1 \quad \boldsymbol{q}_2 = m_{12}\boldsymbol{q}_1 + m_{22}\boldsymbol{q}_2 \end{cases}$
  - $\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- 기저변환의 특징

$$M(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{v}_j = m_{1j}\boldsymbol{w}_1 + m_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + m_{nj}\boldsymbol{w}_n$$

  - 기저변환 행렬은 가역행렬임
    - 정사각 행렬이고, 열들이 모두 독립임
  - 기저변환에 사용된 입력 공간의 기저와 출력 공간의 기저가 정규화된 직교 벡터들이라면, 기저변환 행렬은 직교 행렬임
  - 기저 변환에 사용된 입력 벡터와 변환된 결과 벡터는 같은 벡터임

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- 기저 변환전
- 기저 변환후

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \arrow[r, "M"] \arrow[d, "A"] & \boldsymbol{c}' = \begin{bmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_n \end{bmatrix} = M\boldsymbol{c} \arrow[d, "\boxed{?}"] \\ \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \arrow[r, "M"] & \boldsymbol{d}' = \begin{bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ \vdots \\ d'_n \end{bmatrix} = M\boldsymbol{d} \end{tikzcd}$$

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- 기저변환의 특징

$$\boldsymbol{v}_j = m_{1j}\boldsymbol{w}_1 + m_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + m_{nj}\boldsymbol{w}_n$$

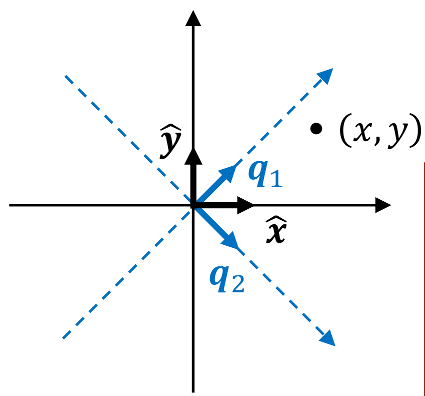
  - 기저변환은 벡터에만 일어나는 것이 아니라 **같은 공간내에서 일어나는 선형변환** T를 나타내는 행렬 A에도 적용되어야 함
    - 변환전 기저가 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$이고, 변환후 기저가 $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$라고 가정하고, 기저변환을 나타내는 행렬을 M으로 나타냄
    - 어떤 벡터 $\boldsymbol{v}$가 변환전 기저 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$에서 $c_1, \dots, c_n$의 좌표값을 가지고 있을 때, 선형변환 T를 적용하면 아래와 같이 출력 벡터의 좌표값 $d_1, \dots, d_n$과는 다음의 관계를 가짐
    - $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ ➔ $\boldsymbol{d} = A\boldsymbol{c}$
    - 위의 $\boldsymbol{d}$벡터는 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$기저에서 좌표값이므로, 새로운 기저 $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$에서의 좌표값은 $M\boldsymbol{d}$를 통해 얻게 됨.
    - $M\boldsymbol{d} = MA\boldsymbol{c} = MA(M^{-1}M)\boldsymbol{c} = (MAM^{-1})(M\boldsymbol{c})$

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- 기저 변환전: $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}$
  - $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

- 기저 변환후: $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$
  - $\boldsymbol{c}' = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} = M\boldsymbol{c}$



$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$A' = MAM^{-1}$

$= M \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

- $\boldsymbol{d} = A\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

- $\boldsymbol{d}' = A'\boldsymbol{c}' = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} = M\boldsymbol{d}$

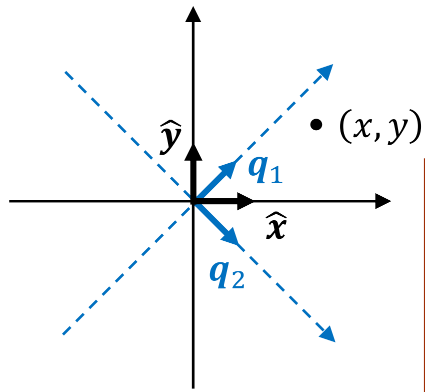
7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- 기저 변환전: $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}$
  - $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- 기저 변환후: $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$
  - $\boldsymbol{c}' = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} = M\boldsymbol{c}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$



$$A' = MAM^{-1}$$
$$= M\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{d} = A\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{d}' = A'\boldsymbol{c}' = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} = M\boldsymbol{d}$

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- (Revisited) Positive definite 행렬
  - $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = (Q^{-1}\boldsymbol{x})^T(Q^{-1}AQ)(Q^{-1}\boldsymbol{x})$
  - $\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ \vdots \end{bmatrix} = Q^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \\ \vdots \end{bmatrix}$
  - $(Q^{-1}AQ) = \Lambda$은 대각 행렬이므로
  - $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = (Q^{-1}\boldsymbol{x})^T(Q^{-1}AQ)(Q^{-1}\boldsymbol{x}) =$
    $$[q_x \quad q_y \quad \cdots]\begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_x & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ \vdots \end{bmatrix} = \lambda_x q_x^2 + \lambda_y q_y^2 + \cdots$$

- 좌표축 변화에 따라 좌표값들이 $\boldsymbol{x}$에서 $Q^{-1}\boldsymbol{x}$로 바꿀 때, 왜 행렬 A는 $Q^{-1}AQ$ 로 바뀌었나?

7.2 The Matrix of a Linear Transformation

- 기저변환 summary

  변환전 기저가 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$이고, 변환후 기저가 $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$라고 가정하면, 기저 변환을 나타내는 행렬을 M으로 나타냄

  $$\boldsymbol{v}_j = m_{1j}\boldsymbol{w}_1 + m_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + m_{nj}\boldsymbol{w}_n$$

  - 기저변환 미적용시 (기존 기저 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$)
    - 어떤 벡터 $\boldsymbol{v}$가 $c_1, \dots, c_n$의 좌표값을 가지고 있고 선형변환 T를 적용한 출력 벡터의 좌표값은 $d_1, \dots, d_n$로 나타냄 ($\boldsymbol{d} = A\boldsymbol{c}$)
  - 기저변환 적용시 (새로운 기저 $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$)
    - $\boldsymbol{c} \to M\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \to M\boldsymbol{d}$
    - $A \to MAM^{-1}$
  - 행렬이 특정한 선형변환을 나타낼 경우에는 기저의 선택에 따라 행렬의 값이 달라짐 ⇔ 벡터의 경우와 유사
  - 이럴 경우 행렬을 주어진 선형변환의 representation이라고 부름