선형 대수 숙제 #1

숙제 제출 기한 : 1/13(월) 오후 1:30

선형대수 과목은 다음과 같이 진행될 예정입니다.

- 성적: 숙제 (10%), 퀴즈 (50%), 전체 시험 (40%)

- 매일 강의가 끝날 때 당일 배운 내용에 대한 숙제가 주어지고, 다음날 수업 시작 첫15분 동안 전날 배운 내용에 대한 퀴즈가 진행될 예정입니다. 퀴즈의 내용은 대부분 숙제와 유사한 문제가 나올 예정이니, 반드시 숙제는 미리 풀어오시기 바랍니다.

- 숙제 점수는 조교의 채점 편의를 위하여, 숙제를 수거한 후 일부 문제만 채점한 후 이에 비례하여 전체 점수를 결정할 예정이니 참고하시기 바랍니다. (예: 숙제에 1~10번 문제가 주어졌을 시, 3, 5, 8번 문제만 채점 후 100점 만점으로 환산)

- 전체 시험은 1/20(월) 오후 1:30~2:30 사이에 진행할 예정입니다.

오후 1:30~1:45 (조교) 전날 배운 내용을 퀴즈로 확인 및 숙제 수거

오후 1:45~4:45 (교수) 강의 - (조교) 성적 처리

오후 4:45~5:30 (조교) 퀴즈 및 전날 숙제 내용 풀이, 당일 새로운 숙제에 대한 해설 (연습풀이) 및 질의 응답

(문제 **1~3**) 아래 주어진 행렬들을 가우스 소거법을 이용해 upper triangle 형태의 행렬(U)로 만드시오.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} :\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 6 \end{bmatrix} :\to \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

(문제 **4~10**) 수업 시간에 행렬 A가 주어졌을 때 가우스 소거법에 따라 upper triangle 형태의 행렬(U)로 만드는 과정에 사용된 elementary 행렬 (E_{ij})들을 이용하면 LU분해를 할 수 있음을 배웠다. 다음은 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$가 주어졌을 때 가우스 소거법을 활용하여 LU분해를 하는 과정을 순서대로 나열하였다. 각 단계에 맞는 답을 쓰시오.

4. 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$의 첫 번째 행에 -2를 곱한 값을 두 번째 행에 더해서 $E_{21}A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$을 얻었다고 할 때, 이 과정에 해당하는 행렬 E_{21}을 구하시오.

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. 행렬 $E_{21}A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$의 두 번째 행에 -1을 곱한 값을 세 번째 행에 더해서 upper triangle 형태의 행렬 $U = E_{32}(E_{21}A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 을 얻었다고 할 때, 이 과정에 해당하는 행렬 E_{32}을 구하시오.

$$E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Elementary 행렬 E_{32}의 역행렬 E_{32}^{-1} 을 구하시오.

$$E_{32}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Elementary 행렬 E_{21}의 역행렬 E_{21}^{-1} 을 구하시오.

$$E_{21}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. $U = E_{32}(E_{21}A)$는 $U = (E_{32}E_{21})A$ 의 형태도 성립된다. 이를 이용하여 A를 $LU = A$의 형태로 나타내기 위해서는 $(E_{32}E_{21})$의 역행렬을 구하여야 한다. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$의 관계를 이용하여, $(E_{32}E_{21})$의 역행렬 $(E_{32}E_{21})^{-1}$을 구하시오.

$$(E_{32}E_{21})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

9. L은 Lower triangle 행렬, U는 Upper triangle 행렬을 나타낸다고 할 때, 앞에서 주어진 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 을 $A = LU$ 형태로 분해할 수 있는 L과 U를 적으시오.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

10. 앞에서 찾은 L과 U 두 행렬을 곱하였을 때, 실제 원래 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$를 얻을 수 있음을 확인하시오.

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

11. 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$를 $A = LU$ 형태로 분해할 수 있는 L과 U를 구하시오.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(문제 **12~15**) 수업 시간에 진행된 Gauss-Jordan 방법은 다음과 같은 과정을 통해 이루어진다.

Step1) 주어진 행렬A와 단위 행렬 I를 $[A|\,I]$ 와 같이 병렬로 나열한 후, 가우스 소거법을 이용해 행렬 A에 elementary 행렬들의 곱$(E_{n,n-1} \dots E_{21})$을 왼쪽에 곱하여 upper triangle 형태의 행렬(U)로 바꾼다. $U = (E_{n,n-1} \dots E_{21})A$. 이 과정에서 행렬 A 를 에 곱해진 elementary 행렬들의 곱 $(E_{n,n-1} \dots E_{21})$ 이 오른쪽 단위 행렬 I 에도 동시에 곱해져서 $[A|\,I] \rightarrow [(E_{n,n-1} \dots E_{21})A|(E_{n,n-1} \dots E_{21})\,I] = [U|E_{n,n-1} \dots E_{21}]$와 같이 변한다.

12. 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$가 주어졌을 때, $[A|\,I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$에 가우스 소거법을 적용하여 얻게 되는 오른쪽 부분을 채우시오.

$$[A|\,I] \rightarrow [U|E_{n,n-1} \dots E_{21}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Step2) Upper triangle형태의 행렬(U)을 궁극적으로 단위 행렬의 형태로 만들기 위해서는 대각 원소들을 제외한 모든 값들을 0으로 만들어야 한다. 이를 위해 U의 가장 아래 행을 이용하여 U의 가장 오른쪽 열의 모든 값을 0으로 만든다. 이때 U뿐만 아니라 오른쪽 행렬에도 같은 연산을 적용한다.

13. 예를 들어 12번에서 얻은 행렬이 $U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \mathbf{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$일 경우, 첫번째행 세번째열의 값을 3에서 0으로 만들기 위해 세번째 행에 -3를 곱한 후 첫번째행에 더한다. 이 경우 오른쪽 행렬의 값을 구하시오.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -11 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Step3) 마찬가지로 U의 아래에서 두번째 행을 이용하여 U의 오른쪽에서 두번째 열의 모든 값을 0으로 만든다. 같은 과정을 오른쪽 행렬에도 적용한다.

14. U가 $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$인 경우, 첫번째행 두번째열의 값을 -2에서 0으로 만들기 위해 두번째 행에 2를 곱한 후 첫번째행에 더한다. 이 경우 오른쪽 행렬의 값을 구하시오.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -15 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Step4) step2, 3의 과정을 계속 적용하여 U가 단위 행렬의 형태로 되었을 때, 오른쪽 행렬은 처음

시작한 행렬 A의 역행렬이 된다.

15. 문제 14에서 얻은 A의 역행렬과 A를 곱하면 단위행렬이 됨을 확인하시오.

$$\begin{bmatrix} -15 & 8 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

16. Gauss-Jordan 방법을 이용하여 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 10 & 7 \end{bmatrix}$의 역행렬을 구하시오.

$$\begin{pmatrix} 5 & -8 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(문제 **17~19**) 다음에 주어진 벡터들이 1차독립인지 종속인지 답하시오. (힌트: 주어진 벡터들을 행으로 가지는 행렬에 가우스소거법을 적용했을 때, 완전히 0이 되는 행이 있으면 종속, 모든 pivot값들이 0이 아니면 독립임.)

17. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 종속

18. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 독립

19. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 독립

(문제 **20~24**) 평행하지 않은 2개의 벡터 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$가 주어졌을 때 Gram-Schmidt직교화는 다음의 단계로 이루어진다.

Step1) $\boldsymbol{v}_1$의 길이를 구하고, $\boldsymbol{v}_1$을 자신의 길이로 나누어 $\boldsymbol{v}_1$과 평행한 단위 벡터를 구한다.

20. $\boldsymbol{v}_1^T = [3, -4]$ 이면, $\boldsymbol{v}_1$의 길이를 구하시오. $\quad 5$

21. 문제 19에 주어진 $\boldsymbol{v}_1$과 평행한 단위 벡터 $\boldsymbol{q}_1$을 구하시오.

$$q_1^T = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

Step2) $\boldsymbol{v}_2$벡터가 가지는 벡터 $\boldsymbol{v}_1$ 방향의 성분의 크기를 구하기 위해, $\boldsymbol{v}_1$방향의 단위 벡터 $\boldsymbol{q}_1$과 $\boldsymbol{v}_2$벡터 사이의 내적을 구한다.

22. $\boldsymbol{v}_2^T = [10, -5]$와 문제 20번에서 구한 $\boldsymbol{q}_1$사이의 내적을 구하시오.

$$\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \cdot (10, -5) = 10$$

Step3) $\boldsymbol{v_2}$벡터에서 $\boldsymbol{v}_1$ 방향의 성분 $(\boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{q}_1$을 빼서 벡터 $\boldsymbol{v}_1$ 방향과 수직인 성분을 구한다.

23. $\boldsymbol{v_2} - (\boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{q}_1$을 구하고, 이 결과 벡터가 $\boldsymbol{v}_1$과 수직임을 보이시오.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (4\ 3) \cdot (3, -4) = 0$$

Step4) $\boldsymbol{v_2} - (\boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{q}_1$방향의 단위벡터 $\boldsymbol{q}_2$를 구한다.

24. $\boldsymbol{v_2} - (\boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{q}_1$ 의 단위벡터 $\boldsymbol{q}_2$를 구하시오.

$$q_2^T = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

25. $\boldsymbol{v}_1^T = [1,0,1], \boldsymbol{v}_2^T = [1,1,0]$ 의 2개 벡터가 주어졌을 때, Gram-Schmidt직교화를 통해 서로 직교하는 2개의 벡터($\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$)를 구하시오. (단 $\boldsymbol{q}_1$과 $\boldsymbol{v}_1$는 평행해야 함.)

$\boldsymbol{q}_1^T =$

$\boldsymbol{q}_2^T =$

$$q_1^T = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$v_2 - (q_1 \cdot v_2) q_1$$

$$= (1, 1, 0) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$q_2^T = \frac{\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)}{\left\|\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)\right\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$