

행렬들의 종류와 특성

$n \times n$ 정사각 행렬 A

↓ 독립인 eigenvector들

행렬 A 가 n 개의 서로 독립인 eigenvector들 (x_1, \dots, x_n)을 갖는다면,

- $S = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$: 정사각행렬
- $AS = S\Lambda \Leftrightarrow S^{-1}AS = \Lambda \Leftrightarrow A = S\Lambda S^{-1}$

↓ 대칭 행렬

행렬 A 가 대칭 행렬이면,

- 모든 eigenvalue들은 실수이다.
- 서로 다른 eigenvalue를 가진 모든 eigenvector들은 서로 직교한다.
- $A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^T$
 $= \lambda_1 q_1 q_1^T + \lambda_2 q_2 q_2^T + \dots + \lambda_n q_n q_n^T$

← 정규 직교 벡터로 이루어진 정사각 행렬

↓ 모든 eigenvalue들이 양수

행렬 A 가 대칭 행렬이고 모든 eigenvalue들은 양수이면, **positive definite** 행렬임

- $A = R^T R$ 형태로 분해 가능
- $x^T A x > 0$ for all $x \neq 0$

정규 직교 벡터 $Q = [q_1 \ \dots \ q_n]$

\mathbb{R}^m 공간에 속하는 정규 직교 벡터 q_1, q_2, \dots, q_n 가 주어지면, 이들을 열로 가지는 행렬 Q 를 만들 수 있음.

- 행렬의 크기: $m \times n$
- $Q = [q_1 \ \dots \ q_n] \Leftrightarrow Q^T Q = I$

↓ 정사각행렬

행렬 Q 가 정사각행렬이 되면 ($n = m$), 직교 행렬이라 불림

- $Q^{-1} = Q^T$
- 회전처럼 벡터의 크기와 벡터들간의 각도 유지
- 기저 변환 행렬 (정규 직교 벡터들을 기저로 사용할 경우)

↓ 직교화

행렬 A 가 주어지면 **Gram-Schmidt 직교화**를 통해 행렬 A 의 각각의 열벡터로부터 정규 직교하는 벡터 q_1, q_2, \dots, q_n 를 찾아낼 수 있음. 이를 이용해 $Q = [q_1 \ \dots \ q_n]$ 만들면,

- $A = QR$ 을 만족하는 upper triangle 형태의 R 을 항상 찾을 수 있음

행렬들의 종류와 특성

$n \times n$ 정사각 행렬 A

↓ 독립인 eigenvector들

행렬 A 가 n 개의 서로 독립인 eigenvector들 (x_1, \dots, x_n)을 갖는다면,

- $S = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$: 정사각행렬
- $AS = SA \Leftrightarrow S^{-1}AS = \Lambda \Leftrightarrow A = SAS^{-1}$

↓ 대칭 행렬

행렬 A 가 대칭 행렬이면,

- 모든 eigenvalue들은 실수이다.
- 서로 다른 eigenvalue를 가진 모든 eigenvector들은 서로 직교한다.
- $A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^T$
 $= \lambda_1 q_1 q_1^T + \lambda_2 q_2 q_2^T + \dots + \lambda_n q_n q_n^T$

↓ 모든 eigenvalue들이 양수

행렬 A 가 대칭 행렬인 경우

- $A = \lambda_1 q_1 q_1^T + \lambda_2 q_2 q_2^T + \dots + \lambda_n q_n q_n^T$ 는 입력 벡터를 직교하는 기저 q_1, q_2, \dots, q_n 들로 분해한 후, 각각에 λ_i 를 곱해준다고 해석 가능
- 각 항 $\lambda_i q_i q_i^T$ 들의 rank?
- $m \times n$ 직사각 행렬 A 인 경우
 - $A = \lambda_1 q_1 q_1^T + \lambda_2 q_2 q_2^T + \dots + \lambda_n q_n q_n^T$ 의 형태로 분해 가능?

정규 직교 벡터 $Q = [q_1 \ \dots \ q_n]$

\mathbb{R}^m 공간에 속하는 정규 직교 벡터 q_1, q_2, \dots, q_n 가 주어지면, 이들을 열로 가지는 행렬 Q 를 만들 수 있음.

- 행렬의 크기: $m \times n$
- $Q = [q_1 \ \dots \ q_n] \Leftrightarrow Q^T Q = I$

↓ 정사각행렬

행렬 Q 가 정사각행렬이 되면 ($n = m$), 직교 행렬이라 불림

- $Q^{-1} = Q^T$
- 회전처럼 벡터의 크기와 벡터들간의 각도 유지
- 기저 변환 행렬 (정규 직교 벡터들을 기저로 사용할 경우)

↓ 직교화

행렬 A 가 주어지면 Gram-Schmidt 직교화를 통해 행렬 A 의 각각의 열벡터로부터 정규 직교하는 벡터 q_1, q_2, \dots, q_n 를 찾아낼 수 있음. 이를 이용해 $Q = [q_1 \ \dots \ q_n]$ 만들면,
 $A = QR$ 을 만족하는 upper triangle 형태의 R 을 항상 찾을 수 있음

선형 변환 행렬

- 입력공간의 기저 v_1, \dots, v_n 와 출력 공간의 기저 w_1, \dots, w_m 가 주어졌을 때, j 번째 기저 v_j 가 선형 변환된 벡터 $u_j = T(v_j)$ 를 w_1, \dots, w_m 의 1차결합으로 표현하면 사용된 계수들은 벡터 a_{*j} 를 만들 수 있음

$$u_j = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \dots + a_{mj}w_m$$

- 이 계수들의 벡터를 열로 가지는 행렬 $A = [a_{*1} \ \dots \ a_{*n}]$

↓ 항등 행렬

기저 변환 행렬

- 입력 공간과 출력 공간이 서로 같은 경우, 2개의 다른 기저 v_1, \dots, v_n 와 w_1, \dots, w_n 사용 가능
- v_j 를 w_1, \dots, w_n 의 1차결합으로 표현
- $v_j = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \dots + a_{nj}w_n$
- 이 계수들의 벡터를 열로 가지는 행렬 $M = [a_{*1} \ \dots \ a_{*n}]$

정규 직교 기저로 이루어진 행렬

↓ 정규 직교 기저

정규 직교하는 기저 변환 행렬

- 2개의 다른 기저 v_1, \dots, v_n 와 w_1, \dots, w_n 가 각각 정규 직교하는 경우, 기저 변환 행렬 M 은 직교 행렬이 됨
- $$M = [a_{*1} \ \dots \ a_{*n}]$$

6.7 Singular Value Decomposition

- 2개의 행렬 A, B 가 주어지고 각각의 rank가 r_A, r_B 일 때, 두 행렬의 곱 AB 의 rank는 $\min(r_A, r_B)$ 보다 같거나 작다.
 - (증명) B 의 크기가 $m \times n$ 이라고 하면, $Bx = \mathbf{0}$ 가 되는 x 들로 생성된 B 의 nullspace의 차원은 $n - r_B$ 이다.
 - $Bx = \mathbf{0}$ 이면 $ABx = \mathbf{0}$ 이므로 AB 의 nullspace의 차원은 적어도 $n - r_B$ 이고, AB 의 열의 개수는 n 개이므로 AB 의 rank는 최대 $n - (n - r_B) = r_B$ 이다.
 - AB 의 rank와 $B^T A^T$ 의 rank는 같다. Why?
 - 위의 증명에 의해 $B^T A^T$ 의 rank는 최대 $n - (n - r_A) = r_A$ 이다.
 - 따라서 AB 의 rank는 2개의 rank r_A, r_B 보다 항상 같거나 작아야 하므로 $\min(r_A, r_B)$ 보다 같거나 작다.

6.7 Singular Value Decomposition

- 특이값 분해 (Singular Value Decomposition, SVD)
 - 임의의 선형변환에 해당하는 행렬 A 가 주어졌을 때, SVD는 열벡터 공간의 직교하는 기저에 mapping될 수 있는 행벡터 공간의 직교하는 기저를 찾는 문제임
 - 행렬 A 의 rank가 r 이고 입력 공간의 직교하는 기저를 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$, 출력 공간의 직교하는 기저를 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ 이라고 할 때
 - $A[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_r] = [\sigma_1 \mathbf{u}_1 \ \sigma_2 \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \sigma_r \mathbf{u}_r]$
- Example
 - 입력 공간이 \mathbf{R}^3 , 출력 공간은 \mathbf{R}^2 , 기존 좌표축을 기저로 사용하는 선형변환이 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 의 형태로 주어졌다고 가정.
 - 입력 공간의 직교하는 두 벡터 $(1,0,0), (0,0,1)$ 에 해당하는 출력 공간의 벡터는 직교하는가?
 - $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
 - "직교하는 기저" \rightarrow "직교하는 기저"의 장점
 - 좌표값에 일종의 eigenvalue만 곱하면 됨 \rightarrow 직교하지 않으니 포기?

6.7 Singular Value Decomposition

- 특이값 분해 (Singular Value Decomposition, SVD)
 - 행렬 A 의 rank가 r 이고 입력 공간의 직교하는 기저를 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$, 출력 공간의 직교하는 기저를 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r$ 이라고 할 때

$$A[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_r] = [\sigma_1 \mathbf{u}_1 \ \sigma_2 \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \sigma_r \mathbf{u}_r] = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_r] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \square \quad A &= U\Sigma V^T = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_r] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^T \end{bmatrix} \\ &= \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T + \cdots + \sigma_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T \end{aligned}$$

$$\square \quad A^T A = V \Sigma^T U^{-1} U \Sigma V^T = V \Sigma^T \Sigma V^T = V \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r^2 \end{bmatrix} V^T$$

- Example

- 입력 공간이 \mathbf{R}^3 , 출력 공간은 \mathbf{R}^2 ,
- $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$ 대칭행렬 우연?
 - $A^T A$ 는 항상 대칭행렬이고, 따라서 직교하는 eigenvector를 가짐
- Eigenvalue & eigenvector: $\lambda = 3, 2, 0, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

6.7 Singular Value Decomposition

- (계속) Example $A = U\Sigma V^T$

- $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- Eigenvalue & eigenvector: $\lambda = 3, 2, 0$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

- $V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$, $\Sigma^T \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \sigma_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$

- 만약 eigenvalue가 음수이면? $A^T A$ 는 적어도 positive semidefinite이므로 0보다 크거나 같음

- $AV = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$



6.7 Singular Value Decomposition

- (계속) Example $A = U\Sigma V^T$

- $\Sigma^T \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \sigma_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$

- $AV = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

- $A[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_r] = [\sigma_1 \mathbf{u}_1 \ \sigma_2 \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \sigma_r \mathbf{u}_r]$ 관계를 이용하면,

- $\mathbf{u}_i = A\mathbf{v}_i / \sigma_i$

- 또는 $[\sigma_1 \mathbf{u}_1 \ \sigma_2 \mathbf{u}_2 \ \sigma_3 \mathbf{u}_3] = A[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]$

- $[\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix} = AV = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

- $[\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2] \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2] = U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

6.7 Singular Value Decomposition

Reduced SVD

$$A[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_r] = [\sigma_1 \mathbf{u}_1 \ \sigma_2 \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \sigma_r \mathbf{u}_r] =$$

$$[\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_r] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix}$$

Full SVD


- 입력 벡터 공간 (행벡터 공간)은 \mathbf{R}^n 공간의 부분 공간이지만, nullspace의 기저 $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_n$ 까지 합친 경우에는 전체 \mathbf{R}^n 공간을 span할 수 있고, 이때 해당하는 $\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n$ 은 모두 0임

→ $n \times n$ 의 직교 행렬을 만들 수 있음

- 마찬가지로 출력 벡터 공간 (열벡터 공간)은 \mathbf{R}^m 공간의 부분 공간이지만, 왼쪽 nullspace의 기저 $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m$ 까지 합친 경우 → $m \times m$ 의 직교 행렬

$$A[\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_n] = [\sigma_1 \mathbf{u}_1 \ \cdots \ \sigma_r \mathbf{u}_r \ \mathbf{0} \ \cdots] =$$

$$[\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_r \ \cdots \ \mathbf{u}_m] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \ddots \\ \sigma_r \\ 0 \\ \ddots \end{bmatrix}} \right\} m \text{행}$$



 $\underbrace{\hspace{15em}}_{n \text{열}}$

6.7 Singular Value Decomposition

- Full SVD
 - $AV = U\Sigma \rightarrow A = U\Sigma V^T$
 - U 는 크기가 $m \times m$ 인 직교행렬임
 - V 는 크기가 $n \times n$ 인 직교행렬임
 - Σ 는 rank r 까지만 대각 행렬이고 나머지는 0인 행렬임
- 계산 과정에서 문제가 없기 위해서는 $A^T A$ 와 AA^T 가 같은 eigenvalue를 가져야 한다. 이것은 항상 보장되는가?
- 이보다 좀 더 근본적으로 AB 와 BA 가 항상 같은 0이 아닌 eigenvalue를 가짐
 - (증명) 행렬 AB 가 $AB\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ 를 만족하는 eigenvector \mathbf{x} 와 eigenvalue λ 를 가진다고 가정. 이 경우 $B\mathbf{x}$ 는 BA 의 eigenvector이고 λ 를 eigenvalue 가진다. Why?
 - $BA(B\mathbf{x}) = B(AB)\mathbf{x} = B(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(B\mathbf{x})$
- 따라서 $A^T A$ 와 AA^T 는 항상 같은 eigenvalue를 가져야한다.

6.7 Singular Value Decomposition

- Example (이전 결과)

- $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

- $V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3], \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix}$

- $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2]$

- $A = U\Sigma V^T = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \mathbf{v}_3^T \end{bmatrix} = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T + \sigma_3 \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3^T$

- $A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$
=



6.7 Singular Value Decomposition

- Example

- ▣ $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

- ▣ $A^T A = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}, \Sigma^T \Sigma = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$

- ▣ $U = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$

- ▣ $A = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T$



Principal component analysis

- 주성분 분석 (Principal component analysis; PCA)
 - 행렬 A 에 가장 가까운 rank-1 행렬은?
 - $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$
- $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 25 \end{bmatrix}$
 - $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 25 - \lambda & 20 \\ 20 & 25 - \lambda \end{vmatrix} = (25 - \lambda)^2 - 20^2 = 0$
 - $\lambda = 25 \pm 20 = 45, 5$
 - $\lambda = 5, \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 20 \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
 - $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = A_1 + A_2 = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$
- 행렬 A 와 거리가 가장 가까운 rank 1 행렬은?
- 행렬 A 와 거리가 가장 가까운 rank 2 행렬은?
- 행렬간의 거리란?



I.11 Norms of Vectors and Functions and Matrices

- Norm이란?
 - ▣ 벡터의 norm: 벡터의 크기
 - $\|\mathbf{x}\|_2 = (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2} \rightarrow$ Euclid norm 또는 l^2 -norm
 - $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max |x_i| \rightarrow l^\infty$ -norm (max norm)
 - $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| \rightarrow l^1$ -norm
 - Preference: $\|\mathbf{x}\|_2$, $\|\mathbf{x}\|_1$, $\|\mathbf{x}\|_\infty$
 - $\|\mathbf{x}\|_2$ 의 문제점: 작은 요소가 너무 작아지는 문제가 있음
 - ▣ 행렬의 norm
 - $\|A\|_F = (\sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2)^{1/2} \rightarrow$ Frobenius norm
 - $\|A\| = \max \sigma_i$
 - $\|A\| = \sigma_1 + \dots + \sigma_r$



I.11 Norms of Vectors and Functions and Matrices

- Orthogonal invariance
 - 직교 행렬 Q 로 기저 변환 (또는 좌표축 변환)을 했을 때 변하지 않는 값들
 - 벡터의 길이: $(Q\mathbf{x})^T Q\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$
 - 행렬 $A = U\Sigma V^T$ 의 singular value σ : $Q_1 A Q_2 = Q_1 U \Sigma V^T Q_2$
 - 직교 행렬의 곱은 직교 행렬임
 - Spectral norm $\|A\|_2 = \sigma_1$
 - Nuclear norm $\|A\|_N = \sum \sigma_i$
 - Frobenius norm $\|A\|_F = (\sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2)^{1/2} = \text{tr}(A^T A)$
 - 단위 행렬(I)의 경우
 - $\|I\|_2 =$
 - $\|I\|_N =$
 - $\|I\|_F =$

I.11 Norms of Vectors and Functions and Matrices

■ 벡터 norm의 성질

- 아래 3가지 종류의 벡터 norm에 적용되는 공통적인 성질은?
 - $\|\mathbf{x}\|_2 = (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2} \rightarrow$ Euclid norm 또는 l^2 -norm
 - $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max |x_i| \rightarrow l^\infty$ -norm (max norm)
 - $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| \rightarrow l^1$ -norm
- **0**-벡터를 제외한 모든 벡터 \mathbf{x} 에 대해 $\|\mathbf{x}\| > 0$
- $\|c\mathbf{x}\| = |c|\|\mathbf{x}\|$
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$: triangular inequality
- $\|\mathbf{x}\|_{1/2} = \left(\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|} \right)^2$ 은 벡터 norm인가?
- 평면내 $\|\mathbf{x}\| \leq 1$ 를 만족하는 영역을 찾았을 때 영역의 모양이 Convex인 경우, 좋은 norm

I.11 Norms of Vectors and Functions and Matrices

- Eckart-Young 정리
 - Rank가 k 인 행렬 중 행렬 A 에 가장 가까운 행렬은 $A_k = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \cdots + \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T$ 이다.
- SVD를 계산하는 방법
 - $A^T A$ 의 eigenvalues와 eigenvector를 구하는 방법
 - $\|A - \tilde{A}_k\|$ 의 크기를 최소화하는 rank가 k 인 행렬 \tilde{A}_k 찾기
 - rank가 k 인 행렬 \tilde{A}_k 를 어떻게 만들까? 크기가 $m \times k$ 이고 열벡터들이 서로 직교하는 C 와 $k \times n$ 이고 행벡터들이 서로 직교하는 R 을 번갈아 가며 고정하면서 다른 행렬을 바꿀 때 $\|A - CR\|$ 이 최소가 되는 C 와 R 을 찾음
 - 하나씩 고정할 때 Least-square 문제로 변함