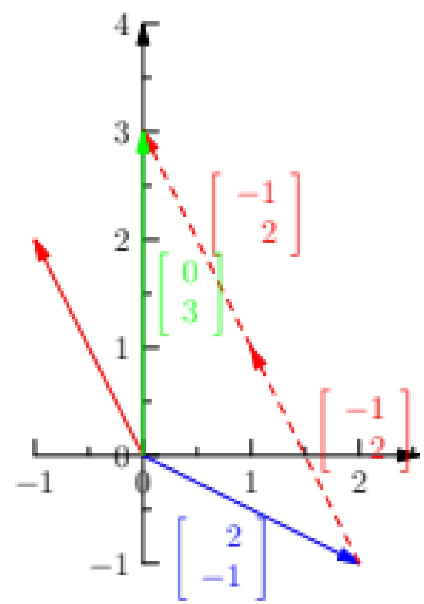
The Geometry of Linear Equations

- Column 관점

$$x\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$$

  - $\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$를 $\boldsymbol{c}$, $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$를 $\boldsymbol{d}$로 보면 $x\boldsymbol{c}+y\boldsymbol{d}=\boldsymbol{b}$ 와 같은 1차결합으로 해석 가능함. 이 경우 $\boldsymbol{b}$는 $\boldsymbol{c}$와 $\boldsymbol{d}$가 만드는 평면내의 벡터여야 함 .
    ➔ Column space



  - 언제 해가 존재하는가?

  - n-차원으로 확장

The Geometry of Linear Equations

- Matrix 관점
  - $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$
  - $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 계수 행렬 (coefficient matrix)
  - $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 미지수 벡터
  - $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
- 1차독립
  - 열벡터들이 1차 독립인가?
  - 임의의 $\boldsymbol{b}$를 만족하는 $\boldsymbol{x}$의 존재여부
  - $\boldsymbol{x}$가 1개만 존재하면 1차독립
  - 행벡터들이 1차 독립여부

1.2 Length and Dot Products

- 내적 (dot product or inner product)
  - $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$와 $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2)$가 주어졌을 때, $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$
  - 교환법칙 성립: $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}$
- 벡터의 길이
  - 길이 (norm): $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}$
  - 단위 벡터 (unit vector): 길이가 1인 벡터 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 1$
  - $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\|$: $\boldsymbol{v}$와 방향이 같고 길이가 1인 단위 벡터
- 두 벡터간의 각도
  - $\boldsymbol{v}$와 $\boldsymbol{w}$와 직교할 때 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$
  - 두개의 단위 벡터 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{U}$가 θ의 각도를 이룰 때, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{U} = \cos\theta$

1.3 Matrices

- 행렬의 곱

- 단위 행렬 (Identity matrix): notation I

- 역행렬
  - 행렬 A가 주어졌을 때, $AB = I = BA$ 를 만족하는 행렬. Notation: A^{-1}

- 1차독립 또는 1차종속
  - 가역행렬 (Invertible matrix)
  - 특이행렬 (singular matrix) 또는 비가역행렬 (Noninvertible matrix)
  - 정사각행렬 $(n \times n)$의 경우 모든 열 또는 모든 행이 독립이면 가역행렬, 아니면 특이행렬임

2.2 The Idea of Elimination

- 가우스 소거법
  - $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ \quad +8y = 8 \end{cases}$
  - Pivot: 각 행의 첫번째 0이 아닌 원소

  - $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x + 8y + z = 12 \\ \quad 4y + z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ \quad 2y - 2z = 6 \\ \quad\quad 5z = -10 \end{cases}$

2.3 Elimination Using Matrices

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$ ➔ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = U$
- A를 U로 변환하는 과정을 $\boldsymbol{b}$에도 적용하면 $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix}$을 얻음.

  ➔ $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ ➔ 후치환(back substitution) 과정을 통해 z, y, x 값을 차례로 찾을 수 있음.

2.3 Elimination Using Matrices

- 앞의 과정을 소거행렬 (elimination matrix)를 이용하여 다시 표현
- 소거행렬은 소거과정의 한단계를 표현
  - 첫행에 -3을 곱한 후, 두번째 행에 더한다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{21}$$

  - 앞의 연산은 $E_{32}\big(E_{31}(E_{21}A)\big) = U$로 표현
  - 행렬의 곱은 결합법칙 성립 $E = E_{32}E_{31}E_{21}$
  - 앞의 연산은 $EA\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{b}$ 와 동일

2.3 Elimination Using Matrices

- 가우스 소거법
  - 만약 pivot값이 0일 경우에는 행들간의 교환이 필요 ➔ 치환행렬 (Permutation matrix)
  - 1행과 2행을 바꾸려면?

  - 소거행렬 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{21}$ 의 역행렬?

2.5 Inverse Matrices

- 주어진 사각행렬의 역행렬을 구하는 방법
  - $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ➔ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 가 옆으로 2개 있는 것에 해당
- Gauss-Jordan Elimination
  - $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right]$ ➔ $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$ ➔ $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$
  - 3x3 case?
- LU 분해