# 행렬들의 종류와 특성

## $n \times n$ 정사각 행렬 $A$

**독립인 eigenvector들**

행렬 $A$가 $n$개의 서로 **독립인 eigenvector들** $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$을 갖는다면,

- $S = [\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_n]$: 정사각행렬
- $AS = S\Lambda \Leftrightarrow S^{-1}AS = \Lambda \Leftrightarrow A = S\Lambda S^{-1}$

**대칭 행렬**

행렬 $A$가 **대칭** 행렬이면,

- 모든 eigenvalue들은 실수이다.
- 서로 다른 eigenvalue를 가진 모든 eigenvector들은 서로 **직교**한다.
- $A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^T$
  $= \lambda_1 \boldsymbol{q}_1 \boldsymbol{q}_1^T + \lambda_2 \boldsymbol{q}_2 \boldsymbol{q}_2^T + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{q}_n \boldsymbol{q}_n^T$

**모든 eigenvalue들이 양수**

행렬 $A$가 대칭 행렬이고 모든 eigenvalue들은 양수이면, **positive definite** 행렬임

- $A = R^T R$ 형태로 분해 가능
- $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} > 0$ for all $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

정규 직교 벡터로 이루어진 정사각 행렬

## 정규 직교 벡터 $Q = [\boldsymbol{q}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{q}_n]$

$\mathbf{R}^m$ 공간에 속하는 **정규 직교 벡터** $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n$가 주어지면, 이들을 열로 가지는 행렬 $Q$를 만들 수 있음.

- 행렬의 크기: $m \times n$
- $Q = [\boldsymbol{q}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{q}_n] \Leftrightarrow Q^T Q = I$

**정사각행렬**

행렬 $Q$가 **정사각행렬**이 되면 ($n = m$), 직교 행렬이라 불림

- $Q^{-1} = Q^T$
- 회전처럼 벡터의 크기와 벡터들간의 각도 유지
- 기저 변환 행렬 (정규 직교 벡터들을 기저로 사용할 경우)

**직교화**

행렬 $A$가 주어지면 **Gram-Schmidt 직교화**를 통해 행렬 $A$의 각각의 열벡터로부터 정규 직교하는 벡터 $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n$ 를 찾아낼 수 있음. 이를 이용해 $Q = [\boldsymbol{q}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{q}_n]$만들면,

- $A = QR$을 만족하는 upper triangle형태의 $R$을 항상 찾을 수 있음

# 행렬들의 종류와 특성

$n \times n$ 정사각 행렬 $A$

↓ 독립인 eigenvector들

행렬 $A$가 $n$개의 서로 **독립인 eigenvector들** $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$을 갖는다면,

- $S = [\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_n]$: 정사각행렬
- $AS = S\Lambda \Leftrightarrow S^{-1}AS = \Lambda \Leftrightarrow A = S\Lambda S^{-1}$

↓ 대칭 행렬

행렬 $A$가 **대칭** 행렬이면,

- 모든 eigenvalue들은 실수이다.
- 서로 다른 eigenvalue를 가진 모든 eigenvector들은 서로 **직교**한다.
- $A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^T$
  $= \lambda_1 \boldsymbol{q}_1 \boldsymbol{q}_1^T + \lambda_2 \boldsymbol{q}_2 \boldsymbol{q}_2^T + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{q}_n \boldsymbol{q}_n^T$

↓ 모든 eigenvalue들이 양수

정규 직교 벡터로 이루어진 정사각 행렬

정규 직교 벡터 $Q = [\boldsymbol{q}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{q}_n]$

$\mathbf{R}^m$ 공간에 속하는 **정규 직교 벡터** $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n$가 주어지면, 이들을 열로 가지는 행렬 $Q$를 만들 수 있음.

- 행렬의 크기: $m \times n$
- $Q = [\boldsymbol{q}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{q}_n] \Leftrightarrow Q^TQ = I$

↓ 정사각행렬

행렬 $Q$가 **정사각행렬**이 되면 $(n = m)$, 직교 행렬이라 불림

- $Q^{-1} = Q^T$
- 회전처럼 벡터의 크기와 벡터들간의 각도 유지
- 기저 변환 행렬 (정규 직교 벡터들을 기저로 사용할 경우)

↓ 직교화

행렬 $A$가 주어지면 **Gram-Schmidt 직교화**를 통해 행렬 $A$의 각각의 열벡터로부터 정규 직교하는 벡터 $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n$ 를 찾아낼 수 있음. 이를 이용해 $Q = [\boldsymbol{q}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{q}_n]$만들면,

- $A = QR$을 만족하는 upper triangle형태의 $R$을 항상 찾을 수 있음

선형 변환 행렬

- 입력공간의 기저 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$와 출력 공간의 기저 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$가 주어졌을 때, $j$번째 기저 $\boldsymbol{v}_j$가 선형 변환된 벡터 $\boldsymbol{u}_j = T(\boldsymbol{v}_j)$를 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$의 1차결합으로 표현하면 사용된 계수들은 벡터 $\boldsymbol{a}_{*j}$를 만들 수 있음

  $\boldsymbol{u}_j = a_{1j}\boldsymbol{w}_1 + a_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{w}_m$
- 이 계수들의 벡터를 열로 가지는 행렬 $A = [\boldsymbol{a}_{*1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_{*n}]$

↓ 항등 행렬

기저 변환 행렬

- 입력 공간과 출력 공간이 서로 같은 경우, 2개의 다른 기저 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$와 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$사용 가능
- $\boldsymbol{v}_j$를 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$의 1차결합으로 표현

  $\boldsymbol{v}_j = a_{1j}\boldsymbol{w}_1 + a_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{w}_n$
- 이 계수들의 벡터를 열로 가지는 행렬 $M = [\boldsymbol{a}_{*1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_{*n}]$

↓ 정규 직교 기저

정규 직교 기저로 이루어진 행렬

정규 직교하는 기저 변환 행렬

- 2개의 다른 기저 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$와 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$가 각각 정규 직교하는 경우, 기저 변환 행렬 $M$은 직교 행렬이 됨

  $M = [\boldsymbol{a}_{*1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_{*n}]$

행렬 $A$가 **대칭** 행렬인 경우

- $A = \lambda_1 \boldsymbol{q}_1 \boldsymbol{q}_1^T + \lambda_2 \boldsymbol{q}_2 \boldsymbol{q}_2^T + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{q}_n \boldsymbol{q}_n^T$ 는 입력 벡터를 직교하는 기저 $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n$들로 분해한 후에, 각각에 $\lambda_i$를 곱해준다고 해석 가능
- 각 항 $\lambda_i \boldsymbol{q}_i \boldsymbol{q}_i^T$들의 rank?

- $m \times n$ 직사각 행렬 $A$인 경우
  - $A = \lambda_1 \boldsymbol{q}_1 \boldsymbol{q}_1^T + \lambda_2 \boldsymbol{q}_2 \boldsymbol{q}_2^T + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{q}_n \boldsymbol{q}_n^T$ 의 형태로 분해 가능?

# 6.7 Singular Value Decomposition

- 2개의 행렬 $A, B$가 주어지고 각각의 rank가 $r_A, r_B$일 때, 두 행렬의 곱 $AB$의 rank는 $\min(r_A, r_B)$보다 같거나 작다.
  - (증명) $B$의 크기가 $m \times n$이라고 하면, $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 가 되는 $\boldsymbol{x}$들로 생성된 $B$의 nullspace의 차원은 $n - r_B$이다.
  - $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 이면 $AB\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 이므로 $AB$의 nullspace의 차원은 적어도 $n - r_B$이고, $AB$의 열의 개수는 $n$개이므로 $AB$의 rank는 최대 $n - (n - r_B) = r_B$이다.
  - $AB$의 rank와 $B^T A^T$의 rank는 같다. Why?
  - 위의 증명에 의해 $B^T A^T$의 rank는 최대 $n - (n - r_A) = r_A$이다.
  - 따라서 $AB$의 rank는 2개의 rank $r_A, r_B$보다 항상 같거나 작아야 하므로 $\min(r_A, r_B)$보다 같거나 작다.

# 6.7 Singular Value Decomposition

- 특이값 분해 (Singular Value Decomposition, SVD)
  - 임의의 선형변환에 해당하는 행렬 $A$가 주어졌을 때, SVD는 열벡터 공간의 직교하는 기저에 mapping될 수 있는 행벡터 공간의 직교하는 기저를 찾는 문제임
  - 행렬 $A$의 rank가 $r$이고 입력 공간의 직교하는 기저를 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$, 출력 공간의 직교하는 기저를 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r$이라고 할 때
  - $A[\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_r] = [\sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \quad \sigma_2 \boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad \sigma_r \boldsymbol{u}_r]$
- Example
  - 입력 공간이 $\mathbf{R}^3$, 출력 공간은 $\mathbf{R}^2$, 기존 좌표축을 기저로 사용하는 선형변환이 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$의 형태로 주어졌다고 가정.
  - 입력 공간의 직교하는 두 벡터 (1,0,0), (0,0,1)에 해당하는 출력 공간의 벡터는 직교하는가?
  - $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
  - "직교하는 기저" ➔ "직교하는 기저"의 장점
  - 좌표값에 일종의 eigenvalue만 곱하면 됨 ➔ 직교하지 않으니 포기?

# 6.7 Singular Value Decomposition

- 특이값 분해 (Singular Value Decomposition, SVD)
  - 행렬 $A$의 rank가 $r$이고 입력 공간의 직교하는 기저를 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$, 출력 공간의 직교하는 기저를 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r$이라고 할 때

$$A[\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_r] = [\sigma_1\boldsymbol{u}_1 \quad \sigma_2\boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad \sigma_r\boldsymbol{u}_r] = [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{u}_r]\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r\end{bmatrix}$$

  - $$A = U\Sigma V^T = [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{u}_r]\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1^T \\ \boldsymbol{v}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_r^T\end{bmatrix}$$

$$= \sigma_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1^T + \sigma_2\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2^T + \cdots + \sigma_r\boldsymbol{u}_r\boldsymbol{v}_r^T$$

  - $$A^TA = V\Sigma^TU^{-1}U\Sigma V^T = V\Sigma^T\Sigma V^T = V\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r^2\end{bmatrix}V^T$$

- Example
  - 입력 공간이 $\mathbf{R}^3$, 출력 공간은 $\mathbf{R}^2$,
  - $A^TA = \begin{bmatrix}1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ ➔ 대칭행렬 우연?
    - $A^TA$는 항상 대칭행렬이고, 따라서 직교하는 eigenvector를 가짐
  - Eigenvalue & eigenvector: $\lambda = 3, 2, 0,$ $\begin{bmatrix}1 \\ 1 \\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1 \\ 1 \\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 \\ 1 \\ -2\end{bmatrix}$

# 6.7 Singular Value Decomposition

- (계속) Example $A = U\Sigma V^T$
  - $A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
  - Eigenvalue & eigenvector:$\lambda = 3, 2, 0, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$
  - $V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \Sigma^T\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \sigma_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$
  - 만약 eigenvalue가 음수이면? $A^TA$는 적어도 positive semidefinite이므로 0보다 크거나 같음
  - $AV = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

# 6.7 Singular Value Decomposition

- (계속) Example $A = U\Sigma V^T$
  - $\Sigma^T\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \sigma_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$
  - $AV = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$
  - $A[\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_r] = [\sigma_1\boldsymbol{u}_1 \quad \sigma_2\boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad \sigma_r\boldsymbol{u}_r]$관계를 이용하면,
  - $\boldsymbol{u}_i = A\boldsymbol{v}_i/\sigma_i$
  - 또는 $[\sigma_1\boldsymbol{u}_1 \quad \sigma_2\boldsymbol{u}_2 \quad \sigma_3\boldsymbol{u}_3] = A[\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \boldsymbol{v}_3]$
  - $[\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \boldsymbol{u}_3] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix} = AV = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$
  - $[\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2] \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2] = U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

# 6.7 Singular Value Decomposition

- Reduced SVD
  - $A[\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_r] = [\sigma_1\boldsymbol{u}_1 \quad \sigma_2\boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad \sigma_r\boldsymbol{u}_r] =$
    $$[\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{u}_r]\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r\end{bmatrix}$$
- Full SVD
  - 입력 벡터 공간 (행벡터 공간)은 $\mathbf{R}^n$공간의 부분 공간이지만, nullspace의 기저 $\boldsymbol{v}_{r+1},, \dots, \boldsymbol{u}_n$ 까지 합친 경우에는 전체 $\mathbf{R}^n$공간을 span할 수 있고, 이때 해당하는 $\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n$은 모두 0임
    ➔ $n \times n$의 직교 행렬을 만들 수 있음
  - 마찬가지로 출력 벡터 공간 (열벡터 공간)은 $\mathbf{R}^m$공간의 부분 공간이지만, 왼쪽 nullspace의 기저 $\boldsymbol{v}_{r+1},, \dots, \boldsymbol{u}_m$까지 합친 경우 ➔ $m \times m$의 직교 행렬
  - $A[\boldsymbol{v}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_n] = [\sigma_1\boldsymbol{u}_1 \quad \cdots \quad \sigma_r\boldsymbol{u}_r \quad \mathbf{0} \quad \cdots] =$
    $$[\boldsymbol{u}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{u}_r \quad \cdots \quad \boldsymbol{u}_m]\underbrace{\left.\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots\end{bmatrix}\right\} m\text{행}}_{n\text{열}}$$

# 6.7 Singular Value Decomposition

- Full SVD
  - $AV = U\Sigma$ ➔ $A = U\Sigma V^T$
  - $U$는 크기가 $m \times m$인 직교행렬임
  - $V$는 크기가 $n \times n$인 직교행렬임
  - $\Sigma$는 rank $r$까지만 대각 행렬이고 나머지는 0인 행렬임

- 계산 과정에서 문제가 없기 위해서는 $A^T A$와 $AA^T$가 같은 eigenvalue를 가져야 한다. 이것은 항상 보장되는가?
- 이보다 좀 더 근본적으로 $AB$와 $BA$가 항상 같은 0이 아닌 eigenvalue를 가짐
  - (증명) 행렬 $AB$가 $AB\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$를 만족하는 eigenvector $\boldsymbol{x}$와 eigenvalue $\lambda$를 가진다고 가정. 이 경우 $B\boldsymbol{x}$는 $BA$의 eigenvector이고 $\lambda$를 eigenvalue 가진다. Why?
  - $BA(B\boldsymbol{x}) = B(AB)\boldsymbol{x} = B(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda(B\boldsymbol{x})$
- 따라서 $A^T A$와 $AA^T$는 항상 같은 eigenvalue를 가져야한다.

# 6.7 Singular Value Decomposition

- Example (이전 결과)
  - $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
  - $V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \boldsymbol{v}_3], \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix}$
  - $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2]$
  - $A = U\Sigma V^T = [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^T \\ \boldsymbol{v}_2^T \\ \boldsymbol{v}_3^T \end{bmatrix} = \sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1^T + \sigma_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{v}_2^T + \sigma_3 \boldsymbol{u}_3 \boldsymbol{v}_3^T$
  - $A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

  $=$

# 6.7 Singular Value Decomposition

- Example
  - $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$
  - $A^T A = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$, $\Sigma^T \Sigma = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$
  - $U = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$
  - $A = \sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1^T + \sigma_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{v}_2^T$

# Principal component analysis

- 주성분 분석 (Principal component analysis; PCA)
  - 행렬 $A$에 가장 가까운 rank-1 행렬은?
  - $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$
- $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 25 \end{bmatrix}$
  - $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 25 - \lambda & 20 \\ 20 & 25 - \lambda \end{vmatrix} = (25 - \lambda)^2 - 20^2 = 0$
  - $\lambda = 25 \pm 20 = 45, 5$
  - $\lambda = 5, \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 20 \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
  - $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = A_1 + A_2 = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$
- 행렬 $A$와 거리가 가장 가까운 rank 1 행렬은?
- 행렬 $A$와 거리가 가장 가까운 rank 2 행렬은?
- 행렬간의 거리란?

# I.11 Norms of Vectors and Functions and Matrices

- Norm이란?
  - 벡터의 norm: 벡터의 크기
    - $\|\boldsymbol{x}\|_2 = (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{1/2}$ ➔ Euclid norm 또는 $l^2$-norm
    - $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max|x_i|$ ➔ $l^\infty$-norm (max norm)
    - $\|\boldsymbol{x}\|_1 = |x_i| + \cdots + |x_n|$ ➔ $l^1$-norm
    - Preference: $\|\boldsymbol{x}\|_2$, $\|\boldsymbol{x}\|_1$, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty$
    - $\|\boldsymbol{x}\|_2$의 문제점: 작은 요소가 너무 작아지는 문제가 있음
  - 행렬의 norm
    - $\|A\|_F = (\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2)^{1/2}$ ➔ Frobenius norm
    - $\|A\| = \max \sigma_i$
    - $\|A\| = \sigma_1 + \cdots + \sigma_r$

# I.11 Norms of Vectors and Functions and Matrices

- Orthogonal invariance
  - 직교 행렬 $Q$로 기저 변환 (또는 좌표축 변환)을 했을 때 변하지 않는 값들
  - 벡터의 길이: $(Q\boldsymbol{x})^T Q\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}$
  - 행렬 $A = U\Sigma V^T$의 singular value $\sigma$: $Q_1 A Q_2 = Q_1 U \Sigma V^T Q_2$
    - 직교 행렬의 곱은 직교 행렬임
  - Spectral norm $\|A\|_2 = \sigma_1$
  - Nuclear norm $\|A\|_N = \sum \sigma_i$
  - Frobenius norm $\|A\|_F = (\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2)^{1/2} = \sqrt{\mathrm{tr}(A^T A)}$
  - 단위 행렬($I$)의 경우
    - $\|I\|_2 = 1$
    - $\|I\|_N = n$
    - $\|I\|_F = \sqrt{n}$