선형 대수 숙제 #6

본 숙제는 별도의 채점을 하지 않습니다.

(문제 1~2) 본 문제는 대칭 행렬의 경우 2개의 중복된 eigenvalue를 가지면 이에 해당하는 eigenvector는 2차원의 공간을 생성한다는 것을 확인하기 위한 문제이다.

1. 행렬 $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -24 \\ 0 & -24 & -7 \end{bmatrix}$의 eigenvalue와 eigenvector를 구하시오.

2. 위의 문제에서 중복된 eigenvalue의 값과 그에 해당하는 2차원의 eigenvector 공간의 직교하는 기저를 적으시오.

(문제 3~7) 행렬 A가 주어졌을 때, eigenvector를 구하여 이들을 열벡터로 가지는 행렬 S를 만들면, $AS = S\Lambda$의 관계를 가진다. (여기서 Λ는 행렬 A의 eigenvalue들을 대각 성분으로 가지는 대각 행렬이다.) 특히 행렬 A가 대칭 행렬일 경우에는 모든 eigenvector들이 서로 직교하게 되므로, 이들의 단위 벡터들을 열벡터로 가지는 행렬 S는 직교 (orthogonal) 행렬이 된다 ($S = Q$). 따라서 orthogonal 행렬의 성질에 따라 $Q^T = Q^{-1}$의 성질을 가진다. 이 관계를 이용하여 수업 시간에 $A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^T$ 관계를 얻었다. 아래 문제에서는 이를 역으로 이용하여 원하는 eigenvalue를 가지는 행렬을 합성하고자 한다.

3. 두 벡터 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$은 서로 직교한다. 이들의 단위 행렬을 열벡터로 가지는 직교 행렬 $Q = [\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2]$를 구하시오.

4. 직교 행렬 Q 의 역행렬 Q^{-1}을 구하시오.

5. 두 벡터 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$를 eigenvector로 하고, 각각의 eigenvector가 대응하는 eigenvalue값 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$을 가질 수 있도록 대각 행렬 $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix}$을 구하시오.

6. 문제 3~5번에서 구한 모든 행렬들을 합성하여 $A = Q\Lambda Q^T$을 구하시오.

7. 문제 6번에서 구한 행렬 A의 eigenvalue와 eigenvector를 구하시오.

(문제 8~12) 대칭 행렬 S가 주어졌을 때, 이 행렬이 positive definite인지 확인하는 방법에는 여러 가지가 존재한다. 이번 문제는 대칭행렬 $S = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$에 대해 이러한 다양한 방법들을 이용해 확인하는 문제이다.

8. 주어진 행렬 S의 모든 eigenvalue들을 구하여, 모든 eigenvalues들이 양수임을 보이시오.

9. 주어진 행렬 S의 $\boldsymbol{x}^T S \boldsymbol{x}$ 가 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 이면, 항상 0보다 큼을 보이시오. (힌트: 수업시간에 진행한 $\boldsymbol{x}^T S \boldsymbol{x} = a \cdot q_1^2 + b \cdot q_2^2$ 의 형태로 만들면 됨.)

10. 모든 pivot값들을 구하여 이 값들이 모두 양수임을 보이시오.

(참고: 모든 pivot 값들이 양수이면 positive definite 행렬임.)

11. 주어진 행렬의 왼쪽 상단부터 1×1 행렬인 [5] 와 2×2 행렬인 $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$에 대해 이들 행렬들의 행렬식 값이 모두 양수임을 보이시오.

(참고: 주어진 대칭 행렬 S의 크기가 $n \times n$ 일 때, 왼쪽 상단부터 a_{11} 성분을 포함하면서 크기가 $1 \times 1, 2 \times 2, \ldots, n \times n$인 부분 행렬들 (upper left matrix)을 만들고 이들 행렬 모두의 행렬식 (upper left determinant라고 불림) 값이 양수이면, 행렬은 positive definite임. 여기서 부분 행렬은 cofactor같이 특정한 행과 열을 제외한 형태는 아니고, 아래 그림과 같이 원래 행렬의 대각 성분을 같은 위치에 가지는 upper left 부분 행렬들만 계산하면 됨.)

$$\begin{Vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

12. 주어진 행렬 S를 $S = A^T A$ 형태로 분해할 수 있는 A 행렬을 찾으시오. (힌트: Cholesky 분해 이용). A 행렬의 열들은 독립인가?

(참고: 이와 같은 분해를 했을 때, A 행렬의 모든 열들이 독립이면 positive definite, 아니면 positive semidefinite임.)

(문제 13~16) 행렬 A의 eigenvalue와 eigenvector를 알고 있을 때, 닮은 행렬 $B = M^{-1}AM$의 eigenvalue와 eigenvector를 유추하는 문제이다. 행렬 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$이 주어졌을 때, 다음 질문에 답하시오.

13. 행렬 A의 닮은 행렬 $B = M^{-1}AM$를 구하시오.

14. 행렬 A의 eigenvalue와 eigenvector를 구하시오.

15. 문제 14번의 답과 M을 이용하여 행렬 B의 eigenvector를 구하시오.

16. 문제 15번에서 얻은 eigenvector들이 행렬 B의 eigenvector임을 확인하시오.

(문제 17~18) 행렬 F의 eigenvector가 (1,2)와 $(1, -1)$임이 알려져 있고, 행렬G가 행렬 F와 $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 행렬을 통해 닮은 관계($F = M^{-1}GM$)에 있음이 알려져 있을 때, 다음 질문에 답하시오.

17. 행렬 G의 eigenvector들을 구하시오.

18. 행렬 F는 대칭 행렬인가?

19. 대칭 행렬 X가 행렬 Y와 직교 행렬 Q를 통해 닮은 관계에 있음이 알려져 있을 때, 행렬 Y는 항상 대칭 행렬이라고 말할 수 있는가?