

PRML4.13

2022 年 8 月 15 日

(問題)

ロジスティックシグモイドの微分に対する結果 (4.88) を使って、ロジスティック回帰モデルに対する誤差関数 (4.90) の微分が、(4.91) で与えられることを示せ。

$$\frac{d\sigma}{da} = \sigma(1 - \sigma) \quad (4.88)$$

$$E(\mathbf{w}) = -\ln p(\mathbf{t}|\mathbf{w}) = -\sum_{n=1}^N (t_n \ln y_n - (1 - t_n) \ln(1 - y_n)) \quad (4.90)$$

$$\nabla E(\mathbf{w}) = \sum_{n=1}^N (y_n - t_n) \phi_n \quad (4.91)$$

(解答)

以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \nabla E(\mathbf{w}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} E(\mathbf{w}) \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \left(-\sum_{n=1}^N (t_n \ln y_n + (1 - t_n) \ln(1 - y_n)) \right) \\ &= -\sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} t_n \ln y_n + \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} (1 - t_n) \ln(1 - y_n) \right) \\ &= -\sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial y_n} t_n \ln y_n \frac{\partial}{\partial a} \sigma(a) \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \mathbf{w}^\top \phi_n + \frac{\partial}{\partial y_n} (1 - t_n) \ln(1 - y_n) \frac{\partial}{\partial a} \sigma(a) \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \mathbf{w}^\top \phi_n \right) \\ &= -\sum_{n=1}^N \left(\frac{t_n}{y_n} y_n (1 - y_n) \phi_n + (-1) \frac{1 - t_n}{1 - y_n} y_n (1 - y_n) \phi_n \right) \\ &= -\sum_{n=1}^N (t_n (1 - y_n) \phi_n - (t_n - 1) y_n \phi_n) \\ &= -\sum_{n=1}^N (t_n - t_n y_n + t_n y_n - y_n) \phi_n \\ &= \sum_{n=1}^N (y_n - t_n) \phi_n \end{aligned}$$