PRML4.5

2022年8月7日

(問題)

(4.20),(4.23) と (4.24) を使って、フィッシャーの判別規準 (4.25) が (4.26) の形で書けることを示せ。

(解答)

$$y = \mathbf{w}^\top \mathbf{x} \tag{4.20}$$

$$m_k = \mathbf{w}^\top \mathbf{m}_k \tag{4.23}$$

$$s_k^2 = \sum_{n \in C_k} (y_n - m_k)^2 \tag{4.24}$$

$$J(\mathbf{w}) = \frac{(\mathbf{m_2} - \mathbf{m_1})^\mathbf{2}}{\mathbf{s_1^2} + \mathbf{s_2^2}} \tag{4.25}$$

$$J(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}^\top \mathbf{S}_\mathrm{B} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^\top \mathbf{S}_\mathrm{W} \mathbf{w}} \tag{4.26}$$

$$\mathbf{S}_\mathrm{B} = (\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1)(\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1)^\top \tag{4.27}$$

$$\mathbf{S}_\mathrm{W} = \sum_{n \in \mathcal{C}_1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_1)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_1)^\top + \sum_{n \in \mathcal{C}_2} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_2)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_2)^\top \tag{4.28}$$

式 (4.23),(4.24) より

$$\begin{aligned}
s_k^2 &= \sum_{n \in \mathcal{C}_k} (\mathbf{w}^\top \mathbf{x}_n - \mathbf{w}^\top \mathbf{m}_k)^2 \\
&= \sum_{n \in \mathcal{C}_k} (\mathbf{w}^\top (\mathbf{x}_n - \mathbf{m}_k))^2 \\
&= \sum_{n \in \mathcal{C}_k} ((\mathbf{x}_n - \mathbf{m}_k)^\top \mathbf{w})^2 \\
&= \sum_{n \in \mathcal{C}_k} ((\mathbf{x}_n - \mathbf{m}_k)^\top \mathbf{w})^\top ((\mathbf{x}_n - \mathbf{m}_1)^\top \mathbf{w}) \\
&= \sum_{n \in \mathcal{C}_k} \mathbf{w}^\top (\mathbf{x}_n - \mathbf{m}_k)(\mathbf{x}_n - \mathbf{m}_k)^\top \mathbf{w}
\end{aligned}$$

以上の式より

$$
\begin{aligned}
J(\mathbf{w}) &= \frac{(\mathbf{w}^\top \mathbf{m}_2 - \mathbf{w}^\top \mathbf{m}_1)^2}{\sum_{n \in \mathcal{C}_1} \mathbf{w}^\top (\mathbf{x}_n - \mathbf{m}_1)(\mathbf{x}_n - \mathbf{m}_1)^\top \mathbf{w} + \sum_{n \in \mathcal{C}_2} \mathbf{w}^\top (\mathbf{x}_n - \mathbf{m}_2)(\mathbf{x}_n - \mathbf{m}_2)^\top \mathbf{w}} \\
&= \frac{\mathbf{w}^\top (\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1)(\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1)\mathbf{w}}{\mathbf{w}^\top \left(\sum_{n \in \mathcal{C}_1} (\mathbf{x}_n - \mathbf{m}_1)(\mathbf{x}_n - \mathbf{m}_1)^\top + \sum_{n \in \mathcal{C}_2} (\mathbf{x}_n - \mathbf{m}_2)(\mathbf{x}_n - \mathbf{m}_2)^\top \right) \mathbf{w}} \\
&= \frac{\mathbf{w}^\top \mathbf{S}_{\mathrm{B}} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^\top \mathbf{S}_{\mathrm{W}} \mathbf{w}}
\end{aligned}
$$

(補足) フィッシャーの線形判別とはクラス間分散とクラス内分散の比を最大にするような $\mathbf{w}$ で射影し、入力データの次元を減らすような特徴量抽出の手法である。あくまで特徴量抽出の手法であって、これ自体が識別を行うものではないが、しきい値を決めることで識別を行うことが出来る。