PRML 解答集

2022 年 4 月 3 日

$$p(w|t) \propto p(t|w)p(w)$$

(3.10),(3.48) より、

$$\begin{aligned}
&\propto \left(\prod_{n=1}^{N} exp\left[-\frac{1}{2} \left\{ t_n - w^T\phi(x_n) \right\}^2 \beta \right] \right) exp\left[-\frac{1}{2}(w-m_0)^T S_0^{-1}(w-m_0) \right] \\
&= exp\left[-\frac{1}{2} \left\{ \beta \sum_{n=1}^{N} \left(t_n - w^T\phi(x_n) \right)^2 + (w-m_0)^T S_0^{-1}(w-m_0) \right\} \right]
\end{aligned}$$

以下では exp の中の $-\frac{1}{2}$ の中身を見ていく。ふろくの「2 つの正規分布の同一性」、ここでは w の次数ごとの係数を調べていきます。そのため w で式をくくっていきます。

$$= \beta \begin{pmatrix} t_1 - w^T\phi(x_1) \\ \vdots \\ t_N - w^T\phi(x_N) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} t_1 - w^T\phi(x_1) \\ \vdots \\ t_N - w^T\phi(x_N) \end{pmatrix} + (w-m_0)^T S_0^{-1}(w-m_0)$$

$w^T\phi(x_1) = \phi^T(x_1)w$ なので

$$= \beta \begin{pmatrix} t_1 - \phi^T(x_1)w \\ \vdots \\ t_N - \phi^T(x_N)w \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} t_1 - \phi^T(x_1)w \\ \vdots \\ t_N - \phi^T(x_N)w \end{pmatrix} + (w-m_0)^T S_0^{-1}(w-m_0)$$

ここで、

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^T(x_1) \\ \vdots \\ \phi^T(x_N) \end{pmatrix}$$

であるので、定数項を C とおくとして

$$\begin{aligned}
&= \beta(t-\Phi w)^T(t-\Phi w) + (w-m_0)^T S_0^{-1}(w-m_0) \\
&= \beta(w^T\Phi^T\Phi w - w^T\Phi^T t - t^T\Phi w) + w^T S_0^{-1} w - w^T S_0^{-1} m_0 - m_0^T S_0^{-1} w + C
\end{aligned}$$

S_0 は共分散なので対称行列となる。よってその逆行列も対称行列なので $(S_0^{-1})^T = S_0^{-1}$。

$$= w^T(S_0^{-1} + \beta\Phi^T\Phi)w - w^T(S_0^{-1}m_0 + \beta\Phi^T t) - (S_0^{-1}m_0 + \beta\Phi^T t)^T w + C$$

ここで $R = S_0^{-1}m_0 + \beta\Phi^T t$ とすると
(3.49) を書き下して上記の式と一致することを確認する。

$$N(w|m_N, S_N) \propto exp\left\{-\frac{1}{2}(w - m_N)^T S_N^{-1}(w - m_N)\right\}$$

ここでも exp の中の $-\frac{1}{2}$ の中のみを見ていきます。

$$(w - m_N)^T S_N^{-1}(w - m_N)$$

ここで、 m_N, S_N はそれぞれ以下のように与えられています。

$$\begin{aligned} m_N = S_N(S_0^{-1}m_0 + \beta\Phi^T t) = S_N R \\ S_N^{-1} = S_0^{-1} + \beta\Phi^T\Phi \end{aligned}$$

ここで S_N は事後分布から導き出した目標の式にも出てきますので展開せず、 m_N を展開していきます。

$$\begin{aligned} (w - m_N)^T S_N^{-1}(w - m_N) \\ = (w - S_N R)^T S_N^{-1}(w - S_N R) \\ = w^T S_N^{-1} w - w^T R - R^T w + C \end{aligned}$$

よって、事後分布 $p(w|t)$ と $N(w|m_N, S_N)$ は同じ正規分布となります。