구면 조화 함수의 덧셈 정리와 어소시에이션 스킴, 1부

김경탁

1. 서론

이 글은 1부와 2부로 나누어 진행할 예정입니다. 1부에서는 구면 조화 함수와 그들의 덧셈 정리에 대한 고전적 이론을 짧고 명료한 수학적 전개를 통해 소개하여, 독자들의 관심을 끌고자 합니다. 2부에서는 어소시에이션 스킴이라는 조합론적 주제를 먼저 소개한 후, 1부에서 다룬 덧셈 정리의 철학을 반영하여 어소시에이션 스킴의 정의를 이용한 조합론적 덧셈 정리를 구축해 보고자 합니다.

1.1. 물리학과 수학, 그리고 수리물리학

물리학은 말 그대로 사물의 이치를 해명하고자 하는 명백한 자연 과학입니다. 이에 반해, 수학은 언어학적 아름다움을 추구하는 인문학적인 성격이 짙습니다. 공리와 정의로부터 논리를 사용해 시적인 아름다움을 추구하며 만들어 나가는 일종의 언어학이라 할 수 있죠.

학부 시절 물리학을 공부할 때, 저는 수리물리학이라는 과목을 이해하기 위해 고군분투했던 기억이 납니다. 수리물리학은 물리학을 기술하기 위한 수학적 언어를 익히는 실전적인 과목입니다. 고전 역학만 하더라도, 뉴턴 역학은 뉴턴 방정식으로 나타나는 다양한 미분 방정식을 배우고 풀어야만 하고, 또 해밀턴 역학을 이해하기 위해서는 해밀턴 방정식과 푸아송 브라켓, 즉 사교 기하학의 기초 원리를 배워야 하며, 라그랑주 역학은 최소 작용의 원리로부터 (수학적으로 잘 정의하기도 어려운 “변분법”을 사용하여) 오일러-라그랑주 방정식을 유도합니다. 그뿐만이 아닙니다. 리 군과 리 대수(대표적으로 SU(2)나 SO(3) 같은 행렬군과 그들의 리 대수 $\mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{so}(3)$)의 구조와 표현, 복소 적분, 라플라스 및 푸리에 변환, 섭동 이론, 미분 다양체, 접속 및 게이지 이론과 같은 대수학, 해석학, 기하학의 핵심 주제들도 수리물리학에서 다룹니다. 양자역학과 전자기학을 이해하기 위해서 디랙 델타 함수, 그린 함수와 같은 이상한 함수들을 접하고, 다중극 전개 및 여러가지 상황들 속에서 만나는 다양한 특수 함수들을 배우고 그 성질들을 익혀야만 합니다. 그러니, (수학자가 된 지금에와서 돌이켜 보아도) 사실 학부 수리물리학은 벅찬 과목임에 틀림 없는 것 같습니다.

1.2. 수소의 슈뢰딩거 방정식

이러한 수리물리학을 열심히 배운 후, 학부 양자역학의 한 부분에서는 수소를 푸는 문제를 집중적으로 다루게 됩니다. 여기서 “수소를 푼다”는 의미는, 한 개의 전자가 한 개의 양성자로부터 전기적 인력을 받는 가장 단순한 2체 문제에 대한 해밀토니안을 구성하고, 이 해밀토니안에 대한 슈뢰딩거 방정식을 풀어서 전자의 파동 함수 $\Psi(x)$를 계산하는 것을 의미합니다. 즉, 전자의 존재 확률 밀도를 나타내는 함수 $\Psi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{C}$를 구하고, 다음과 같은 정규화 조건, $\int_{x\in\mathbb{R}^3}|\Psi(x)|^2\,\mathrm{d}x=1$을 만족하는 함수 $\Psi(x)$를 찾는 것입니다. 수소 원자의 문제는 양자역학에서 수학적으로 완전히 명확하게 풀리는 몇 안 되는 아주 중요한 예제 중 하나이므로, 이 문제에 대해서 서론에서 간략히 다루도록 하겠습니다.

양성자(점입자)가 원점에 고정 되어 있는 삼차원 좌표계를 생각하고, 전자(점입자)의 위치 벡터를 $x\in\mathbb{R}^3$라고 하겠습니다. 그러면 전자의 고전적인 해밀토니안은 다음과 같습니다:

$$H=\text{운동에너지}+\text{위치에너지}=\frac{p^2}{2m}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0|x|}. \tag{1.1}$$

여기서, m은 전자의 질량, $p=mv$는 전자의 선운동량, e는 전자의 전하량, ε_0는 진공에서의 유전율(permittivity, 誘電率)이라고 불리는 상수입니다.

양자역학에서는 계의 총 에너지를 나타내는 스칼라값인 해밀토니안을 양자화합니다. 여기서 “양자화한다”는 의미는 물리량을 연산자(operator)로 바꾸어 생각한다는 뜻입니다. 선운동량 p를 양자화한 연산자 $\widehat{p}=-\sqrt{-1}\hbar\nabla$를 고려하면(여기서, $\hbar$는 플랑크 상수이며, ∇는 $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$를 의미합니다), 수식 (1.1)은 다음과 같이 양자화됩니다:

$$\widehat{H}=\frac{\widehat{p}\circ\widehat{p}}{2m}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0|x|}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0|x|}=-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0|x|}.$$

따라서, 전자의 파동 함수 Ψ에 대한 (시간 독립) 슈뢰딩거 방정식 $\widehat{H}\Psi(x) = E\Psi(x)$는 다음과 같은 편미분 방정식이 됩니다:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\triangle - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0|x|}\right)\Psi(x) = E\Psi(x). \tag{1.2}$$

여기서, $\triangle = \nabla^2$는 라플라시안 연산자입니다.

(주: 참고로, (시간 독립) 슈뢰딩거 방정식은 양자화된 해밀토니안 연산자에 대한 고유 방정식이며, 이는 행렬의 고유치와 고유 벡터를 구하는 것과 유사합니다. 슈뢰딩거 방정식에서는 고유 벡터에 해당하는 부분이 파동 함수의 기저로 나타나고, 고유치에 해당하는 부분이 그 기저가 가지는 에너지로 해석됩니다. 그리고 일반적인 파동 함수는 이러한 기저들의 (복소) 일차 결합으로 나타낼 수 있다는 것이 양자 역학의 철학입니다.)

하지만 시스템 자체의 대칭성을 고려한다면, 직교 좌표계보다 구면 좌표계 (r, θ, φ), $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$를 사용하는 것이 훨씬 합리적입니다. 참고로, 라플라시안 연산자 $\triangle = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$의 구면 좌표계에서의 표현은 다음과 같습니다:

$$\triangle = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{(\partial\varphi)^2}.$$

수식 (1.2)와 같은 편미분 방정식은 그 풀이법이 많이 연구되어 잘 알려져 있습니다. 이를 풀기 위해, 해가 다음과 같이 변수 분리가 되어 나타난다고 가정합니다:

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\cdot\Theta(\theta)\cdot\Phi(\varphi). \tag{1.3}$$

(주: 변수 분리가 가능하다고 가정하여 편미분 방정식의 특수해들을 먼저 구한 다음, 그것들의 일차 결합으로 일반해를 표현할 수 있다는 것이 여기서 사용되는 변수 분리 안자츠입니다.)

물론 여기서는 그 과정이 너무 길어 변수 분리법으로 이 편미분 방정식을 푸는 해법은 생략해야겠지만, 그 특수해들은 다음과 같이 3개의 변수로 매개화 된다는 사실이 잘 알려져 있습니다:

$$\Psi_{n,\ell,m} = |n, \ell, m\rangle = R(r)\cdot\Theta(\theta)\cdot\Phi(\varphi).$$

여기서, 매개 변수 n, ℓ, m은 다음과 같은 범위의 값을 가지며, 각자 고유한 이름이 붙어 있습니다:

$n = 1, 2, 3, \ldots$	(주 양자수, principal quantum numbers, 主量子數),
$\ell = 0, 1, \ldots, n-1$	(방위 양자수, azimuthal quantum numbers, 方位量子數),
$m = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell-1, \ell$	(자기 양자수, magnetic quantum numbers, 磁氣量子數).

(참고: 방위 양자수 ℓ은 부 양자수, 궤도 양자수 또는 각운동량 양자수라고도 불립니다. 네 번째 양자수인 "스핀 양자수(spin quantum number)"는 이후에 발견되어 추가되었습니다.)

또한, 특수해 $\Psi_{n,\ell,m}$은 다음과 같은 직교성도 가지고 있습니다:

$$\langle n, \ell, m | n', \ell', m'\rangle = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{\infty}\overline{\Psi_{n,\ell,m}}\,\Psi_{n',\ell',m'}\,r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \delta_{n,n'}\,\delta_{\ell,\ell'}\,\delta_{m,m'}.$$

그리고, 특수해 $\Psi_{n,\ell,m}$에 대해 슈뢰딩거 방정식의 고유치에 해당하는 부분도 계산할 수 있습니다. $\Psi_{n,\ell,m}$이 가지는 에너지는 다음 수식에서 볼 수 있듯이 오직 주 양자수에만 의존합니다:

$$\widehat{H}\Psi_{n,\ell,m} = E\Psi_{n,\ell,m}, \qquad E = E_n = -\frac{me^4}{2(4\pi\varepsilon_0\hbar)^2 n^2}.$$

(주: E_n은 수소 원자의 스펙트럼에서 관찰되는 에너지 준위입니다.)

정확하게 표현하자면, $\Psi_{n,\ell,m}$의 "방사해(radial part solution) $R(r)$"는 다음과 같습니다(아래 수식에서 볼 수 있듯이, 방사해 $R(r)$는 오직 주 양자수 n과 방위 양자수 ℓ에만 의존하며, 자기 양자수 m에는 의존하지 않습니다):

$$R(r) = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3\frac{(n-\ell-1)!}{2n(n+\ell)!}}\,e^{-\frac{r}{na_0}}\left(\frac{2r}{na_0}\right)^{\ell} L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right).$$

여기서, $a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}$ ($\approx 5.2917721054482 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}$)는 "보어 반경(Bohr radius)"이라 불리는 상수이며, $L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}$은 차수가 $n-\ell-1$인 "일반화된 라게르 다항식(generalized Laguerre polynomial)"입니다.

한편, $\Psi_{n,\ell,m}$의 "각도해(angular part solution) $Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\cdot\Phi(\varphi)$"는 "3차원 구면 조화 함수"라고 불리며, 다음과 같습니다(아래 수식에서 볼 수 있듯이, $\Psi_{n,\ell,m}$의 각도해 Y_ℓ^m은 오직 방위 양자수 ℓ과 자기 양자수 m에만 의존하며, 주 양자수 n과는 무관합니다):

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\cdot\Phi(\varphi) = (-1)^m\sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\,P_\ell^m(\cos\theta)\,e^{\sqrt{-1}m\varphi}. \tag{1.4}$$

여기서, P_ℓ^m은 "버금 르장드르 다항식(associated Legendre polynomial)"입니다.

1.3. 라플라스 미분 방정식, 입체 조화 함수

3차원 구면 조화 함수 $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$는 "라플라스 미분방정식 $\triangle f = 0$"을 연구할 때도 등장하는 함수입니다. 실제로, $\triangle(r^\ell\cdot Y_\ell^m(\theta,\varphi)) = 0$임이 알려져 있습니다. 라플라스 미분방정식의 해를 "조화 함수(harmonic function)" 또는 "입체 조화 함수(solid harmonic function)"라고 부르며, 구면 조화 함수 $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$는 사실 입체 조화 함수 $r^\ell\cdot Y_\ell^m(\theta,\varphi)$를 구면($r=1$)으로 제한한 함수라고 생각할 수 있습니다.

1.4. 3차원 구면 조화 함수 = 전자 궤도 구름 함수

구면 조화 함수 Y_ℓ^m의 "실수형(real form) $Y_{\ell,m}$"을 다음과 같이 정의하겠습니다:

$$Y_{\ell,m}(\theta,\varphi) := \begin{cases} \sqrt{2}\,\mathfrak{Im}\,Y_\ell^{-m}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_\ell^m(\theta,\varphi) - (-1)^m Y_\ell^{-m}(\theta,\varphi)\right) & \text{if } m<0,\\ Y_\ell^0(\theta,\varphi) & \text{if } m=0,\\ \sqrt{2}\,\mathfrak{Re}\,Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_\ell^m(\theta,\varphi) + (-1)^m Y_\ell^{-m}(\theta,\varphi)\right) & \text{if } m>0. \end{cases}$$

실수형 $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$는 물리학 또는 화학 책에서 자주 접하는 "전자 궤도 구름 함수"입니다.

(참고: 버금 르장드르 다항식 P_ℓ^m은 $P_\ell^{-m} = (-1)^m\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}P_\ell^m$을 만족합니다. 반면, 수식 (1.4)에 따르면, 구면 조화 함수 Y_ℓ^m는 매우 대칭적입니다: 즉, $Y_\ell^{-m} = (-1)^m\overline{Y_\ell^m}$을 만족합니다.)

FIGURE 1. https://en.wikipedia.org/wiki/Table_of_spherical_harmonics

1.5. 3차원 구면 조화 함수의 덧셈 정리

앞에서 간략히 살펴 보았듯이 3차원 구면 조화 함수 $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$은 양자역학 수소 문제의 각도해(또는 고전적인 라플라스 미분방정식의 각도해)에 해당한다는 사실을 알았습니다.

3차원 공간 $\mathbb{R}^3$에 들어 있는 2차원 구면 $\mathbb{S}^2 = \{\xi\in\mathbb{R}^3 : |\xi| = 1\}$를 생각해 봅시다. 만일, $\xi,\eta\in\mathbb{S}^2$이고 ξ와 η의 구면 좌표가 각각 $(1,\theta_1,\varphi_2)$, $(1,\theta_2,\varphi_2)$이라면, 구면 조화 함수에 대해서 다음과 같은 성질(덧셈 공식 또는 덧셈 정리라고 불립니다)이 성립함이 잘 알려져 있습니다:

$$\forall\xi,\eta\in\mathbb{S}^2,\quad P_\ell(\xi\circ\eta) = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta_1,\varphi_1)\,\overline{Y_\ell^m(\theta_2,\varphi_2)}. \tag{1.5}$$

여기서, P_ℓ은 차수가 ℓ인 르장드르 다항식(Legendre polynomial)이고, 내적 $\xi\circ\eta$은 직교 좌표계로의 변환에 의하면 다음과 같이 계산됩니다:

$$\begin{aligned} \xi\circ\eta &= \sin\theta_1\cos\varphi_1\sin\theta_2\cos\varphi_2 + \sin\theta_1\sin\varphi_1\sin\theta_2\sin\varphi_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2\\ &= \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \cos\theta_1\cos\theta_2. \end{aligned}$$

수식 (1.5)를 증명하는 작업은, 개인적인 의견으로는, 학부 수리물리학 과정 중 가장 힘들었던 기억을 가진 문제 중의 하나라 생각됩니다(물론, 연습 문제는 아닙니다).

(주: 사실 수식 (1.4)에 의하면 구면 조화 함수는 일종의 버금 르장드르 다항식이므로, 수식 (1.5)를 증명한다는 것은 결국 특수 함수의 어떤 성질을 증명하는 것이라 볼 수 있습니다.)

1.6. 왜 이런 것을 생각하는 것일까요

수학자 T. Koornwinder의 논문 [1]은 다음과 같은 말로 시작합니다:

> "Many classes of special functions can be considered as generalizations of the cosines. It is one of the objects of special function theory to extend both the formal properties of the cosines and the harmonic analysis for Fourier–cosine series or integrals to these classes of special function. ..."

번역 하자면,

"많은 종류의 특수 함수들은 코사인 함수의 일반화로 간주될 수 있다. 특수 함수 이론의 목표 중 하나는 코사인 함수의 성질과 푸리에-코사인 급수(또는 적분)에 대한 조화 해석학을 이러한 특수 함수의 종류로 확장하는 것이다. ..."

물론, 독자분들도 이미 아시다시피, 코사인 함수의 덧셈 정리는 다음과 같습니다:

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}, \quad \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2. \tag{1.6}$$

수식 (1.5)는 수식 (1.6)의 일반화라 할 수 있겠습니다.

2. 본론

본론에서는 구면 조화 함수와 그들의 덧셈 정리에 대해 수학적으로 면밀히 살펴보겠습니다. 특히, "직교군의 표현론" 관점에서 접근하고자 합니다. 이 분야에 익숙한 독자분들이 아주 많지는 않을 것이라 예상되므로, 간략하면서도 자세한 설명을 통해 독자분들의 수학적 관심을 불러일으키는 것이 1부 글의 주요 목적입니다. 본론에서는 특히, 3차원뿐만 아니라 일반 차원 $d > 1$에 대한 구면 조화 함수의 덧셈 정리를 소개하고, 그에 대한 완전한 증명을 제공하려 합니다.

본문의 내용은 잘 알려진 기본적인 사실들을 정리하고, 부족한 부분을 보충하여 저만의 관점으로 재구성한 글입니다. 수학에 관심 있는 일반 독자들을 대상으로 작성했지만, 글의 형식은 산문보다는 서베이 논문에 가깝습니다. 하지만, 독자분들이 마음 편히 읽을 수 있도록, 최대한 이해하기 쉽고, 명확하고 짧게 기술하기 위해 많은 시간과 노력을 들였습니다. 특히 § 2.6의 내용과 그림은 잘 설명되어진 자료를 찾기 어려워 제가 직접 기술하였습니다. 이 분야에 흥미가 있는 독자분들은 참고 문헌(예: [2, 3, 4, 5])을 참조하시기 바랍니다.

문자 d는 기하학적 차원을 나타내는 기호로, 본문 전체에서 고정하여 사용할 것입니다. 또한, 기호 A가 d차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^d$와 관련이 있음을 나타내고자 할 때, $A = A^{(d)}$라는 표현을 쓰겠습니다. 예를 들어, $x \in \mathbb{R}^d$인 경우 $x = x^{(d)}$라 적겠습니다. 물론, 여기서 "기호 A가 유클리드 공간 $\mathbb{R}^d$와 관련이 있다"는 표현은 비공식적인 의미이며, 엄밀한 수학적 정의는 아닙니다.

본문에 속한 각각의 절에서 문맥상 필수적이거나 기초적인 지식이 아닌 경우, 또는 덧셈 정리의 유도와 직접적으로 관련이 없는 절의 제목 앞에는 "✻" 기호를 붙이도록 하겠습니다.

2.1. 감마 함수

수학의 아름다움을 잘 간직하고 있는 감마 함수의 기본 정의로부터 본문을 시작하겠습니다:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}_{>0}. \tag{2.1}$$

감마 함수의 가장 잘 알려진 성질은 다음과 같습니다(어렵지 않게 증명 가능합니다):

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \qquad x \in \mathbb{R}_{>0}$$

수식 (2.1)에 의하면 $\Gamma(1) = 1$이므로, $n \geqslant 0$에 대해 $\Gamma(n+1) = n!$을 얻습니다. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ 값은 얼마일까요? $x = \sqrt{t}$라 치환하면 $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$이므로 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$입니다. 우리는 미분적분학 시간에서 $\Gamma(\frac{1}{2})^2$의 중적분값을 극좌표로 치환해서 푸는 법을 배웁니다:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}\mathrm{d}y = \int_{x=-\infty}^\infty \int_{y=-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^\infty e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r = \pi.$$

그러므로 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$입니다. 특별히, $\Gamma(\frac{2n+1}{2}) = \Gamma(n+\frac{1}{2})$값을 구해보면 다음과 같습니다:

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}.$$

2.2. 베타 함수

감마 함수와 아주 밀접한 관련이 있는 함수로서 베타 함수라는 것이 있습니다:

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t, \qquad x, y \in \mathbb{R}_{>0}.$$

다음과 같은 사실이 잘 알려져 있습니다(역시 어렵지 않게 증명 가능합니다):

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \qquad x, y \in \mathbb{R}_{>0}.$$

2.3. 기초 구면 기하학

d차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^d = \{x = (x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{R}^d \ : \ x_i \in \mathbb{R}\}$는 자연스러운 벡터 내적과 벡터 크기를 가지고 있습니다: $\forall x = (x_1,\ldots,x_d),\ y = (y_1,\ldots,y_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$x \circ y := \sum_{i=1}^{d} x_i y_i, \qquad |x| := \sqrt{(x \circ x)}.$$

$\mathbb{R}^d$의 표준 기저는 $e_1,\ldots,e_d$라고 표기하겠습니다. $d-1$차원 구면은 다음과 같이 정의됩니다:

$$\mathbb{S}^{d-1} := \{\xi \in \mathbb{R}^d \ : \ |\xi| = 1\}.$$

구면상의 두 점 $\xi,\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$을 생각해 봅시다. 두 점 사이의 유클리드 거리는 다음과 같습니다:

$$|\xi-\eta| = \sqrt{(\xi-\eta)\circ(\xi-\eta)} = \sqrt{2(1-\xi\circ\eta)}.$$

두 점 사이를 연결하는 구면상의 측지선의 길이는 두 벡터 사이의 끼인 각과 같습니다:

$$\gamma(\xi,\eta) := \cos^{-1}(\xi\circ\eta) \in [0,\pi].$$

고등학생도 알고 있는(?) 사인 함수의 기본적인 성질을 고려합시다:

$$\frac{2}{\pi}t \leqslant \sin t \leqslant t, \qquad t \in [0,\pi/2]. \tag{2.2}$$

만일 $\gamma(\xi,\eta) = 2t \in [0,\pi]$로 치환한다면, $\cos(2t) = \cos(\gamma(\xi,\eta)) = \xi\circ\eta$가 됩니다. 또한, 사인 함수의 반각 공식($\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$)을 이용하면 다음을 얻게 됩니다:

$$\sin t = \sqrt{\sin^2 t} = \sqrt{\frac{1-\cos(2t)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\xi\circ\eta}{2}} = \frac{\sqrt{2(1-\xi\circ\eta)}}{2} = \frac{|\xi-\eta|}{2}.$$

이를 수식 (2.2)에 다시 집어 넣으면 다음의 결과를 얻습니다:

$$\frac{2}{\pi}\gamma(\xi,\eta) \leqslant |\xi-\eta| \leqslant \gamma(\xi,\eta).$$

이 사실은, 구면상에서는 유클리드 거리를 재나 측지선의 길이를 재나 (국소적으로는) 크게 차이가 없음을 의미합니다; 수학적으로, “두 거리 함수는 동치다”라고 표현합니다.

2.4. 덧셈 정리의 좌변에 대하여

수식 (1.5)와 수식 (1.6)에서 좌변은 각각 $P_\ell(\xi\circ\eta)$와 $\cos(\theta_1-\theta_2)$입니다. § 2.3의 내용을 고려하면, $\xi\circ\eta$와 $\theta_1-\theta_2$는 2차원 및 1차원 구면에서 일종의 “거리”를 의미한다고 볼 수 있습니다. 따라서 고차원 구면 기하학에서도 어떤 특수 함수가 존재하며, 어떤 거리 함수에 대해 덧셈 정리가 성립할 수 있지 않을까 하는 생각을 자연스럽게 해볼 수 있습니다. 본 글의 1부에서는 “게겐바우어 다항식(Gegenbauer polynomial)”이라고 불리는 특수 함수에 대한 덧셈 정리를 확립하고자 합니다.

2.5. 일반적인 기하학에 대한 덧셈 정리: 2부의 글에 대한 예고

더 일반적으로, 어떤 거리 공간 (X,dist)에 대해 다음과 같은 등식을 2부에서 저는 “덧셈 정리”라 부를 것입니다(여기서, F는 X와 관련된 어떤 특수 함수, F'은 F와 연관된 어떤 특수 함수들):

$$\forall x,y \in X, \qquad F(\mathrm{dist}(x,y)) = F(\mathrm{dist}(y,x)) = \sum_{F'} F'(x)\cdot F'(y).$$

다시 말해, 덧셈 정리란 기하학적 공간에서 상대적 거리에만 의존하는 어떤 값이 절대적 위치에만 의존하는 값들의 통계적 합으로 어떻게 일관되게 표현될 수 있는지를 설명하는 정리입니다. 이 정리는 기하학 내에서 상대성과 절대성이 어떻게 결합되는지를 재규명하는 역할을 합니다.

2.6. 초구(고차원 구면)의 겉넓이는 어떻게 계산할까

$d \geqslant 2$라고 두겠습니다. $d-1$차원 구면 $\mathbb{S}^{d-1}$상의 한 점 $\xi = \xi^{(d)} = (\xi_1,\ldots,\xi_d) \in \mathbb{S}^{d-1}$을 생각해 봅시다. 그리고, ξ가 구면상의 북극점(e_d)이나 남극점($-e_d$)은 아니라고 가정합시다. 그러면, 벡터 ξ는 다음과 같은 “2차원적 표현”을 가집니다:

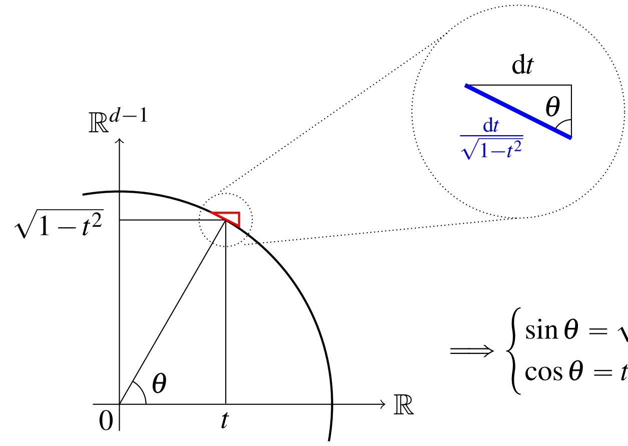
$$\xi = te_d + \sqrt{1-t^2}\,\nu. \tag{2.3}$$

여기서 t와 ν는 다음과 같이 정의됩니다:

$$t := \xi\circ e_d = \xi_d \in (-1,1), \qquad \nu = \nu^{(d-1)} := \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\xi_i}{\sqrt{1-t^2}} e_i \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

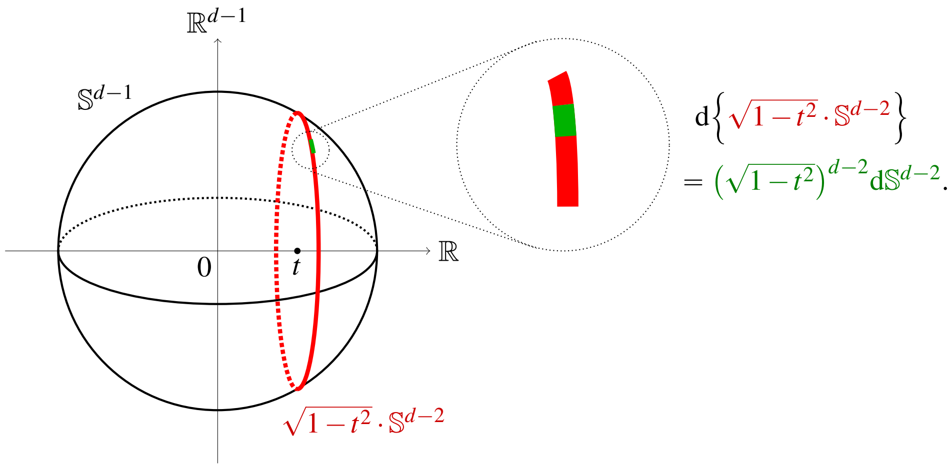
그리고, $\xi_1^2+\cdots+\xi_{d-1}^2=1-\xi_d^2=1-t^2$이므로 $|v|=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\sqrt{\xi_1^2+\cdots+\xi_{d-1}^2}=1$, 즉, $v\in\mathbb{S}^{d-2}$입니다(뿐만 아니라, e_d와 v는 직교합니다). 벡터 $\xi\in\mathbb{S}^{d-1}$에 대한 2차원적 표현을 나타내는 수식 (2.3)는 $\mathbb{S}^{d-1}$의 겉넓이를 계산해 나가는데 핵심적인 역할을 합니다. 위치 벡터 ξ에서 $\mathbb{S}^{d-1}$의 겉넓이 무한소 $\mathrm{d}\mathbb{S}^{d-1}(\xi)$를 어떻게 표현해야 할지 한번 고민해 보겠습니다.

첫 번째로, $\xi\in\mathbb{S}^{d-1}\subseteq\mathbb{R}^d$를 2차원적($\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}$)으로 나타낸 아래의 그림을 생각해 봅시다:

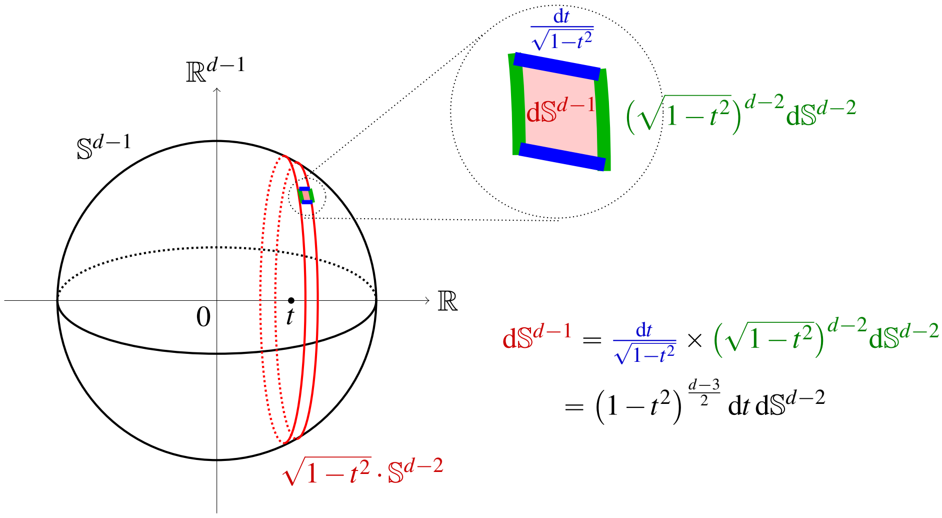


$$\Longrightarrow\begin{cases}\sin\theta=\sqrt{1-t^2},\\ \cos\theta=t.\end{cases}$$

여기서 빨간 직각 삼각형은 (위치 벡터 ξ에서) 그림상의 단위원에 접하고 있는 아주 작은 삼각형이라고 생각하시면 됩니다. 이 빨간 삼각형의 빗변 길이는 그림에서 보듯이 $\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$입니다.



두 번째 그림에서 빨간색 원은 크기가 조절(scaled)된 $\mathbb{S}^{d-2}$, 그러니까 $\sqrt{1-t^2}\cdot\mathbb{S}^{d-2}$를 의미합니다. 이 빨간색 원의 무한소 길이(또는 넓이)를 나타낸 것이 초록색 부분입니다. 이 초록색 부분은 $\mathrm{d}(\sqrt{1-t^2}\cdot\mathbb{S}^{d-2})=(\sqrt{1-t^2})^{d-2}\mathrm{d}\mathbb{S}^{d-2}$로 계산할 수 있는데, 사실 이것은 $\dim(\mathbb{S}^{d-2})=d-2$이므로 조절값으로 곱해진 $\sqrt{1-t^2}$가 비례 상수 $(\sqrt{1-t^2})^{d-2}$로 나타나기 때문입니다.



마지막 그림에서 빨간 부분의 넓이 $d\mathbb{S}^{d-1}$은 거의 정사각형이므로, 파란 부분의 길이 $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$와 초록색 부분의 길이 $(\sqrt{1-t^2})^{d-2} d\mathbb{S}^{d-2}$를 곱해서 얻어집니다. 그러므로,

$$d\mathbb{S}^{d-1} = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \times (\sqrt{1-t^2})^{d-2} d\mathbb{S}^{d-2} = (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}\, dt\, d\mathbb{S}^{d-2} \tag{2.4}$$

를 얻게 되며, $\mathbb{S}^{d-1}$의 겉넓이 $|\mathbb{S}^{d-1}|$ (부피 아님!)에 대해 다음과 같은 점화식을 얻게 됩니다:

$$|\mathbb{S}^{d-1}| = \int_{\xi \in \mathbb{S}^{d-1}} d\mathbb{S}^{d-1}(\xi) = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}\, dt \cdot \int_{\nu \in \mathbb{S}^{d-2}} d\mathbb{S}^{d-2}(\nu) = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}\, dt \cdot |\mathbb{S}^{d-2}|.$$

한편, 적분 $\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}\, dt$은 변수 변환 $u = t^2$을 통해서 다음처럼 계산됩니다:

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}\, dt = \int_{0}^{1} (1-u)^{\frac{d-3}{2}} u^{-\frac{1}{2}}\, du = B\left(\frac{1}{2}, \frac{d-1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}.$$

따라서, 점화식($d \geqslant 3$)과 초기항은 다음과 같습니다:

$$|\mathbb{S}^{d-1}| = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} \cdot |\mathbb{S}^{d-2}|, \qquad |\mathbb{S}^{1}| = 2\pi.$$

이 점화식을 풀면, 다음과 같은 수열의 일반항를 얻게 됩니다:

$$|\mathbb{S}^{d-1}| = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}, \qquad d \geqslant 2.$$

이 수식은 $d = 1$일 때 $|\mathbb{S}^0| = 2$라고 말해 주는데, 이 사실은 $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\} \subseteq \mathbb{R}^1$임을 봤을 때 자연스러운 이산 결과입니다. 또한, 앞에서 계산한 $\Gamma(\frac{2n+1}{2})$의 값을 이용한다면 다음을 얻게 됩니다:

$$|\mathbb{S}^{2n}| = \frac{2\pi^{\frac{2n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{2n+1}{2})} = \frac{2^{n+1}\pi^n}{(2n-1)!!} = \frac{2^{2n+1} n!\, \pi^n}{(2n)!}, \qquad |\mathbb{S}^{2n-1}| = \frac{2\pi^n}{\Gamma(n)} = \frac{2\pi^n}{(n-1)!}.$$

2.7. 게겐바우어 가중 함수, 게겐바우어 다항식

앞선 계산에서 피적분 함수로 나타난 $w(t) := (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}$에 대해 잠시 살펴보겠습니다. 이 함수는 매개변수 $d \in \mathbb{R}_{>1}$와 열린 구간 $t \in (-1, 1)$에 대해 $w(t) > 0$을 만족할 뿐만 아니라, 적분값 $\int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}\, dt$도 잘 정의됩니다. 함수 $w(t)$는 "게겐바우어 가중 함수(Gegenbauer weight function)"라고 불립니다. 한편, 차원이 $d \in \mathbb{R}_{>1}$이고 차수가 n인 "게겐바우어 다항식 $Q_n^{(d)}(t)$"은 다음과 같은 직교성을 가지는 실수 계수 다항식으로 정의됩니다(직교 다항식 관점의 정의):

$$n \neq m \quad \Longrightarrow \quad \int_{-1}^{1} Q_n^{(d)}(t)\, Q_m^{(d)}(t)\, (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}\, dt = 0. \tag{2.5}$$

물론, 직교성만으로는 직교 다항식을 유일하게 결정할 수 없습니다. 그러나 정규화하는 방법이 있다면, 예를 들어, $Q_n^{(d)}(t)$의 $t = 1$에서의 함수값을 정하거나 $\int_{-1}^{1} |Q_n^{(d)}(t)|^2 (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}\, dt$ 적분값을 정한다면, 직교 다항식은 유일하게 정해집니다. 하지만 정규화하는 방법에는 여러 가지가

있을 수 있으며, 실재 수학 세계에서는 여러 버전의 게겐바우어 다항식이 존재합니다. 뿐만 아니라, 이들 다항식을 나타내는 기호 역시 다양합니다.

게겐바우어 다항식은 초구(ultraspherical) 다항식이라고도 불립니다. 예를 들어, “d=3” 게겐바우어 다항식은 르장드르 다항식(Legendre polynomial) $Q_n^{(3)}(t) = P_n(t)$으로 불리며, “d=2” 게겐바우어 다항식은 제1종 체비셰프 다항식(Chebyshev polynomial of the first kind) $Q_n^{(2)}(t) = T_n(t)$으로, “d=4” 게겐바우어 다항식은 제2종 체비셰프 다항식(Chebyshev polynomial of the second kind) $Q_n^{(4)}(t) = U_n(t)$으로 불립니다. 이러한 다항식들의 직교성은 수식 (2.5)에서 d의 값만 바꾸어 넣어 주면 얻을 수 있습니다.

2.8. 다항식 공간과 동차 다항식 공간

우선, 첫 번째 중요한 공간으로서 d차원에서의 다항 함수들의 집합을 생각해 보겠습니다:

$$\mathrm{Pol}(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \ : \ f\text{는 다항 함수}\} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d).$$

여기서, $\mathrm{Pol}(\mathbb{R}^d)$는 변수가 d개인 복소 계수 다항식 공간 $\mathrm{Pol}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_d]$라고 생각하면 되고, $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d)$는 n차 동차 다항식들의 집합입니다. 다음은 “중복 조합”을 사용해 계산합니다:

$$\dim \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d) = \binom{d+n-1}{n}.$$

2.9. 조화 동차 다항식 공간

중요한 두 번째 공간으로서, 조화 동차 다항식들의 공간을 고려하겠습니다:

$$\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d) := \{H \in \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d) \ : \ \triangle H = 0\}. \tag{2.6}$$

이 공간의 차원 $N_n^{(d)} := \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$은 어떻게 계산할까요? $n \in \{0, 1\}$이면 수식 (2.6)에 의하여 곧바로, $\mathrm{Harm}_0(\mathbb{R}^d) = \mathrm{Pol}_0(\mathbb{R}^d)$이고 $\mathrm{Harm}_1(\mathbb{R}^d) = \mathrm{Pol}_1(\mathbb{R}^d)$임을 알 수 있습니다. 따라서, $n \geqslant 2$라고 가정하겠습니다. 만일 $H \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d)$이라면, H는 다음과 같이 써집니다:

$$H = H(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{k=0}^{n} f_{n-k}(x_1, \ldots, x_{d-1}) x_d^k, \qquad f_{n-k} \in \mathrm{Pol}_{n-k}(\mathbb{R}^{d-1}). \tag{2.7}$$

$\triangle = \triangle^{(d)} = \triangle^{(d-1)} + \frac{\partial^2}{(\partial x_d)^2}$이므로($\triangle^{(d-1)} = \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial^2}{(\partial x_i)^2}$), 다음을 얻습니다:

$$\begin{aligned}
0 = \triangle H &= \sum_{k=0}^{n} (\triangle^{(d-1)} f_{n-k}) x_d^k + \sum_{k=2}^{n} f_{n-k}\, k(k-1) x_d^{k-2} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (\triangle^{(d-1)} f_{n-k}) x_d^k + \sum_{k=0}^{n-2} f_{n-k-2} (k+2)(k+1) x_d^k \\
&= (\triangle^{(d-1)} f_0) x_d^n + (\triangle^{(d-1)} f_1) x_d^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \Big(\triangle^{(d-1)} f_{n-k} + (k+2)(k+1) f_{n-k-2} \Big) x_d^k.
\end{aligned}$$

따라서, 양변에서 x_d^k항의 계수들을 비교함으로써 다음의 결과들을 얻게 됩니다:

$$\begin{gathered}
f_0 \in \mathrm{Harm}_0(\mathbb{R}^{d-1}) = \mathrm{Pol}_0(\mathbb{R}^{d-1}), \qquad f_1 \in \mathrm{Harm}_1(\mathbb{R}^{d-1}) = \mathrm{Pol}_1(\mathbb{R}^{d-1}), \\
\triangle f_{n-k} = -(k+2)(k+1) f_{n-k-2}.
\end{gathered} \tag{2.8}$$

이 식들은 다음을 의미합니다: “$H \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$는 $f_n \in \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^{d-1})$과 $f_{n-1} \in \mathrm{Pol}_{n-1}(\mathbb{R}^{d-1})$의 자유로운 선택에 의해서 완전히 결정된다!” 따라서, 다음의 “차원 공식”을 얻게 됩니다($n \geqslant 0$):

$$\begin{aligned}
N_n^{(d)} &= \dim \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^{d-1}) + \dim \mathrm{Pol}_{n-1}(\mathbb{R}^{d-1}) = \binom{d+n-2}{n} + \binom{d+n-3}{n-1} \\
&= \binom{d+n-1}{n} - \binom{d+n-3}{n-2} = \dim \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d) - \dim \mathrm{Pol}_{n-2}(\mathbb{R}^d).
\end{aligned}$$

세 번째 등식은, 기본적인 트릭 $\binom{k}{r} = \binom{k-1}{r} + \binom{k-1}{r-1}$을 이용해서 쉽게 얻어 낼 수 있습니다.

2.10. **✻ 차원 공식의 간단한 결과들**

다음은 공식 $N_n^{(d)} = \dim \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d) - \dim \mathrm{Pol}_{n-2}(\mathbb{R}^d)$로부터 쉽게 얻어 내어 질 수 있습니다:

(i) $n \geqslant 2$일 때, $\dim \mathrm{Pol}_{n-2}(\mathbb{R}^d) \geqslant 1$이므로 $\dim \mathrm{Pol_n}(\mathrm{\mathbb{R}^d}) > N_n^{(d)}$가 성립합니다.

(ii) $d = 1$이고 $n \geqslant 2$일 때, $N_n^{(1)} = 0$이 됩니다(또는 정의로부터 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^1) = \{0\}$입니다).

(iii) $d \geqslant 2$일 때, $\dim \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d) > \dim \mathrm{Pol}_{n-2}(\mathbb{R}^d)$이므로 $N_n^{(d)} \geqslant 1$이 됩니다.

(주: $n \in \{0, 1\}$이면, $\mathrm{Harm}_0(\mathbb{R}^d) = \mathrm{Pol}_0(\mathbb{R}^d)$이고, $\mathrm{Harm}_1(\mathbb{R}^d) = \mathrm{Pol}_1(\mathbb{R}^d)$임을 기억합시다!)

예제 1. $d = 2, n \geqslant 1 \Rightarrow N_n^{(2)} = 2$: $(x_1 \pm \sqrt{-1}x_2)^n \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^2)$임을 통해 확인됩니다; 이 사실은 두 함수가 $\triangle(x_1 \pm \sqrt{-1}x_2)^n = 0$를 만족시킬 뿐만 아니라, 일차 독립이기 때문에 성립합니다.

2.11. **직교군**

직교군을 고려하겠습니다. 직교군 O^d이라는 것은 $d \times d$ 직교 행렬들이 이루는 군입니다:

$$\mathrm{O}^d := \{g \in \mathbb{R}^{d\times d} \ : \ g^\intercal g = gg^\intercal = I\}.$$

직교군은 다음과 같은 잘 알려진 성질들을 갖습니다($\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d\times 1}$로 취급하겠습니다):

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$, $\forall g \in \mathrm{O}^d$, $x \circ y = (gx) \circ (gy)$.

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$, $\big[\, |x| = |y| \Rightarrow \exists g \in \mathrm{O}^d, y = gx \,\big]$.

(iii) $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$의 고정부분군 $\mathrm{O}_\xi^d := \{g \in \mathrm{O}^d \ : \ g\xi = \xi\}$은 O^{d-1}과 동형입니다. 예를 들어 $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$가 북극점 $e_d \in \mathbb{S}^{d-1}$일 때, $\mathrm{O}_\xi^d = \mathrm{O}_{e_d}^d$의 원소는 블럭 행렬로 쓸 수 있습니다:

$$\mathrm{O}_{e_d}^d = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \mathrm{O}^{d-1}, \qquad g \in \mathrm{O}^{d-1}. \tag{2.9}$$

2.12. **직교군의 작용 (I): $\mathrm{O}^d \curvearrowright \mathrm{Fun}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$.**

가장 보편적이고 포괄적이라고 생각되는 $\mathbb{R}^d$의 복소 범함수 공간 $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) := \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}\}$을 한번 고려해 보겠습니다. 직교군은 이 공간에 자연스럽게 (왼쪽에서) 작용합니다:

$$(g.f)(x) := f(g^{-1}x), \qquad g \in \mathrm{O}^d, \quad f \in \mathrm{Fun}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \tag{2.10}$$

여기서, 다항식의 변수는 $x = (x_1, \dots, x_d)^\intercal$ 열벡터로 취급하고, $g^{-1}x$는 행렬곱을 의미합니다.

이러한 직교군의 작용에 대한 고정점, 즉 고정되는 범함수의 모양은 어떻게 생겼을까요? 만일 $\forall g \in \mathrm{O}^d$, $f(g^{-1}x) = (g.f)(x) = f(x)$라면, § 2.11의 (ii)로부터 $|x| = |y| \Rightarrow f(x) = f(y)$를 얻게 됩니다; 즉, $f(x)$값은 오직 $|x|$에만 의존합니다. 물론, 반대 방향의 논의는 더욱 자명합니다: 벡터 크기 $|x| = \sqrt{x \circ x}$ 자체가 직교군의 작용에 대해 고정되므로(§ 2.11의 (i) 참조), 만일 $f(x)$가 $|x|$에만 의존하는 방사형 범함수라면 직교군의 작용에 대해 당연히 고정됩니다.

특별히, 동차 다항식 $f \in \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d)$가 O^d의 작용에 대한 고정점이라면 다음이 성립합니다:

$$\exists c \in \mathbb{C}, \qquad f = \begin{cases} c|x|^n = c(x_1^2 + \cdots + x_d^2)^k & \text{if } n = 2k, \\ 0 & \text{if } n \notin 2\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{2.11}$$

2.13. **직교군의 작용(또는 표현) (II): $\mathrm{O}^d \curvearrowright \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d)$.**

수식 (2.10)에서 소개된 범함수 f에 대한 직교군의 작용에서, 만일 f가 n차 동차 다항식일 경우 $g.f$ 역시 n차 동차 다항식이 됨을 쉽게 알 수가 있습니다($g^{-1}x$는 x에 대한 일차 변환입니다). 따라서, 동차 다항식 공간 $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d)$은 직교군의 범함수에 대한 작용을 물려 받습니다.

(주: 이 작용은, 각각의 직교 행렬이 $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d)$공간 사이에서 전단사 선형 연산자처럼 행동하므로, 군 준동형 사상(group homomorphism) $\rho : \mathrm{O}^d \to \mathrm{GL}(\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d))$를 정의한다고 할 수 있습니다. 게다가, ρ는 부드러운 함수입니다. 이러한 함수 ρ 또는 동차 다항식 공간 $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d)$는 수학에서 "직교군의 표현"이라고 불리는 하나의 중요한 예가 됩니다.)

2.14. **미분 작용소 대수**

이제부터 표기를 간단히 하기 위해 $\partial_{x_k} := \frac{\partial}{\partial x_k}$라고 쓰겠습니다. 다항식 공간 $\mathrm{Pol}(\mathbb{R}^d)$와 동차 다항식 공간 $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d)$와 관련하여, 변수 x_k를 연산자 ∂_{x_k}로 바꾸는 쌍대적 대응이 있습니다:

$$\mathrm{Pol}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d] \cong \mathbb{C}[\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_d}] =: \mathrm{Diff}^d, \qquad \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d) \cong \mathrm{Diff}_n^d.$$

이 때, 이 대응의 상(image)을 다음과 같이 표기 하겠습니다:

$$\partial : \mathrm{Pol}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d] \to \mathrm{Diff}^d = \mathbb{C}[\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_d}], \qquad f \mapsto \partial_f. \tag{2.12}$$

예를 들어, $f = x_1^2 x_2 + x_3^3 \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}^3)$라면 $\partial_f = \partial_{x_1}^2 \partial_{x_2} + \partial_{x_3}^3 \in \mathrm{Diff}_3^3$가 됩니다.

2.15. **동차 다항식 공간 $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d)$은 O^d의 유니터리 표현이다**
공간 $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d)$에 다음과 같이 에르미트 형식(Hermite form, 즉, $\frac{3}{2}$-linear form)을 정의합시다:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d) \times \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}, \qquad (f,h) \mapsto \langle f,h\rangle := \partial_f(\overline{h}). \tag{2.13}$$

수식 $\partial_f(\overline{h})$의 의미는 쉽게 해석됩니다: $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_d) \in (\mathbb{Z}_{\geqslant 0})^d$일 때 $\underline{\alpha} := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$라고 정의한다면, 변수 벡터 $x = (x_1,\ldots,x_d)$에 대해 $f,h \in \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d)$을 다음과 같이 쓸 수 있습니다:

$$f = \sum_{\underline{\alpha}=n} b_\alpha x^\alpha, \quad h = \sum_{\underline{\alpha}=n} c_\alpha x^\alpha, \qquad b_\alpha, c_\alpha \in \mathbb{C}. \quad (\text{여기서, } x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}.)$$

이 때, 수식 (2.13)은 다음과 같이 쉽게 계산할 수 있습니다(여기서, $\alpha! := \alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_d!$):

$$\langle f,h\rangle = \partial_f(\overline{h}) = \sum_{|\alpha|=n} \alpha!\, b_\alpha \overline{c_\alpha}. \tag{2.14}$$

$\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d)$에 속하는 동차 "단항식"들이 수식 (2.14)에 의해 직교 기저를 이루므로, 수식 (2.13)에서 정의된 "형식"은 사실, "내적"이라고 말할 수 있겠습니다; 즉, $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d)$는 내적 공간입니다.
수식 (2.13)의 내적은 사실 O^d-불변입니다: $\forall g \in \mathrm{O}^d$, $\forall f,h \in \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d)$, $\langle g.f, g.h\rangle = \langle f,h\rangle$. 이 사실은 수식 (2.14)을 이용하면 어렵지 않게 증명할 수 있습니다. 수학에서 일반적으로, 어떤 군 G의 (복소) 표현 V가 G-불변 에르미트 내적을 가지고 있는 경우, V를 G의 "유니터리 표현"이라고 부릅니다; 따라서, 동차 다항식 공간 $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d)$은 O^d의 유니터리 표현입니다!

2.16. **델 연산자의 연쇄 법칙과 라플라시안 연산자의 불변성**
$x = \binom{x_1}{x_2}$가 변수로 구성된 2차원 (열)벡터일 때, 연산자 $\nabla_x = \begin{pmatrix}\partial_{x_1}\\ \partial_{x_2}\end{pmatrix}$를 생각하겠습니다. 새로운 변수 벡터 $y = \binom{y_1}{y_2}$가 행렬곱 $\binom{y_1}{y_2} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\binom{x_1}{x_2} = \begin{pmatrix}ax_1+bx_2\\cx_1+dx_2\end{pmatrix}$으로 표현된다면, 미분의 연쇄 법칙에 의해 다음이 성립합니다:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_2} = a\frac{\partial}{\partial y_1} + c\frac{\partial}{\partial y_2}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y_2} = b\frac{\partial}{\partial y_1} + d\frac{\partial}{\partial y_2}.$$

행렬곱으로 다시 표현한다면, 연쇄 법칙은 다음과 같습니다:

$$\nabla_x = \begin{pmatrix}\partial_{x_1}\\ \partial_{x_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_{y_1}\\ \partial_{y_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \nabla_y.$$

일반화하여 $x = (x_1,\ldots,x_d)^{\mathsf{T}}$, $y = (y_1,\ldots,y_d)^{\mathsf{T}}$가 d차원 변수 벡터이고, 행렬 $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$에 대해서 $y = Ax$ 관계를 가진다면, $\nabla_x = A^{\mathsf{T}}\nabla_y$ 또는 $\nabla_y = (A^{\mathsf{T}})^{-1}\nabla_x = (A^{-1})^{\mathsf{T}}\nabla_x$라고 결론 내릴 수 있겠습니다. 만일 여기서 $A = g^{-1} \in \mathrm{O}^d$에 대해 $y = g^{-1}x$라면, 라플라시안은 다음과 같습니다:

$$\triangle_y = \nabla_y \circ \nabla_y = \nabla_y^{\mathsf{T}}\nabla_y = (g^{\mathsf{T}}\nabla_x)^{\mathsf{T}}(g^{\mathsf{T}}\nabla_x) = \nabla_x^{\mathsf{T}}(gg^{\mathsf{T}})\nabla_x = \nabla_x^{\mathsf{T}}\nabla_x = \triangle_x. \tag{2.15}$$

2.17. **직교군의 작용(또는 표현) (III): $\mathrm{O}^d \curvearrowright \mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$.**
수식 (2.15)에 따르면, $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d)$에 대한 직교군 작용과 라플라시안 연산자는 교환 가능합니다:

$$\triangle_x((g.f)(x)) = \triangle_x(f(g^{-1}x)) = \triangle_y(f(y)) = (\triangle_x f(x))(y) = (\triangle_x f(x))(g^{-1}x) = (g.\triangle_x(f(x)))(x).$$

다시 말해, $f \in \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d)$와 직교 행렬 $g \in \mathrm{O}^d$에 대해서 $\triangle(g.f) = g.(\triangle f)$가 성립합니다.
따라서, 만일 $H \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$이고 $g \in \mathrm{O}^d$라면 $\triangle(g.H) = g.(\triangle H) = g.0 = 0$임을 알 수가 있고, 이는 $g.H \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$임을 뜻합니다. 따라서, 수식 (2.10)에서 정의된 작용은 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$ 공간내에서도 잘 적용된다 할 수 있습니다; $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$ 역시 O^d의 유니터리 표현입니다.

2.18. **동차 다항식 공간 $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d)$의 구조**
$|x|^2 := x_1^2 + \cdots + x_d^2 \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}^d)$라고 두겠습니다. 이 때, 다음과 같은 등식이 성립합니다:

$$\forall f \in \mathrm{Pol}_{n-2}(\mathbb{R}^d),\ \forall h \in \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d), \quad \langle |x|^2 f, h\rangle = \partial_{|x|^2 f}(\overline{h}) = \partial_f \partial_{|x|^2}(\overline{h}) = \partial_f(\overline{\triangle h}) = \langle f, \triangle h\rangle.$$

따라서, $|x|^2 \cdot \mathrm{Pol}_{n-2}(\mathbb{R}^d) := \{|x|^2 f \ :\ f \in \mathrm{Pol}_{n-2}(\mathbb{R}^d)\} \subseteq \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d)$에 대해 다음을 얻습니다:

$$\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d) \subseteq \left(|x|^2 \cdot \mathrm{Pol}_{n-2}(\mathbb{R}^d)\right)^{\perp} := \{h \in \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d)\ :\ \langle |x|^2 f, h\rangle = 0,\ \forall f \in \mathrm{Pol}_{n-2}(\mathbb{R}^d)\}.$$

한편, § 2.15의 결과에 의하여 다음이 성립합니다: $\forall f \in \mathrm{Pol}_{n-2}(\mathbb{R}^d), \langle f, \triangle h\rangle = 0 \Rightarrow \triangle h = 0$. 따라서, 반대 방향의 포함 관계 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d) \supseteq \left(|x|^2 \cdot \mathrm{Pol}_{n-2}(\mathbb{R}^d)\right)^{\perp}$도 성립함을 알 수 있습니다.

결론적으로 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d) = \left(|x|^2 \cdot \mathrm{Pol}_{n-2}(\mathbb{R}^d)\right)^{\perp}$이므로, 다음의 직교 분해를 얻게 됩니다(여기서, $\mathrm{Pol}_{-1}(\mathbb{R}^d)$과 $\mathrm{Pol}_{-2}(\mathbb{R}^d)$는 $\mathrm{Pol}_{-1}(\mathbb{R}^d) = \{0\} = \mathrm{Pol}_{-2}(\mathbb{R}^d)$으로 정의합니다.):

$$\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d) = \mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d) \ominus |x|^2 \cdot \mathrm{Pol}_{n-2}(\mathbb{R}^d).. \tag{2.16}$$

이를 재귀적으로 반복하면, 다음의 "기하학적 구조 정리"를 얻게 됩니다:

$$\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d) = \mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d) \ominus |x|^2 \cdot \mathrm{Harm}_{n-2}(\mathbb{R}^d) \ominus |x|^4 \cdot \mathrm{Harm}_{n-4}(\mathbb{R}^d) \ominus \cdots. \tag{2.17}$$

한편, $|x|^{2k} = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^k$ 형태를 가지는 방사형 함수들은 § 2.12에서 살펴 보았듯이 직교군의 작용에 대해 고정됩니다. 따라서, 수식 (2.16)는 조금 약하게 표현 가능합니다:

$$\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d) \cong \mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d) \oplus \mathrm{Pol}_{n-2}(\mathbb{R}^d). \tag{2.18}$$

(주: 즉, 등호 "="가 동형 "≅"으로 바뀌고, 직교 직합 "⊖"이 단순 직합 "⊕"으로 바뀌었습니다.)

2.19. ∗ $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$**는** O^d**의 기약 표현일까요**

수식 (2.18)을 보면, $n \geqslant 2$일 때 O^d의 표현 $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d)$는 쪼개어 집니다. 그리고 그 안에 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$가 포함되어 있습니다. 이때, 자연스러운 의문이 들 수 있습니다: 표현 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$는 더 쪼개어 질 수 있을까요? 답부터 말씀드리면, "$d \geqslant 2$인 경우 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$는 O^d의 기약 표현"입니다.

(주: $d \geqslant 2 \Rightarrow N_n^{(2)} \geqslant 1$이므로(§ 2.10 (iii)), $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d) \neq \{0\}$입니다. $d \geqslant 3$이면 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$는 $\mathrm{SO}(d)$의 기약 표현도 됩니다. 그러나, $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^2)$는 $\mathrm{SO}(2)$의 기약 표현은 아닙니다; 예제 1에 의하면, $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}(x_1 + \sqrt{-1}x_2)^n \oplus \mathbb{C}(x_1 - \sqrt{-1}x_2)^n$이고, 각각은 $\mathrm{SO}(2)$ 표현입니다.)

$d \geqslant 2$일 때 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$가 O^d의 기약 표현이다는 사실은 순수한 직교군의 표현론 주제처럼 보이며, 덧셈 정리와는 무관해 보일 수 있습니다. 하지만 — 조금 놀랍게도 — 덧셈 정리를 이용하여, 이러한 기약성을 증명할 수 있습니다. 따라서, 이 증명은 덧셈 정리를 다룬 후에 독자분들께 제시하겠습니다. 또한, 이러한 기약성을 증명하는 순수 표현론의 아이디어도 흥미롭기에, 부록 1에서는 표현론의 길고 긴 아이디어를 간략히 압축해 전달하겠습니다.

사실, 직교군의 표현론과 구면상의 특수 함수 및 기하학 간의 대응은 표현론의 "아이디어 원천 모델"로서, 직교군뿐만 아니라 일반적인 군의 표현론을 전개할 때에도 자주 응용됩니다.

2.20. 구면 조화 함수 공간 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1})$**.**

세 번째로 소개하는 공간은 이 글의 주요 무대라고 할 수 있는 공간입니다($d \geqslant 2$):

$$\mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1}) := \mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)|_{\mathbb{S}^{d-1}} = \{H|_{\mathbb{S}^{d-1}} \ : \ H \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)\}.$$

이 공간의 원소 $Y \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1})$를 n차 구면 조화 함수(spherical harmonic)라고 부르겠습니다. 사실, n차 동차 다항식 $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d) \in \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d)$는 다음의 성질을 만족시킵니다:

$$t^n f(x_1, \ldots, x_d) = f(tx_1, \ldots, tx_d). \tag{2.19}$$

따라서 f는 $f|_{\mathbb{S}^{d-1}}$에 의해서 완전히 결정되므로, 다음과 같은 함수는 전단사 선형 변환입니다:

$$\varpi : \mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1}), \qquad H \mapsto H|_{\mathbb{S}^{d-1}}. \tag{2.20}$$

다시 말해, 두 공간 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$와 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1})$는 "선형 공간으로서는 크게 다르지 않다"고 할 수 있습니다; 특히, $\dim \mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d) = \dim \mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1})$이 성립합니다. 하지만, 공간 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1})$는 자연스러운 내적이 존재하는 유한 차원 힐베르트 공간으로 간주될 수 있습니다. 여기서, "자연스럽다"라는 뜻은 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 공간의 내적과 동일하다는 의미로서, $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 공간이 무엇인지는 § 2.24의 "주"에서 다시 설명하도록 하겠습니다. 내적은 다음과 같습니다:

$$\forall Y, Y' \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1}), \quad \langle Y, Y' \rangle := \int_{\xi \in \mathbb{S}^{d-1}} Y(\xi)\, \overline{Y'(\xi)}\, \mathrm{d}\mathbb{S}^{d-1}(\xi), \quad \|Y\| := \sqrt{\langle Y, Y \rangle}. \tag{2.21}$$

2.21. $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1})$ **공간은** O^d**의 유니터리 표현이다**

$g \in \mathrm{O}^d$이고 $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$일 때, $g^{-1}\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$이므로(§ 2.11 (i)), 만일 $Y \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1})$이라면 함수 $g.Y : \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{C}$를 다음과 같이 정의할 수 있습니다: $\forall \xi \in \mathbb{S}^{d-1}$, $(g.Y)(\xi) := Y(g^{-1}\xi)$. 한편, $Y \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1})$의 정의에 의해 $H \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$가 존재하여, $Y = H|_{\mathbb{S}^{d-1}}$를 만족합니다. 이 때, $g.H \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^{d-1})$가 된다는 사실을 이미 알고 있고(§ 2.17), $g.Y = (g.H)|_{\mathbb{S}^{d-1}}$이 자명하게 성립하기 때문에 $g.Y \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1})$이 됩니다; 즉, O^d는 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1})$에 자연스럽게 작용합니다.

(주: 앞에서의 논의는 수식 (2.20)에서의 ϖ가 O^d의 작용에 대한 얽힘 연산자(intertwining operator), 즉 $\forall g \in \mathrm{O}^d$, $\forall H \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$, $\varpi(g.H) = g.\varpi(H)$임을 말해주는 것이기도 합니다.)

한편, 수식 (2.21)의 내적은 이러한 작용에 대해 불변입니다: $\forall h \in \mathrm{O}^d$, $\forall Y, Y' \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1})$,

$$\begin{aligned}\langle h.Y, h.Y' \rangle &= \int_{g\in\mathbb{S}^{d-1}} (h.Y)(\xi)\,\overline{(h.Y')(\xi)}\,\mathrm{d}\mathbb{S}^{d-1}(\xi) = \int_{g\in\mathbb{S}^{d-1}} Y(h^{-1}\xi)\,\overline{Y'(h^{-1}\xi)}\,\mathrm{d}\mathbb{S}^{d-1}(\xi)\\ &= \int_{g\in\mathbb{S}^{d-1}} Y(\eta)\,\overline{Y'(\eta)}\,\mathrm{d}\mathbb{S}^{d-1}(h\eta) = \int_{g\in\mathbb{S}^{d-1}} Y(\eta)\,\overline{Y'(\eta)}\,\mathrm{d}\mathbb{S}^{d-1}(\eta) = \langle Y, Y' \rangle.\end{aligned}$$

즉, "구면 조화 함수 공간 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1})$은 O^d의 유니터리 표현이다"라고 말할 수 있습니다.

2.22. ✻ 공간 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$와 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1})$에서 정의된 두 내적은 상수배 차이밖에 나지 않는다
일반적인 이야기를 하겠습니다: 군 G에 대한 표현 V가 두개의 내적 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_2$을 가지고 있고, 두 내적에서 G의 작용이 모두 유니터리하다고 합시다. 만일 V가 G의 기약 표현까지 된다면, 슈어의 보조 정리에 의해 두 내적은 상수배 차이밖에 나지 않음을 쉽게 보일 수 있습니다.

이제, $V = \mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$가 $G = \mathrm{O}^d$의 기약 표현이 된다고 가정합시다. 그러면 V는 수식 (2.13) 또는 수식 (2.14)에 의해서 정의되는 다소 인위적인 첫 번째 내적을 가지고 있고, 수식 (2.20)과 수식 (2.21)에 의해서 정의되는 자연스러운 두 번째 내적을 가지고 있습니다. 이 때, G의 작용이 V의 두 내적에서 모두 유니터리하므로, 두 내적은 상수배 밖에 차이가 나지 않습니다.

2.23. ✻ 예: 2차원 구면 조화 함수들
$d = 2, n \geqslant 1$인 경우, § 2.10의 예제 1에서처럼 $(x_1 + \sqrt{-1}x_2)^n \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^2)$가 성립합니다; 따라서, $(x_1 + \sqrt{-1}x_2)^n$의 실수부와 허수부 모두 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^2)$에 다시 속하게 됩니다. $n \geqslant 1$인 경우, 공간 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^1)$내의 구면 조화 함수들은 어떻게 기술될까요? 일단, 구면상의 원소 $\xi \in \mathbb{S}^1$를 기술하기 위해, 직교 좌표 (ξ_1, ξ_2) 대신, 극좌표 $(1, \varphi)$를 도입하도록 하겠습니다: $\xi = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. 그러면, 구면상의 제한 함수 $(x_1 + \sqrt{-1}x_2)^n|_{\mathbb{S}^1}$은 다음과 같이 나타내어집니다(오일러 공식):

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + \sqrt{-1}\,\sin(n\varphi).$$

$n \geqslant 1$이면 $\dim \mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^1) = \dim \mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^2) = N_n^{(2)} = 2$이고, $\cos(n\varphi)$와 $\sin(n\varphi)$는 φ에 대한 함수로 보았을 때 일차 독립이므로, $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^1) = \{a\cos(n\varphi) + b\sin(n\varphi) \;:\; a, b \in \mathbb{C}\}$입니다.

(주: $\cos(n\varphi)$와 $\sin(n\varphi)$는 φ에 대한 초월 함수이지만, 직교 좌표 (ξ_1, ξ_2)에 대하여 n차 동차 다항 함수입니다; 가령, $n = 3$인 경우 $\cos(3\varphi) = \xi_1^3 - 3\xi_1\xi_2^2$이고 $\sin(3\varphi) = 3\xi_1^2\xi_2 - \xi_2^3$입니다.)

한편, 수식 (2.21)에 의한 자연스러운 내적을 계산해보면 다음과 같습니다:

$$\langle\cos(n\varphi), \sin(n\varphi)\rangle = \int_0^{2\pi} \cos(n\varphi)\,\sin(n\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 0. \qquad \text{(부분 적분)}$$

$$\langle\cos(n\varphi), \cos(n\varphi)\rangle = \int_0^{2\pi} \cos^2(n\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2n\varphi)}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \pi = \langle\sin(n\varphi), \sin(n\varphi)\rangle.$$

2.24. ✻ 구면 조화 함수 공간들의 힐베르트 직합
n차 구면 조화 함수 공간들의 힐베르트 직합 $\widehat{\mathrm{Harm}}(\mathbb{S}^{d-1})$을 생각하겠습니다:

$$\widehat{\mathrm{Harm}}(\mathbb{S}^{d-1}) = \widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}} \mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1}) := \{(Y_n)_{n=0}^{\infty} \;:\; Y_n \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1}),\ \sum_{n=0}^{\infty}\|Y_n\|^2 < \infty\}.$$

힐베르트 직합 $\widehat{\mathrm{Harm}}(\mathbb{S}^{d-1})$는 힐베르트 공간이며, 직합에서의 내적은 다음처럼 정의 됩니다:

$$\langle (Y_n), (Y'_n) \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \langle Y_n, Y'_n \rangle, \qquad (Y_n), (Y'_n) \in \widehat{\mathrm{Harm}}(\mathbb{S}^{d-1}).$$

한편, 수식 (2.17)을 떠올려 봤을 때, 구면상($|x| = 1$)에서는 다음이 성립합니다:

$$\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d)|_{\mathbb{S}^{d-1}} = \mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1}) \oplus \mathrm{Harm}_{n-2}(\mathbb{S}^{d-1}) \oplus \mathrm{Harm}_{n-4}(\mathbb{S}^{d-1}) \oplus \cdots.$$

따라서, 조화 해석학에서는 다음이 성립한다는 사실을 어렵지 않게 증명할 수 있습니다:

$$\widehat{\mathrm{Harm}}(\mathbb{S}^{d-1}) = L^2(\mathbb{S}^{d-1}) := \left\{ f : \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{C} \;:\; \int_{\xi\in\mathbb{S}^{d-1}} |f(\xi)|^2\,\mathrm{d}\mathbb{S}^{d-1}(\xi) < \infty \right\}. \tag{2.22}$$

(주: 구면상의 L^2-공간은 내적이 $\langle f, g\rangle := \int_{\xi\in\mathbb{S}^{d-1}} f(\xi)\,\overline{g(\xi)}\,\mathrm{d}\mathbb{S}^{d-1}(\xi)$, $\forall f, g \in L^2(\mathbb{S}^{d-1})$로 정의되는 "전형적인" 힐베르트 공간입니다. 수식 (2.22)를 보면 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$의 정의에는 라플라시안 연산자가 전혀 나타나지 않으므로, $L^2(\mathbb{S}^{d-1}) = \widehat{\mathrm{Harm}}(\mathbb{S}^{d-1})$이 된다는 사실은 매우 재미있는 현상입니다! 게다가 이 결과는, 보편 일반적이라 할 수 있는 제곱-적분가능 함수를 "조화" 함수의

급수로 표현될 수 있음을 시사하는 것이니, “조화” 해석학의 이름과 취지에 딱 들어 맞습니다. $\mathbb{S}^1$상에서 조화 해석학이요? § 2.23의 내용을 봤을 때, 그것은 푸리에 급수가 아니겠습니까!)

2.25. **정규 직교 기저와 유니터리 행렬 표현**
공간 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1})$은 내적을 가지고 있고 유한 차원($\dim \mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1}) = N_n^{(d)}$)이므로, 그람–슈미트 정규 직교화 과정에 의해 정규 직교 기저 $\{Y_{n,1}, Y_{n,2}, \ldots, Y_{n,N_n^{(d)}}\}$를 가진다고 할 수 있습니다. 정규 직교 기저를 나타내는 기호 $\{Y_{n,1}, Y_{n,2}, \ldots, Y_{n,N_n^{(d)}}\}$는 계속 사용하도록 하겠습니다.

$g \in \mathrm{O}^d$의 작용이 정규 직교 기저에 대해 어떻게 행렬 $U_g = \big(u_{i,j}(g)\big)$로 표현되는지 봅시다:

$$\forall g \in \mathrm{O}^d, \forall Y \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1}), \qquad g.Y_{n,i} = \sum_{k=1}^{N_n^{(d)}} u_{i,k}(g)\, Y_{n,k}. \tag{2.23}$$

§ 2.21의 내용에 의하면, 다음이 성립합니다:

$$\delta_{i,j} = \langle Y_{n,i}, Y_{n,j}\rangle = \langle g.Y_{n,i}, g.Y_{n,j}\rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{N_n^{(d)}} u_{i,k}(g)\, Y_{n,k}, \sum_{k'=1}^{N_n^{(d)}} u_{j,k'}(g)\, Y_{n,k'} \Big\rangle = \sum_{k=1}^{N_n^{(d)}} u_{i,k}(g)\, \overline{u_{j,k}(g)}.$$

따라서 $U_g = \big(u_{i,j}(g)\big)$는 유니터리 행렬이며, $\rho : \mathrm{O}^d \to U(N_n^{(d)}), g \mapsto U_g$는 유니터리 표현입니다.

2.26. **구역적 구면 조화 함수(zonal spherical harmonic).**
다음 두 조건을 만족시키는 구면 조화 함수 $Z_n \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1})$이 존재한다고 가정하겠습니다:

(i) Z_n은 $\mathrm{O}^d_{e_d}$ 작용에 대한 고정점이다: 즉, $\forall g \in \mathrm{O}^d_{e_d}$, $g.Z_n = Z_n$.
(ii) $Z_n(e_d) = 1$.

사실, 이 두 조건을 만족하는 Z_n은 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1})$내에서 유일하며, 그러한 Z_n을 “e_d에 대한 차수가 n인 구역적 구면 조화 함수”라고 부릅니다; Z_n의 유일성을 증명하는 것이 이 절의 주된 내용입니다. 구면 조화 함수의 정의에 따라, $H_n \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$이 존재하여 $Z_n = H_n|_{\mathbb{S}^{d-1}}$이 성립합니다. § 2.9에 따르면, H_n은 수식 (2.7)의 형태를 가지며, 수식 (2.8)에 의해 H_n은 f_n과 f_{n-1}에 의해 완전히 결정됩니다. 한편, 조건 (i)에 의해 Z_n은 $\mathrm{O}^d_{e_d}$의 작용에 대해 고정점이므로, 수식 (2.20)에 따르면 H_n 역시 $\mathrm{O}^d_{e_d}$의 작용에 대해 고정점이 됩니다. 따라서, f_n과 f_{n-1} 모두 $\mathrm{O}^{d-1} = \mathrm{O}^d_{e_d}$의 작용에 대한 고정점이 되어야 합니다. 수식 (2.11)에 의하면 다음 등식이 성립합니다: $\exists c \in \mathbb{C}$,

$$f_n = \begin{cases} c(x_1^2 + \cdots + x_{d-1}^2)^k & \text{if } n = 2k\,, \\ 0 & \text{if } n = 2k+1\,, \end{cases} \qquad f_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 2k\,, \\ c(x_1^2 + \cdots + x_{d-1}^2)^k & \text{if } n = 2k+1\,. \end{cases}$$

이제 수식 (2.8)에 의하면, H_n은 상수 $c \in \mathbb{C}$를 제외하고는 유일하게 결정됩니다. 하지만, 상수 c는 조건 (ii)에 의해서 유일하게 결정되므로, H_n 또는 Z_n에 대한 유일성 증명은 끝나게 됩니다.

구면 함수 $f : \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{C}$가 “구역적(zonal)”이라는 말의 의미는, 고정된 $\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$가 존재하여 함수값 $f(\xi)$가 내적값 $\xi \circ \eta$에만, 또는 ξ와 η가 이루는 각도에만 의존한다는 것을 의미합니다.

조건 (i)와 (ii)를 만족하는 구면 조화 함수 Z_n의 존재성은 § 2.27 또는 § 2.28에서 Z_n이 필연적으로 갖는 형태를 명확히 제시함으로써 자동적으로 증명됩니다. 또한, 이러한 Z_n의 형태는 Z_n이 $\eta = e_d$에 대해 구역성을 가짐을 보장할 것입니다.

2.27. **게겐바우어 다항식**
이제부터 § 2.26의 H_n에 대한 x_d^k항들의 계수, f_{n-k}를 자세히 살펴 보겠습니다. 사실 동일한 논리로 f_{n-k} 역시 $\mathrm{O}^{d-1} = \mathrm{O}^d_{e_d}$의 작용에 대한 고정점이므로, 다음과 같은 형태를 갖게 됩니다:

$$\exists c_i \in \mathbb{C}, \qquad f_{n-k} = \begin{cases} c_i(x_1^2 + \cdots + x_{d-1}^2)^i & \text{if } n-k = 2i\,, \\ 0 & \text{if } n-k \notin 2\mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

이제, 이러한 $f_{n-k} = f_{2i}$에 대한 정보를 바탕으로 H_n과 Z_n을 재구성해보면 다음과 같습니다(임의의 $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{S}^{d-1}$에 대해 $\xi_1^2 + \cdots + \xi_{d-1}^2 = 1 - \xi_d^2$이므로 이를 이용합니다):

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} c_i(x_1^2 + \cdots + x_{d-1}^2)^i\, x_d^{n-2i} \quad \Longrightarrow \quad Z_n(\xi) = H_n(\xi) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} c_i(1 - \xi_d^2)^i\, \xi_d^{n-2i}.$$

여기서, $Z_n(\xi)$값이 ξ_d의 다항식으로 표현되는 것을 알 수 있는데, 이 다항식을 "게겐바우어 다항식 $Q_n^{(d)}(t)$"이라고 정의하겠습니다. 다시 말하자면, $Q_n^{(d)}(t)$는 다음과 같이 정의 됩니다:

$$Q_n^{(d)}(t) := \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} c_i (1-t^2)^i t^{n-2i} \quad \Longrightarrow \quad Q_n^{(d)}(1) = c_0 = H_n(e_d) = Z_n(e_d) = 1. \tag{2.24}$$

계수 c_i들을 결정하는 계산에 대해서는 § 2.31에서 상세히 다루겠습니다. 한편, 수식 (2.24)을 통해 정의되어지는 $Q_n^{(d)}(t)$가 직교성(즉, 수식 (2.5))을 가진다는 사실은 부록 2에서 보이겠습니다.

2.28. O_η^d**-고정점의 표현 정리**
§ 2.26와 § 2.27의 내용을 정리해 보겠습니다: 만일, 구면 조화 함수 Z_n이 § 2.26의 조건 (i), (ii)를 만족하면, Z_n은 일의적으로 결정되며 그 형태는 $Z_n(\xi) = Q_n^{(d)}(\xi_d) = Q_n^{(d)}(\xi \circ e_d)$와 같습니다; 따라서, Z_n은 e_d에 대해 구역적이라 할 수 있습니다. 이 결과는 다음과 같이 일반화됩니다:

정리 2. *$\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$이고 $Y \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1})$이라고 하자. 이 때, Y가 O_η^d의 작용에 대한 고정점이 될 필요 충분 조건은 모든 $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$에 대해 $Y(\xi) = Y(\eta)\, Q_n^{(d)}(\xi \circ \eta)$로 표현되는 것이다.*

증명. ($\Rightarrow$) § 2.11의 (ii)에 의하면, $h\eta = e_d$를 만족하는 $h \in \mathrm{O}^d$가 존재합니다. $Y' := h.Y \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1})$라고 두겠습니다. 그러면, Y'는 $\mathrm{O}_{e_d}^d$의 작용에 대한 고정점이 됩니다:

$$\forall g \in \mathrm{O}_{e_d}^d, \quad h^{-1}gh \in \mathrm{O}_\eta^d \qquad \Longrightarrow \qquad \forall g \in \mathrm{O}_{e_d}^d, \quad g.Y' = g.h.Y = h.(h^{-1}gh).Y = h.Y = Y'.$$

이제 만일 $\widetilde{Y}(\xi) := \frac{Y'(\xi)}{Y'(e_d)}$라고 정의한다면, $\widetilde{Y}$는 § 2.26의 조건 (i), (ii)를 자명하게 만족하므로 $\widetilde{Y}(\xi) = Q_n^{(d)}(\xi \circ e_d)$가 성립합니다; 즉, $Y'(\xi) = Y'(e_d)\, Q_n^{(d)}(\xi \circ e_d)$입니다. 그러므로:

$$\begin{aligned} Y(\xi) &= (h^{-1}.Y')(\xi) = Y'(h\xi) = Y'(e_d)\, Q_n^{(d)}((h\xi) \circ e_d) = (h.Y)(e_d)\, Q_n^{(d)}((h\xi) \circ (h\eta)) \\ &= Y(h^{-1}e_d)\, Q_n^{(d)}(\xi \circ \eta) = Y(\eta)\, Q_n^{(d)}(\xi \circ \eta). \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) η에 대한 내적을 나타내는 구면 함수 $f_\eta : \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{C}$, $\xi \mapsto \xi \circ \eta$는 O_η^d의 작용에 대한 고정점이므로, $Y(\xi) = Y(\eta)\, Q_n^{(d)}(\xi \circ \eta)$형태의 함수 역시 O_η^d의 작용에 대해 고정점이 됩니다.

2.29. 덧셈 정리
§ 2.25에서의 정규 직교 기저를 이용하여 다음과 같은 구면 (에르미트) 형식을 정의하겠습니다:

$$F : \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{C}, \qquad (\xi, \eta) \mapsto F(\xi, \eta) := \sum_{k=1}^{N_n^{(d)}} Y_{n,k}(\xi)\, \overline{Y_{n,k}(\eta)}. \tag{2.25}$$

§ 2.25의 내용을 이용하면, 구면 형식 F는 O^d-불변입니다: $\forall g \in \mathrm{O}^d$, $\forall \xi, \eta \in \mathbb{S}^{d-1}$,

$$\begin{aligned} F(g^{-1}\xi, g^{-1}\eta) &= \sum_{k=1}^{N_n^{(d)}} Y_{n,k}(g^{-1}\xi)\, \overline{Y_{n,k}(g^{-1}\eta)} = \sum_{k=1}^{N_n^{(d)}} (g.Y_{n,k})(\xi)\, \overline{(g.Y_{n,k})(\eta)} \\ &= \sum_{k=1}^{N_n^{(d)}} \left(\sum_{\ell=1}^{N_n^{(d)}} u_{k,\ell}(g)\, Y_{n,\ell}(\xi) \right) \left(\sum_{m=1}^{N_n^{(d)}} \overline{u_{k,m}(g)\, Y_{n,m}(\eta)} \right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{N_n^{(d)}} \sum_{m=1}^{N_n^{(d)}} Y_{n,\ell}(\xi)\, \overline{Y_{n,m}(\eta)} \left(\sum_{k=1}^{N_n^{(d)}} u_{k,\ell}(g)\, \overline{u_{k,m}(g)} \right) = \sum_{\ell=1}^{N_n^{(d)}} Y_{n,\ell}(\xi)\, \overline{Y_{n,m}(\eta)} = F(\xi, \eta). \end{aligned}$$

고정된 η에 대해 구면 함수 $F_\eta : \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{C}$, $\xi \mapsto F_\eta(\xi) := F(\xi, \eta)$를 정의합시다: 수식 (2.25)에 의하면 F_η는 당연히 구면 조화 함수입니다. 또한, 구면 형식 F의 O^d-불변성은, F_η가 O_η^d의 작용에 대한 고정점임을 말해줍니다. 따라서, 정리 2에 의하여 $F_\eta(\xi) = F_\eta(\eta)\, Q_n^{(d)}(\xi \circ \eta)$로 표현됩니다. 한편, $F_\eta(\eta) = \sum_{k=1}^{N_n^{(d)}} Y_{n,k}(\eta)\, \overline{Y_{n,k}(\eta)}$의 값은 양변을 적분함으로써 알게 됩니다:

$$F_\eta(\eta) \cdot |\mathbb{S}^{d-1}| = F_\eta(\eta) \int_{\eta \in \mathbb{S}^{d-1}} \mathrm{d}\mathbb{S}^{d-1}(\eta) = \sum_{k=1}^{N_n^{(d)}} \int_{\eta \in \mathbb{S}^{d-1}} Y_{n,k}(\eta)\, \overline{Y_{n,k}(\eta)}\, \mathrm{d}\mathbb{S}^{d-1}(\eta) = N_n^{(d)}.$$

따라서 $F_\eta(\eta) = \frac{N_n^{(d)}}{|\mathbb{S}^{d-1}|}$이므로, $F_\eta(\xi) = \frac{N_n^{(d)}}{|\mathbb{S}^{d-1}|} Q_n^{(d)}(\xi \circ \eta)$를 얻게 됩니다. 다시 말하면:

정리 3. *공간* $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1})$*의 임의의 정규 직교 기저* $\{Y_{n,k}\}_{k=1}^{N_n^{(d)}}$*에 대해 다음이 항상 성립한다:*

$$\forall \xi,\eta \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad Q_n^{(d)}(\xi\circ\eta) = \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_n^{(d)}} \sum_{k=1}^{N_n^{(d)}} Y_{n,k}(\xi)\overline{Y_{n,k}(\eta)}. \qquad (\textit{게겐바우어 덧셈 정리})$$

2.30. ✻ **예:** $d=2$ **덧셈 정리**
§ 2.23에 의해서 $d=2$, $n\geqslant 1$일 때 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^1)$의 정규 직교 기저는 $Y_{n,1}=\frac{\cos(n\varphi)}{\sqrt{\pi}}$, $Y_{n,2}=\frac{\sin(n\varphi)}{\sqrt{\pi}}$입니다. 만일, $\xi=(\cos\varphi_1,\sin\varphi_1)$, $\eta=(\cos\varphi_2,\sin\varphi_2)$라 두면 $\xi\circ\eta=\cos(\varphi_1-\varphi_2)$가 됩니다. 게다가, $|\mathbb{S}^1|=2\pi$이고 $N_n^{(2)}=2$가 되므로, 덧셈 정리를 적용하면 다음을 얻게 됩니다:

$$Q_n^{(2)}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)) = \cos(n\varphi_1)\cos(n\varphi_2)+\sin(n\varphi_1)\sin(n\varphi_2) = \cos(n(\varphi_1-\varphi_2)). \qquad (2.26)$$

수식 (2.26)는 무엇을 의미하는 것일까요? 만일 $T_n=Q_n^{(2)}$, $\theta=\varphi_1-\varphi_2$라고 두면, 수식 (2.26)는 $T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$가 되고, 이 식은 잘 알려진 n차 제 1종 체비셰프 다항식 T_n의 정의입니다.

2.31. ✻ **게겐바우어 다항식의 자세한 계산**
수식 (2.24)의 c_i에 대해, 수식 (2.8)과 다음 사실을 활용해 점화식을 얻을 수 있습니다:

$$\triangle^{(d-1)} = \frac{1}{r^{d-2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d-2}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\text{각도 연산자}}{r^2} \implies c_i = -\frac{(n-2i+2)(n-2i+1)}{2i(2i+d-3)}c_{i-1}.$$

이제, 점화식을 초항 $c_0=1$을 이용해 직접 풀어보면, 다음의 결과를 얻게 됩니다:

$$c_i = (-1)^i\frac{n!}{(n-2i)!}\cdot\frac{1}{(2i)!!}\cdot\frac{1}{(d-3+2i)!!} = (-1)^i\frac{n!}{(n-2i)!}\cdot\frac{1}{2^i\,i!}\cdot\frac{\left(\frac{d-3}{2}\right)!}{2^i\left(\frac{d-3}{2}+i\right)!}\in\mathbb{R}.$$

c_i를 감마 함수를 이용해 표현하면, § 2.27의 $Q_n^{(d)}(t)$는 정확히 다음과 같은 형태를 가집니다:

$$Q_n^{(d)}(t) = n!\,\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^i\frac{(1-t^2)^i\,t^{n-2i}}{4^i\,i!\,(n-2i)!\,\Gamma\left(\frac{d-1}{2}+i\right)}. \qquad (2.27)$$

2.32. $d\geqslant 2$**일 때** $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1})$**은** O^d**의 기약 표현이다**
이 절에서는 $d\geqslant 2$일 때 $V:=\mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1})$로 두고, 귀류법을 사용하겠습니다. 만일 V가 O^d의 기약 표현이 아니라면, O^d의 비자명한 부분 표현 $0\neq V'\subsetneq V$이 존재하게 됩니다. § 2.21에 따르면 V는 O^d의 유니터리 표현이므로, $V'':=V'^{\perp}\neq 0$ 역시 O^d의 부분 표현이 되며, 이로부터 $V=V'\oplus V''$라는 직교 직합 분해가 가능합니다(수식 (4.4) 참조). 따라서 게겐바우어 다항식 $Q_n^{(d)}(t)$에 대응하는 구역적 구면 조화 함수 $Z_n(\xi)=Q_n^{(d)}(\xi\circ e_d)\in V$는 두 부분으로 쪼개집니다: $Z_n=Z'+Z''$ $(Z'\in V', Z''\in V'')$. $V'\perp V''$이므로, 내적의 정의에 의해 다음의 결과를 얻습니다:

$$0=\langle Z',Z''\rangle = \int_{\xi\in\mathbb{S}^{d-1}} Z'(\xi)\overline{Z''(\xi)}\,\mathrm{d}\mathbb{S}^{d-1}(\xi). \qquad (2.28)$$

한편, $N':=\dim V'>0$ 및 $N'':=\dim V''>0$로 두고, V'와 V''의 정규 직교 기저를 각각 $\{Y_k'\}_{k=1}^{N'}$와 $\{Y_k''\}_{k=1}^{N''}$로 설정하여 V의 정규 직교 기저를 구성하겠습니다. 이 경우, 수식 (2.23)에 따른 행렬 표현은 다음과 같이 블록 행렬 형태로 나타낼 수 있습니다: $U_g=\begin{pmatrix}U_g' & 0\\ 0 & U_g''\end{pmatrix}$.

이제, 수식 (2.25)와 유사하게 구면 형식 F'을 정의하겠습니다: $F':\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{S}^{d-1}\to\mathbb{C}$, $F'(\xi,\eta):=\sum_{k=1}^{N'}Y_k'(\xi)\overline{Y_k'(\eta)}$. 이와 같이 정의하면, 모든 것이 § 2.29과 유사하게 전개되어, 고정된 $\eta\in\mathbb{S}^{d-1}$에 대해 정의된 $F_\eta'(\xi):=F'(\xi,\eta)\in V'$에 대해 덧셈 정리 $F_\eta'=\frac{N'}{|\mathbb{S}^{d-1}|}Q_n^{(d)}(\xi\circ\eta)$를 얻게 됩니다. 비슷한 방법으로 구면 형식 F''을 적절히 정의하면, $F_\eta''\in V''$에 대한 덧셈 정리 $F_\eta''=\frac{N''}{|\mathbb{S}^{d-1}|}Q_n^{(d)}(\xi\circ\eta)$를 얻을 수 있습니다.

$F=F'+F''$이므로, $F_\eta=F_\eta'+F_\eta''$를 얻게 됩니다. 특히 $\eta=e_d$일 때, 다음의 결과를 얻습니다:

$$Z_n(\xi)=Q_n^{(d)}(\xi\circ e_d)=\frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_n^{(d)}}F_{e_d}(\xi)=\frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_n^{(d)}}F_{e_d}'(\xi)+\frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_n^{(d)}}F_{e_d}''(\xi).$$

한편, $F_{e_d}'\in V'$, $F_{e_d}''\in V''$이므로, Z_n 분해의 유일성에 의해 다음의 결과를 얻게 됩니다:

$$Z'(\xi)=\frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_n^{(d)}}F_{e_d}'(\xi)=\frac{N'}{N_n^{(d)}}Q_n^{(d)}(\xi\circ e_d), \qquad Z''(\xi)=\frac{|\mathbb{S}^{d-1}|}{N_n^{(d)}}F_{e_d}''(\xi)=\frac{N''}{N_n^{(d)}}Q_n^{(d)}(\xi\circ e_d).$$

따라서, 수식 (2.28)을 덧셈 정리를 이용해 다시 계산해 보면 다음과 같은 모순을 얻게 됩니다:

$$\begin{aligned}
0 = \langle Z', Z'' \rangle &= \frac{N'N''}{(N_n^{(d)})^2} \int_{\xi \in \mathbb{S}^{d-1}} Q_n^{(d)}(\xi \circ e_d) \overline{Q_n^{(d)}(\xi \circ e_d)} \mathrm{d}\mathbb{S}^{d-1}(\xi) \\
&= \frac{N'N''}{(N_n^{(d)})^2} \frac{|\mathbb{S}^{d-1}|^2}{(N_n^{(d)})^2} \int_{\xi \in \mathbb{S}^{d-1}} \left(\sum_{k=1}^{N_n^{(d)}} Y_{n,k}(\xi) \overline{Y_{n,k}(e_d)} \right) \left(\sum_{j=1}^{N_n^{(d)}} \overline{Y_{n,j}(\xi)} Y_{n,j}(e_d) \right) \mathrm{d}\mathbb{S}^{d-1}(\xi) \\
&= \frac{N'N''|\mathbb{S}^{d-1}|^2}{(N_n^{(d)})^4} \sum_{k=1}^{N_n^{(d)}} Y_{n,k}(e_d) \overline{Y_{n,k}(e_d)} = \frac{N'N''|\mathbb{S}^{d-1}|}{(N_n^{(d)})^3} Q_n^{(d)}(e_d \circ e_d) = \frac{N'N''|\mathbb{S}^{d-1}|}{(N_n^{(d)})^3} \neq 0.
\end{aligned}$$

3. 에필로그: 1부의 글을 마치면서

1부 글을 작성하는 동안 행복하고 즐거운 시간을 보냈습니다. 무엇을 쓸지 고민하며 자료를 찾고, 부족한 부분을 메워가면서 글의 통일성과 완성도를 높이기 위해 노력했습니다.

2부에서는 1부와는 전혀 다른 주제로, 조합론에 대한 이야기를 해볼까 합니다. 제 석박사 지도 교수님이신 히라사카 미츠구 교수님께서 연구하셨던 "어소시에이션 스킴(association scheme)"이라는 분야를 독자 여러분께 소개하고, 조합론의 세계에서도 "덧셈 정리"가 가능함을 설명하고자 합니다. 어소시에이션 스킴은 조합론과 대수학의 여러 대상을 통합하기 위해 만들어진 일반적인 개념인 만큼, 이러한 일반적인 조합론적 상황에서 덧셈 정리가 존재한다는 것은, 각각의 조합적 세계마다 특수 함수가 존재하여 이들이 특정한 종류의 덧셈 정리를 만족한다는 것을 의미합니다. 그럼 2부를 기대해 주시고, 다음 글에서 다시 뵙겠습니다!

4. 부록 1: $d \geqslant 2$일 때 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$는 O^d의 기약 표현이다

§ 4에서는 $d \geqslant 2$일 때 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$가 O^d의 기약 표현임을 순수하게 콤팩트 리 군의 표현론적 관점에서 증명하겠습니다. 이 내용을 부록에 포함하는 이유는, 이 주제가 수학적으로 매우 아름답고 흥미로울 뿐만 아니라, 이러한 표현론적 증명을 간단히 압축해 정리함으로써 앞서 본문에서 설명한 덧셈 정리를 이용한 증명 방법과 비교해 볼 수 있기 때문입니다.

§ 4에서는, 위상 공간 X에 대해 $C(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \ : \ f$는 연속 함수$\}$라고 정의하겠습니다.

4.1. ✻ **콤팩트 리 군 위에서는 연속 함수의 적분이 쉽게 정의된다**

콤팩트 리 군 G의 가장 중요한 성질 중 하나는 "연속 함수 $f : G \to \mathbb{C}$에 대한 G에서의 적분을 이미 잘 알려진 미분 기하학에서의 적분 개념을 가져와서 정의할 수 있다"는 사실입니다:

$$\int_{g \in G} f(g) := \int_G f\, \omega_G, \qquad (G\text{가 콤팩트이므로, } \int_{g \in G} 1 = \int_G \omega_G = 1\text{로 정규화 함}), \tag{4.1}$$

여기서, $\omega_G \in \bigwedge^{\dim G} \mathrm{T}^*(G)$는 미분 기하학에서 간단히 정의되어지는 "불변 부피 형식"입니다. 물론, 미분 기하학에 익숙치 않은 독자분들은 이 정의를 크게 신경쓰지 않으셔도 됩니다. 중요한 점은, 이 미분 형식의 불변성이 다음과 같은 적분에서의 불변성 결과를 준다는 사실입니다:

$$\forall h \in G,\ \forall f \in C(G), \qquad \int_{g \in G} f(g) = \int_{g \in G} f(hg) = \int_{g \in G} f(gh) = \int_{g \in G} f(g^{-1}). \tag{4.2}$$

일반적으로, 콤팩트 리 군보다 더 광범위한 개념인 "국소 콤팩트 하우스도르프 위상군"에 대해서 "하르 측도(Haar measure)"라고 불리는 복잡한(?) 측도를 도입하여, 그러한 위상군 위에서 적분 이론을 전개합니다. 그러나 콤팩트 리 군은 훨씬 더 매끄럽고 대칭적인 다양체 위에서 정의되는 수학적 대상으로, 불변 부피 형식이라는 훌륭한 미분 기하학적 도구를 자체적으로 가지고 있기 때문에, 연속 함수를 적분하는 정도에서는 하르 측도를 도입할 필요가 없습니다.

4.2. ✻ **콤팩트 리 군의 표현은 적분을 통해 유니터리하게 바뀌어지며, 완전 분해 가능하다**

G가 콤팩트 리 군이고, V가 G의 (유한 또는 무한 차원) 표현이라 하겠습니다. V가 어떤 내적 $(\cdot,\cdot)$을 가지고 있다면, 임의의 두 원소 $v, v' \in V$에 대해 연속 함수 $f_{v,v'} : G \to \mathbb{C}$를 정의합니다: $f_{v,v'}(g) := (g.v, g.v')$. 그리고, 이러한 연속 함수들을 적분하여 다음의 "작용합"을 정의합니다:

$$\langle v, v' \rangle := \int_{g \in G} f_{v,v'}(g), \qquad v, v' \in V. \tag{4.3}$$

임의의 $g \in G$와 $v \in V$에 대해 $f_{v,v}(g) = (g.v, g.v) > 0$이므로, 양의 정부호성 $\langle v,v\rangle > 0$ 역시 보장되어, 수식 (4.3)은 사실상 V의 "내적"입니다. 게다가, 수식 (4.2)에 의해 다음을 얻습니다:

$$\forall h \in G, \qquad \langle h.v, h.v'\rangle = \int_{g\in G} f_{h.v,h.v'}(g) = \int_{g\in G} f_{v,v'}(gh) = \int_{g\in G} f_{v,v'}(g) = \langle v, v'\rangle.$$

따라서, G의 작용은 V의 새로운 통계적 내적 $\langle\cdot,\cdot\rangle$에 대해서 "유니터리"합니다!

이제, 콤팩트 리 군 G의 임의의 유한 차원 표현 V을 생각하겠습니다. 앞서 정의된 V의 유니터리 내적을 이용하면, V가 완전 분해 가능(completely reducible)함, 즉 V가 기약 표현들의 직합임을 보일 수 있습니다: 만일, V가 G의 기약 표현이 아니라면 비자명한 부분 표현 $0 \neq V' \subsetneq V$이 존재할 것이고, V의 유니터리 내적이 존재하므로 $V'^{\perp}$ 역시 G의 표현이 됩니다:

$$\forall v' \in V', \forall v'' \in V'^{\perp}, \forall h \in G,\ \langle v', h.v''\rangle = \langle h^{-1}.v', v''\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad h.v'' \in V'^{\perp}. \tag{4.4}$$

이제 표현의 분해 $V = V' \oplus V'^{\perp}$를 얻으므로, 수학적 귀납법에 의해 V는 완전 분해 가능합니다.

4.3. ⁎ O^d의 표현에 대한 O^{d-1}-고정점 정리

직교군 O^d는 공간 $C(\mathbb{S}^{d-1}) = \{f : \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{C} \ :\ f \text{ 는 연속함수}\}$에 수식 (2.10)처럼 작용합니다. 만일, $0 \neq V \subseteq C(\mathbb{S}^{d-1})$가 직교군 O^d의 유한 차원 표현이라면 다음을 증명하도록 하겠습니다:

$$0 \neq F \in V\text{가 존재하여, } F\text{는 } \mathrm{O}^{d-1} = \mathrm{O}^d_{e_d}\text{에 의해 고정된다.} \tag{4.5}$$

우선, $f(e_d) \neq 0$인 $0 \neq f \in V$가 존재합니다(§ 2.11 (i)). 이제 $F : \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{C}$를 정의하겠습니다:

$$\forall \xi \in \mathbb{S}^{d-1}, \qquad F(\xi) := \int_{g\in \mathrm{O}^{d-1}} f_\xi(g), \qquad f_\xi = f_\xi(g) := f(g\xi) \in C(\mathrm{O}^{d-1}).$$

한편, V는 O^d의 표현이고 $f \in V$이므로, $g \in \mathrm{O}^{d-1}$에 대해서 $g^{-1}.f \in V$가 됩니다. 따라서, 만일 $\{f_i\}$가 V의 기저라고 하면, $g^{-1}.f$는 f_i들의 일차 결합으로 쓰여질 수 있습니다: 다시 말하면,

$$\exists c_i \in C(\mathrm{O}^{d-1}), \forall g \in \mathrm{O}^{d-1}, \forall \xi \in \mathbb{S}^{d-1}, \qquad f(g\xi) = (g^{-1}.f)(\xi) = \sum_i c_i(g) f_i(\xi).$$

이제 양변을 적분하게 되면, $F \in V$라는 결과를 얻게 됩니다:

$$F = F(\xi) = \int_{g\in \mathrm{O}^{d-1}} f(g\xi) = \sum_i \left(\int_{g\in \mathrm{O}^{d-1}} c_i(g) \right) f_i(\xi) \in V.$$

게다가, 수식 (4.2)를 이용하면 F는 O^{d-1}의 작용에 대해서도 고정되게 됩니다:

$$\forall h \in \mathrm{O}^{d-1}, \quad (h^{-1}.F)(\xi) = F(h\xi) = \int_{g\in \mathrm{O}^{d-1}} f(gh\xi) = \int_{g\in \mathrm{O}^{d-1}} f_\xi(gh) = \int_{g\in \mathrm{O}^{d-1}} f_\xi(g) = F(\xi).$$

한편, $F(e_d) = \int_{g\in \mathrm{O}^{d-1} = \mathrm{O}^d_{e_d}} f(ge_d) = \int_{g\in \mathrm{O}^{d-1}} f(e_d) = f(e_d)\int_{g\in \mathrm{O}^{d-1}} 1 = f(e_d) \neq 0$이므로, F가 수식 (4.5)에서 찾길 원하던, $\mathrm{O}^{d-1} = \mathrm{O}^d_{e_d}$의 작용에 대한 고정점이 됨을 알 수 있습니다.

4.4. ⁎ 직교군의 가지치기 규칙

수식 (2.9)을 이용하여, 이 절에서는 직교군 O^{d-1}와 부분군 $\mathrm{O}^d_{e_d} \cong \mathrm{O}^{d-1}$을 동일시하도록 하겠습니다. 직교군의 작용 $\mathrm{O}^d \rightharpoonup \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d)$을 고려할 때, 이 작용을 O^{d-1}으로 제한하면 n차 동차 다항식에서 e_d에 관한 항들을 고정하게 되므로, 다음과 같은 간단한 결과를 얻을 수 있습니다:

$$\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d){\downarrow_{\mathrm{O}^{d-1}}} \cong \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^{d-1}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Pol}_0(\mathbb{R}^{d-1}) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^{d-1}). \tag{4.6}$$

수식 (4.6)를 수식 (2.18)에 적용시키면 다음을 얻게 됩니다:

$$\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d){\downarrow_{\mathrm{O}^{d-1}}} \cong \mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d){\downarrow_{\mathrm{O}^{d-1}}} \oplus \left[\bigoplus_{k=0}^{n-2} \mathrm{Pol}_k(\mathbb{R}^{d-1}) \right].$$

반대로, 수식 (4.6)에 수식 (2.18)를 적용시키면 다음을 얻게 됩니다:

$$\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^d){\downarrow_{\mathrm{O}^{d-1}}} \cong \bigoplus_{k=0}^{n} \left[\mathrm{Harm}_k(\mathbb{R}^{d-1}) \oplus \mathrm{Pol}_{k-2}(\mathbb{R}^{d-1}) \right] \cong \left[\bigoplus_{k=0}^{n} \mathrm{Harm}_k(\mathbb{R}^{d-1}) \right] \oplus \left[\bigoplus_{k=0}^{n-2} \mathrm{Pol}_k(\mathbb{R}^{d-1}) \right].$$

직교군은 § 4.2에서 언급한 것처럼, 유한 차원 표현의 완전 분해 가능성을 가지므로, 세 유한 차원 표현 U,V,W에 대해 $U\oplus W\simeq V\oplus W$인 경우 $U\simeq V$가 성립합니다. 따라서 다음을 얻습니다:

$$\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)\downarrow_{\mathrm{O}^{d-1}}\simeq\bigoplus_{k=0}^{n}\mathrm{Harm}_k(\mathbb{R}^{d-1}).\tag{4.7}$$

(주: 일반적으로, 군 G의 기약 표현 V를 부분군 $H\leqslant G$의 작용으로 제한하여 H의 표현으로 간주할 때, V가 H의 기약 표현들로 다시 분해되는 규칙을 "가지치기 규칙"이라 부릅니다.)

4.5. ✻ $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$내에서 O^{d-1}의 작용에 대한 고정점들은 1차원을 이룬다

수식 (4.7)의 우변에 나타나는 공간들 $\mathrm{Harm}_k(\mathbb{R}^{d-1})$을 고려합시다. 만일, $0\neq f\in\mathrm{Harm}_k(\mathbb{R}^{d-1})$가 $\mathrm{O}^{d-1}=\mathrm{O}^d_{e_d}$의 작용에 대한 고정점이라면, 수식 (2.11)에 의해 k는 반드시 짝수가 되어야만 하고, f는 $f=c(x_1^2+\cdots+x_{d-1}^2)^{k/2}$, $c\in\mathbb{C}$ 형태를 가져야만 합니다. 이제 아주 사소하지만, 중요한 관찰을 하나 해 봅시다: $f=c(x_1^2+\cdots+x_{d-1}^2)^{k/2}$ 형태의 방사 함수들은 언제 $\triangle f=0$이 될까요? 답은 간단합니다: 반드시 $k=0$이어야만 합니다. $\dim\mathrm{Harm}_0(\mathbb{R}^{d-1})=\dim\mathrm{Pol}_0(\mathbb{R}^{d-1})=1$이므로, $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$내에서 O^{d-1}의 작용에 대한 고정점들은 1차원을 이룹니다.

4.6. ✻ $d\geqslant 2$일 때 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$는 O^d의 기약 표현이다

이 절에서는 $d\geqslant 2$일 때 $V_0:=\mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$로 두고 귀류법을 사용하겠습니다. 만일 V_0가 O^d의 기약 표현이 아니라면, 부분 표현 $V_1\neq 0$과 $V_2\neq 0$가 존재하여 $V_0=V_1\oplus V_2$가 될 것입니다. 이 때, 이러한 분해는 수식 (2.20)에서의 ϖ를 통해(§ 2.21의 주 참조) 다음의 분해로 바뀌어 집니다:

$$V:=\mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1})=\varpi(V_0)=V'\oplus V'',\qquad V':=\varpi(V_1),\ V'':=\varpi(V_2).$$

§ 4.5의 내용에 의하면, V_0내에서 $\mathrm{O}^{d-1}=\mathrm{O}^d_{e_d}$의 작용에 대한 고정점들은 1차원을 이루므로, $V=\varpi(V_0)$내에서도 O^{d-1}의 작용에 대한 고정점들은 1차원을 이룹니다; 한편, 수식 (4.5)에 의하면 V'과 V''내에는 O^{d-1}의 작용에 대한 각각의 비자명한 고정점이 존재하므로, 모순입니다.

5. 부록 2: 구면 조화 함수와 게겐바우어 다항식의 직교성

§ 5에서는 수식 (2.24)에서 정의되어진 게겐바우어 다항식이 수식 (2.5)에서와 같은 직교성을 가짐을 보이는 것이 목표입니다.

5.1. ✻ 오일러 동차 함수 정리

수식 (2.19)의 양변을 t에 대해서 미분합시다. 이 때, $x_i'=tx_i$라고 치환하면 다음을 얻게 됩니다:

$$nt^{n-1}f(x_1,\ldots,x_d)=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f(x_1',\ldots,x_d')}{\partial x_i'}\cdot\frac{\partial x_i'}{\partial t}=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f(x_1',\ldots,x_d')}{\partial x_i'}\cdot x_i.$$

마지막으로 $t=1$을 대입하면 $x_i'=x_i$를 얻게 되고, 오일러 동차 함수 정리를 얻게 됩니다:

$$nf(x)=nf(x_1,\ldots,x_d)=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f(x_1,\ldots,x_d)}{\partial x_i}\cdot x_i=\nabla f(x)\circ x,\qquad x\in\mathbb{R}^d.\tag{5.1}$$

5.2. ✻ 고차원 발산 정리

$V\subseteq\mathbb{R}^d$가 콤팩트(닫혀 있고 유계)이고, V의 내부가 $\mathbb{R}^d$의 열린 집합이며, 그 경계 $S:=\partial V$가 매끄럽다고 가정합시다. 만일 $F:V\to\mathbb{R}^d$가 부드러운 함수라면, 다음 정리가 성립합니다:

$$\int_V\nabla\circ F\,\mathrm{d}V=\int_S F\circ\hat{n}\,\mathrm{d}S.$$

여기서 $\hat{n}$은 V의 바깥쪽으로 향하는 S상의 정규 법벡터입니다. 만일 V가 속이 꽉 찬 d차원 공 $\mathbb{B}^d$이라면, 그 경계는 d-1차원 구면 $\partial\mathbb{B}^d=\mathbb{S}^{d-1}$이 되고, 발산 정리는 다음과 같이 표현됩니다:

$$\int_{x\in\mathbb{B}^d}(\nabla\circ F)(x)\,\mathrm{d}\mathbb{B}^d(x)=\int_{\xi\in\mathbb{S}^{d-1}}F(\xi)\circ\xi\,\mathrm{d}\mathbb{S}^{d-1}(\xi).\tag{5.2}$$

5.3. ✻ 구면 조화 함수들의 직교성

$Y_n \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1})$, $Y_m \in \mathrm{Harm}_m(\mathbb{S}^{d-1})$이라고 합시다. 정의에 의하면, $Y_n = H_n|_{\mathbb{S}^{d-1}}$, $Y_m = H_m|_{\mathbb{S}^{d-1}}$을 만족시키는 $H_n \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{R}^d)$과 $H_m \in \mathrm{Harm}_m(\mathbb{R}^d)$이 각각 존재합니다. 수식 (5.2)를 $F = F_1 = H_n\overline{\nabla H_m}$과 $F = F_2 = \overline{H_m}\nabla H_n$에 각각 적용하고, 그 결과를 빼 보면 다음을 얻게 됩니다:

$$\int_{x\in\mathbb{B}^d} \nabla\circ\Big(H_n(x)\,\overline{\nabla H_m(x)} - \overline{H_m(x)}\,\nabla H_n(x)\Big)\,\mathrm{d}\mathbb{B}^d(x)$$
$$= \int_{\xi\in\mathbb{S}^{d-1}} \Big(H_n(\xi)\,\overline{\nabla H_m(\xi)} - \overline{H_m(\xi)}\,\nabla H_n(\xi)\Big)\circ\xi\,\mathrm{d}\mathbb{S}^{d-1}(\xi).$$

좌변에서 $\nabla\circ\Big(H_n(x)\overline{\nabla H_m(x)}\Big) = \nabla H_n(x)\circ\overline{\nabla H_m(x)} - \overline{H_m(x)}\,\triangle\,H_n(x) = \nabla H_n(x)\circ\overline{\nabla H_m(x)}$임을 이용하고, 우변에서는 수식 (5.1)과 $\overline{\xi} = \xi \in \mathbb{S}^{d-1}$임을 이용하여 다음의 결과를 얻어 냅니다:

$$0 = (m-n)\int_{\xi\in\mathbb{S}^{d-1}} H_n(\xi)\,\overline{H_m(\xi)}\,\mathrm{d}\mathbb{S}^{d-1}(\xi) = (m-n)\int_{\xi\in\mathbb{S}^{d-1}} Y_n(\xi)\,\overline{Y_m(\xi)}\,\mathrm{d}\mathbb{S}^{d-1}(\xi).$$

이 결과는 $\widehat{\mathrm{Harm}}(\mathbb{S}^{d-1})$내에서, $m \neq n$일 때 $\mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1}) \perp \mathrm{Harm}_m(\mathbb{S}^{d-1})$을 의미합니다.

5.4. ✻ 게겐바우어 다항식의 직교성

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$가 연속 함수고 $\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$가 고정되었을 때, 함수 $\xi \mapsto f(\xi\circ\eta)$는 η에 대한 구역적 구면 함수입니다. 이러한 함수의 구면 적분은 $t = \xi\circ\eta$로 치환하여 수식 (2.4)를 이용합니다:

$$\int_{\xi\in\mathbb{S}^{d-1}} f(\xi\circ\eta)\,\mathrm{d}\mathbb{S}^{d-1}(\xi) = \int_{-1}^{1} f(t)\,(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}\,\mathrm{d}t\cdot\int_{\mathbb{S}^{d-2}}\mathrm{d}\mathbb{S}^{d-2} = |\mathbb{S}^{d-2}|\cdot\int_{-1}^{1} f(t)\,(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

한편 $n \neq m$일 때, 게겐바우어 다항식의 정의로부터 $Q_n^{(d)}(\xi\circ e_d) = Z_n(\xi) \in \mathrm{Harm}_n(\mathbb{S}^{d-1})$, $Q_m^{(d)}(\xi\circ e_d) = Z_m(\xi) \in \mathrm{Harm}_m(\mathbb{S}^{d-1})$이므로, § 5.3의 결과에 의하면 다음을 얻습니다:

$$\int_{\xi\in\mathbb{S}} Q_n^{(d)}(\xi\circ\eta)\,Q_m^{(d)}(\xi\circ\eta)\,\mathrm{d}\mathbb{S}^{d-1}(\xi) = \int_{\xi\in\mathbb{S}} Z_n(\xi)\,Z_m(\xi)\,\mathrm{d}\mathbb{S}^{d-1}(\xi) = \langle Z_n, Z_m\rangle = 0.$$

앞의 계산처럼 구역적 구면 함수의 적분은, 치환 $t = \xi\circ\eta$을 이용해 형태를 바꿀 수 있습니다:

$$\int_{\xi\in\mathbb{S}} Q_n^{(d)}(\xi\circ\eta)\,Q_m^{(d)}(\xi\circ\eta)\,\mathrm{d}\mathbb{S}^{d-1}(\xi) = |\mathbb{S}^{d-2}|\cdot\int_{-1}^{1} Q_n^{(d)}(t)\,Q_m^{(d)}(t)\,(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

그러므로, 수식 (2.5)와 같은 게겐바우어 다항식의 직교성을 얻게 됩니다.

References

[1] T.H. Koornwinder, The addition formula for Jacobi polynomials and spherical harmonics, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 25, No. 2 (1973), 236–246.
[2] C. Efthimiou, C. Frye, Spherical harmonics in p dimensions (2014), World Scientific.
[3] K. Atkinson, W. Han, Spherical harmonics and approximations on the unit sphere: an introduction, Lecture Notes in Mathematics 2044 (2012), Springer.
[4] M. R. Sepanski, Compact Lie groups, Graduate Texts in Mathematics 235 (2007), Springer.
[5] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces (1978), Academic Press.

Email address: kyoungtarkkim@gmail.com

부산교육대학교 미래교육원, 연구원 / 시간 강사