1.2　反復法

工学における実際の応用では，は疎行列になることが多いが，掃出法だと0の要素もまともに計算する　→　計算の無駄が多いため，異なる方法が必要

1.2.1 ヤコビ法

元一次連立方程式

　 (1)

において，係数行列を下記のように置く．

　 (2)

ここで，

式(1)に式(2)を代入すると，

よって，

ここで，とおくと，

(3)

が得られる．

式(3)を使った という漸化式は，においては解に収束する．

このことを利用して，繰り返し計算することにより解の近似値を求める方法：ヤコビ法

※：反復行列

＜証明＞

式(3)において，適当な初期値から出発し，

という漸化式により，ベクトル列を求める．

に収束すれば，

となり，が式(3)を満たすので，が解となる。

＜計算方法＞

と簡単に求めることができるので、

であるので

(行1列ベクトル)

(例) 2元一次連立方程式の場合

3元一次連立方程式の場合

(例)

　について 　を初期値として解く

漸化式は

真値は　であるので，段階を追うごとに真値へ近づいていることがわかる．

・収束判定

計算は無限に続く → どこで計算を打ち切るかが問題

収束近くではであるので，は0ベクトルに近づく．

よって，誤差限界値を決めておいて，

であれば終了とする．

1.2.2 ガウス・ザイデル法

において，

　 (1)

により，次式

　 (2)

から得られる反復法：ガウス・ザイデル法

式(1)から，次の漸化式を得る．

より形を求める

(例)2元一次連立方程式の場合

3元一次連立方程式の場合

(例)

　　を　を初期値として解く

漸化式は

※ヤコビ法との比較

・最新のデータを用いて計算しているので，収束が速い

・新しい値をすぐに置き換えてよいので，記憶場所が節約できる．

　（ヤコビ法：の保管場所を別々に確保しないといけない）

・解の収束性

反復法は必ず解に収束するわけではない

(例)

漸化式 を使って，　を初期値として開始

,

→　収束する

(例) 　　　（行を入れ替え）

漸化式を使って，を初期値として開始

, 　→　収束しない

＜定理＞

連立一次方程式の係数行列が以下の条件

(1)

を満たすならば，反復法は任意の初期値に対して解に収束する．

(1)式を満たす行列のことを，対角優位行列と呼ぶ．

＜証明＞

証明のために，下記の定理1, 2について証明する．

・定理1

が対角優位行列ならば，反復行列のすべての固有値について，

（証明）

次正方行列の固有値を，その固有ベクトルをとすると，

(2)

の成分において，絶対値が最大のものをとする．つまり，

このとき，式(2)の第行の式は，

これより，

であるから，

両辺の絶対値をとって

ところで，ヤコビ法では

と表すことができる．

の固有値を，その固有ベクトルをとすると、

式(1), (2)より

(3)

が対角優位行列であれば，

よって，式(3)は

であるから，が成り立つ。

・定理2

が収束するならば，のすべての固有値について，である

を満たすを反復法で求めるために，次の漸化式を考える．

両式の差を取って，

(4)

ここで，と置くと，式(4)は

(5)

一方，の番目の固有値を，その固有ベクトルをとすると，

とすると，はの線形結合で表せる．すなわち，

このとき，式(5)は，

となるから，移項してまとめると

(6)

は1次独立なので，式(6)はの時のみ成り立つ．つまり，

(7)

また，が収束するならば，なので，

これもの1次独立性より，

(8)

式(7)の両辺の極限をとり，式(8)を考慮すると，

(9)

よって，でなければ式(9)が成り立たない．

ゆえに，であればが収束すると言える．

定理1と定理2により，

　Aが対角優位行列であれば，は収束することが証明された．