3.2　補間法

　個の点におけるの値, , , がわかっているとき，

を満たす()関数をの補間関数という

3.2.1　ラグランジュ補間

(1)　1次補間

　2点を通る1次式を求める

＜方法＞

とおき，を代入する

(1)

(2)

(1) –(2)より

(3)

(3)を(1)に代入して

(4)

(3)，(4)をもとの式に代入すると

(2)　2次補間

　3点を通る2次式を求める（点を通る次式は一意に求まる）

とおき，各点を代入すると

(1)

(2)

(3)

(2)(1)，(3)(1)より

(4)

(5)

より

(6)

(6)式の左辺は，以下のようになる

よって，(6)は

(7)

(4)を変形すると，

(8)

(8)に(7)を代入すると

(9)

(1)より この式に(7), (9)を代入して

を係数とする項ごとにまとめると

(10)

(10) の第1項目の分子を展開すると

よって，は

(11)

※分母の減算を入れ替えていることに注意

に上記で求めたを代入すると

を係数とする項ごとにまとめると

(12)

(3)n次補間

　を通るで近似

とおき，上述の点を代入し，解くと下式が求まる

（問題点）

　点数が多くなると補間式が高次多項式になる→振動することがある

・スプライン補間

ラグランジュ補間は，データ点数が増えてくると関数が振動し，問題が発生することがある．これは，分点が()個あると，補間式はn次の多項式となるためで，なるべく低次の多項式で補間するのがよい．ここでは，3次多項式を用いたスプライン補間法について述べる．

【定義】

区間で定義された関数において，個の分点が与えられているとき，次の（Ⅰ）～（Ⅲ）の条件を満たす3次多項式を考える．

（Ⅰ）区間での3次多項式をとする．

（Ⅱ）において，は以下の(i)～(iv)の条件を満たす．

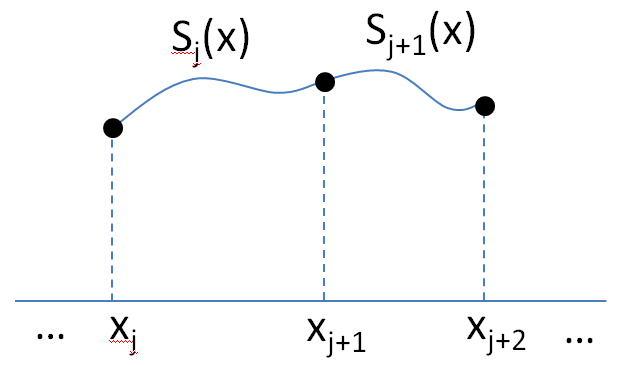
(i) (ii)

(iii) (iv)

（Ⅲ）において，下記の境界条件を満たす．

　　　（自然境界条件）

　このとき，を3次スプライン関数（特に，自然境界条件を用いた場合は自然スプライン関数）と呼ぶ．



【求め方】

区間上のを，下記の3次多項式とおく．

(1)

(1)式において，とおくと，

また，(1)式においてとおくと，

　，ここで (2)

また，区間上のは，

(3)

であるから，(3)式においてとおくと，

(4)

(2)式と(4)式，および条件(Ⅱ)の(ii)より，

(5)

次に，(1)式，(3)式をそれぞれで微分すると，

(6)

(7)

(6), (7)式において，とおくと，

(8)

(9)

(8),(9)式，および条件(Ⅱ)の(iii)により，

(10)

さらに，(8), (9)式をさらにで微分すると，

(11)

(12)

(11), (12)式において，とおき，さらに条件(Ⅱ)の(iv)より

(13)

(13)式より

(14)

(14)式を(5)式に代入すると，

(15)式を変形して，

(16)式において，に置き換えると，

また，(14)式を(10)式に代入すると，

(18)式においても，に置き換えると，

(19)式に(17)式を代入して，

(16)式と(20)式は等しいので，

これをまとめると，次式を得る．

(21)式において，

また，自然境界条件より得られる

の2つの方程式を組み合わせれば，個の未知数に対して，個の方程式があるので，が唯一に求まる．

上記連立方程式を行列で表現すると，係数行列は下記のような3重対角行列となる．

この連立方程式を解いてを求め，(14)式と(16)式によりを求めることで，すべてのが求まり，結果として区間上の3次スプライン関数が求まる．

※実際には， を代入して，元の連立方程式

により求める．