

# 1 Quantifizierung

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

$$\sum_{i=1}^{-1} i^2 = 0 \text{ (neutrales Element)}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 + 1 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + 1 \text{ (?)}$$

$$\sum_{i=1}^n (i^2 + 1) = (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + \dots + (n^2 + 1) \text{ (?)}$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ \text{odd}(i)}}^n i^2 = 1^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$\prod_{i=1}^n i^2 = 1^2 * 2^2 * \dots * n^2$$

$$\prod_{i=1}^{-1} i^2 = 1 \text{ (neutrales Element)}$$

$$\forall_{i=0}^{n-1} b[i] == 0 = b[0] == 0 \wedge b[1] == 0 \wedge \dots \wedge b[n-1] == 0$$

$$\exists_{i=0}^{n-1} b[i] == 0 = b[0] == 0 \vee b[1] == 0 \vee \dots \vee b[n-1] == 0$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = (\sum i : \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n : i^2)$$

$$(\sum i : \mathbb{N}, j : \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq 2 \wedge 1 \leq j \leq 3 : i^j)$$

$$(\circ v_1 : T_1, \dots, v_n : T_n \mid R : P)$$

$$- \circ : T \times T \rightarrow T \text{ (wobei T ein Typ ist)}$$

Bsp:  $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   
 $+(3, 4) = 7$

$a \circ b = b \circ a$  fuer alle  $a, b : T$  (Symmetrie) — ABELSCHES MONOID

$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$  fuer alle  $a, b, c : T$  (Assoziativitaet)

$$u \circ a = a = a \circ u$$

es gibt ein  $u : T$ , so dass fuer alle  $a : T$  (neutrales Element) — MONOID

$\circ$	$T$	$u$
$+\sum$	$\mathbb{Z}$	$0$
$*\prod$	$\mathbb{Z}$	$1$
$\forall$	$\mathbb{B}$	$true$
$\exists$	$\mathbb{B}$	$false$

String mit Konkatination nicht-abelsches Monoid

$$("a" + "b") + "c" \text{ equals } "a" + ("b" + "c")$$

"a" + "" equals "a"  
 "a" + "b" !equals "b" + "a"

-  $T_1, \dots, T_n$  Datentypen

-  $V_1, \dots, V_n$  Variablen

alle paarweise verschieden

$V_i$  vom Typ  $T_i$

-  $R$  : boolescher Ausdruck, kann  $V_1 \dots V_n$  enthalten, Bereich (Range)

-  $P$  : beliebiger Ausdruck vom Typ  $T$ , kann  $V_1 \dots V_n$  enthalten, Koerper (Body)

Typ der Quantifizierung :  $T$

$(\forall i : \mathbb{N} \mid 0 \leq i \leq n : b[i] = 0)$  und das Ganze ist :  $\mathbb{B}$   
 $(\circ V_1 : T_1 \mid R : P)$  wobei  $T_1 : \mathbb{N}, P : \mathbb{B}$

$\wedge : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$

$P : T_1 \times T_2 \times \dots \times T_n \rightarrow T$

## 2 Semantik

Bsp:  $(+i : \mathbb{Z} \mid -1 \leq i \leq 2 : i^2)$

1. Fall (Topf  $\neq \emptyset$ )

Von  $\mathbb{Z}$  alle Zahlen ausfiltern  $(-1, 0, 1, 2)$  (Menge)

$\rightarrow^{1^2} ((-1)^2, 1^2, 0^2, 2^2)(1, 1, 0, 4)$  (Multimenge)

$\rightarrow 2^2 + 1^2 + (-1)^2 + 0^2$

2. Fall (Topf = 0)

$\rightarrow$  Topf leer  $\rightarrow$  Resultat: Neutrales Element (von  $+$ )  $\rightarrow 0$

Beispiele:

- 1)  $(+ i : \mathbb{N} \mid 0 \leq i \leq 4 : i * 8) = (0 * 8) + (1 * 8) + \dots$
- 2)  $(* i : \mathbb{N} \mid 0 \leq i \leq 3 : i + 1) = (0 + 1) * (1 + 1) * \dots$
- 3)  $(\wedge i : \mathbb{N} \mid 0 \leq i \leq 2 : i * d \neq 6) = (0 * d) \neq 6 \wedge (1 * d) \neq 6 \wedge \dots$
- 4)  $(\vee i : \mathbb{N} \mid 0 \leq i \leq 21 : b[i] = 0) = b[0] = 0 \vee b[1] = 0 \vee \dots$
- 5)  $(\sum k : \mathbb{N} \mid k^2 = 4 : k^2) = 2$
- 6)  $(\sum k : \mathbb{Z} \mid k^2 = 4 : k^2) = 2 + (-2) = 0$

## 2.1 This is a subsection