

# **Mathematik für Biologie**

Uni Bern

HS 2015

# Contents

<b>1</b>	<b>Erste Woche</b>	<b>1</b>
1.1	Lineares Wachstum . . . . .	1
1.2	Exponentielles Wachstum . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Zweite Woche</b>	<b>5</b>
2.1	Wachstumsrate . . . . .	5
2.2	Kontinuierliche Wachstumsrate . . . . .	6
2.3	Logarithmisches Wachstum . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Dritte Woche</b>	<b>11</b>
3.1	Logarithmisches Wachstum (vort.) . . . . .	11
3.2	Logistisches Wachstum . . . . .	12

# 1 Erste Woche

## 1.1 Lineares Wachstum

Bsp: Ein Baum wächst 20cm pro Jahr.

rekursiv (indirekte Berechnung):  $H(x) = H(x - 1) + 20$

explizit (direkte Berechnung):  $H(x) = 20 \cdot x$

$x, n \in \mathbb{N}$ , wobei  $H(x)$  die Höhe des Baums nach  $x$  Jahren in cm.

$$H_n = H(n) = 20 \cdot n$$

---

Allgemeines diskretes lineares Wachstums Modell (WM):

rekursiv:  $N_n = N_{n-1} + a$

explizit:  $N_n = N_0 + a \cdot n$

$a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

$a > 0$ :  $N_n$  zunehmend

$a < 0$ :  $N_n$  abnehmend

$a = 0$ :  $N_n$  konstant

$N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  Folge (ist eine Funktion / Abbildung)

---

Vom rekursiven zum expliziten:

$$N_{n+1} = N_n + 1a = N_{n-1} + a + a = N_{n-1} + 2a = N_{n-2} + a + 2a = N_{n-2} + 3a = \dots = N_0 + (n+1)a$$

Beispiel (Dolbearsche Gesetz)

$$T_n = 1/7n + 40/9$$

$T_n$ : Temperatur gemessen in °C

$n$ : die Anzahl der Zirplaute in einer Minute

$$n = 7: T = \dots = 5.\bar{4}$$

$$n = 14: T = \dots = 6.\bar{4}$$

...

$$n = 105: T = \dots = 19.\bar{4}$$

Bereich: 5°C - 30°C

Beispiel: Gewicht einer Insektenlarve zu jeder vollen Stunde:

$$G(n) = 0.01n + 1, n \in \mathbb{N}$$

$$G(t) = 0.01t + 1, t \in \mathbb{R}_+$$

---

Allgemeines kontinuierliches lineares Wachstums Modell (WM):

$$N_t = N_0 + t \cdot a, t \in \mathbb{R}_+$$

$N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto N(t)$  Funktion/Abbildung

---

Wachstumsrate (Wachstum relativ zur Gesamtgrösse)

diskret:  $r_n = \frac{N_{n+1} - N_n}{N_n} = \frac{a}{N_n} = \frac{a}{N_0 + n \cdot a}$

$$N_{n+1} - N_n = \frac{N_{n+1} - N_n}{(n+1) - n}$$

kontinuierlich:  $r = \frac{N'(t)}{N(t)} = \frac{(N_0 + t \cdot a)'}{N_0 + t \cdot a} = \frac{a}{N_0 + t \cdot a}, t \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{(t + \Delta t) - t}$$

---

## 1.2 Exponentielles Wachstum

Beispiel (Zellteilung)

Eine Zelle teile sich zweimal pro Stunde

$N(n)$ : die Anzahl Zellen nach  $n$  Stunden

$$N_0 = 1, N_1 = 4, N_2 = 16, N_3 = 64, \dots$$

rekursiv:  $N_n = 4N_{n-1}, n = 1, 2, 3, 4, \dots$

explizit:  $N_n = 4(4N_{n-2}) = 4^2 N_{n-2} = \dots = 4^n N_0 = 4^n$

---

Allgemeines diskretes exponentielles Wachstums Modell (WM):

rekursiv:  $N_n = b \cdot N_{n-1}, b \in \mathbb{R}+$

$0 < b < 1$ :  $N_n$  abnehmend

$b > 1$ :  $N_n$  zunehmend

$b = 1$ :  $N_n$  konstant

$b = \frac{N_n}{N_{n-1}} \overset{\leftrightarrow y}{\leftrightarrow x}$  Gleichung einer Gerade durch den Ursprung mit Steigung  $b$

explizit:  $N_n = b^n \cdot N_0, b \in \mathbb{R}+$

$$\log(N_n) = \log(b^n \cdot N_0)$$

$$\log(N_n) = \log(b^n) + \log(N_0)$$

$$\log(N_n) = n \cdot \log(b) + \log(N_0)$$

In der  $\log$  Skala erscheint exponentielles Wachstum linear

Zellteilung:

$$\log(N_n) = n \cdot \log(4) + \log(1)$$

$$\log(N_n) = n \cdot \log(4)$$

---

## 2 Zweite Woche

### 2.1 Wachstumsrate

Diskrete Wachstumsrate

$$r_n = \frac{N_{n+1} - N_n}{N_n} = \frac{\frac{N_{n+1} - N_n}{n+1-n}}{N_n}$$

Im diskreten exponentiellen Modell:

$$r_n = \frac{b \cdot N_n - N_n}{N_n} = b - 1 \text{ konstant}$$

(diskretes exponentielles Wachstum  $\Rightarrow r_n$  konstant)

Frage:  $r_n$  konstant  $\stackrel{?}{\Rightarrow} N_n$  wächst exponentiell

$$r_n \text{ konst.} \Rightarrow r_n = c \Rightarrow \frac{N_{n+1} - N_n}{N_n} = c \Rightarrow N_{n+1} - N_n = c \cdot N_n \Rightarrow N_{n+1} = (c + 1)N_n \text{ (diskr. exp. W.)}$$

Fazit: Ein diskretes exponentielles WM ist durch eine konstante Wachstumsrate charakterisiert.

---

Bemerkungen

- $b - 1 > 0$  exp. Wachstum
- $b - 1 < 0$  exp. Zerfall

- $b - 1 = 0$   $N_n$  bleibt konstant
- 

## 2.2 Kontinuierliche Wachstumsrate

$N : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  reelle Funktion  $N(t)$

durchschnittliche Änderung pro Zeiteinheit im Bereich von  $t$  bis  $t + \Delta t$ ,  
wobei  $\Delta t > 0$  :  $\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t}$

momentane Wachstumsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = N'(t)$$

konkav? konvex?

---

Kontinuierliche Wachstumsrate

$$r(t) = \frac{N'(t)}{N(t)}$$

kont. exp. WM

Konstante Wachstumsrate

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = c$$

Differentialgleichung (DG): gesucht ist die Funktion  $N(t)$ . In dieser Gleichung finden wir auch die Ableitung  $N'(t)$  von  $N(t)$

$$N'(t) = c \cdot N(t)$$

$N(t) = e^{c \cdot t}$  ist eine Lösung der DG.



Überprüfung:  $N'(t) = (e^{ct})' = c \cdot e^{ct} = c \cdot N(t) \checkmark$

Anfangsbedingung:  $N(0) = N_0$

$$N(t) = e^{ct} \cdot N_0$$

$$t = 0: 1 \cdot N_0 = N_0 \checkmark$$

$$N'(t) = (N_0 \cdot e^{ct})' = c \cdot (N_0 \cdot e^{ct}) = c \cdot N(t) \checkmark$$

ist eine (der vielen??) Lösung der DG mit Anfangsbedingung  $N(0) = N_0$

---

### Kontinuierliches exponentielles Wachstumsmodell

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = r \quad \text{DG}$$

$N(t) = e^{rt}$  ist eine Lösung der DG

$N(0) = N_0$  Anfangsbedingung

$N(t) = N_0 \cdot e^{rt}$  ist eine Lösung der DG mit Anfangsbedingung  $N(0) = N_0$

Konvex: Steigung nimmt zu oder  $\underbrace{N''(t)}_{=r^2 \cdot N_0 \cdot e^{rt}} > 0$

Eindeutig? Antwort:

Sei  $X(t)$  eine beliebige Lösung der DG

$$\text{D.h. } \frac{X'(t)}{X(t)} = r \Leftrightarrow X'(t) = r \cdot X(t)$$

$$N'(t) = r \cdot N(t)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{X(t)}{e^{rt}}\right)' &= (e^{-rt} \cdot X(t))' = (e^{-rt})' \cdot X(t) + e^{-rt} \cdot (X(t))' = -r \cdot e^{-rt} \cdot \\ X(t) &+ e^{-rt} \cdot X'(t) = -r \cdot e^{-rt} \cdot X(t) + e^{-rt} \cdot r \cdot X(t) = 0 \end{aligned}$$

d.h.  $\frac{X(t)}{e^{rt}} = c \Leftrightarrow X(t) = c \cdot e^{rt}$  die exponentielle Funktion ist eindeutig  
Anfangsbedingung  $X(0) = N_0$

$$c \cdot e^{r \cdot 0} = N_0$$

$$c = N_0$$

d.h.  $X(t) = N_0 \cdot e^{rt}$  ist eine eindeutige Lösung der DG  $X'(t) = r \cdot X(t)$   
mit A.B.  $X(0) = N_0$

---

## 2.3 Logarithmisches Wachstum

$$\frac{55-50}{50} = \frac{5}{50} = 0.1 = 10\%$$

$$\frac{5005-5000}{5000} = \frac{5}{5000} = 0.001 = 0.1\%$$

Ein relativer Gewichtsunterschied von  $\sim 2\%$  eines in einer ruhenden Hand gehaltenen Gegenstands wird erkannt. D.h. bei 50gr ein Gewichtsunterschied von 1gr.

---

### Gesetz von Weber und Fechner

(Beziehung zwischen Stimulus und Wahrnehmung)

Unsere Wahrnehmung einer Intensitätsänderung ist proportional zur relativen Änderung des Stimulus.

Mathematisch formuliert:

$S$  die Intensität des Stimulus

$\Delta S$  die Änderung dieser Intensität

$W(S)$  die (von  $S$  abh.) Stärke der Wahrnehmung

$$\Delta W(S) = K \cdot \frac{\Delta S}{S}, K \text{ Konstante}$$

umgeformt:  $\frac{\Delta W(S)}{\Delta S} = \frac{K}{S}$

für klein werd.  $\Delta S$ :  $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta W(S)}{\Delta S} = W'(S) = \frac{K}{S}$

gesucht ist  $W(S)$ . In der Gleichung taucht  $W'(S)$  auf  $\rightarrow$  D.G.

$$\int K \cdot \frac{1}{S} dS = K \cdot \int \frac{1}{S} dS = K \cdot \ln(S) + c$$

$$(K \cdot \ln(S))' = K \cdot \frac{1}{S} = \frac{K}{S}$$

Definition der Ableitung:

$$W'(S) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{W(S+\Delta S) - W(S)}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta W(S)}{\Delta S}$$

---

$$W(S) = K \cdot \ln(S) + c$$

$S_0$ : die grösste Intensitätsgrenze, bei der keine Wahrnehmung möglich ist.

$$W(S_0) = K \cdot \ln(S_0) + c = 0$$

$$c = -K \cdot \ln(S_0)$$

$$W(S) = K \cdot \ln(S) - K \cdot \ln(S_0)$$

$$W(S) = K \cdot \ln\left(\frac{S}{S_0}\right)$$

$$W(S) = a \cdot \ln(b \cdot S), a, b \text{ konst.}$$

Beispiel:

$$a = 1, b = 2$$

$$W(S) = \ln(2S)$$

$$S = 1/2$$

$$W(S) = \ln(1) = 0$$

Darstellung:

$$W(S) = a \cdot \ln(bS) = a \cdot (\ln(b) + \ln(S)) = a \cdot \ln(b) + a \cdot \ln(S)$$

$$\log_{10}(S) = \frac{\ln(S)}{\ln(10)}$$

$$\underbrace{a \cdot \ln(b)}_{\substack{\text{konst.} \\ y\text{-Achsenabschnitt}}} + \underbrace{a \cdot \ln(10)}_{\text{Steigung}} \cdot \log_{10}(S)$$


---

## 3 Dritte Woche

### 3.1 Logarithmisches Wachstum (vort.)

$$W(S) = a \cdot \ln(b \cdot S), \quad a, b \text{ konst.}$$

$$a = 1, b = 2: W(S) = \ln(2S)$$

( $\ln = \log_e$ ,  $e \simeq 2.7$  die Eulersche Zahl

$$\ln(x) = y \Leftrightarrow e^y = x)$$

$$W(1) = \ln(2) \simeq 0.69$$

$$W(2000) = \ln(4000) \simeq 8.3$$

$$W(10000) = \ln(20000) \simeq 9.9$$

$$W(S) = a \cdot \ln(b) + a \cdot \ln(S) = \underbrace{a \cdot \ln(b)}_{\substack{\text{konst.} \\ y\text{-Achsenabschnitt}}} + \underbrace{a \cdot \ln(10)}_{\text{Steigung}} \cdot \log_{10}(S)$$

$$W(S) = \ln(2) + \ln(10) \cdot \log_{10}(S) \simeq 0.69 + 2.3 \cdot \log_{10}(S)$$

$$\ln(S) \stackrel{?}{=} \ln(10) \cdot \log_{10}(S)$$

$$\text{Hinweis: } 10^{\log_{10}(S)} = S$$

$$\ln(10^{\log_{10}(S)}) = \ln(S)$$

$$\log_{10}(S) \cdot \ln(10) = \ln(S)$$

---

Eindeutigkeit der Lösung der DG  $W'(S) = \frac{K}{S}$  mit A.B.  $W(S_0) = 0$

Wir haben schon die Lösung  $W(S) = k \cdot \ln(\frac{S}{S_0})$  gefunden

Sei  $X(S)$  eine beliebige Lösung, d.h.  $X'(S) = \frac{K}{S}$  und  $X(S_0) = 0$

$W'(S) - X'(S) = 0 \Leftrightarrow W(S) - X(S) = c$  für eine Konstante  $c$  (1)

für  $S = S_0$ :  $W(S_0) - X(S_0) = c \Leftrightarrow 0 - 0 = c \Leftrightarrow c = 0$  (2)

$\stackrel{(1)(2)}{\Rightarrow} X(S) = W(S)$

---

## 3.2 Logistisches Wachstum

exp. Wachstum  $\frac{N'(t)}{N(t)} = \underbrace{r}_{\text{konst.}} + \underbrace{a}_{\text{neg. konst.}} \cdot N(t)$  (1)

Kommt das Wachstum zum Stehen?

$0 = r + a \cdot \underbrace{K}_{\text{obere Schranke}}$

d.h.:  $a = \frac{-r}{K}$  (2)

$\stackrel{(1)(2)}{\Rightarrow} \frac{N'(t)}{N(t)} = r - \frac{r}{K} \cdot N(t) = r(1 - \frac{N(t)}{K})$

$\frac{N'(t)}{N(t)} = r(1 - \frac{N(t)}{K})$  DG,  $N(t) = ?$

---

exp. WM  $\frac{N'(t)}{N(t)} = r$ , eine obere Schranke  $K$  einführen

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = r + \underbrace{a}_{\text{neg. konst.}} \cdot N(t)$$

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = r - \frac{r}{K} \cdot N(t) = r(1 - \frac{N(t)}{K}) \text{ DG (1)}$$

$$\text{A.B. } N(0) = N_0$$

Qualitative Analyse von  $N'(t) = r \cdot N(t) \cdot (1 - \frac{N(t)}{K})$  mit  $N_0 < K$

Anfangsphase:  $N(t)$  ist relativ klein im Vergleich zu  $K$  dann ist  $\frac{N^2(t)}{K}$  relativ klein

$$\text{d.h. } N'(t) = r \cdot N(t) - r \cdot \frac{N^2(t)}{K} \simeq r \cdot N(t)$$

d.h.  $N(t)$  wächst ungefähr exponentiell

$$\text{z.B. } N_0 = 10, K = 10000$$

Mittlere Wachstumsphase der Term  $\frac{N^2(t)}{K}$  ist wichtiger. Das Wachstum wird abgebremst aber die Population wächst immer noch.

$$N'(t) = \underbrace{r \cdot N(t)}_{>0} \underbrace{1 - \frac{N(t)}{K}}_{>0}$$

Abflachungsphase  $N(t)$  nähert sich der Zahl  $K$  an und das Wachstum kommt fast zum stehen.

$$\underbrace{N'(t)}_{\simeq 0} = r \cdot N(t) \underbrace{1 - \frac{N(t)}{K}}_{\simeq 1}$$

Behauptung:  $K$  ist die kleinste obere Schranke für  $N(t)$

Begründung

1.  $K$  ist eine obere Schranke

Es gibt kein  $\bar{t}$  so dass  $N(t)$  zu diesem Zeitpunkt  $\bar{t}$  über  $K$  hinauswächst  
 Gäbe es einen solchen Zeitpunkt  $\bar{t}$ , dann würde Folgendes gelten:

$$N(\bar{t}) = K$$

$$N'(\bar{t}) > 0$$

$$N'(\bar{t}) = r \cdot K(1 - \frac{K}{K}) = 0 \text{ Widerspruch}$$

Unsere Annahme ist falsch. Es gibt keinen solchen Zeitpunkt.

d.h.  $K$  ist eine obere Schranke für  $N(t)$

2.  $K$  ist die kleinste obere Schranke

Solange  $0 < N(t) < K$  gilt  $N'(t) > 0$

Gleichgewichtszustände

$$N'(t) = 0 \Leftrightarrow r \cdot N(t)(1 - \frac{N(t)}{K}) = 0$$

a.  $N(t) = 0$

b.  $N(t) = K$

d.h. falls  $N_0 = 0$  oder  $N_0 = K$  dann bleibt  $N(t)$  konstant.

Explizite Lösung von (1)

Gesucht ist  $N(t)$

Ansatz:  $N(t) = \frac{e^{rt}}{f(t)}$

$$N'(t) = \frac{r \cdot e^{rt} \cdot f(t) - e^{rt} \cdot f'(t)}{(f(t))^2}$$

$$\stackrel{(1)}{=} r \cdot \frac{e^{rt}}{f(t)}(1 - \frac{e^{rt}}{f(t) \cdot K}) = r \cdot N(t)(1 - \frac{N(t)}{K})$$

$$\Leftrightarrow r \cdot e^{rt} \cdot f(t) - e^{rt} \cdot f'(t) = r \cdot e^{rt} \cdot f(t)(1 - \frac{e^{rt}}{K \cdot f(t)})$$



$$\Leftrightarrow \cancel{r \cdot e^{rt} \cdot f(t)} - e^{rt} \cdot f'(t) = \cancel{r \cdot e^{rt} \cdot f(t)} - r \cdot \frac{(e^{rt})^2}{K}$$

$$\Leftrightarrow f'(t) = \frac{r \cdot e^{rt}}{K}$$

$$f(t) = \frac{1}{K} e^{rt} + c$$

$$(\text{überpr. } f'(t) = \frac{1}{K} \cdot r \cdot e^{rt} = \frac{r \cdot e^{rt}}{K} \checkmark)$$

$$N(t) = \frac{e^{rt}}{\frac{1}{K} \cdot e^{rt} + c} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{N_0} = \frac{1}{K} + c$$

$$N(0) = \frac{1}{\frac{1}{K} + c} = N_0$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{K} = \frac{K - N_0}{K \cdot N_0} \quad (3)$$