

Mathematik für Biologie

Uni Bern

HS 2015

Contents

1	Erste Woche	1
1.1	Lineares Wachstum	1
1.2	Exponentielles Wachstum	3

1 Erste Woche

1.1 Lineares Wachstum

Bsp: Ein Baum wächst 20cm pro Jahr.

rekursiv (indirekte Berechnung): $H(x) = H(x - 1) + 20$

explizit (direkte Berechnung): $H(x) = 20 \cdot x$

$x, n \in \mathbb{N}$, wobei $H(x)$ die Höhe des Baums nach x Jahren in cm.

$$H_n = H(n) = 20 \cdot n$$

Allgemeines diskretes lineares Wachstums Modell (WM):

rekursiv: $N_n = N_{n-1} + a$

explizit: $N_n = N_0 + a \cdot n$

$a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

$a > 0$: N_n zunehmend

$a < 0$: N_n abnehmend

$a = 0$: N_n konstant

$N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ Folge (ist eine Funktion / Abbildung)

Vom rekursiven zum expliziten:

$$N_{n+1} = N_n + 1a = N_{n-1} + a + a = N_{n-1} + 2a = N_{n-2} + a + 2a = N_{n-2} + 3a = \dots = N_0 + (n+1)a$$

Beispiel (Dolbearsche Gesetz)

$$T_n = 1/7n + 40/9$$

T_n : Temperatur gemessen in °C

n : die Anzahl der Zirplaute in einer Minute

$$n = 7: T = \dots = 5.\bar{4}$$

$$n = 14: T = \dots = 6.\bar{4}$$

...

$$n = 105: T = \dots = 19.\bar{4}$$

Bereich: 5°C - 30°C

Beispiel: Gewicht einer Insektenlarve zu jeder vollen Stunde:

$$G(n) = 0.01n + 1, n \in \mathbb{N}$$

$$G(t) = 0.01t + 1, t \in \mathbb{R}_+$$

Allgemeines kontinuierliches lineares Wachstums Modell (WM):

$$N_t = N_0 + t \cdot a, t \in \mathbb{R}_+$$

$N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto N(t)$ Funktion/Abbildung

Wachstumsrate (Wachstum relativ) zur Gesamtgrösse)

diskret: $r_n = \frac{N_{n+1} - N_n}{N_n} = \frac{a}{N_n} = \frac{a}{N_0 + n \cdot a}$

$$N_{n+1} - N_n = \frac{N_{n+1} - N_n}{(n+1) - n}$$

kontinuierlich: $r = \frac{N'(t)}{N(t)} = \frac{(N_0 + t \cdot a)'}{N_0 + t \cdot a} = \frac{a}{N_0 + t \cdot a}, t \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{(t+\Delta t) - t}$$

1.2 Exponentielles Wachstum

Beispiel (Zellteilung)

Eine Zelle teile sich zweimal pro Stunde

$N(n)$: die Anzahl Zellen nach n Stunden

$$N_0 = 1, N_1 = 4, N_2 = 16, N_3 = 64, \dots$$

rekursiv: $N_n = 4N_{n-1}, n = 1, 2, 3, 4, \dots$

explizit: $N_n = 4(4N_{n-2}) = 4^2 N_{n-2} = \dots = 4^n N_0 = 4^n$
