Mathematik für Biologie

Uni Bern

HS 2015

Contents

1 Erste Woche

1.1 Lineares Wachstum

Bsp: Ein Baum wächst 20cm pro Jahr.

rekursiv (indirekte Berechnung): $H(x) = H(x-1) + 20$

explizit (direkte Berechnung): $H(x) = 20 \cdot x$

$x, n \in \mathbb{N}$, wobei $H(x)$ die Höhe des Baums nach x Jahren in cm.

$H_n = H(n) = 20 \cdot n$

Allgemeines diskretes lineares Wachstums Modell (WM):

rekursiv: $N_n = N_{n-1} + a$

explizit: $N_n = N_0 + a \cdot n$

$a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

$a > 0$: N_n zunehmend

$a < 0$: N_n abnehmend

$a = 0$: N_n konstant

$N : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Folge (ist eine Funktion / Abbildung)

Vom rekursiven zum expliziten:

$N_{n+1} = N_n + 1a = N_{n-1} + a + a = N_{n-1} + 2a = N_{n-2} + a + 2a = N_{n-2} + 3a = ... = N_0 + (n+1)a$

Beispiel (Dolbearsche Gesetz)

$T_n = 1/7n + 40/9$

T_n: Temperatur gemessen in °C

n: die Anzahl der Zirplaute in einer Minute

$n = 7$: $T = ... = 5.\overline{4}$

$n = 14$: $T = ... = 6.\overline{4}$

...

$n = 105$: $T = ... = 19.\overline{4}$

Bereich: 5°C - 30°C

Beispiel: Gewicht einer Insektenlarve zu jeder vollen Stunde:

$G(n) = 0.01n + 1, n \in \mathbb{N}$

$G(t) = 0.01t + 1, t \in \mathbb{R}+$

Allgemeines kontinuierliches lineares Wachstums Modell (WM):

$N_t = N_0 + t \cdot a, t \in \mathbb{R}+$

$N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto N(t)$ Funktion/Abbildung

---

Wachstumsrate (Wachstum relativ) zur Gesamtgrösse)

diskret: $r_n = \frac{N_{n+1} - N_n}{N_n} = \frac{a}{N_n} = \frac{a}{N_0 + n \cdot a}$

$N_{n+1} - N_n = \frac{N_{n+1} - N_n}{(n+1) - n}$

kontinuierlich: $r = \frac{N'(t)}{N(t)} = \frac{(N_0 + t \cdot a)'}{N_0 + t \cdot a} = \frac{a}{N_0 + t \cdot a}, t \in \mathbb{R}+$

$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{(t+\Delta t) - t}$

1.2 Exponentielles Wachstum

Beispiel (Zellteilung)

Eine Zelle teile sich zweimal pro Stunde

$N(n)$: die Anzahl Zellen nach n Stunden

$N_0 = 1, N_1 = 4, N_2 = 16, N_3 = 64, ...$

rekursiv: $N_n = 4N_{n-1}, n = 1, 2, 3, 4, ...$

explizit: $N_n = 4(4N_{n-2}) = 4^2 N_{n-2} = ... = 4^n N_0 = 4^n$

Allgemeines diskretes exponentielles Wachstums Modell (WM):

rekursiv: $N_n = b \cdot N_{n-1}, b \in \mathbb{R}+$

$0 < b < 1$: N_n abnehmend

$b > 1$: N_n zunehmend

$b = 1$: N_n konstant

$b = \frac{N_n}{N_{n-1}} \frac{\leftrightarrow y}{\leftrightarrow x}$ Gleichung einer Gerade durch den Ursprung mit Steigung b

explizit: $N_n = b^n \cdot N_0, b \in \mathbb{R}+$

$log(N_n) = log(b^n \cdot N_0)$

$log(N_n) = log(b^n) + log(N_0)$

$log(N_n) = n \cdot log(b) + log(N_0)$

In der log Skala erscheint exponentielles Wachstum linear

Zellteilung:

$log(N_n) = n \cdot log(4) + log(1)$

$log(N_n) = n \cdot log(4)$

---

2 Zweite Woche

2.1 Wachstumsrate

Diskrete Wachstumsrate

$r_n = \frac{N_{n+1}-N_n}{N_n} = \frac{\frac{N_{n+1}-N_n}{n+1-n}}{N_n}$

Im diskreten exponentiellen Modell:

$r_n = \frac{b \cdot N_n - N_n}{N_n} = b - 1$ konstant

(diskretes exponentielles Wachstum $\Rightarrow r_n$ konstant)

Frage: r_n konstant $\overset{?}{\Rightarrow} N_n$ wächst exponentiell

r_n konst. $\Rightarrow r_n = c \Rightarrow \frac{N_{n+1}-N_n}{N_n} = c \Rightarrow N_{n+1} - N_n = c \cdot N_n \Rightarrow N_{n+1} = (c+1)N_n$ (diskr. exp. W.)

Fazit: Ein diskretes exponentielles WM ist durch eine konstante Wachstumsrate charakterisiert.