

# **Mathematik für Biologie**

Uni Bern

HS 2015

# Contents

<b>1</b>	<b>Erste Woche</b>	<b>1</b>
1.1	Lineares Wachstum . . . . .	1
1.2	Exponentielles Wachstum . . . . .	3

# 1 Erste Woche

## 1.1 Lineares Wachstum

Bsp: Ein Baum wächst 20cm pro Jahr.

rekursiv (indirekte Berechnung):  $H(x) = H(x - 1) + 20$

explizit (direkte Berechnung):  $H(x) = 20 \cdot x$

$x, n \in \mathbb{N}$ , wobei  $H(x)$  die Höhe des Baums nach  $x$  Jahren in cm.

$$H_n = H(n) = 20 \cdot n$$

---

Allgemeines diskretes lineares Wachstums Modell (WM):

rekursiv:  $N_n = N_{n-1} + a$

explizit:  $N_n = N_0 + a \cdot n$

$a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

$a > 0$ :  $N_n$  zunehmend

$a < 0$ :  $N_n$  abnehmend

$a = 0$ :  $N_n$  konstant

$N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  Folge (ist eine Funktion / Abbildung)

---

Vom rekursiven zum expliziten:

$$N_{n+1} = N_n + 1a = N_{n-1} + a + a = N_{n-1} + 2a = N_{n-2} + a + 2a = N_{n-2} + 3a = \dots = N_0 + (n+1)a$$

Beispiel (Dolbearsche Gesetz)

$$T_n = 1/7n + 40/9$$

$T_n$ : Temperatur gemessen in °C

$n$ : die Anzahl der Zirplaute in einer Minute

$$n = 7: T = \dots = 5.\bar{4}$$

$$n = 14: T = \dots = 6.\bar{4}$$

...

$$n = 105: T = \dots = 19.\bar{4}$$

Bereich: 5°C - 30°C

Beispiel: Gewicht einer Insektenlarve zu jeder vollen Stunde:

$$G(n) = 0.01n + 1, n \in \mathbb{N}$$

$$G(t) = 0.01t + 1, t \in \mathbb{R}_+$$

---

Allgemeines kontinuierliches lineares Wachstums Modell (WM):

$$N_t = N_0 + t \cdot a, t \in \mathbb{R}_+$$

$N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto N(t)$  Funktion/Abbildung

---

Wachstumsrate (Wachstum relativ) zur Gesamtgrösse)

diskret:  $r_n = \frac{N_{n+1} - N_n}{N_n} = \frac{a}{N_n} = \frac{a}{N_0 + n \cdot a}$

$$N_{n+1} - N_n = \frac{N_{n+1} - N_n}{(n+1) - n}$$

kontinuierlich:  $r = \frac{N'(t)}{N(t)} = \frac{(N_0 + t \cdot a)'}{N_0 + t \cdot a} = \frac{a}{N_0 + t \cdot a}, t \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{(t + \Delta t) - t}$$

---

## 1.2 Exponentielles Wachstum

Beispiel (Zellteilung)

Eine Zelle teile sich zweimal pro Stunde

$N(n)$ : die Anzahl Zellen nach  $n$  Stunden

$$N_0 = 1, N_1 = 4, N_2 = 16, N_3 = 64, \dots$$

rekursiv:  $N_n = 4N_{n-1}, n = 1, 2, 3, 4, \dots$

explizit:  $N_n = 4(4N_{n-2}) = 4^2 N_{n-2} = \dots = 4^n N_0 = 4^n$

---

Allgemeines diskretes exponentielles Wachstums Modell (WM):

rekursiv:  $N_n = b \cdot N_{n-1}, b \in \mathbb{R}+$

$0 < b < 1$ :  $N_n$  abnehmend

$b > 1$ :  $N_n$  zunehmend

$b = 1$ :  $N_n$  konstant

$b = \frac{N_n}{N_{n-1}} \overset{\leftrightarrow y}{\leftrightarrow x}$  Gleichung einer Gerade durch den Ursprung mit Steigung  $b$

explizit:  $N_n = b^n \cdot N_0, b \in \mathbb{R}+$

$$\log(N_n) = \log(b^n \cdot N_0)$$

$$\log(N_n) = \log(b^n) + \log(N_0)$$

$$\log(N_n) = n \cdot \log(b) + \log(N_0)$$

In der  $\log$  Skala erscheint exponentielles Wachstum linear

Zellteilung:

$$\log(N_n) = n \cdot \log(4) + \log(1)$$

$$\log(N_n) = n \cdot \log(4)$$

---