

Mathematik für Biologie

Uni Bern

HS 2015

Contents

1	Erste Woche	1
1.1	Lineares Wachstum	1
1.2	Exponentielles Wachstum	3
2	Zweite Woche	5
2.1	Wachstumsrate	5
2.2	Kontinuierliche Wachstumsrate	6

1 Erste Woche

1.1 Lineares Wachstum

Bsp: Ein Baum wächst 20cm pro Jahr.

rekursiv (indirekte Berechnung): $H(x) = H(x - 1) + 20$

explizit (direkte Berechnung): $H(x) = 20 \cdot x$

$x, n \in \mathbb{N}$, wobei $H(x)$ die Höhe des Baums nach x Jahren in cm.

$$H_n = H(n) = 20 \cdot n$$

Allgemeines diskretes lineares Wachstums Modell (WM):

rekursiv: $N_n = N_{n-1} + a$

explizit: $N_n = N_0 + a \cdot n$

$a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

$a > 0$: N_n zunehmend

$a < 0$: N_n abnehmend

$a = 0$: N_n konstant

$N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ Folge (ist eine Funktion / Abbildung)

Vom rekursiven zum expliziten:

$$N_{n+1} = N_n + 1a = N_{n-1} + a + a = N_{n-1} + 2a = N_{n-2} + a + 2a = N_{n-2} + 3a = \dots = N_0 + (n+1)a$$

Beispiel (Dolbearsche Gesetz)

$$T_n = 1/7n + 40/9$$

T_n : Temperatur gemessen in °C

n : die Anzahl der Zirplaute in einer Minute

$$n = 7: T = \dots = 5.\bar{4}$$

$$n = 14: T = \dots = 6.\bar{4}$$

...

$$n = 105: T = \dots = 19.\bar{4}$$

Bereich: 5°C - 30°C

Beispiel: Gewicht einer Insektenlarve zu jeder vollen Stunde:

$$G(n) = 0.01n + 1, n \in \mathbb{N}$$

$$G(t) = 0.01t + 1, t \in \mathbb{R}_+$$

Allgemeines kontinuierliches lineares Wachstums Modell (WM):

$$N_t = N_0 + t \cdot a, t \in \mathbb{R}_+$$

$N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto N(t)$ Funktion/Abbildung

Wachstumsrate (Wachstum relativ) zur Gesamtgrösse)

diskret: $r_n = \frac{N_{n+1} - N_n}{N_n} = \frac{a}{N_n} = \frac{a}{N_0 + n \cdot a}$

$$N_{n+1} - N_n = \frac{N_{n+1} - N_n}{(n+1) - n}$$

kontinuierlich: $r = \frac{N'(t)}{N(t)} = \frac{(N_0 + t \cdot a)'}{N_0 + t \cdot a} = \frac{a}{N_0 + t \cdot a}, t \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{(t + \Delta t) - t}$$

1.2 Exponentielles Wachstum

Beispiel (Zellteilung)

Eine Zelle teile sich zweimal pro Stunde

$N(n)$: die Anzahl Zellen nach n Stunden

$$N_0 = 1, N_1 = 4, N_2 = 16, N_3 = 64, \dots$$

rekursiv: $N_n = 4N_{n-1}, n = 1, 2, 3, 4, \dots$

explizit: $N_n = 4(4N_{n-2}) = 4^2 N_{n-2} = \dots = 4^n N_0 = 4^n$

Allgemeines diskretes exponentielles Wachstums Modell (WM):

rekursiv: $N_n = b \cdot N_{n-1}, b \in \mathbb{R}+$

$0 < b < 1$: N_n abnehmend

$b > 1$: N_n zunehmend

$b = 1$: N_n konstant

$b = \frac{N_n}{N_{n-1}} \overset{\leftrightarrow y}{\leftrightarrow x}$ Gleichung einer Gerade durch den Ursprung mit Steigung b

explizit: $N_n = b^n \cdot N_0, b \in \mathbb{R}+$

$$\log(N_n) = \log(b^n \cdot N_0)$$

$$\log(N_n) = \log(b^n) + \log(N_0)$$

$$\log(N_n) = n \cdot \log(b) + \log(N_0)$$

In der \log Skala erscheint exponentielles Wachstum linear

Zellteilung:

$$\log(N_n) = n \cdot \log(4) + \log(1)$$

$$\log(N_n) = n \cdot \log(4)$$

2 Zweite Woche

2.1 Wachstumsrate

Diskrete Wachstumsrate

$$r_n = \frac{N_{n+1} - N_n}{N_n} = \frac{\frac{N_{n+1} - N_n}{n+1-n}}{N_n}$$

Im diskreten exponentiellen Modell:

$$r_n = \frac{b \cdot N_n - N_n}{N_n} = b - 1 \text{ konstant}$$

(diskretes exponentielles Wachstum $\Rightarrow r_n$ konstant)

Frage: r_n konstant $\stackrel{?}{\Rightarrow} N_n$ wächst exponentiell

$$r_n \text{ konst.} \Rightarrow r_n = c \Rightarrow \frac{N_{n+1} - N_n}{N_n} = c \Rightarrow N_{n+1} - N_n = c \cdot N_n \Rightarrow N_{n+1} = (c + 1)N_n \text{ (diskr. exp. W.)}$$

Fazit: Ein diskretes exponentielles WM ist durch eine konstante Wachstumsrate charakterisiert.

Bemerkungen

- $b - 1 > 0$ exp. Wachstum
- $b - 1 < 0$ exp. Zerfall

- $b - 1 = 0$ N_n bleibt konstant
-

2.2 Kontinuierliche Wachstumsrate

$N : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktion $N(t)$

durchschnittliche Änderung pro Zeiteinheit im Bereich von t bis $t + \Delta t$,
wobei $\Delta t > 0$: $\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t}$

momentane Wachstumsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = N'(t)$$

konkav? konvex?

Kontinuierliche Wachstumsrate

$$r(t) = \frac{N'(t)}{N(t)}$$

kont. exp. WM

Konstante Wachstumsrate

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = c$$

Differentialgleichung (DG): gesucht ist die Funktion $N(t)$. In dieser Gleichung finden wir auch die Ableitung $N'(t)$ von $N(t)$

$$N'(t) = c \cdot N(t)$$

$N(t) = e^{c \cdot t}$ ist eine Lösung der DG.

Überprüfung: $N'(t) = (e^{ct})' = c \cdot e^{ct} = c \cdot N(t)$ ✓

Anfangsbedingung: $N(0) = N_0$

$$N(t) = e^{ct} \cdot N_0$$

$$t = 0: 1 \cdot N_0 = N_0 \quad \checkmark$$

$$N'(t) = (e^{ct} \cdot N_0)' = c \cdot (e^{ct} \cdot N_0) = c \cdot N(t) \quad \checkmark$$

ist eine (der vielen??) Lösung der DG mit Anfangsbedingung $N(0) = N_0$
