Γραμμική & Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
Εργασία #2

Ημερομηνία Παράδοσης: *10 Ιουνίου 2023*

Οδηγίες: Η εργασία είναι ατομική και δεν θα πρέπει να συνεργάζεστε μεταξύ σας για τη λύση των ασκήσεων, μπορείτε όμως να ζητήσετε βοήθεια από τους διδάσκοντες. Οι απαντήσεις σας να είναι γραμμένες σε κειμενογράφο και να είναι πλήρεις. Όπου απαιτείται κώδικας θα πρέπει να περιλαμβάνεται στο κείμενο σας μαζί με τα αποτελέσματα ή σχήματα και όλα αυτά σε ευανάγνωστη μορφή. Μην ξεχνάτε ότι ο κώδικας θα πρέπει να περιλαμβάνει και συνοπτικά σχόλια έτσι ώστε να είναι κατανοητή η λογική που εφαρμόζετε κάθε φορά. Επιπλέον του .pdf αρχείου παρακαλώ να υποβάλλεται και τα αρχεία με τον κώδικα που αναπτύξατε. Όλα μαζί θα πρέπει να συμπιέζονται και να υποβάλλονται σε ένα αρχείο με το ονοματεπώνυμο και τον ΑΜ σας. Η εργασία θα πρέπει να παραδοθεί ηλεκτρονικά στο eclass μέχρι την ημερομηνία παράδοσης στις 23:59.

***Άσκηση* 1.** Θεωρήστε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4$$

όταν

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_4 &\leq 8 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

(α) Λύστε το πρόβλημα (με κάποιον από τους επιλυτές που αναφέραμε στις διαλέξεις) και περιγράφτε τη βέλτιστη λύση, δηλ. δώστε τις τιμές των μεταβλητών απόφασης και την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Δώστε τις βασικές / μη-βασικές μεταβλητές και τον βέλτιστο βασικό πίνακα. Ξεχωρίστε τους δεσμευτικούς από τους μη δεσμευτικούς περιορισμούς και μέσω αυτών περιγράψτε γεωμετρικά τη βέλτιστη κορυφή.

(β) Επιλέξτε μία βασική και μία μη-βασική μεταβλητή. Περιγράψτε τι θα συμβεί εάν ο συντελεστής της καθεμιάς στην αντικειμενική συνάρτηση (ξεχωριστά) διαταραχθεί κατά ένα ποσό γ. Βρείτε τα διαστήματα ανοχής για τους συγκεκριμένους συντελεστές ώστε να παραμείνει η βέλτιστη λύση στην ίδια κορυφή. (**Σημ.** Οι υπολογισμοί θα πρέπει να γίνουν αναλυτικά) (γ) Επιλέξτε έναν δεσμευτικό και έναν μη δεσμευτικό περιορισμό (ή περιορισμό προσήμου) και περιγράψτε τι θα συμβεί εάν το δεξιό μέρος του καθενός από αυτούς διαταραχθεί κατά ένα ποσό γ. Βρείτε τα διαστήματα ανοχής που αντιστοιχούν στους δυο αυτούς περιορισμούς. (**Σημ.** Οι υπολογισμοί θα πρέπει να γίνουν αναλυτικά)

(δ) Για μία μη βασική μεταβλητή της βέλτιστης λύσης βρείτε την μεταβολή που πρέπει να υποστεί ο συντελεστής της στην αντικειμενική συνάρτηση για να μετατραπεί σε βασική η συγκεκριμένη μεταβλητή.

***Άσκηση* 2.** Θεωρήστε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 7x_4 + 8x_5$$

όταν

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= -6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 &\geq 2 \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 &\leq -5 \\ -2 \leq x_1 &\leq 10 \\ 5 \leq x_2 &\leq 25 \\ x_3, x_4 \geq 0,\ \ & x_5 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(α) Γράψτε το δυϊκό του παραπάνω προβλήματος.

(β) Αν συμβολίσουμε με x_6 έως x_{12} τις μεταβλητές χαλάρωσης των περιορισμών του πρωτεύοντος, θεωρήστε τη λύση που έχει ως βασικές μεταβλητές τις $x_2, x_4, x_5, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}$. Γράψτε τον βασικό πίνακα B για το πρωτεύον και τον συμπληρωματικό του B^C για το δυϊκό και υπολογίστε τις βασικές λύσεις που αντιστοιχούν στα δύο προβλήματα. Επιβεβαιώστε την ισχύ του θεωρήματος ασθενούς δυϊκότητας. Επιπλέον, δείξτε ότι ισχύει η συμπληρωματικότητα μεταξύ των δύο λύσεων.

(γ) Λύστε τα δύο προβλήματα με κάποιον από τους επιλυτές που διδαχτήκατε και επιβεβαιώστε το συμπέρασμα του θεωρήματος ισχυρής δυϊκότητας.

Άσκηση 3. Θεωρήστε το πρόβλημα της στελέχωσης του τμήματος εξυπηρέτησης πελατών αεροπορικής εταιρείας που σας ζητήθηκε να μοντελοποιήσετε στην Άσκηση 3 της προηγούμενης Εργασίας και παρατίθεται για διευκόλυνσή σας πιο κάτω. Χρησιμοποιήστε έναν από τους επιλυτές (solvers) γραμμικού προγραμματισμού που αναφέρθηκαν στις διαλέξεις για την επίλυσή του. (**Σημείωση.** Σε περίπτωση που η μοντελοποίηση που είχατε προηγουμένως δεν σας ικανοποιεί μπορείτε να την αλλάξετε/βελτιώσετε στην παρούσα Εργασία.)

Αεροπορική εταιρεία σχεδιάζει τη στελέχωση του τμήματος εξυπηρέτησης πελατών ανάλογα με το ημερήσιο πρόγραμμα των πτήσεων της. Σύμφωνα με αυτό το πρόγραμμα ο Πίνακας 2 δίνει τον ελάχιστο αριθμό ατόμων που θα πρέπει να εργάζονται σε κάθε ώρα του 24-ώρου καθώς και το ημερήσιο κόστος ανά εργαζόμενο ανάλογα με τη βάρδια στην οποία απασχολείται.

Πίνακας 1: Απαιτούμενος Αριθμός Εργαζομένων.

Περίοδος 24-ώρου	Ελάχιστος Αριθμός Εργαζομένων
06:00 - 08:00	48
08:00 - 10:00	79
10:00 - 12:00	65
12:00 - 14:00	87
14:00 - 16:00	64
16:00 - 18:00	73
18:00 - 20:00	82
20:00 - 22:00	43
22:00 - 24:00	52
24:00 - 06:00	15

Σύμφωνα με τους κανονισμούς κάθε εργαζόμενος θα πρέπει να να εργάζεται συνεχές 8-ωρο που εκτείνεται στη διάρκεια μια βάρδιας. Οι βάρδιες είναι 5, δηλ. 6:00 π.μ.-2:00 μ.μ, 8:00 π.μ.-4:00 μ.μ, 12:00 π.μ.-8:00 μ.μ, 4:00 μ.μ.-12:00 μ.μ, και 10:00 μ.μ.-6:00 π.μ. Τέλος, το ημερήσιο κόστος ανά εργαζόμενο στις βάρδιες εξαρτάται από τη δημοτικότητα της κάθε βάρδιας αλλά και τα ειδικά επιδόματα που πιθανόν να προσφέρονται, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.

Πίνακας 2: Ημερήσιο κόστος ανά εργαζόμενο και βάρδια.

Βάρδια	Περίοδος	Ημερήσιο κόστος ανά εργαζόμενο
1	06:00 - 14:00	170
2	08:00 - 16:00	160
3	12:00 - 20:00	175
4	16:00 - 24:00	180
5	22:00 - 06:00	195

Μοντελοποιήστε το παραπάνω πρόβλημα προγραμματισμού ανθρώπινου δυναμικού με τη βοήθεια του γραμμικού προγραμματισμού και αντικειμενικό σκοπό την ελαχιστοποίηση του συνολικού ημερήσιου κόστους της εταιρείας σε μισθούς για το συγκεκριμένο τμήμα.

Άσκηση 4. Θεωρήστε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max z = x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + x_6 - x_7$$

όταν

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_4 + 2x_6 - 2x_7 &\leq 6 \\ x_2 - x_4 + x_5 - 2x_6 + 2x_7 &\leq 4 \\ x_2 + x_3 + x_6 - x_7 &\leq 2 \\ x_2 - x_4 - x_6 + x_7 &\leq 1 \\ x_1, \ldots, x_7 &\geq 0 \end{aligned}$$

Χωρίς να λύσετε το πρόβλημα με κάποιον επιλυτή ή τον αλγόριθμο Simplex, εξετάστε αν η λύση $\mathbf{x} = (7, 0, \frac{5}{2}, 0, 3, 0, \frac{1}{2})$ είναι βέλτιστη για το παραπάνω πρόβλημα γ.π.

Άσκηση 5. Θεωρήστε το πρόβλημα του σακιδίου:

$$\max z = 12x_1 + 12x_2 + 9x_3 + 15x_4 + 90x_5 + 26x_6 + 112x_7$$

όταν

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 15x_5 + 13x_6 + 16x_7 &\leq 35 \\ x_i &= 0 \text{ or } 1 \ \forall i \end{aligned}$$

Εφαρμόστε τον αλγόριθμο Branch & Bound για την επίλυσή του. Φροντίστε η επιλογή του επόμενου κόμβου για διακλάδωση να γίνεται κάθε φορά με κριτήριο την καλύτερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (Jumbtracking or Best First).

Άσκηση 6. Ο μάνατζερ μιας επιχείρησης θα πρέπει να πάρει αποφάσεις σχετικά με 10 διαφορετικά επενδυτικά προγράμματα. Τα προγράμματα διαφέρουν ως προς την αναμενόμενη μακροχρόνια απόδοσή τους καθώς και ως προς το ύψος της επένδυσης που απαιτείται από την επιχείρηση για την συμμετοχή της σε κάθε ένα από αυτά. Έστω P_j και C_j η εκτίμηση για το μακροπρόθεσμο κέρδος και το ύψος της επένδυσης που θα απαιτηθεί από το πρόγραμμα $j (j = 1, \ldots, 10)$, αντίστοιχα. Το ποσό που είναι διαθέσιμο για όλα τα προγράμματα συνολικά είναι Q. Έστω επίσης ότι τα επενδυτικά προγραμματα 3 και 4 είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα και το ίδιο ισχύει για τα προγράμματα 5 και 6. Επιπλέον, έστω ότι δεν γίνεται να επενδύσουν στα προγράμματα 5 ή 6 εκτός και αν επενδύσουν ταυτόχρονα σε κάποιο από τα 3 ή 4. Τέλος, σύμφωνα με απόφαση της διοίκησης η επιχείρηση θα πρέπει να επενδύσει σε τουλάχιστον δύο και το πολύ σε τέσσερα από τα $1, 2, 7, 8, 9, 10$. Ο μάνατζερ επιθυμεί να επιλέξει εκείνο το συνδυασμό επενδυτικών προγραμμάτων που θα μεγιστοποιήσει τη συνολική εκτίμηση για το μακροπρόθεσμο κέρδος και ταυτόχρονα θα ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς που προαναφέρθηκαν.

(α) Μοντελοποιήστε το παραπάνω πρόβλημα χρησιμοποιώντας ακέραιο γραμμικό προγραμματισμό.

(β) Δώστε τιμές στις παραμέτρους P_j, C_j και Q και λύστε το πρόβλημα με τη βοήθεια κάποιου από τους επιλυτές που παρουσιάστηκαν στις διαλέξεις.