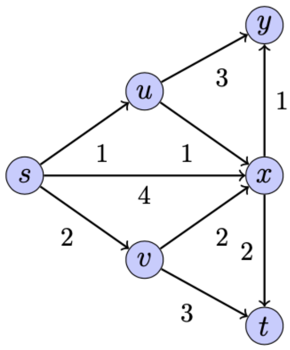

	k=0	1	2	3	4	5
s	0	0	0	0	0	0
u	∞	1	1	1	1	1
v	∞	2	2	2	2	2
x	∞	4	2	2	2	2
y	∞	∞	4	3	3	3
t	∞	∞	5	4	4	4

图 5.1: 在边上的权全为正数的图上 Bellman-Ford 算法运行过程示例。图中的圆圈内单元表示每一列的最小值（除此前各列最小值之外），阴影区单元与左侧圆圈内单元具有相同的值，因此无需重复进行计算

定义 5.2.1 (距 s 不超过 k 步的最近顶点)**.** 考虑包含 n 个顶点的无负边有向图，以及起始顶点 s。我们用 v_0^* 表示距 s 不超过 0 步的最近顶点，即：$v_0^* = s$。对于 $k = 1, \cdots, n-1$，我们用 v_k^* 表示除 $v_0^*, \cdots, v_{k-1}^*$ 之外，距 s 不超过 k 条边的最近顶点。

以图 5.1为例，我们有 $v_0^*=s$, $v_1^*=u$, $v_2^*=v,x$, $v_3^*=y$, 以及 $v_4^*=t$。

定理 5.2.1. 考虑包含 n 个顶点的无负边有向图，以及起始顶点 s。我们用 $OPT(v,k)$ 表示从 s 出发，经过不超过 k 条边到达结点 v 的最短距离，则对任意的 k，$0\le k\le n-1$，有：

$$OPT(v_k^*,k)=OPT(v_k^*,k+1)=\cdots=OPT(v_k^*,n-1).$$

在此我们不描述严格的证明过程，而仅以当 $k=2$, $v_2^*=x$ 时，$OPT(x,3)=OPT(x,2)$ 的证明为例，说明定理的证明思路。

首先，依据递归表达式??，我们有：

$$OPT(x,3)=\min\begin{cases}OPT(x,2)\\ \min\{OPT(v,2)+2,OPT(u,2)+1,OPT(s,2)+4\}.\end{cases}$$

因此只需证明 $OPT(x,2)$ 小于等于 $OPT(v,2)+2,OPT(u,2)+1$ 以及 $OPT(s,2)+4$ 即可完成整个证明。

这里的第一项很容易证明：由于 $v_2^*=x$，依据 v_2^* 的定义，我们有：

$$OPT(x,2)\le OPT(v,2).$$

故可得：

$$OPT(x,2)<OPT(v,2)+2.$$

接下来考虑第二项和第三项：对 $OPT(x,2)$ 再次应用递归表达式??，可得：

$$OPT(x,2)=\min\begin{cases}OPT(x,1)\\ \min\{OPT(v,1)+2,OPT(u,1)+1,OPT(s,1)+4\}.\end{cases}$$

注意到 $OPT(u,1)=OPT(u,2)$, $OPT(s,1)=OPT(s,2)$，因此可得：

$$OPT(x,2)\le OPT(u,1)+1=OPT(u,2)+1,$$

$$OPT(x,2)\le OPT(s,1)+1=OPT(s,2)+1.$$

故可证得下式成立：

$$OPT(x,3)=OPT(x,2).$$