算法设计作业答疑

线性规划部分

授课教师：卜东波

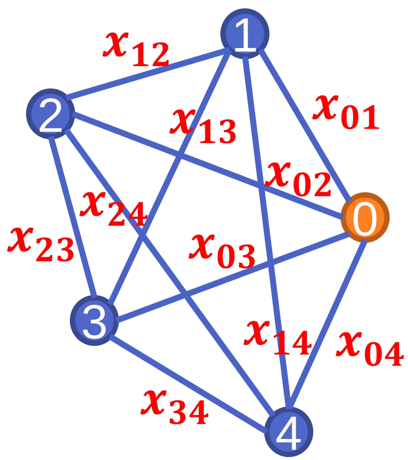
2020年12月

问题1：旅行特朗普问题 (TSP)

- **问题描述：**
  - **假设你是美国总统候选人唐纳德·特朗普，你现在位于华盛顿 (0), 想要在四个摇摆州举行竞选集会。这四个摇摆州分别是佐治亚州 (1)、宾夕法尼亚州 (2)、密歇根州 (3) 和佛罗里达州 (4)。今天是选举前的最后一天，而且由于资金短缺，你需要尽量走最短的路径以节省资金，每个州只经过一次并且最后返回起点。每两个州之间的距离记为$c_{ij}, i \in [0,3], j \in [i+1,4]$，$i, j$ 都是整数。**
  - **要求：请把这个问题形式化为ILP。（提示：你可以通过每个州只能访问一次的约束来考虑此问题。）**

问题1：旅行特朗普问题 (TSP)

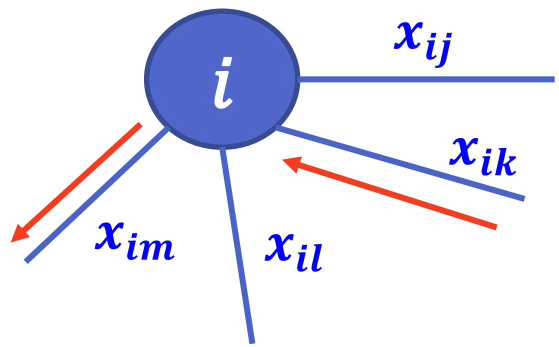
- **问题描述：**
  - 用 x_{ij} 表示从州 i 到州 j 的道路



  - 于是优化目标可以写成:
  - $min\ \sum_{i\in[0,3]}\sum_{j\in[i,4]}x_{ij}c_{ij}$

问题1：旅行特朗普问题 (TSP)

- **添加约束：**
  - **考虑每个州只能且必须访问一次**



  - **节点的入度和出度都为1，总和为2**

$$\sum_{j\in[0,i-1]} x_{ji} + \sum_{k\in[i+1,n]} x_{ik} = 2$$

问题1：旅行特朗普问题 (TSP)

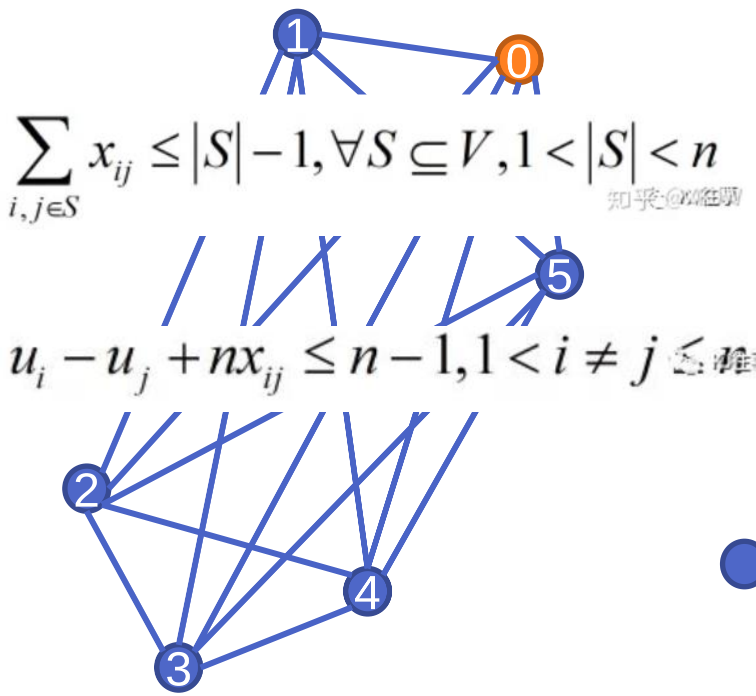
- **写成ILP形式：**

$$\min \sum_{i\in[0,3]} \sum_{j\in[i+1,4]} x_{ij}c_{ij}$$

$$\sum_{j\in[0,i-1]} x_{ji} + \sum_{k\in[i+1,\,4]} x_{ik} = 2, i \in [0, 4]$$

$$x_{ji} = 0, 1$$

图上的整数规划问题

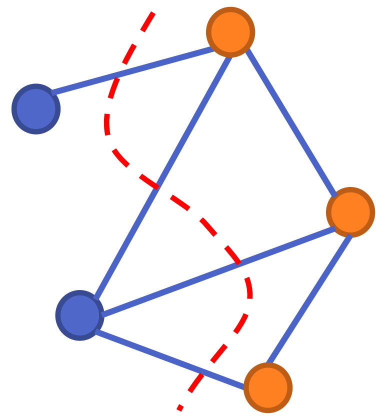


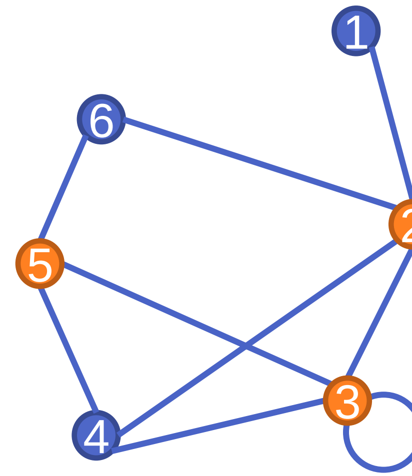
$$\sum_{i,j\in S} x_{ij} \le |S|-1, \forall S \subseteq V, 1 < |S| < n$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \le n-1, 1 < i \ne j \le n$$

TSP n > 5

MAX CUT





MINIMUM VERTEX COVER

……

问题2：收益最大化

- **问题描述：**
  - 你的工厂生产三种产品：A、B和C，每种产品都需要两种原材料：镍和铝。每种产品的利润和所需成本如下表所示：

Product	Profit($)	Nickel(kg)	Aluminum(kg)
A	10	3	4
B	5	3	2
C	15	1	8

  - 你只有100公斤的镍和200公斤的铝。怎么安排三种产品的生产量以最大化收益？请把这个问题形式化成LP并转成它的对偶形式，然后求得最优解。

问题2：收益最大化

- **原问题：**
  - $$\begin{aligned} \max \quad & 10A + 5B + 15C \\ \text{s.t.} \quad & 3A + 3B + 1C \le 100 \\ & 4A + 2B + 8C \le 200 \\ & A \ge 0, B \ge 0, C \ge 0 \end{aligned}$$
  - **解得** $A = 30$, $B = 0$, $C = 10$，**总利润 450 美元**

问题2：收益最大化

- **对偶问题：**
  - $$\min \quad 100Y_1 + 200Y_2$$
    $$\text{s.t.} \quad 3Y_1 + 4Y_2 \geq 10$$
    $$3Y_1 + 2Y_2 \geq 5$$
    $$1Y_1 + 8Y_2 \geq 15$$
    $$Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0$$
  - **解得：** $Y_1 = 1, Y_2 = 1.75$，**总利润为 450**

问题3：切割物料问题

- **问题描述：**
  - 你的工厂最近扩大了业务。假设你现在有不计数量的**大卷卷纸，每卷纸宽度为W**。然而**有m个客户**需要不同宽度的卷纸；其中，**客户 i 需要 b_i 卷宽度为 w_i 的卷纸**。我们假设每个客户需要的宽度$w_i \le W$，$w_i \in \mathbb{Z}$。宽度较小的卷纸是在原来宽度的大卷上按一定的方法切割而来。你可以认为只要总宽度不超过W，一个大卷卷纸切割后可以提供给不同的客户。
  - 你的目标是在**满足客户需求的同时减少大卷纸的消耗数量**。请把上述问题转化成ILP。假设切割没有对卷纸宽度造成损失。

问题3：切割物料问题

- **法一：**
  - 由题目可以知道最多$N=\sum_{i=1}^{m} b_i$大卷纸就可以满足需求。
  - 决策变量 y_j 表示是否切割卷纸 j，不妨设你一共有N卷大卷纸，令：

$$y_j=\begin{cases}1 & if\ cut;\\ 0 & otherwise;\end{cases}\quad j=1,\ldots,N$$

  - 在每卷大卷纸上为尽可能多的客户安排不同规格切割方式，设x_{ij}表示在卷纸 j 上给客户 i 提供 x_{ij} 卷其所需宽度的卷纸
  - 目标：最少的切割卷纸数
  - 约束：
    - 约束1：满足客户的需求
    - 约束2：每卷纸不论安排几种切割规格，总宽不大于大卷宽度W

问题3：切割物料问题

- 法一：
  - 将上述问题形式化为

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j=1}^{N} y_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\
& \sum_{j=1}^{N} w_i x_{ij} \le W y_j \quad j = 1, 2, \dots, N \\
& x_{ij} \in \mathbb{Z}, x_{ij} \ge 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, N \\
& y_j \in \{0, 1\} \ \ i = 1, \dots, m
\end{aligned}
$$

x_{ij}表示在卷纸 j 上给客户 i 提供 x_{ij} 卷其所需宽度的卷纸

y_j 表示是否切割卷纸 j

问题3：切割物料问题

- **法二：**

  - 在法一中我们可知，在每卷大卷纸上，**都有对应的被切割的次数和切割规格**，这可以看作一种**切割模式**。在法二中我们**直接把每种大卷纸的切割模式作为变量**，再次建模。
  - 用y_j**表示切割模式**M_j**使用的次数**，m_{ij}**表示在第 j 种模式中提供给第 i 个客户要求的小卷纸的切割次数**。因为这里每卷纸的切割模式提前定义好，法一中的约束2在这里就可以省去。

问题3：切割物料问题

- **法二:**
  - **那么原问题就可以简单的表示成如下形式**

$$\min_{y_i} \quad \sum_{j=1}^{N} y_j$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} m_{ij} y_j \geq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$y_j \in \mathbb{Z} \qquad j = 1, \dots, n$$

问题3：切割物料问题

- **法二*:**
  - **但当问题中客户达到几百时（如实际问题中），可行的切割模式的个数为天文量级，一种模式对应约束矩阵中的一列，穷举所有列方法不太可行。这里需要一种不列出所有列就能迭代求解的方法。**
  - **在单纯形和其对偶形式中，其非基变量检验数 $\sigma = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$，如果 $\sigma \geq 0$，便找到最优解，否则选择进基列和出基列进行换基，再次迭代。**
  - **这里用列生成方法，其思想是：先找到一小部分的可行解，计算检验数，如果小于0，添加一列，再求解新问题及其检验数，如果还小于0再添加一列，重复该步骤直到求到最优。**

问题4：去除绝对值

- **问题描述：**
  - **考虑如下带绝对值的线性规划问题：**

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{minimize} \quad 2|x_1| + x_2 \\ &\boldsymbol{subject\ to} \quad x_1 + x_2 \geq 4 \end{aligned}$$

  - **请将之重新形式化成没有绝对值的线性规划问题。**

问题4：去除绝对值

- **法一：**
  - 令 $u = \frac{1}{2}(|x_1| + x_1)$，$v = \frac{1}{2}(|x_1| - x_1)$
  - 自然地，有$u \geq 0$，$v \geq 0$，同时有：

$$x_1 = u - v$$

$$|x_1| = u + v$$

  - 将 u, v 代入原规划，有：

$$\begin{aligned} minimize \quad & 2u + 2v + x_2 \\ Subject\ to \quad & u - v + x_2 \geq 4 \\ & u, v \geq 0 \end{aligned}$$

问题4：去除绝对值

- **法二：**

  - **仔细分析问题，若$x_1 \le 0$，则**
  $$4 \le x_1 + x_2 \le x_2$$
  - **此时，目标函数**
  $$2|x_1| + x_2 \ge x_2 \ge 4$$
    - **即，满足$x_1 \le 0$的最优解必有$x_1 = 0$，从而原规划可变为：**

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & 2x_1 + x_2 \\ \text{Subject to} & x_1 + x_2 \ge 4 \\ & x_1 \ge 0 \end{array}$$

问题5：帮特朗普招募律师！

- **问题描述：**
  - 美国总统大选已经结束，但唐纳德•特朗普拒绝接受失败。假设你是特朗普的竞选活动经理，你需要招募一批律师为他进行反对大选结果的法律诉讼。
  - 据估计，诉讼将在总共 N 个州展开，且第 i 个州至少需要 L_i 名律师。设不同律师事务所的数量为 F ，第 j 个律师事务所可以在某些州（以集合 S_j 表示）提供法律服务，第 j 个律师事务所的一名律师的雇佣费用为 C_j 。注意 S_j 是 $N=\{1,2,\dots,n\}$ 的子集，即 S_i 的并集等于 N。
  - 你的老板特朗普希望你尽可能降低花费，所以你需要将上述问题形式化成ILP问题，你的目标是在招募足够多的律师的前提下，尽量给老板省钱。

问题5：帮特朗普招募律师！

- **目标函数：**
  - 本题需要给出一个招募方案，确定每个州律师招募的人数，所以很自然地，**设在第 j 个律师事务所招募律师的人数为 x_j, $(x_j \in \mathbb{Z}, x_j \geq 0)$，**于是目标函数为：

$$\min \quad C_1 x_1 + C_2 x_2 + \cdots + C_F x_F$$

问题5：帮特朗普招募律师！

- **建立约束：**
  - 显然，对每个州的律师人数建立约束即可满足题意。
  - 为方便起见，**定义示性函数**：

$$\varphi_j(i) = \begin{cases} 1, & i \in S_j \\ 0, & i \in N - S_j \end{cases}$$

    - 其中，j 表示律师所属事务所，i 表示第 i 个州。$\varphi_j(i)$表示第j个事务所的律师在第i个州是否提供法律服务。
  - 于是，每个州的律师人数的约束可以表示为如下：

$$\sum_{j=1}^{F} x_j \, \varphi_j(i) \ge L_i, \qquad i = 1, 2, \dots, N$$

问题5：帮特朗普招募律师！

- **解：**
  - **从而，该问题可形式化如下：**

$$\min \ \sum_{j=1}^{F} C_j x_j$$

$$\text{s.t.} \ \sum_{j=1}^{F} x_j \varphi_j(i) \geq L_i,\ i = 1, 2, \dots, N$$

$$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, \dots, F$$

其中：

$$\varphi_j(i) = \begin{cases} 1, & i \in S_j \\ 0, & i \in N - S_j \end{cases}$$

LP考试指南

- 线性规划：重点在于建立模型，把复杂问题抽象化
- 建模题的三个采分点：
  - 变量——写清楚设定的每一个变量的意义
  - 目标函数——原目标如何能得到该目标函数
  - 约束——写清楚每一个约束的意义
- Note1：模型尽量用代数式，文字起的只是声明以上三个要素和补充说明的作用
- Note2：模型很多时候都是不唯一的，言之成理即可