1^{η} Εργασία Στο Μάθημα Αλγόριθμοι

Ονοματεπώνυμο: Βίκτωρ Κυρτσούδης
AEM: 4143

Άσκηση 1

$\sqrt{\log_9 n}, \log \sqrt{n}, 2^{\frac{\log n}{2}}, 8^{\log n}, \log(4^n), \log(n^n), (\log(2^n))^2, n^{\log n}, 2^n, 2^{n \log n}, n!$

Άσκηση 2

Αλγόριθμος εύρεσης του πλήθους ελάχιστων μονοπατιών από τον κόμβο s στον κόμβο t σε έναν γράφο $G = (V, E)$

```
getAmountOfShortestPaths(G, s, t):

Θέτω PathsTo[s] ← 1
for κάθε κόμβο v ∈ V − {s} do
   Θέτω PathsTo[v] ← 0
end for
Θέτω LevelOf[s] ← 0
for κάθε κόμβο v ∈ V − {s} do
   Θέτω LevelOf[v] ← −1
end for
Εισάγω στην Layer[0] τον κόμβο s
Θέτω τον layer counter i ← 0
Θέτω τον paths counter cnt ← 0
while η Layer[i] δεν είναι κενή ΚΑΙ cnt == 0 do
   Αρχικοποιώ την Layer[i+1] ως κενή
   for κάθε κόμβο u ∈ Layer[i] do
      for κάθε κόμβο v για τον οποίο υπάρχει ακμή (u, v) do
         if LevelOf[v] == −1 then
            Θέτω LevelOf[v] ← i + 1
            Εισάγω τον κόμβο v στην Layer[i+1]
         end if
         if LevelOf[v] > LevelOf[u] then
            Θέτω PathsTo[v] ← PathsTo[u] + PathsTo[v]
         end if
         if v == t then
            Θέτω cnt ← cnt + PathsTo[u]
         end if
      end for
   end for
   Θέτω i ← i + 1
end while
return cnt
```

Ο αλγόριθμος βασίζεται στον BFS ο οποίος έχει χρονική πολυπλοκότητα $O(|V| + |E|)$, αλλά όλα τα ελάχιστα μονοπάτια θα εμφανιστούν στο ίδιο Layer οπότε όταν βρω πρώτη φορά το t θα είναι το τελευταίο Layer που εξετάζω και το πλήθος των ελάχιστων μονοπατιών στο t θα είναι ίσο με το άθροισμα των ελάχιστων μονοπατιών των κόμβων του προηγούμενου Layer που συνδέονται με το t.

Άσκηση 3

1. Το συγκεκριμένο πρόβλημα μπορεί να μοντελοποιηθεί με ένα κατευθυνόμενο γράφημα όπου οι κόμβοι είναι όλες οι πιθανές καταστάσεις των τριών δοχείων, δηλαδή η ποσότητα νερού που περιέχουν. Κάθε ακμή ξεκινάει από έναν κόμβο u και καταλήγει σε έναν κόμβο v αν και μόνο αν η κατάσταση του κόμβου v προκύπτει από την κατάσταση του κόμβου u με την εφαρμογή μιας επιτρεπτής εκροής.
   Ξεκινώντας από την κατάσταση (a=0,b=7,c=4) πρέπει να καταλήξουμε σε οποιαδήποτε κατάσταση με b=2 ή/και c=2

2. Μπορούμε να χρησιμοποιήσούμε είτε τον DFS είτε τον BFS αλγόριθμο αλλά με τον BFS θα βρούμε την επίλυση με τις λιγότερες απαιτούμενες ενέργειες.

Άσκηση 4

1. Σε κάθε κλήση της συνάρτησης εκτυπώνονται n αριθμοί και ξανακαλείται η συνάρτηση 2 φορές για $\lfloor n/2 \rfloor$ αριθμούς. Άρα η αναδρομική σχέση είναι:

$$T(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{if } n \geq 1 \end{cases}$$

   και απο Master Theorem με $a = 2, b = 2, c = 1$ έχουμε ότι
   $T(n) = \Theta(n \log_2 n)$ αριθμοί εκτυπώνονται.

2. Ο αριθμός 1 εμφανίζεται μία φορά σε κάθε κλήση της συνάρτησης άρα η αναδρομική σχέση γίνεται:

$$T(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 & \text{if } n \geq 1 \end{cases}$$

   και απο Master Theorem με $a = 2, b = 2, c = 0$ έχουμε ότι
   $T(n) = \Theta(n^{\log_2 2}) = \Theta(n)$ φορές εκτυπώνεται το 1.

Άσκηση 5

1. Εφόσων το x είναι πλειοψηφικό στοιχείο του A ισχύει ότι

$$\text{πλήθος } x > n/2 \tag{1}$$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα ζεύγος με δύο φορές το στοιχείο x που στον πίνακα B περνάει μόνο το ένα **(2)**. Έστω ότι σε όλα τα άλλα ζεύγη του πίνακα υπάρχει τουλάχιστον μία φορά το x (λόγω του (1)) και ας πούμε αυτή την μορφή του πίνακα: M. Αυτό σημαίνει ότι ο B θα πάρει ένα x από το ζευγάρι με τα δύο x και απ' όλα τα άλλα ζευγάρια θα πάρει ή ένα x αν και τα δύο στοιχεία είναι x ή τίποτα αν το δεύτερο στοιχείο είναι διαφορετικό από x. Άρα ο B θα πάρει μόνο x και άρα το x θα είναι πλειοψηφικό στοιχείο και στον B.

Ξεκινώντας από έναν πίνακα M αν πάρουμε οποιαδήποτε ζεύγη [x,y] και [x,z] με y,z οποιαδήποτε στοιχεία του A και αντιμεταθέσουμε το y απ' το πρώτο και το x απ' το δεύτερο, τότε αντί να περάσει στον B το πολύ ένα x για κάθε ζεύγος θα περάσει ένα y για το δεύτερο, αν $y = z$ και σίγουρα ένα x για το πρώτο. Οπότε τα y που θα περάσουν στον B λόγω των αντιμεταθέσεων θα είναι το πολύ ίσα με τα αντίστοιχα x αλλά λόγω (2) τα x θα είναι σίγουρα περισσότερα.

Οπότε ο πίνακας B έχει πάντα πλειοψηφικό στοιχείο το x.