Αλγόριθμοι 2022-2023

Πρώτη Εργασία – 1 μονάδα στον τελικό βαθμό

Υπεύθυνη εργασίας: Αρετή Αμπατζόγλου
Διδάσκων: Γεώργιος Χριστοδούλου

Δώστε απαντήσεις για τις παρακάτω ασκήσεις τεκμηριώνοντας τις απαντήσεις σας με σαφήνεια. Οι λύσεις των ασκήσεων πρέπει να γραφτούν σε υπολογιστή (πχ Word ή Latex και **όχι** σκαναρισμένα χειρόγραφα κείμενα), και να υποβληθούν στο **elearning** σε μορφή **pdf**. Η προθεσμία της παράδοσης είναι **5 Μαΐου 2023** και ώρα **11:59μμ**.

Σύνολο **10 μονάδες**

1. (**1 μον.**) Να παραθέσετε τις παρακάτω συναρτήσεις σε σειρά, f_1, f_2, f_3, ..., ώστε να ισχύει $f_i = O(f_{i+1})$. Δεν χρειάζεται να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$$\log(n^n),\ (\log(2^n))^2,\ \log\sqrt{n},\ \log(4^n),\ \sqrt{\log_9 n},\ 2^{n\log n},\ n^{\log n},\ 8^{\log n},\ 2^{\frac{\log n}{2}},\ 2^n,\ n!$$

2. (**2 μον.**) Δίνεται ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ και δύο κόμβοι $s, t \in V$. Σχεδιάστε έναν αλγόριθμο που επιστρέφει το **πλήθος** των **συντομότερων** μονοπατιών από το s στο t. Ο αλγόριθμος θα πρέπει να έχει χρόνο εκτέλεσης $O(n+m)$, όπου $n = |V|$ και $m = |E|$. *Σημείωση:* Δεν σας ζητείται να επιστρέφετε όλα τα συντομότερα $s - t$ μονοπάτια, μόνο το πλήθος τους.
3. (**2 μον.**) Δίνονται 3 δοχεία a,b,c με χωρητικότητες 10, 7 και 4 λίτρα αντίστοιχα. Τα δοχεία b και c αρχικά δίνονται γεμάτα με νερό, ενώ το δοχείο a είναι άδειο. Επιτρέπεται ένας και μόνο ένας τύπος ενέργειας: να αδειάσουμε πλήρως το περιεχόμενο ενός δοχείου σε κάποιο άλλο δοχείο, σταματώντας μόνο όταν αδειάσει το δοχείο προέλευσης ή όταν γεμίσει το δοχείο προορισμού. Ονομάζουμε αυτήν την επιτρεπτή ενέργεια **εκροή**. Το ζητούμενο είναι να ελέγξουμε αν υπάρχει ακολουθία εκροών που να οδηγεί σε μια κατάσταση στην οποία είτε στο b είτε στο c υπάρχουν **ακριβώς** 2 λίτρα νερού.

   (α′) Μοντελοποιήστε το πρόβλημα ως πρόβλημα γραφημάτων. Να δοθεί ακριβής περιγραφή του προσδιορισμού του γραφήματος, να διατυπωθεί το προβλήμα που θα πρέπει να επιλυθεί στο γράφημα, καθώς και η αντιστοίχιση στην λύση του αρχικού προβλήματος με τα δοχεία.

   (β′) Ποιον αλγόριθμο πρέπει να εφαρμόσουμε για την επιλυση του προβλήματος στο γράφημα;

4. Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση:

```
Συνάρτηση f(n):
    if n ⩾ 1:
        for i = 1 to n:
            print(i)
        f(⌊n/2⌋)
        f(⌊n/2⌋)
```

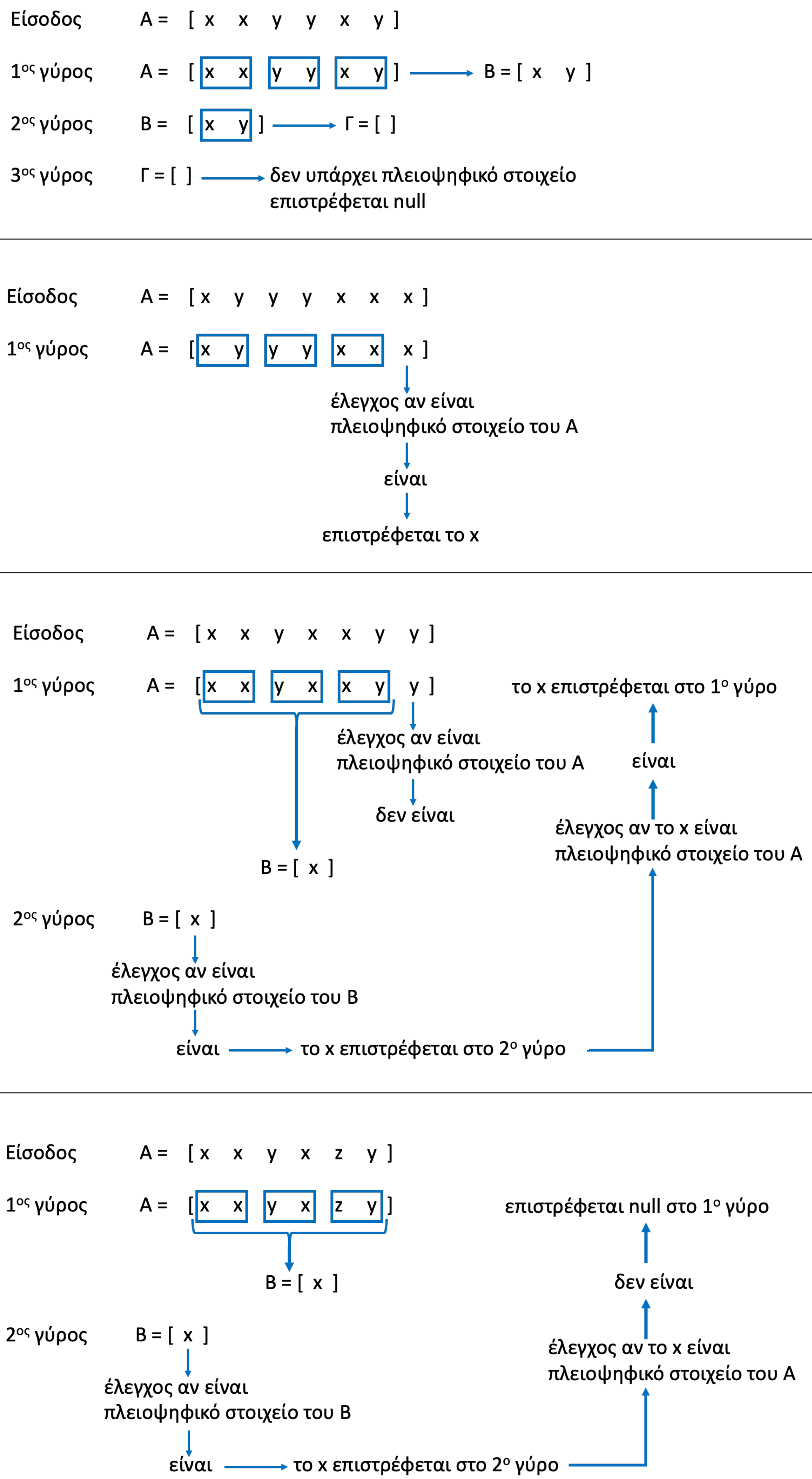
   Υποθέστε ότι καλείτε την $f(n)$ για κάποιο $n \geqslant 2$.

   (α′) (**1 μον.**) Πόσοι αριθμοί (όχι απαραίτητα διαφορετικοί μεταξύ τους) θα εκτυπωθούν;

   (β′) (**1 μον.**) Πόσες φορές θα εκτυπωθεί ο αριθμός 1;

   Δώστε τις απαντήσεις σας ως συνάρτηση του n. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον συμβολισμό $\Theta(\cdot)$ αν σας εξυπηρετεί. Σε κάθε περίπτωση **βρείτε την αναδρομική σχέση** που δινει το πλήθος των ζητούμενων αριθμών και χρησιμοποιήστε το Master Theorem για την επίλυσή της. Για τη διευκόλυνσή σας μπορείτε να υποθέσετε ότι το n είναι μία δύναμη του 2, δηλαδή $n = 2^k$, για κάποιο $k \geqslant 1$.

5. Ένας πίνακας με n στοιχεία λέγεται ότι έχει πλειοψηφικό στοιχείο αν (αυστηρά) πάνω από τα μισά στοιχεία του είναι ίδια. Προσοχή, ένα στοιχείο που εμφανίζεται ακριβώς $n/2$ φορές δεν είναι πλειοψηφικό στοιχείο. Αυτό επιπλέον συνεπάγεται ότι υπάρχει το πολύ ένα πλειοψηφικό στοιχείο. Τα στοιχεία δεν μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους με ερωτήσεις του τύπου $A[i] < A[j]$ (σκεφτείτε για παράδειγμα πως είναι αρχεία εικόνας ή ήχου και όχι αριθμοί). Μπορείτε όμως να ελέγξετε σε σταθερό χρόνο αν δύο στοιχεία είναι ίδια, δηλαδή αν ισχύει $A[i] = A[j]$ ή όχι.
   Σας δίνεται περιγραφικά ο παρακάτω αλγόριθμος: Σε έναν πίνακα $[1..n]$, δημιουργήστε $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ζεύγη. Αν n περιττός, ελέγξτε αν το στοιχείο που περισσεύει είναι πλειοψηφικό. Αν ναι, επιστρέφεται αυτό το στοιχείο. Στην περίπτωση που το n είναι περιττός και το στοιχείο που περισσεύει δεν είναι πλειοψηφικό, ή στην περίπτωση που το n είναι άρτιος, για κάθε ζεύγος που έχει και τα δύο στοιχεία ίδια, κρατήστε το ένα από τα δύο. Για κάθε ζεύγος με διαφορετικά στοιχεία, πετάξτε και τα δύο. Επαναλάβετε τη διαδικασία από την αρχή θεωρώντας σαν είσοδο κάθε φορά τα στοιχεία που έχετε κρατήσει, έως ότου μείνετε με 0 στοιχεία (ή βρεθεί πλειοψηφικό στοιχείο). Στην τελευταία σελίδα δίνονται σχηματικά 4 παραδείγματα για την εφαρμογή ενός τέτοιου αλγορίθμου.
   (α′) (**0.5 μον.**) Υποθέστε ότι το n είναι άρτιος. Μετά από μία επανάληψη της παραπάνω διαδικασίας (ξεκινώντας με τον πίνακα $A[1..n]$), θα καταλήξετε με το πολύ $n/2$ στοιχεία. Έστω ο πίνακας με αυτά τα στοιχεία. Δείξτε ότι αν το x ήταν πλειοψηφικό στοιχείο του A, τότε το x είναι πλειοψηφικό στοιχείο του B. (Σημείωση: το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα, δείτε το 4ο παράδειγμα στην τελευταία σελίδα)
   (β′) (**0.5 μον.**) Υποθέστε ότι το n είναι περιττός. Μετά από μία επανάληψη της παραπάνω διαδικασίας (ξεκινώντας με τον πίνακα $A[1..n]$), είτε θα βρείτε το πλειοψηφικό στοιχείο του A κατά τον έλεγχο του περισσευούμενου στοιχείου, είτε θα καταλήξετε με το πολύ $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ στοιχεία. Στη δεύτερη περίπτωση, έστω B ο πίνακας με αυτά τα στοιχεία. Δείξτε ότι αν το x ήταν πλειοψηφικό στοιχείο του A, τότε το x είναι πλειοψηφικό στοιχείο του B.
   (γ′) (**1 μον.**) Σχεδιάστε έναν «διαίρει-και-βασίλευε» αλγορίθμο σε ψευδογλώσσα που χρησιμοποιεί την παραπάνω ιδέα. Εξηγήστε πώς ο αλγόριθμος βρίσκει το πλειοψηφικό στοιχείο, αν υπάρχει τέτοιο. **Προσοχή:** δεν πρέπει να περιγράψετε κάποιον άλλο αλγόριθμο που βρίσκει πλειοφηφικό στοιχείο. Θα πρέπει οπωσδήποτε να βασίζεται στην ιδέα που περιγράψαμε παραπάνω.
   (δ′) (**1 μον.**) Υπολογίστε την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου του βήματος (γ’). Για τον υπολογισμό της πολυπλοκότητας **δώστε την αναδρομική σχέση** για τον χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου και χρησιμοποιήστε το Master Theorem για την επίλυσή της.



Σχήμα 1: Παραδείγματα του αλγορίθμου της άσκησης 5.