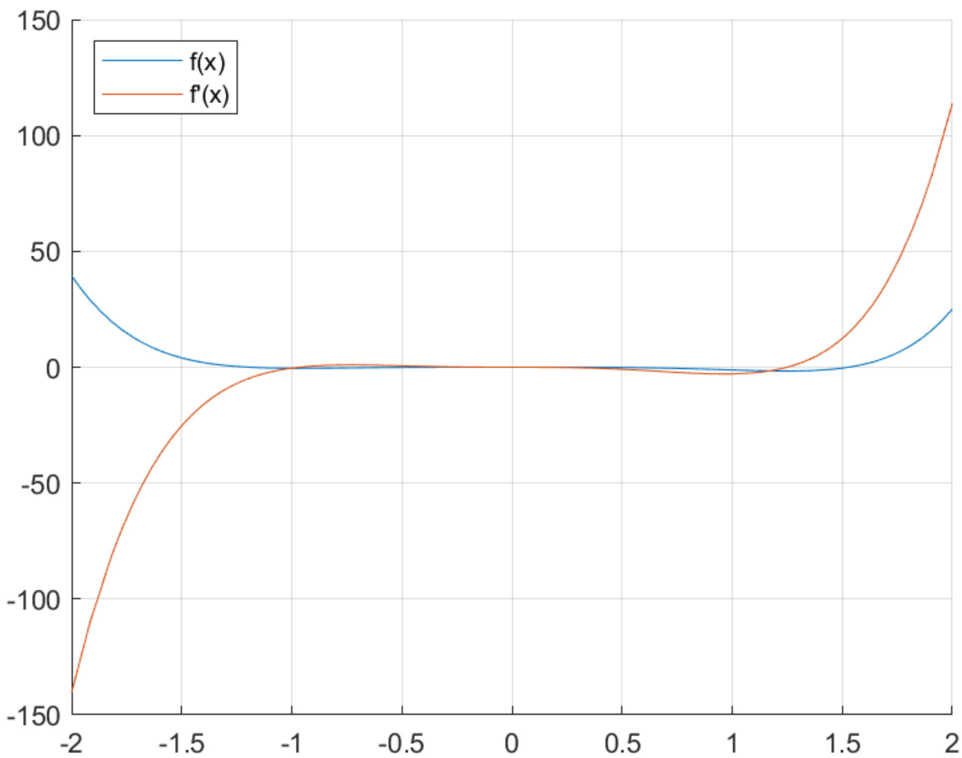
1^η Υποχρεωτική Εργασία Στο Μάθημα της Αριθμητικής Ανάλυσης

Ονοματεπώνυμο: Βίκτωρ Κυρτσούδης
AEM: 4143

Όλα τα προγράμματα για την επίλυση των ασκήσεων δημιουργήθηκαν σε Matlab.

Άσκηση 1

Γραφική παράσταση των $\boldsymbol{f(x) = e^{sin^3 x} + x^6 - 2x^4 - x^3 - 1}$ και **f'**



Από το γράφημα παρατηρούμε ότι:

1. Η f φαίνεται να έχει ρίζες κοντά στα $\boldsymbol{x_1 = -1}$, $\boldsymbol{x_2 = 0}$ και $\boldsymbol{x_3 = 1.5}$.

2. Η f' έχει ρίζα στο 0.

Για τον υπολογισμό των ριζών δημιουργήθηκαν σε Matlab το πρόγραμμα ex1.m και οι συναρτήσεις bisection, newton και secant.
Στο ex1 ορίζεται μία συμβολική συνάρτηση f με τον αντίστοιχο τύπο, κατασκευάζεται το παραπάνω γράφημα και στην συνέχεια καλούνται με τη σειρά οι τρεις συναρτήσεις για να υπολογίσουν την κάθε ρίζα και των αριθμό των επαναλήψεων που χρειάζονται για να τις προσεγγίσουν. Τα αποτελέσματα για κάθε μέθοδο αποθηκεύονται στους πίνακες bisectionRoots, newtonRoots και secantRoots.

Μέθοδος	-1.1976	0.0000	1.5301
	Επαναλήψεις		
Bisection	18	-	18
Newton	8	36	7
Secant	14	55	10

Διχοτόμηση

Η συνάρτηση bisection δέχεται την συνάρτηση $\boldsymbol{f}$, το μέγιστο επιτρεπόμενο σφάλμα και τα ακρά του διαστήματος στο οποίο θα γίνει η αναζήτηση. Αφού υπολογίσει τον ελάχιστο αριθμο των αναγκαίων επαναλήψεων με τον τύπο $\boldsymbol{N > \frac{\ln \frac{b-a}{\epsilon}}{\ln 2}}$ ελέγχει αν το μέσο του διαστήματος είναι ρίζα της $\boldsymbol{f}$ και αν ναι σταματάει και επιστρέφει τα αντίστοιχα αποτελέσματα. Αν δεν είναι αποφασίζει αν θα αντικαταστήσει το αριστερό ή το δεξί άκρο του διαστήματος με το μέσο δεδομένου ότι μετά την αντικατάσταση πρέπει να ισχύει: $\boldsymbol{f(a)f(b) < 0}$. Και επαναλαμβάνει μέχρι να βρει την ρίζα ή να φτάσει τις $\boldsymbol{N}$ Επαναλήψεις.

Χρησιμοποιούμε την μέθοδο της διχοτόμησης μόνο για την αναζήτηση των ριζών κοντά στο -1 και στο 1.5 γιατί κοντά στο 0 δεν υπάρχει διάστημα $\boldsymbol{[a, b]}$ που να ισχύει $\boldsymbol{f(a)f(b) < 0}$

Newton-Raphson

Η συνάρτηση newton δέχεται την συνάρτηση $\boldsymbol{f}$, το μέγιστο επιτρεπόμενο σφάλμα και το αρχικό σημείο $\boldsymbol{x_0}$. Αρχικά υπολογίζει την νέα προσέγγιση με τον επαναληπτικό τύπο $\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$ και την διαφορά των προσεγγίσεων. Μετά ξεκινάει η επαναληπτική διαδικασία κατά την οποία ελέγχει αν η διαφορά είναι μεγαλύτερη του μέγιστου επιτρεπόμενου σφάλματος. Αν δεν είναι τερματίζει και επιστρέφει τα αποτελέσματα. Αν είναι υπολογίζει την νέα προσέγγιση και διαφορά. Αν η καινούρια διαφορά των τελευταίων προσεγγίσεων είναι μεγαλύτερη από την προηγούμενη τότε σημαίνει ότι δεν συγκλίνει οπότε σταματάει και επιστρέφει $\boldsymbol{NaN}$ στην προσέγγιση και $\mathbf{0}$ στις επαναλήψεις.

Παρόλο που στο 0 δεν υπάρχει διάστημα που να ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος ύπαρξης μοναδικής ρίζας (δηλ. $\boldsymbol{f'(x), f''(x) \neq 0}$ για κάθε $\boldsymbol{x \in [a, b]}$ και $\boldsymbol{f(a)f(b) < 0}$) η Newton-Raphson επιστρέφει τα σωστά αποτελέσματα. Επειδή όμως το 0 είναι ρίζα και της $\boldsymbol{f'}$ (από το γράφημα) προκύπει ότι σε αντίθεση με τις ρίζες -1.1976 και 1.5301 δεν συγκλίνει τετραγωνικά στο 0 γι' αυτό και χρειάζονται τόσες παραπάνω επαναλήψεις.

Τέμνουσα

Η συνάρτηση secant δέχεται την συνάρτηση $\boldsymbol{f}$, το μέγιστο επιτρεπόμενο σφάλμα και τις αρχικές προσεγγίσεις $\boldsymbol{x_0}$ και $\boldsymbol{x_1}$. Μέχρι οι διαφορά των δύο τελευταίων προσεγγίσεων να γίνει μικρότερη του σφάλματος επαναλαμβάνει την εξής διαδικασία: υπολογίζει την νέα προσέγγιση με βάση τις προηγούμενες δύο χρησιμοποιώντας τον τύπο $\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}}$ και μόλις γίνει αυτό επιστρέφει τα αποτελέσματα.
Στο 0 ισχύει ό,τι ισχύει και στην Newton-Raphson.

Άσκηση 2

2.1

Για την επίλυση των ζητουμένων στο διάστημα $[0, 3]$ πάνω στην συνάρτηση

$$f(x) = 94cos^3x - 24cosx + 177sin^2x - 108sin^4x - 72cos^3x * sin^2x - 65$$

δημιουργήθηκαν σε Matlab το πρόγραμμα ex2.m και οι συναρτήσεις modifiedBisection, modifiedNewton και modifiedSecant.

modifiedBisection

Υλοποιεί μια τροποποιημένη μέθοδο της διχοτόμησης η οποία αντί να επιλέγει το μέσο του διαστήματος σαν νέα προσέγγιση επιλέγει τυχαία έναν αριθμό μέσα από αυτό. Αυτό σημαίνει ότι το διάστημα δεν μειώνεται με σταθερό ρυθμό κι έτσι δεν μπορούμε να γνωρίζουμε απ' την αρχή πόσες επαναλήψεις χρειάζονται για την εύρεση της προσέγγισης με αποδεκτό σφάλμα για αυτό και η νέα τερματική συνθήκη είναι η διαφορά των δύο τελευταίων προσεγγίσεων να είναι μικρότερη του μέγιστου αποδεκτού σφάλματος.

modifiedNewton

Υλοποιεί μια τροποποιημένη μέθοδο Newton-Raphson η οποία κάνει ακριβώς ότι και η απλή μέθοδος Newton αλλά η συνάρτηση ϕ έχει τον τύπο

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{\frac{f'(x_n)}{f(x_n)} - \frac{1}{2}\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}}$$

modifiedSecant

Υλοποιεί μια τροποποιημένη μέθοδο της Τέμνουσας η οποία μοιάζει με την απλή μέθοδο Τέμνουσας με την διαφορά ότι η συνάρτηση ϕ δεν βρίσκει το σημείο στο οποίο τέμνει τον άξονα $x'x$ η ευθεία που περνάει από τις δύο τελευταίες προσεγγίσεις αλλά η παραβολή που περνάει από τις τρεις τελευταίες και έχει τον τύπο:

$$x_{n+3} = x_{n+2} - \frac{r(r-q)(x_{n+2} - x_{n+1}) + (1-r)s(x_{n+2} - x_n)}{(q-1)(r-1)(s-1)}$$

όπου $r = \frac{f(x_{n+2})}{f(x_{n+1})}$, $q = \frac{f(x_n)}{f(x_{n+1})}$ και $s = \frac{f(x_{n+2})}{f(x_n)}$.

Στο ex2 ορίζεται πάλι μία συμβολική συνάρτηση f και όπως και στην $1^η$ άσκηση καλούμε τις 3 συναρτήσεις για να επιστρέψουν την προσέγγιση στην οποία καταλήγουν και τις επαναλήψεις που χρειάστηκαν. Αυτό γίνεται και με τις τρεις συναρτήσεις της $1^{ης}$ άσκησης και τα αποτελέσματα αποθηκεύονται αντίστοιχα στους πίνακες:

- modifiedNewtonRoots
- modifiedBisectionRoots
- modifiedSecantRoots
- newtonRoots
- bisectionRoots
- secantRoots

Οι ρίζες είναι κοντά στο 0.8, στο 1 και στο 2.3 για αυτό και οι αναζητήσεις γίνονται κοντά σε αυτά τα σημεία και τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι:

Μέθοδος	Προσέγγιση	Επαναλήψεις
modifiedNewtonRoots	0.8411	4
	1.0472	14
	2.3005	3
modifiedBisectionRoots	0.8411	20
	1.0472	27
	2.3005	19
modifiedSecantRoots	0.8411	5
	1.0540	11
	2.3005	5
newtonRoots	0.8411	5
	1.0472	22
	2.3005	4
bisectionRoots	0.8411	16
	1.0472	16
	2.3005	16
secantRoots	0.8411	9
	1.0472	35
	2.3005	6

2.2

Στην συνέχεια αποθηκεύονται στον πίνακα repsOfModifiedBisection 10 φορές οι επαναλήψεις που χρειάζεται η τροποποιημένη μέθοδος της διχοτόμησης για να βρει την ρίζα στο 0.8 και έτσι μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η τροποποιημένη μέθοδος δεν συγκλίνει σε σταθερό αριθμό επαναλήψεων. Κάτι που είναι αναμενόμενο εφόσων η νέα προσέγγιση επιλέγεται στην τύχη μέσα από το διαάστημα.

Επαναλήψεις τις τροποποιημένης μεθόδου Διχοτόμησης

20	13	20	27	19	15	17	21	15	22

2.3

Τέλος, στους πίνακες:

- differenceOfConvergenceSpeedOfBisection
- differenceOfConvergenceSpeedOfNewton
- differenceOfConvergenceSpeedOfSecant

αποθηκεύονται πόσο περισσότερες επαναλήψεις χρειάζονται οι τροποποιημένες μέθοδοι για να προσεγγίσουν τις ρίζες.
Οι αρνητικοί αριθμοί σημαίνουν ότι χρειάζονται λιγότερες επαναλήψεις.

differenceOfConvergenceSpeedOfBisection	6
	15
	3
differenceOfConvergenceSpeedOfNewton	-1
	-8
	-1
differenceOfConvergenceSpeedOfSecant	-4
	-24
	-1

Παρατηρούμε ότι η τροποποιημένη μέθοδος Διχοτόμησης είναι πιο αργή από την απλή σε αντίθεση με τις τροποποιημένες Newton-Raphson και Τέμνουσας. Αλλά η τρεις ρίζες μίας συνάρτησης ειναί πολύ μικρό δείγμα για να βγει γενικό συμπέρασμα.

Άσκηση 3

3.1

Για την λύση του **πρώτου υποερωτήματος** δημιουργήθηκε η συνάρτηση gauss.m σε Matlab η οποία δέχεται τον πίνακα $\boldsymbol{A}$ και το διάνυσμα $\boldsymbol{b}$ του γραμμικού συστήματος $\boldsymbol{Ax = b}$, το λύνει με την μέθοδο $\boldsymbol{PA = LU}$ και επιστρέφει το διάνυσμα των αγνώστων $\boldsymbol{x}$.
Αρχικά αντιγράφει τον πίνακα $\boldsymbol{A}$ στον $\boldsymbol{U}$. Μετά κάνει οδήγηση στον $\boldsymbol{U}$ για να έχει έτοιμο τον πινακα $\boldsymbol{P}$ και στην συνέχεια υπολογίζει τον πίνακα $\boldsymbol{L}$ κάνοντας gauss στον $\boldsymbol{U}$. Έπειτα υπολογίζει το διάνυσμα $\boldsymbol{z = Pb}$ και κάνει εμπρόσθια αντικατάσταση με τον $\boldsymbol{L}$ για να βρει το διάνυσμα $\boldsymbol{y = Ux}$ και τέλος κάνει οπισθοδρόμηση στο σύστημα $\boldsymbol{Ux = y}$ (αφού ο $\boldsymbol{U}$ είναι άνω τριγωνικός) για να βρει το $\boldsymbol{x}$.

3.2

Για την λύση του **δεύτερου υποερωτήματος** δημιουργήθηκε η συνάρτηση cholesky.m σε Matlab η οποία δέχεται έναν πίνακα $\boldsymbol{A}$ συμμετρικό και θετικά ορισμένο και επιστρέφει τον κάτω τριγωνικό πίνακα $\boldsymbol{L}$ που αποτελεί την αποσύνθεση Cholesky του $\boldsymbol{A}$ που προκύπτει από τον αλγόριθμο του Cholesky κατά γραμμές.

3.3

Για το **τρίτο υποερώτημα** δημιουργήθηκε το πρόγραμμα ex3.m και η συνάρτηση gaussSeidel.m καθώς και η βοηθητική συνάρτηση makeAb.m
Στο ex3 κατσκευάζονται με την βοήθεια της makeAb και επιλύονται με την βοήθεια της gaussSeidel αρχικά για n = 10 και μετά για n = 10,000 ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ και το διάνυσμα $\boldsymbol{b}$ με $\boldsymbol{A(i,i) = 5, A(i+1,i) = A(i,i+1) = -2}$ και $\boldsymbol{b = [3,1,1,\ldots,1,1,3]^T}$
Η συνάρτηση gaussSeidel προσεγγίζει σύμφωνα με την μέθοδο Gauss-Seidel την λύση του γραμμικού συστήματος $\boldsymbol{Ax = b}$ με σφάλμα $\boldsymbol{\epsilon < \frac{1}{2}10^{-4}}$. Το σφάλμα πρέπει να είναι μικρότερο της άπειρης νόρμας της διαφοράς των δύο τελευταίων προσεγγίσεων.

Άσκηση 4

4.1

Για να αποδείξω ότι ο πίνακας $\boldsymbol{G}$ είναι στοχαστικός αρκεί να αποδείξω ότι το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης του είναι 1.
Για κάθε $\boldsymbol{j} \in [\mathbf{1}, \boldsymbol{n}]$ είναι:

$$\text{Άθροισμα της στήλης j} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} G(i,j) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{q}{n} + \frac{A(j,i) * (1-q)}{n_j}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{q}{n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{A(j,i) * (1-q)}{n_j} =$$

$$\frac{q}{n} * \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{1-q}{n_j} * \sum_{i=1}^{n} A(j,i) =$$

$$\frac{q}{n} * n + \frac{1-q}{n_j} * n_j =$$

$$q + 1 - q =$$

$$1$$

4.2

Για το **δεύτεορο υποερώτημα** δημιουργήθηκαν σε Matlab το πρόγραμμα ex4.m και η συνάρτηση powerMethod.m
Στο ex4 αρχικά κατασκευάζεται ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ της εκφώνησης και μετά ο $\boldsymbol{G}$ σύμφωνα με τον τύπο που δίνεται. Έπειτα ο πίνακας $\boldsymbol{G}$ και το μέγιστο αποδεκτό σφάλμα περνάνε στην συνάρτηση powerMethod η οποία υπολογίζει με την μέθοδο της δυνάμεως την μέγιστη ιδιοτιμή και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του $\boldsymbol{G}$.
Δηλαδή ξεκινόντας από την προσέγγιση-διάνυσμα $[\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{1}]^{\boldsymbol{T}}$ αρχικά πολλαπλασιάζει με τον πίνακα G από αριστερά και κανονικοποιεί το νέο διάνυσμα διαιρώντας με το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο του. Όσο η διαφορά των πρώτων στοιχείων των δύο τελευταίων προσεγγίσεων πριν την κανονικοποίηση είναι μεγαλύτερη του μέγιστου αποδεκτού σφάλματος επαναλαμβάνει την διαδικασία.
Στο τέλος επιστρέφει το πρώτο στοιχείο της τελευταίας προσέγγισης πριν την κανονικοποίηση(ιδιοτιμή) και την τελευταία προσέγγιση μετά την κανονικοποίηση(ιδιοδιάνυσμα).

Στην συγκεκριμένη περίπτωση το $\boldsymbol{eigenVector}$ του

$$[\boldsymbol{eigenVector}, \boldsymbol{eigenValue}] = \boldsymbol{powerMethod}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{error});$$

ταυτίζεται με το δοσμένο διάνυσμα p.

1	0.02682
2	0.02986
3	0.02986
4	0.02682
5	0.03958
6	0.03958
7	0.03958
8	0.03958
9	0.07456
10	0.10632
11	0.10632
12	0.07456
13	0.12509
14	0.11632
15	0.12509

4.3

Για το **τρίτο υποερώτημα** δημιουργήθηκε σε Matlab το πρόγραμμα ex43.m Σε αυτό συμβαίνει ακριβώς ότι και στο ex4 με την διαφορά ότι στον πίνακα $\boldsymbol{A}$ προστέθηκαν άσσοι στις θέσεις $\boldsymbol{A(11,1)}, \boldsymbol{A(13,1)}, \boldsymbol{A(14,1)}$ και $\boldsymbol{A(15,1)}$ και αφαιρείται ο άσσος απ' την θέση $\boldsymbol{A(1,9)}$.
Επειδή επέλεξα να βελτιώσω τον βαθμό σημαντικότητας της σελίδας **1** δημιούργησα συνδέσεις από τις πιο σημαντικές σελίδες(δηλ. τις 13,15,14 και 11) και αφαίρεσα την σύνδεση της 1 με την 9 για να μην μεταφέρει η 1 την σημαντικότητα της στην 9 η οποία ήδη συνδέεται με την 13.
Το p που προκύπτει είναι:

1	0.12486
2	0.13272
3	0.05853
4	0.02572
5	0.05850
6	0.03748
7	0.05801
8	0.03699
9	0.03846
10	0.09557
11	0.08593
12	0.03672
13	0.10045
14	0.05425
15	0.05574

Βλέπουμε ότι η σημαντικότητα της 1^{η} σελίδας σχεδόν πενταπλασιάστηκε.

4.4

Για το **τέταρτο υποερώτημα** δημιουργήθηκε σε Matlab το πρόγραμμα ex44.m

Σε αυτό συμβαίνει ό,τι και στο ex42 αλλά η διαδικασία επαναλαμβάνεται 2 φορές. Τη μία με $\boldsymbol{q = 0.02}$ και την άλλη με $\boldsymbol{q = 0.6}$ και τα αντιστοιχα διανύσματα $\boldsymbol{p}$ είναι:

q=0.02	
1	0.01710
2	0.01442
3	0.01442
4	0.01710
5	0.03218
6	0.03218
7	0.03218
8	0.03218
9	0.08002
10	0.10957
11	0.10957
12	0.08002
13	0.14349
14	0.14196
15	0.14349

q=0.6	
1	0.05133
2	0.05799
3	0.05799
4	0.05133
5	0.05666
6	0.05666
7	0.05666
8	0.05666
9	0.06695
10	0.09026
11	0.09026
12	0.06695
13	0.08344
14	0.07337
15	0.08344

Παρατηρούμε ότι όταν μεγαλώνουμε το q η τάξη της κάθε σελίδας τείνει στο $\boldsymbol{\frac{1}{n}}$. Ενώ όταν το μικραίνουμε μεγαλώνει η σημαντικότητα όσων σελίδων έχουν

$\boldsymbol{p_i} > \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$ και μικραίνει η σημαντικότητα όσων σελίδων έχουν $\boldsymbol{p_i} < \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$. Άρα η πιθανότητα μεταπήδησης q υπάρχει για να δίνει μια τυχαιότητα στην τάξη της κάθε σελίδας και να μην έχουν σημασία μόνο οι συνδέσεις των σελίδων.

4.5

Παρά τις αλλαγές στα στοιχεία $\boldsymbol{A(8, 11)}$ και $\boldsymbol{A(12, 11)}$ ο πίνακας G παραμένει στοχαστικός επομένως δεν αλλάζει η διαδικασία για αυτό και στο πρόγραμμα ex45 με τον τροποποιημένο πίνακα $\boldsymbol{A}$ προκύπτει το αναμενόμενο διάνυσμα:

1	0.02655
2	0.02837
3	0.02501
4	0.01641
5	0.03894
6	0.03799
7	0.03114
8	0.03019
9	0.07377
10	0.10289
11	0.12400
12	0.07709
13	0.12351
14	0.12261
15	0.14146

στο οποίο βλέπουμε πως ενώ οι τάξεις των δύο σελίδων ήταν ίδια η τάξη της σελίδας 11 αυξήθηκε κατά 0.017 ενώ της 10 μειώθηκε κατά 0.03.

4.6

Με την διαγραφή της σελίδας 10 το διάνυσμα p που προκύπτει είναι:

1	0.07142
2	0.06130
3	0.06130
4	0.04107
5	0.06130
6	0.06130
7	0.05119
8	0.05119
9	0.07142
11	0.20297
12	0.07142
13	0.03095
14	0.07142
15	0.09166

Από αυτό παρατηρούμε ότι η σημαντικότητα κάθε σελίδας που ήταν στενά συνδεδεμένη με την 10(π.χ. η 13) μειώνεται αρκετά ενώ παράλληλα η τάξη των σελίδων που δεν σχετίζονταν με την 10 αυξήθηκε αρκετά. Τέλος η τάξη της 11 σχεδόν διπλασιάστηκε επειδή οι ιστοσελίδες που έστελναν στην 10 στέλνουν και στην 11 οπότε μάζεψε ουσιαστικά μεγάλο μέρος της κίνησης της 10.