Санкт-Петербургский политехнический университет имени Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра прикладной математики

Интервальный анализ
Отчёт по лабораторной работе №3

Выполнил:

Студент: Дамаскинский Константин
Группа: 3630102/70201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент
Баженов Александр Николаевич

2021 г.

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1. Постановка задачи

Требуется решить недоопределённую интервальную систему линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) с матрицей 2×3 и переопределённую ИСЛАУ с матрицей 3×2. Используемые матрицы должны совпадать с точностью до транспонирования. Необходимо найти допусковое множество решений, оценку вариабельности решения.

Для случая 3×2 требуется построить график распознающего функционала.

Построить трёхмерный образ допускового множества.

2. Теория

2.1. Объединённое множество решений

Определение 1 ИСЛАУ. ИСЛАУ называется уравнение вида:

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}, \tag{2.1.1}$$

где $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{IR}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$ – неизвестное.

Определение 2 Объединённое множество решений. Объединённым множеством решений называется множество $\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, такое что существуют такие $A \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{b}$, для которых выполнено $Ax = b$:

$$\Xi_{uni}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists A \in \mathbf{A},\ b \in \mathbf{b} : Ax = b\} \tag{2.1.2}$$

Для нахождения объединённого множества решений в случае, когда одна размерность матрицы системы составляет 2 или 3, используется в сущности геометрический подход: для каждое уравнение системы задаёт линейно ограниченное множество. Пересечение этих множеств и задаёт объединённое множество решений. Пример можно найти в [1, стр. 39, рис. 15].

Программной реализацией являются функции *EqnWeakR2, EqnWeakR3* пакетов *IntLinIncR2, IntLinIncR3* (см. приложения).

Кроме того, для ИСЛАУ с квадратной матрицей существуют интервальные аналоги классических численных методов решения СЛАУ, которые позволяют оценить объединённое множество решений ИСЛАУ, опираясь на начальную оценку.

Интервальный метод Гаусса-Зейделя в точности повторяет классический метод Зейделя, сходится при любом начальном приближении, если $\| -(L + D)^{-1}U\| < 1$, где $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $R =$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Метод Кравчика является разновидностью метода простых итераций:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = C\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d} \tag{2.1.3}$$

Согласно теореме Банаха о неподвижной точке такой процесс сходится, если $\|C\| < 1$. Поскольку выполнено: $\max\limits_{Cv=\lambda_C v} |\lambda_C| \leq \|C\|$, для удобства оценки сходимости можно использовать более сильное требование: $\rho(C) < 1$.

В методе Кравчика полагается:

$$C = (I - \Lambda\mathbf{A}),\ \Lambda = (\mathrm{mid}\mathbf{A})^{-1} \tag{2.1.4}$$

$$d = \Lambda\mathbf{b} \tag{2.1.5}$$

2.2. Допусковое множество решений

Определение 3 Допусковое множество решений. Допусковым множеством решений называется множество $\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, такое что для любой $A \in \mathbf{A}$ выполнено $Ax \in \mathbf{b}$:

$$\Xi_{tol}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall A \in \mathbf{A} : Ax \in \mathbf{b}\} \tag{2.2.1}$$

Из-за того, что решение должно существовать для любой точечной матрицы ИСЛАУ, зачастую допусковое множество оказывается пустым там, где это совсем неочевидно на первый взгляд. Кроме того, в задачах, где простые эвристические решения, например, "средней" или "крайней" точечной СЛАУ не существуют, допусковое множество оказывается непустым. Эти примеры также можно найти в [1].

Программной реализацией вычисления допускового множества являются функция *[V, P1, P2, P3, P4] = EqnTol2D(infA, supA, infb, supb)* для двумерной системы и *EqnTol3D* с аналогичными аргументами и списком возвращаемых значений для трёхмерной.

2.2.1. Распознающий функционал

Для полного исследования разрешимости задачи о допусковом множестве ИСЛАУ используется понятие *распознающего функционала*:

$$\mathrm{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \mathrm{rad}\mathbf{b}_i - \left| \mathrm{mid}\mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\} \tag{2.2.2}$$

Теорема 1. *Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда x принадлежит допусковому множество тогда и только тогда, когда $Tol(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$.*

Данная теорема сильно напоминает теоремы, позволяющие доказать оптимальность найденного решения задачи линейного программирования. Это неудивительно: задача о поиске допускового множества (*линейная задача о допусках*) представляет собой задачу о решении системы линейных неравенств.

Программной реализацией вычисления распознающего функционала и аргумента, в котором достигается его неотрицательное значение, является функция *[tolmax, argmax] = tolsolvty(supA, infA, supb, infb).*

2.3. Оценка вариабельности решения ИСЛАУ

Вариабельность решения СЛАУ – это свойство системы, демонстрирующее насколько относительная погрешность в свободном столбце СЛАУ влияет на относительную погрешность решения. Известно, что вариабельность решения зависит от числа обусловленности матрицы:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}, \text{ где} \tag{2.3.1}$$

$$\mathrm{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \tag{2.3.2}$$

Аналогами для ИСЛАУ являются показатели абсолютной вариабельности *ive (interval variability of the estimate)* и относительной *rve (relative variability of the estimate)*:

$$\mathrm{ive}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \sqrt{n} \cdot \left(\min_{A \in \mathbf{A}} \mathrm{cond} A\right) \cdot \|\arg\max\ \mathrm{Tol}\| \cdot \frac{\max \mathrm{Tol}}{\|\mathbf{b}\|} \tag{2.3.3}$$

$$\mathrm{rve}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \left(\min_{A \in \mathbf{A}} \mathrm{cond} A\right) \cdot \max \mathrm{Tol} \tag{2.3.4}$$

3. Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью математического пакета Octave, пакетов программ И. Шарой *IntLinIncR2, IntLinIncR3*. Операционная система Ubuntu 20.04.

Ссылка на исходный код лабораторной работы и отчёта находится в разделе “Приложения”.

4. Результаты

4.1. Задача 1

На следующем графике показана зависимость диаметра текущего бруса от номера итерации (график сужения):

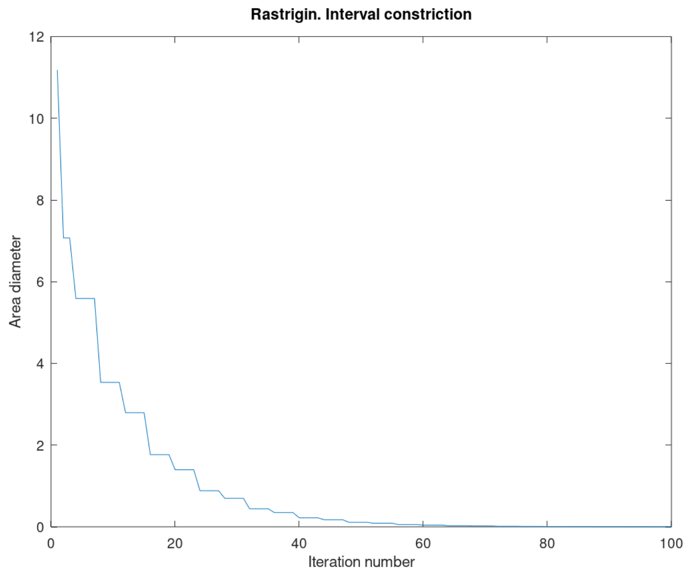

Рис. 1. Функция Растригина. Зависимость диаметра от номера итерации

Для решения данной задачи в функцию GlobOpt0 была добавлена возможность сохранять список диаметров брусов. Кроме того, для удобства использования в GlobOpt0 передаётся указатель на целевую минимизируемую функцию.

На данном рисунке показана траектория центров бруса:

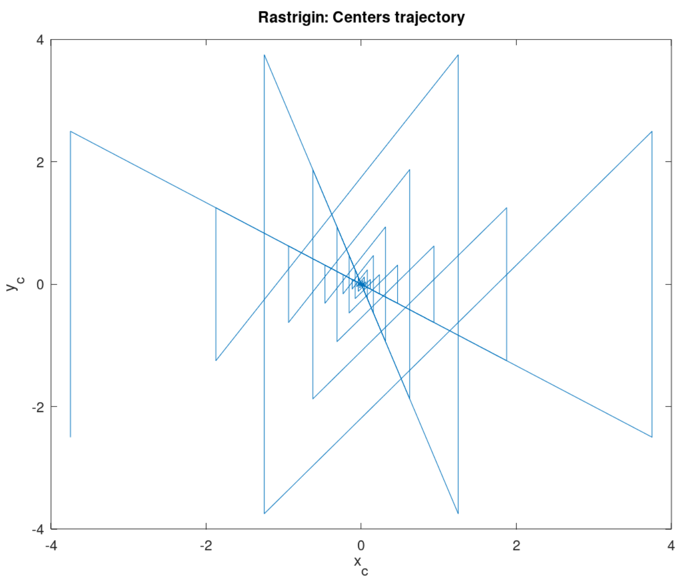

Рис. 2. Функция Растригина. Траектория центров брусов

4.2. Задача 2

На следующем графике показана зависимость расстояния от текущего решения до истинного от номера итерации в полулогарифмических координатах (график сходимости):

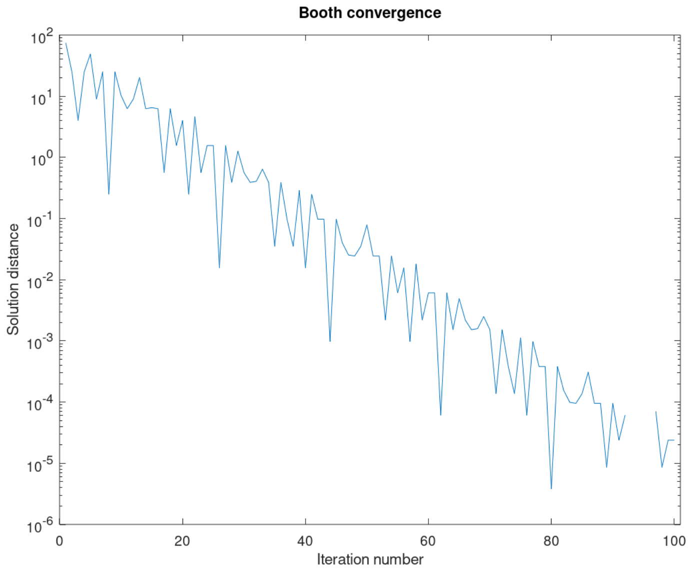

Рис. 3. Функция Бута. График сходимости

Также в ходе написания обсуждения был построен аналогичны график для функции Растригина:

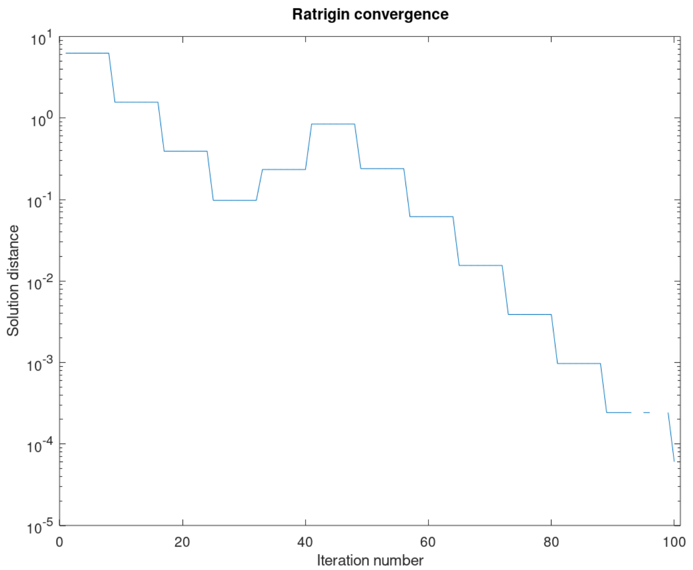

Рис. 4. Функция Растригина. График сходимости

На данном рисунке показана траектория центров бруса и линии уровня функции Бута:

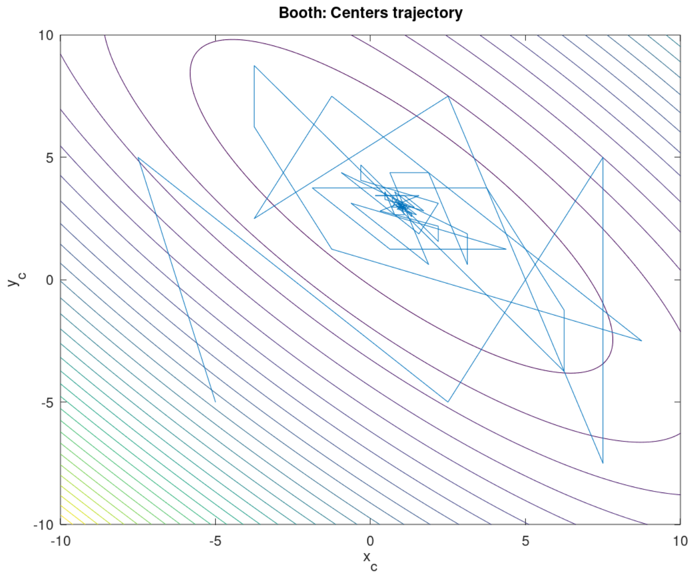

Рис. 5. Функция Бута. Траектория центров брусов. Линии уровня

5. Обсуждение

Результаты решения первой задачи являются ожидаемыми: размер бруса уменьшается с каждой итерацией. Результаты решения второй задачи более интересны: видна тенденция к экспоненциальной сходимости.

Наблюдается следующее свойство: результат, который был достигнут на шестой итерации (первый “большой выброс вниз”), становится стабильным (то есть алгоритм не имеет итераций с более поздним номером, доставляющих результат хуже данного) только приблизительно на сороковой итерации работы алгоритма, причём такие выбросы происходят регулярно (раз в двадцать итераций).

После обнаружения этого свойства был построен такой же график для функции Растригина. Из полученного результата (см. 4.2) можно сделать вывод, что описанное свойство скорее связано со свойствами функции, нежели алгоритма, поскольку сходимость на функции Растригина имеет абсолютно иную форму: начиная с пятидесятой итерации метод не ухудшает результат.

Разрывы в графиках связаны с тем, что значение по оси ординат достигло области машинного нуля, поэтому не смогло быть корректно прологарифмировано.

На рисунках 4.1 и 4.2 видно, что центры брусов не выходят за начальный диапазон значений, однако также хорошо видно, особенно у функции Бута, что сходиться к точке минимума центры начинают не сразу, а начиная с некоторой итерации, что ещё раз подтверждает выводы, сделанные при анализе графиков сходимости. Также видно, что направление спуска является отнюдь не оптимальным. Более того, совершенно нормальной является ситуация, когда очередная итерация метода даёт худший результат, чем предыдущая.

Список литературы

[1] А. Н. Баженов. *Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры*. URL: https://elib.spbstu.ru/dl/2/s20-76.pdf/info.

6. Приложения

1. Репозиторий с кодом программы и кодом отчёта:
   https://github.com/kystyn/interval
2. Пакет IntLinInc2D
3. Пакет IntLinInc3D