

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Интервальный анализ
Отчёт по курсовой работе

Выполнил:

Студент: Дамаскинский Константин

Группа: 3630102/70201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

2021 г.

Содержание

1. Постановка задачи	2
2. Теория	2
2.1. Коррекция СЛАУ. Метод Лаврентьева	2
2.2. Эвристические методы коррекции нульсодержащих интервалов	2
3. Реализация	2
4. Результаты	3
5. Обсуждение	3
Литература	4
6. Приложения	4

1. Постановка задачи

Исследователь поведение субдифференциального метода Ньютона при решении ИСЛАУ с матрицей:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [3, 4] & [5, 6] \\ [-1, 1] & [-3, 1] \end{pmatrix} \quad (1.0.1)$$

и правой частью:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [-3, 4] \\ [-1, 2] \end{pmatrix} \quad (1.0.2)$$

Объяснить, по каким причинам метод расходится при любом допустимом релаксационном параметре $\tau \in [0; 1]$.

Предложить способ модификации системы для получения решения.

2. Теория

2.1. Коррекция СЛАУ. Метод Лаврентьева

Для регуляризации ИСЛАУ с интервальной матрицей был использован метод Лаврентьева.

Суть метода в следующем: матрица ИСЛАУ \mathbf{A} заменяется на некоторую “расширенную” матрицу

$$\mathbf{A} + \theta \mathbf{E} \quad (2.1.1)$$

где \mathbf{E} – матрица, состоящая из интервалов $[-1, 1]$.

2.2. Эвристические методы коррекции нульсодержащих интервалов

Было выдвинуто предположение, что проблема неразрешимости имеет место быть из-за нульсодержащих интервалов. Соответственно, суть данной эвристики состоит в том, чтобы посмотреть, как метод ведёт себя при коррекции интервалов таким образом, чтобы в него не попадал ноль. Когда соответствующий интервал (или группа интервалов) обнаруживается, с помощью метода половинного деления производится уточнение интервала.

Метод может применяться как к матрице, так и к столбцу свободных членов.

3. Реализация

Лабораторная работа выполнена в среде Octave в использовании портированного кода Сергея Петровича Шарого `subdiff` (см. “Приложения”) и библиотеки `kinterval` (арифметика Каухера). Операционная система Ubuntu 20.04.

Ссылка на исходный код лабораторной работы и отчёта находится в разделе “Приложения”.

4. Результаты

- В первую очередь был поставлен вычислительный эксперимент, цель которого – показать, что, по крайней мере, на значительном множестве допустимых релаксационных параметров метод расходится. Для этого метод был запущен с τ , принадлежащим равномерной сетке от 0 до 1 с шагом 0.05.
- В результате применения метода Лаврентьева в совокупности с бинарным поиском было обнаружено, что ни при каких θ система не становится разрешимой.
- В результате применения эвристического метода, описанного в теоретическом разделе, было обнаружено два способа коррекции системы:

1.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [3, 4] & [5, 6] \\ [-1, 1] & [-3, 0] \end{pmatrix} \quad (4.0.1)$$

Свободный столбец остаётся при этом неизменным.

Найдено формальное решение:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [-0.250, 1.000] \\ [-0.333, 0.000] \end{pmatrix} \quad (4.0.2)$$

2.

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [-3, 3.002] \\ [-1, 2] \end{pmatrix} \quad (4.0.3)$$

Матрица остаётся при этом неизменной.

Найдено формальное решение:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [-0.000, 0.500] \\ [-0.500, 0.166] \end{pmatrix} \quad (4.0.4)$$

5. Обсуждение

В результате регуляризации системы методом Лаврентьева был получен ожидаемый результат: регуляризация провалилась. Действительно, сколько ни расширяй интервал, он всё так же будет нульсодержащим и система останется неразрешимой.

Эвристический метод, применённый к матрице, подтвердил эту гипотезу: действительно, если скорректировать один из интервалов так, чтобы ноль был его границей, то ИСЛАУ становится разрешимой. Было проверено, что при подстановке сколь угодно малого положительного числа вместо нуля ИСЛАУ

снова становится неразрешимой (слова “сколь угодно малый”, конечно же, стоит воспринимать в контексте компьютерных вычислений).

Достаточно неожиданный результат был получен при коррекции столбца свободных членов. Было обнаружено, что ИСЛАУ становится разрешимой при весьма незначительной коррекции одного из интервалов. При этом интервал не перестал быть нульсодержащим.

Из этого можно сделать следующий вывод: знакопеременность концов интервалов матрицы ИСЛАУ не является критическим обстоятельством для работы метода, однако в такой ситуации очень многое зависит от выбора начального приближения – ведь именно оно (и только оно!) определяется свободным столбцом ИСЛАУ.

6. Приложения

1. Репозиторий с кодом программы и кодом отчёта:

<https://github.com/kystyn/interval>

2. `subdiff` Сергея Петровича Шарого для SciCodes:

<http://www.nsc.ru/interval/Programing/SciCodes/subdiff.sci>