

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Интервальный анализ
Отчёт по лабораторной работе №4

Выполнил:

Студент: Дамаскинский Константин

Группа: 3630102/70201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

2021 г.

Содержание

1. Постановка задачи	2
1.1. Конкретизация задачи	2
2. Теория	2
2.1. Интервальная регуляризация	3
3. Реализация	4
4. Результаты	4
5. Обсуждение	4
Литература	4
6. Приложения	5

1. Постановка задачи

Требуется решить недоопределённую интервальную систему линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) с матрицей 2×3 и переопределённую ИСЛАУ с матрицей 3×2 . Используемые матрицы должны совпадать с точностью до транспонирования. Необходимо найти допустовое множество решений, оценку вариабельности решения.

Для случая 3×2 требуется построить график распознающего функционала. Построить трёхмерный образ допустового множества.

1.1. Конкретизация задачи

Была рассмотрена матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2.5 \\ 7.2 & 4.6 \end{pmatrix} \quad (1.1.1)$$

Правый столбец:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.4, 2.9] \\ [0.9, 1.1] \\ [3.3, 3.5] \end{pmatrix} \quad (1.1.2)$$

2. Теория

Напомним, распознающий функционал имеет вид:

$$\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad} \mathbf{b}_i - \left| \text{mid} \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\} \quad (2.0.1)$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда x принадлежит допустовому множеству тогда и только тогда, когда $\text{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$.

Нетрудно заметить, что в случае неразрешимости интервальной системы одним из простейших способов коррекции системы будет расширение интервалов свободного столбца: повышая радиус интервала, мы увеличиваем значение распознающего функционала. Таким образом, можно увеличить интервал настолько, чтобы обеспечить неотрицательность функционала.

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [\text{mid } b_1 - \text{rad } b_1, \text{mid } b_1 + \text{rad } b_1] \\ [\text{mid } b_2 - \text{rad } b_2, \text{mid } b_2 + \text{rad } b_2] \\ [\text{mid } b_3 - \text{rad } b_3, \text{mid } b_3 + \text{rad } b_3] \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} [\text{mid } b_1 - w_1 \text{rad } b_1, \text{mid } b_1 + w_1 \text{rad } b_1] \\ [\text{mid } b_2 - w_2 \text{rad } b_2, \text{mid } b_2 + w_2 \text{rad } b_2] \\ [\text{mid } b_3 - w_3 \text{rad } b_3, \text{mid } b_3 + w_3 \text{rad } b_3] \end{pmatrix}$$

При этом преследуется следующая цель: масштабирование интервала должно быть минимальным в определённом смысле.

2.1. Интервальная регуляризация

В этом разделе речь пойдёт о методе, который позволяет провести корректировку ИСЛАУ посредством решения задачи линейного программирования – *l₁-регуляризации* [1].

Минимизируется первая норма вектора $w = (w_1 \ w_2 \ w_3)^T \in \mathbb{R}_+^3$: $\|w\|_1 \rightarrow \min$.

Ясно, что при таком подходе нельзя строить задачу оптимизации с непосредственным использованием распознающего функционала ввиду его нелинейности.

Будем опираться на определение допускового множества решений напрямую: требуется, чтобы найденный вектор x при действии на него оператором A попал в интервал $\tilde{\mathbf{b}}$.

Итак, требуется:

$$\begin{cases} \exists x \in \mathbb{R}^2 : A \cdot x \in \tilde{\mathbf{b}} \\ \|w\|_1 = w_1 + w_2 + w_3 \rightarrow \min \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Введём $u = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}$. Тогда общий вид задачи ЛП переписывается следующим образом:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot u (= \|w\|_1) \rightarrow \min_u \\ u_{4,5,6} \geq 0 \\ \begin{pmatrix} -A & -\text{diag}(\text{rad}\mathbf{b}) \\ A & -\text{diag}(\text{rad}\mathbf{b}) \end{pmatrix} \cdot u \leq \begin{pmatrix} -\text{mid}\mathbf{b} \\ \text{mid}\mathbf{b} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Замечание 1. Последнее уравнение эквивалентно:

$$\begin{cases} -Ax - \text{diag}(\text{rad}\mathbf{b})w \leq -\text{mid}\mathbf{b} \\ Ax - \text{diag}(\text{rad}\mathbf{b})w \leq \text{mid}\mathbf{b} \end{cases} \iff \begin{cases} \text{mid}\mathbf{b} - \text{diag}(\text{rad}\mathbf{b})w \leq Ax \\ Ax \leq \text{mid}\mathbf{b} + \text{diag}(\text{rad}\mathbf{b})w \end{cases} \iff \inf \tilde{\mathbf{b}} \leq Ax \leq \sup \tilde{\mathbf{b}} \quad (2.1.3)$$

Данная задача ЛП успешно решается симплекс-методом. Программной реализацией на языке Python служит метод `linprog` пакета `scipy.optimize`.

3. Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью библиотек языка Python `scipy`, `numpy` и реализации `tolsoivty` Максима Смольского. Операционная система Ubuntu 20.04.

Ссылка на исходный код лабораторной работы и отчёта находится в разделе “Приложения”.

4. Результаты

Вначале убедимся, что у исходной матрицы пустое допустимое множество. Максимальное значение распознающего функционала равно -0.201 с точностью до тысячных, а значит, решений действительно нет.

В результате работы программы получен вектор:

$$w = (0 \quad 4.767 \quad 0)^T \quad (4.0.1)$$

С помощью полученного результата исходная система была скорректирована. Распознающий функционал стал неотрицательным и достиг своего максимального значения

$$\text{tolmax} = 0.009 \quad (4.0.2)$$

в точке

$$\text{argmax} = (0.403, 0.107)^T \quad (4.0.3)$$

(с точностью до тысячных).

Итоговая ИСЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2.5 \\ 7.2 & 4.6 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [2.4, 2.9] \\ [-3.867, 5.867] \\ [3.3, 3.5] \end{pmatrix} \quad (4.0.4)$$

5. Обсуждение

В результате проделанной работы была скорректирована правая часть ИСЛАУ с точечной матрицей. Найденное решение в самом деле обеспечило непустоту допустимого множества решения, а значит, сработало корректно.

В то же время стоит отметить, что радиус интервала был увеличен очень значительно: с 0.100 до 4.867, что зачастую может быть неприемлемо в реальных задачах.

Список литературы

- [1] А. Н. Баженов. *Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры*. URL: <https://elib.spbstu.ru/dl/2/s20-76.pdf/info>.

6. Приложения

1. Репозиторий с кодом программы и кодом отчёта:

<https://github.com/kystyn/interval>

2. `tolsoivty` Максима Смольского для Python:

<https://github.com/MaximSmolskiy/tolsoivty>