

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Интервальный анализ
Отчёт по лабораторной работе №5

Выполнил:

Студент: Дамаскинский Константин

Группа: 3630102/70201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

2021 г.

Содержание

1. Постановка задачи	2
1.1. Задача 1	2
1.2. Задача 2	2
2. Теория	2
2.1. Концепция решения интервальных уравнений	2
2.2. Погружение	3
2.3. Решение ИСЛАУ с точечной матрицей с помощью погружений	5
2.4. Частичный порядок в $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$. Порядковая выпуклость. Условия раз-	
решимости ИСЛАУ	5
2.5. Субдифференциальный метод Ньютона	7
2.6. Вычисление субградиента	7
2.7. Приближённое решение ИСЛАУ с точечной прямоугольной матрицей	8
3. Реализация	8
4. Результаты	8
4.1. Задача 1	8
4.2. Задача 2	8
5. Обсуждение	11
Литература	11
6. Приложения	11

Список иллюстраций

1. $\mathbf{x}, x^{(0)}$, сумма по столбцам	10
--	----

1. Постановка задачи

1.1. Задача 1

Требуется найти формальное решение ИСЛАУ с матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.9, 1.1] & [0.9, 1.1] & [0.9, 1.1] \\ [0.9, 1.1] & [0.9, 1.1] & [0.0, 0.0] \\ [0.9, 1.1] & [0.0, 0.0] & [0.0, 0.0] \end{pmatrix} \quad (1.1.1)$$

и правой частью, содержащей неправильные интервалы:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.8, 3.2] \\ [2.2, 1.8] \\ [0.9, 1.1] \end{pmatrix} \quad (1.1.2)$$

1.2. Задача 2

Дана точечная матрица $A \in \mathbb{R}^{256 \times 36}$ и свободный столбец $b \in \mathbb{R}^{256}$.

Требуется обинтервалить вектор b , получив $\mathbf{b} \in \mathbb{KR}^{256}$, такой что

$$\mathbf{b}_k = [b_k - \varepsilon, b_k + \varepsilon] \quad (1.2.1)$$

и найти такой $\mathbf{x} \in \mathbb{KR}^{36}$, что:

$$A\mathbf{x} \subset \mathbf{b} \quad (1.2.2)$$

2. Теория

2.1. Концепция решения интервальных уравнений

Речь идёт о решении интервальных уравнений вида $\mathbf{C}x = \mathbf{d}$ в полной интервальной арифметике.

Данная задача могла бы быть решена классическими численными методами, если бы не одно обстоятельство: даже полная интервальная арифметика Каухера не является линейным пространством. Ввиду данного обстоятельства предлагается следующий подход: необходимо сформировать взаимно-однозначное отображение из арифметики Каухера в некоторое линейное пространство. Поскольку речь идёт о конечномерном случае, в качестве линейного пространства можно рассматривать пространство вещественных чисел, поскольку все конечномерные линейные пространства одной размерности изометрически изоморфны. Далее задача решается в линейном пространстве ранее изученными методами, а затем полученный результат обратно отображается в арифметику Каухера.

Ясно, что n -мерное пространство Каухера \mathbb{KR}^n должно отображаться в $2n$ -мерное евклидово пространство \mathbb{R}^{2n} ввиду природы элементов арифметики Каухера (интервалов).

Далее речь пойдёт о конкретных отображениях и сопутствующей терминологии.

2.2. Погружение

Пусть φ – некоторое отображение на интервальном пространстве, задействованное при решении задачи:

$$\varphi : \mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{KR}^n \quad (2.2.1)$$

Пусть имеется отображение:

$$i : \mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \quad (2.2.2)$$

Тогда образ данной задачи в линейном пространстве имеет вид:

$$(i \circ \varphi \circ i^{-1})(y), \quad y \in \mathbb{R}^{2n} \quad (2.2.3)$$

Поскольку отображение i должно быть обратимым, оно обязано быть биективным.

Определение 1. Биективное отображение, действующее из \mathbb{KR}^n в \mathbb{R}^{2n} , называется **погружением** в линейное пространство.

Определение 2. **Стандартным погружением** называется отображение

$$\mathbf{sti}(x) : (x_1 \ \dots \ x_n) \rightarrow (\underline{x_1} \ \dots \ \underline{x_n} \ \overline{x_1} \ \dots \ \overline{x_n}) \quad (2.2.4)$$

Оно действительно является инъективным и сюръективным, что легко проверяется по определению этих понятий [1, Лекция 11].

Кроме того, данное отображение индуцирует частичный порядок на \mathbb{R}^{2n} , что необходимо для корректного определения понятия выпуклости, используемого при построении численных методов оптимизации и решения ИСЛАУ [2, стр. 580].

Рассмотрим случай, когда оператор φ задаётся квадратной точечной матрицей Q :

$$\varphi(x) = Qx \quad (2.2.5)$$

В таком случае оператор $\mathbf{sti} \circ \varphi \circ \mathbf{sti}^{-1}$ будет являться линейным, определённым *знаково-блочной матрицей*:

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} Q^+ & Q^- \\ \hline Q^- & Q^+ \end{array} \right) \quad (2.2.6)$$

Покажем это.

Лемма 1. [2, стр. 583] *Имеет место следующее свойство умножения интервала на число:*

$$\begin{cases} q \cdot \underline{x} = q^+ \underline{x} - q^- \underline{x} \\ \overline{q \cdot \underline{x}} = -q^- \overline{x} + q^+ \overline{x} \end{cases} \quad (2.2.7)$$

где

$$q^+ = \begin{cases} q & q \geq 0 \\ 0 & q < 0 \end{cases} \quad (2.2.8)$$

$$q^- = \begin{cases} -q & q \leq 0 \\ 0 & q > 0 \end{cases} \quad (2.2.9)$$

Доказательство – по определению умножения числа на интервал в арифметике Каухера. ■

Пусть $y \in \mathbb{R}^{2n}$. Тогда:

$$\mathbf{sti}^{-1}(y) = ([-y_1, y_{n+1}] \dots [-y_n, y_{2n}]) \quad (2.2.10)$$

$$(\varphi \circ \mathbf{sti}^{-1})(y) = \begin{pmatrix} q_{11}[-y_1, y_{n+1}] + \dots + q_{1n}[-y_n, y_{2n}] \\ \vdots \\ q_{n1}[-y_1, y_{n+1}] + \dots + q_{nn}[-y_n, y_{2n}] \end{pmatrix} \quad (2.2.11)$$

Далее по лемме 1:

$$(\mathbf{sti} \circ \varphi \circ \mathbf{sti}^{-1})(y) = \begin{pmatrix} q_{11}^+ y_1 + \dots + q_{1n}^+ y_n - q_{11}^- y_{n+1} - \dots - q_{1n}^- y_{2n} \\ \vdots \\ q_{n1}^+ y_1 + \dots + q_{nn}^+ y_n - q_{n1}^- y_{n+1} - \dots - q_{nn}^- y_{2n} \end{pmatrix} = Qy \quad (2.2.12)$$

Кроме того, имеет место теорема [1, Лекция 11]:

Теорема 1. *Для точечной матрицы $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ следующие условия равносильны:*

- $Q\mathbf{x} = 0$ в интервальном пространстве \mathbb{KR}^n тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = 0$
- Матрица $Q \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, знаково-блочная для Q , является неособенной
- Неособенной является $|Q|$

Следствие 1. *Оператор φ , введённый ранее, необратим тогда и только тогда, когда его матрица является абсолютно неособенной.*

Таким образом, теперь мы можем перейти от решения ИСЛАУ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с абсолютно неособенной матрицей A к решению стандартной СЛАУ в линейном пространстве.

2.3. Решение ИСЛАУ с точечной матрицей с помощью погружений

Получим явный вид оператора, обратного к φ .

Пусть $y \in \mathbb{R}^{2n}$. Тогда:

$$(\mathbf{sti} \circ \varphi \circ \mathbf{sti}^{-1})(y) = Qy \Leftrightarrow \quad (2.3.1)$$

$$Q^{-1}y = (\mathbf{sti}^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \mathbf{sti})(y) \Leftrightarrow \quad (2.3.2)$$

$$(\mathbf{sti}^{-1} \circ Q^{-1})y = (\varphi^{-1} \circ \mathbf{sti})(y) \Leftrightarrow \quad (2.3.3)$$

$$[\mathbf{x} = \mathbf{sti}^{-1}(y), x \in \mathbb{K}\mathbb{R}^n] \Leftrightarrow \quad (2.3.4)$$

$$\varphi^{-1}(\mathbf{x}) = (\mathbf{sti}^{-1}(Q^{-1}(\mathbf{sti}(\mathbf{x})))) \quad (2.3.5)$$

Итак, перезапишем ИСЛАУ $Q\mathbf{x} = b$ её в виде: $\varphi(\mathbf{x}) = b$. Тогда $\mathbf{x} = \varphi^{-1}(b)$.
Окончательный ответ:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{sti}^{-1}(Q^{-1}(\mathbf{sti}(\mathbf{b})))) \quad (2.3.6)$$

Таким образом, мы свели решение интервальной СЛАУ к поиску обратной точечной матрицы. Однако зачастую легче решать не задачу поиска обратной матрицы, а задачу поиска решения СЛАУ: для этой задачи существует множество точных (LDR-, LU-разложение, методы вращений и отражений) и численных методов (методы простых итераций, Якоби, Зейделя). В таком случае 2.3.6 лучше представить как совокупность двух задач:

$$Qz = \mathbf{sti}(\mathbf{b}), z \in \mathbb{R}^{2n} \quad (2.3.7)$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{sti}^{-1}(z)) \quad (2.3.8)$$

2.4. Частичный порядок в $\mathbb{K}\mathbb{R}^n$. Порядковая выпуклость. Условия разрешимости ИСЛАУ

Рассмотрим следующий подход к решению ИСЛАУ. Пусть сформулирована задача: $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}$. Рассмотрим оператор:

$$\mathcal{F}(y) = \text{sti}(\mathbf{C}\text{sti}^{-1}(y) \ominus \mathbf{d}) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \quad (2.4.1)$$

Приравнивая \mathcal{F} к нулю мы получаем задачу, индуцированную погружением исходной задачи в линейное пространство.

Хорошо развиты методы решения задачи поиска корня выпуклого функционала. Однако предложенная постановка задачи составлена именно относительно отображения, действующего на конечномерном пространстве высокой размерности.

Рассмотренные ранее подходы, применимые к функционалам, как выясняется, можно применить и в этой ситуации, однако для этого необходимо перенести сопутствующую терминологию на многомерный случай.

Определение 3. Пусть $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$.

Пусть также в \mathbb{R}^q задан частичный порядок \preceq . Тогда отображение F называется **порядково выпуклым относительно \preceq** , если

$$F(\lambda u + (1 - \lambda)v) \preceq \lambda F(u) + (1 - \lambda)F(v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^p \quad \forall \lambda \in [0; 1]$$

Свойство (порядковой) выпуклости необходимо для построения ньютоновских методов. Однако получить его можно далеко не во всех случаях. Кроме того, необходимо описать механизм, задающий частичный порядок.

Введём для этого следующее понятие:

Определение 4. Будем называть квадратную интервальную матрицу размера n **построчно однородной**, если в каждой её строке все элементы являются либо только правильными интервалами, либо только неправильными.

Частичный порядок определяется построчно однородной матрицей \in следующим образом: пусть \mathcal{I}' – номера строк, в которых все интервалы являются правильными, а \mathcal{I}'' – где неправильными. Тогда $\mathbf{u} \in \mathbf{v}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{KR}^n$, если и только если:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i \subseteq \mathbf{v}_i, & i \in \mathcal{I}' \\ \mathbf{v}_i \subseteq \mathbf{u}_i, & i \in \mathcal{I}'' \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Стандартное погружение также индуцирует отношение порядка \ll на евклидовом пространстве по отношению \in .

Теперь мы обладаем необходимой терминологией и способом совместного упорядочивания интервального и евклидова пространства.

Сформулируем условия, при которых отображение \mathcal{F} будет порядково выпуклым.

Теорема 2. Если матрица \mathbf{C} обладает условием построчной однородности, то индуцированное отображение \mathcal{F} является порядково выпуклым относительно порядка \ll .

Определение 5. Пусть на \mathbb{R}^q задан частичный порядок \preceq . Пусть $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$. Тогда его **субдифференциалом** называется такое множество линейных операторов $D : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, что:

$$D(v) \preceq F(x + v) - F(x) \quad \forall v \in \mathbb{R}^p \quad (2.4.3)$$

Элементы множества D называются **субградиентом** и обозначаются $\partial_{\ll} F(x)$.

2.5. Субдифференциальный метод Ньютона

Данный метод является модификацией метода градиентного спуска, который, однако, не накладывает на отображение требования дифференцируемости, а требует лишь порядковой выпуклости.

$$x^{(k)} \leftarrow x^{(k-1)} - \tau(D^{(k-1)})^{-1} \mathcal{F}(x^{(k-1)})$$

где $D^{(k-1)} \mathcal{F}(x^{(k-1)})$ – какой-нибудь субградиент в $x^{(k-1)}$, $\tau \in [0; 1]$ – постоянный коэффициент. Алгоритм заканчивает работу, когда $\|\mathcal{F}(x^{(k)})\| < \varepsilon$.

В [2] утверждается, что при единичном τ метод даёт точный результат для полиэдральных функций, коей является \mathcal{F} , однако вариация этого коэффициента может помочь ускорить сходимость для других функций.

Для сходимости метода критично, чтобы $\mathcal{F}(x) \geq 0$. Если обеспечить выполнение этого условия на начальной итерации, то метод сойдётся. В качестве такой начальной точки подойдёт решение точечной СЛАУ:

$$(\text{mid}\mathbf{C})\tilde{x} = \text{sti}(\mathbf{d}) \quad (2.5.1)$$

([2, стр. 607])

2.6. Вычисление субградиента

Для вычисления субградиента используются формулы:

$$\partial \mathcal{F}_i = - \sum_{j=1}^n \partial(\underline{\mathbf{c}_{ij}}[-x_j, x_{j+n}]), \quad i = \overline{1, n} \quad (2.6.1)$$

$$\partial \mathcal{F}_i = \sum_{j=1}^n \partial(\overline{\mathbf{c}_{ij}}[-x_j, x_{j+n}]), \quad i = \overline{n+1, 2n} \quad (2.6.2)$$

Более детальное описание можно найти в [2] на стр. 610-613.

2.7. Приближённое решение ИСЛАУ с точечной прямоугольной матрицей

В случае переопределённой матрицы самым простым способом решения задачи будет произвольный выбор строк матрицы ИСЛАУ и соответствующих компонент правого столбца с проверкой соблюдения условий сходимости (неособенности модуля выбранной матрицы).

Можно произвести этот процесс несколько раз, так, чтобы по его окончании в решении оказались задействованы все условия. Тогда итоговое решение можно представить как пересечение всех найденных.

3. Реализация

Лабораторная работа выполнена в среде Octave в использовании портированного кода Сергея Петровича Шарого `subdiff` (см. “Приложения”). Операционная система Ubuntu 20.04.

Ссылка на исходный код лабораторной работы и отчёта находится в разделе “Приложения”.

4. Результаты

4.1. Задача 1

Субдифференциальный метод Ньютона вернул следующий результат:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1.000 \\ [1.444, 0.636] \\ [0.667, 1.273] \end{pmatrix} \quad (4.1.1)$$

Решение производилось с точностью до третьего знака. Невязка решения равна нулю (найденное решение является точным).

Замечание 1. Подразумевается ненулевая невязка при подстановке решения вплоть до последнего полученного знака. Однако предъявляется решение именно вплоть до третьего знака, поскольку запрос в методе был именно таковым. Однако, как мы знаем из теоретического раздела, данный метод отыскивает точное решение полиэдральных функций, поэтому полученный результат является отнюдь не удивительным, а закономерным.

4.2. Задача 2

В качестве начального вектора был взят вектор, приложенный в письме (см. 6).

Сопутствующие задачи с квадратными матрицами были решены с помощью метода, использующего знаково-блочные матрицы. В результате был получен следующий вектор:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [0.558, 0.442] \\ [0.697, 0.802] \\ [1.104, 0.895] \\ [0.960, 1.039] \\ [0.751, 0.748] \\ [0.282, 0.717] \\ [0.374, 0.125] \\ [0.523, 0.476] \\ [0.692, 0.807] \\ [0.695, 0.804] \\ [0.469, 0.530] \\ [0.267, 0.232] \\ [0.077, -0.077] \\ [0.321, 0.178] \\ [0.752, 0.247] \\ [0.539, 0.460] \\ [0.408, 0.091] \\ [0.155, -0.155] \\ [2.194, -2.194] \\ [0.389, 0.110] \\ [0.880, 0.119] \\ [0.493, 0.506] \\ [0.673, -0.173] \\ [0.269, -0.269] \\ [0.282, 0.217] \\ [0.629, 0.370] \\ [0.816, 0.683] \\ [0.745, 0.754] \\ [0.390, 0.609] \\ [0.078, 0.421] \\ [0.527, 0.472] \\ [1.382, 0.117] \\ [1.149, 0.850] \\ [1.113, 0.886] \\ [0.795, 0.704] \\ [0.280, 0.719] \end{pmatrix} \quad (4.2.1)$$

Правый столбец сгенерирован следующим образом: матрица из файла `matrix_n_1` помноженная на вектор $x^{(0)}$ (см. “Приложения”), определяет `midb`. Вектор объ-

интерваливается по формуле:

$$\mathbf{b}_i = [\text{mid}\mathbf{b}_i - 0.05 \cdot (i \bmod 7 + 1), \text{mid}\mathbf{b}_i + 0.05 \cdot (i \bmod 7 + 1)] \quad (4.2.2)$$

Найденное решение удовлетворяет 144 уравнениям из 256.

Начальный вектор $x^{(0)}$ пересекается с итоговым результатом по 17 компонентам из 36.

Произведение матрицы на вектор-решение не может поместиться на одну страницу данного отчёта, поэтому оно представлено в отдельном файле. Ссылку можно найти в приложениях.

На следующем графике демонстрируется, как соотносятся компоненты найденного решения и оригинального вектора. Абсцисса соответствует номеру компоненты, ордината – значению.

Также отражена сумма по столбцам с соответствующими номерами. Этот график представлен в логарифмическом виде. Таким образом, отрицательные числа соответствуют суммам, меньшим единицы.

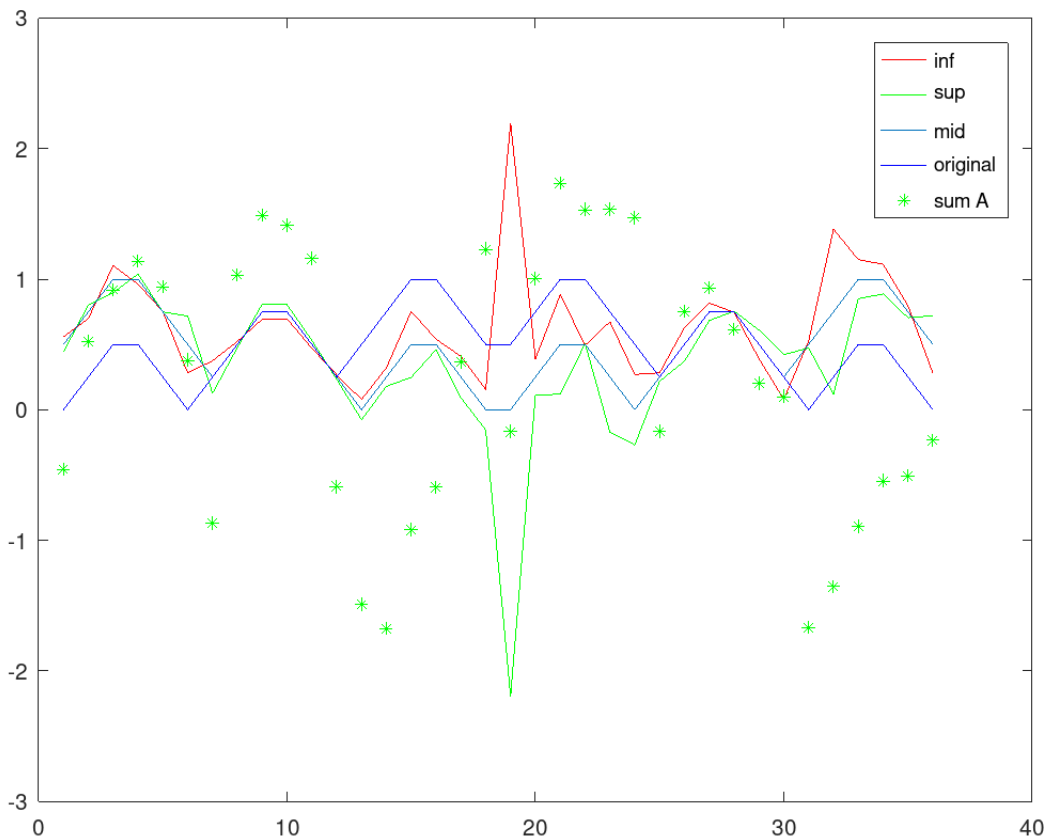


Рис. 1. $x, x^{(0)}$, сумма по столбцам

5. Обсуждение

В результате решения обеих задач были найдены формальные решения ИСЛАУ. Была экспериментально проверена сходимость субдифференциального метода Ньютона к точному решению в случае полиэдральной функции. Также была проверена путём подстановки корректность найденного формального решения второй задачи. Представленное решение не является корректным для всех компонент, поскольку, во-первых, ИСЛАУ значительно переопределена и точного решения невозможно получить в принципе, а, во-вторых, благодаря высокому числу обусловленности построенной квадратной матрицы: его порядок составляет 10^{11} , что также негативно сказывается на вычислительной точности.

Из приведённого графика видно, что форма найденного решения в целом повторяет форму центра вектора интервалов свободного столбца, что позволяет судить о состоятельности представленного эвристического метода.

Кроме того видно, что существует корреляция между суммой элементов в матрице и точностью найденного решения. В большинстве своём найденное решение совпало с серединой модельного, когда сумма элементов была большой. В случае де, когда сумма элементов меньше единицы, решение гарантированно оказывалось неудачным.

Список литературы

- [1] А. Н. Баженов. *Лекции по интервальному анализу*. 2020.
- [2] С. П. Шарый. *Конечномерный интервальный анализ*. Издательство “XYZ”, 2020. URL: <http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf>.

6. Приложения

- 1. Репозиторий с кодом программы и кодом отчёта:
<https://github.com/kystyn/interval>
- 2. Вектор \mathbf{Ax} :
<https://github.com/kystyn/interval/tree/master/src/subdiff/Ax.txt>
- 3. Репозиторий с кодом программы и кодом отчёта:
<https://github.com/kystyn/interval>
- 4. subdiff Сергея Петровича Шарого для SciCodes:
<http://www.nsc.ru/interval/Programing/SciCodes/subdiff.sci>