Санкт-Петербургский политехнический университет имени
Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра прикладной математики

Интервальный анализ
Отчёт по лабораторной работе №1

Выполнил:

Студент: Дамаскинский Константин
Группа: 3630102/70201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент
Баженов Андрей Николаевич

2020 г.

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1. Постановка задачи

1.1. Задача 1

Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1.1}$$

Пусть теперь все элементы матрицы a_{ij} имеют радиус ε:

$$\operatorname{rad} \mathbf{a}_{ij} = \varepsilon \tag{1.1.2}$$

Тогда

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] & [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \\ [1.1-\varepsilon, 1.1+\varepsilon] & [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \end{pmatrix} \tag{1.1.3}$$

Требует определить, при каком радиусе ε матрица (1.1.3) содержит особенные матрицы.

1.2. Задача 2

Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & [0,\varepsilon] & \dots & [0,\varepsilon] \\ [0,\varepsilon] & 1 & \dots & [0,\varepsilon] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [0,\varepsilon] & [0,\varepsilon] & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2.1}$$

Требует определить, при каком радиусе ε матрица (1.2.1) содержит особенные матрицы.

2. Теория

Определение 1. Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ называется **неособенной**, если неособенны все точечные матрицы $A \in \mathbf{A}$.

Определение 2. Если же все точечные матрицы являются особенными, то $\mathbf{A}$ называется **особенной**.

Теорема 1. ***Критерий Баумана*** *[1]. Интервальная матрица неособенна тогда и только тогда, когда определители всех её крайних матриц имеют одинаковый знак.*

Теорема 2. ***Признак Бекка*** *[1].*

Пусть $\operatorname{mid} \mathbf{A}$ неособенна ($\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$) и

$$\rho(|(\text{mid }\mathbf{A})^{-1}| \cdot \text{rad }\mathbf{A}) < 1$$

Тогда $\mathbf{A}$ неособенна.

3. Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью языка программирования Python с использованием библиотеки numpy в редакторе vim. Операционная система Ubuntu 20.04.

Ссылка на исходный код лабораторной работы и отчёта находится в разделе "Приложения".

4. Результаты

4.1. Задача 1

Воспользуемся критерием Баумана. Ясно, что для определения знаков всех крайних матриц достаточно найти наименьшее и наибольшее возможное значение точечного определителя матрицы $\mathbf{A}$:

$$\det\mathbf{A} = (1 \pm \varepsilon)^2 - (1.1 \pm \varepsilon)(1 \pm \varepsilon) \tag{4.1.1}$$

Разность достигает **наибольшего** значения, когда уменьшаемое достигает **наибольшего** значения, а вычитаемое **наименьшего**.

$$\max \det\mathbf{A} = \varepsilon^2 + 4.1\varepsilon - 0.1 \tag{4.1.2}$$

Разность достигает **наименьшего** значения, когда уменьшаемое достигает **наименьшего** значения, а вычитаемое **наибольшего**.

$$\min \det\mathbf{A} = -2\varepsilon^2 - 2.1\varepsilon - 0.1 \tag{4.1.3}$$

Видно, что минимум строго отрицательный, а значит, нам необходимо определить из 4.1.2, при каких ε наибольший определитель имеет отрицательное значение.

Решая квадратное уравнение, получаем:

$$\varepsilon < \frac{-4.1 + \sqrt{4.1^2 + 0.4}}{2} \approx 0.024 \tag{4.1.4}$$

Итак, матрица особенна, когда $\varepsilon < 0.024$, следовательно, неособенна, когда $\varepsilon > 0.024$.

4.2. Задача 2

Решение данной задачи основывается на использовании признака Бекка совместно с бинарным поиском: примем сначала интервал неопределённости достаточно большим, чтобы $\mathbf{A}$ содержала особенные матрицы (скажем, скажем, $[0; 200]$). ε (то есть текущее приближение его нижней границы) вычисляется как середина интервала неопределённости. Далее, если при текущем ε результат применения признака Бекка отрицательный (то есть матрица неособенна), то сдвигаем правую границу поиска на текущий ε. Иначе сдвигаем левую. Вычисления производились с точностью до третьего знака после запятой. Результаты для разных размерностей матрицы приведены в следующей таблице:

Размерность	ε
2	1.000
3	0.593
4	0.419
5	0.324
6	0.262

Таблица 1. Ответ ко второй задаче. Признак Бекка

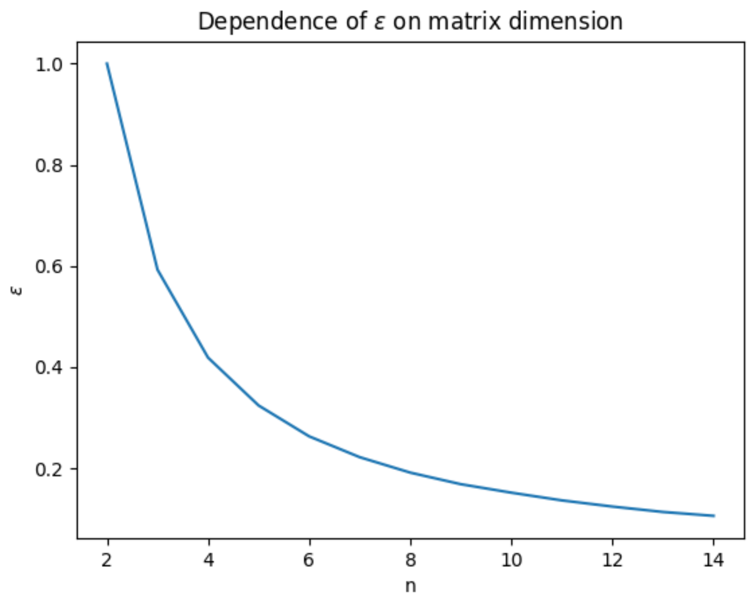

Рис. 1. Зависимость параметра ε от размерности матрицы

Замечание 1. Результаты следует интерпретировать как: “При ε бо́льших, чем в таблице, матрица является особенной”.

5. Обсуждение

Последовательное решение первой и второй задач наглядно демонстрирует область применения различных критериев. В задачах сравнительно высокой размерности критерий Баумана применять практически нерационально ввиду сверхэкспоненциального роста алгоритмической сложности задачи ($|\mathrm{vert}\mathbf{A}| = 2^{n^2}$). В то же время, признак Бекка косвенно является приближённым ввиду численного вычисления обратной матрицы и матричного спектра, что является недостатком метода. Из приведённого графика 4.2 видно, что при росте размерности матрицы начало луча, при попадании ε в который матрица становится особенной, становится всё ближе к нулю, то есть получить вырожденную матрицу становится проще.

Список литературы

[1] А. Н. Баженов. *Лекции по интервальному анализу.*

6. Приложения

1. Репозиторий с кодом программы и кодом отчёта:
   https://github.com/kystyn/interval