Санкт-Петербургский политехнический университет имени Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра прикладной математики

Интервальный анализ
Отчёт по лабораторной работе №2

Выполнил:

Студент: Дамаскинский Константин
Группа: 3630102/70201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент
Баженов Андрей Николаевич

2020 г.

Содержание

1. Постановка задачи . . . 2
   1.1. Задача 1 . . . 2
   1.2. Задача 2 . . . 2

2. Теория . . . 2
   2.1. Описание алгоритма GlobOpt . . . 2
   2.2. Функция Растригина . . . 2
   2.3. Функция Бута . . . 2

3. Реализация . . . 3

4. Результаты . . . 3
   4.1. Задача 1 . . . 3
   4.2. Задача 2 . . . 4

5. Обсуждение . . . 5

Литература . . . 5

6. Приложения . . . 5

Список иллюстраций

1. Функция Бута . . . 3
2. Зависимость параметра ε от размерности матрицы . . . 5

Список таблиц

1. Ответ ко второй задаче. Признак Бекка . . . 4

1. Постановка задачи

Для демонстрации интервальной глобальной оптимизации требуется использовать функцию [**globopt**]:

$$function[Z, WorkList] = globopt0(X) \tag{1.0.1}$$

Данная функция возвращает точку глобального экстремума Z и рабочий список $WorkList$.

1.1. Задача 1

Рассмотреть пример из лекционного материала (функцию Растригина). Построить рабочий список и график сужения интервала.

1.2. Задача 2

Взять пример с сайта [**optfunc**]. Изучить сходимость метода.

2. Теория

2.1. Описание алгоритма GlobOpt

Задача глобальной оптимизации состоит в поиске точки глобального минимума целевой функции $f : \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ с помощью её интервального сужения $\mathbf{f} : \mathbb{IX} \to \mathbb{IR}$ с наперёд заданной точностью (шириной выходного интервала): $\mathrm{wid}\, \mathbf{f}(\mathbf{X}^*) < \varepsilon$.

Алгоритм [**globopt**] работает по принципу половинного деления исходного бруса по некоторым координатам с записью пары "(аргумент; значение" в **рабочий список**. В наивной версии производятся все возможные половинные деления исходного бруса, однако достаточно рассекать только те, на которых достигаются нижний и верхний концы интервальной оценки области значений функции.

2.2. Функция Растригина

Функция задаётся следующим образом:

$$f_R = x^2 + y^2 - \cos(18x) - \cos(18y) \tag{2.2.1}$$

Достигает глобального минимума в точке $x^* = 0; 0$. $f_R(x^*) = -2$.

2.3. Функция Бута

Функция задаётся следующим образом:

$$f(x, y) = (x + 2y - 7)^2 + (2x + y - 5)^2 \tag{2.3.1}$$

Достигает глобального минимума в точке $x^* = 1; 30$. $f_R(x^*) = 0$.

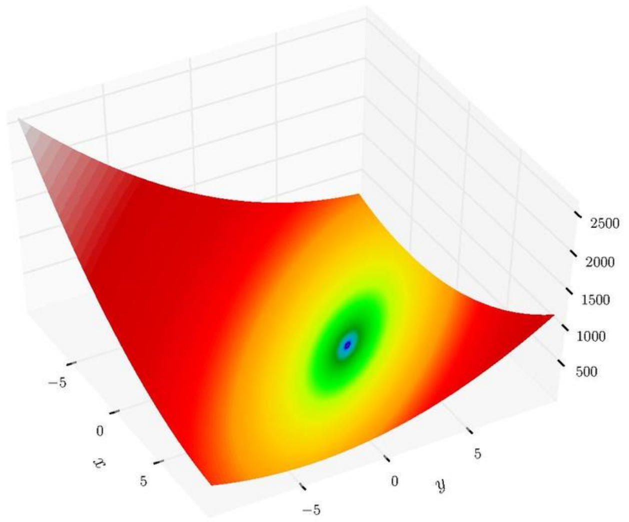

Рис. 1. Функция Бута

3. Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью языка программирования Python с использованием библиотеки numpy в редакторе vim. Операционная система Ubuntu 20.04.

Ссылка на исходный код лабораторной работы и отчёта находится в разделе “Приложения”.

4. Результаты

4.1. Задача 1

Воспользуемся критерием Баумана. Ясно, что для определения знаков всех крайних матриц достаточно найти наименьшее и наибольшее возможное значение точечного определителя матрицы **A**:

$$\det\mathbf{A} = (1 \pm \varepsilon)^2 - (1.1 \pm \varepsilon)(1 \pm \varepsilon) \tag{4.1.1}$$

Разность достигает **наибольшего** значения, когда уменьшаемое достигает **наибольшего** значения, а вычитаемое **наименьшего**.

$$\max\det\mathbf{A} = \varepsilon^2 + 4.1\varepsilon - 0.1 \tag{4.1.2}$$

Разность достигает **наименьшего** значения, когда уменьшаемое достигает **наименьшего** значения, а вычитаемое **наибольшего**.

$$\min \det \mathbf{A} = -2\varepsilon^2 - 2.1\varepsilon - 0.1 \tag{4.1.3}$$

Видно, что минимум строго отрицательный, а значит, нам необходимо определить из 4.1.2, при каких ε наибольший определитель имеет отрицательное значение.

Решая квадратное уравнение, получаем:

$$\varepsilon < \frac{-4.1 + \sqrt{4.1^2 + 0.4}}{2} \approx 0.024 \tag{4.1.4}$$

Итак, матрица особенна, когда $\varepsilon < 0.024$, следовательно, неособенна, когда $\varepsilon > 0.024$.

4.2. Задача 2

Решение данной задачи основывается на использовании признака Бекка совместно с бинарным поиском: примем сначала интервал неопределённости достаточно большим, чтобы $\mathbf{A}$ содержала особенные матрицы (скажем, скажем, $[0; 200]$). ε (то есть текущее приближение его нижней границы) вычисляется как середина интервала неопределённости. Далее, если при текущем ε результат применения признака Бекка отрицательный (то есть матрица неособенна), то сдвигаем правую границу поиска на текущий ε. Иначе сдвигаем левую. Вычисления производились с точностью до третьего знака после запятой. Результаты для разных размерностей матрицы приведены в следующей таблице:

Размерность	ε
2	1.000
3	0.593
4	0.419
5	0.324
6	0.262

Таблица 1. Ответ ко второй задаче. Признак Бекка

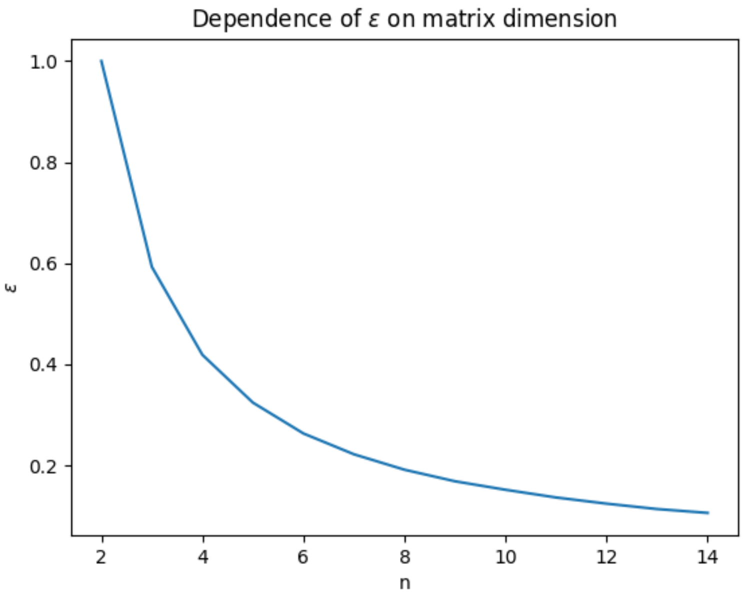

Рис. 2. Зависимость параметра ε от размерности матрицы

Замечание 1. Результаты следует интерпретировать как: “При ε бо́льших, чем в таблице, матрица является особенной”.

5. Обсуждение

Последовательное решение первой и второй задач наглядно демонстрирует область применения различных критериев. В задачах сравнительно высокой размерности критерий Баумана применять практически нерационально ввиду сверхэкспоненциального роста алгоритмической сложности задачи ($|\mathrm{vert}\mathbf{A}| = 2^{n^2}$). В то же время, признак Бекка косвенно является приближённым ввиду численного вычисления обратной матрицы и матричного спектра, что является недостатком метода. Из приведённого графика 4.2 видно, что при росте размерности матрицы начало луча, при попадании ε в который матрица становится особенной, становится всё ближе к нулю, то есть получить вырожденную матрицу становится проще.

6. Приложения

1. Репозиторий с кодом программы и кодом отчёта:
   https://github.com/kystyn/interval