Санкт-Петербургский политехнический университет имени
Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра прикладной математики

Интервальный анализ
Отчёт по лабораторной работе №4

Выполнил:

Студент: Дамаскинский Константин
Группа: 3630102/70201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент
Баженов Александр Николаевич

2021 г.

Содержание

1. Постановка задачи

Требуется решить недоопределённую интервальную систему линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) с матрицей 2×3 и переопределённую ИСЛАУ с матрицей 3×2. Используемые матрицы должны совпадать с точностью до транспонирования. Необходимо найти допусковое множество решений, оценку вариабельности решения.

Для случая 3×2 требуется построить график распознающего функционала. Построить трёхмерный образ допускового множества.

1.1. Конкретизация задачи

Была рассмотрена матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2.5 \\ 7.2 & 4.6 \end{pmatrix} \tag{1.1.1}$$

Правый столбец:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.4, 2.9] \\ [0.9, 1.1] \\ [3.3, 3.5] \end{pmatrix} \tag{1.1.2}$$

2. Теория

Напомним, распознающий функционал имеет вид:

$$\mathrm{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \le i \le m} \left\{ \mathrm{rad}\mathbf{b}_i - \left| \mathrm{mid}\mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\} \tag{2.0.1}$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда x принадлежит допусковому множество тогда и только тогда, когда $Tol(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \geq 0$.*

Нетрудно заметить, что в случае неразрешимости интервальной системы одним из простейших способов коррекции системы будет расширение интервалов свободного столбца: повышая радиус интервала, мы увеличиваем значение распознающего функционала. Таким образом, можно увеличить интервал настолько, чтобы обеспечить неотрицательность функционала.

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [\mathrm{mid}\ \mathrm{b}_1 - \mathrm{rad}\ \mathrm{b}_1, \mathrm{mid}\ \mathrm{b}_1 + \mathrm{rad}\ \mathrm{b}_1] \\ [\mathrm{mid}\ \mathrm{b}_2 - \mathrm{rad}\ \mathrm{b}_2, \mathrm{mid}\ \mathrm{b}_2 + \mathrm{rad}\ \mathrm{b}_2] \\ [\mathrm{mid}\ \mathrm{b}_3 - \mathrm{rad}\ \mathrm{b}_3, \mathrm{mid}\ \mathrm{b}_3 + \mathrm{rad}\ \mathrm{b}_3] \end{pmatrix} \to$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} [\text{mid b}_1 - w_1 \text{rad b}_1, \text{mid b}_1 + w_1 \text{rad b}_1] \\ [\text{mid b}_2 - w_2 \text{rad b}_2, \text{mid b}_2 + w_2 \text{rad b}_2] \\ [\text{mid b}_3 - w_3 \text{rad b}_3, \text{mid b}_3 + w_3 \text{rad b}_3] \end{pmatrix}$$

При этом преследуется следующая цель: масштабирование интервала должно быть минимальным в определённом смысле.

2.1. Интервальная регуляризация

В этом разделе речь пойдёт о методе, который позволяет провести корректировку ИСЛАУ посредством решения задачи линейного программирования – l_1-*регуляризации* [1].

Минимизируется первая норма вектора $w = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3_+$: $\|w\|_1 \to \min$.

Ясно, что при таком подходе нельзя строить задачу оптимизации с непосредственным использованием распознающего функционала ввиду его нелинейности.

Будем опираться на определение допускового множества решений напрямую: требуется, чтобы найденный вектор x при действии на него оператором A попал в интервал $\tilde{\mathbf{b}}$.

Итак, требуется:

$$\begin{cases} \exists x \in \mathbb{R}^2 : A \cdot x \in \tilde{\mathbf{b}} \\ \|w\|_1 = w_1 + w_2 + w_3 \to \min \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Введём $u = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}$. Тогда общий вид задачи ЛП перезаписывается следующим образом:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot u \; (== \|w\|_1) \to \min\limits_u \\ u_{4,5,6} \geq 0 \\ \begin{pmatrix} -A & -\text{diag}(\text{rad}\mathbf{b}) \\ A & -\text{diag}(\text{rad}\mathbf{b}) \end{pmatrix} \cdot u \leq \begin{pmatrix} -\text{mid}\mathbf{b} \\ \text{mid}\mathbf{b} \end{pmatrix} \end{cases} \tag{2.1.2}$$

Замечание 1. Последнее уравнение эквивалентно:

$$\begin{cases} -Ax - \text{diag}(\text{rad}\mathbf{b})w \leq -\text{mid}\mathbf{b} \\ Ax - \text{diag}(\text{rad}\mathbf{b})w \leq \text{mid}\mathbf{b} \end{cases} \iff \begin{cases} \text{mid}\mathbf{b} - \text{diag}(\text{rad}\mathbf{b})w \leq Ax \\ Ax \leq \text{mid}\mathbf{b} + \text{diag}(\text{rad}\mathbf{b})w \end{cases} \iff$$

$$\inf \tilde{\mathbf{b}} \leq Ax \leq \sup \tilde{\mathbf{b}} \tag{2.1.3}$$

Данная задача ЛП успешно решается симплекс-методом. Программной реализацией на языке Python служит метод `linprog` пакета `scipy.optimize`.

3. Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью библиотек языка Python `scipy`, `numpy` и реализации `tolsolvty` Максима Смольского. Операционная система Ubuntu 20.04.

Ссылка на исходный код лабораторной работы и отчёта находится в разделе "Приложения".

4. Результаты

Вначале убедимся, что у исходной матрицы пустое допусковое множество. Максимальное значение распознающего функционала равно

$$\texttt{tolmax = -0.201} \tag{4.0.1}$$

с точностью до тысячных, а значит, решений действительно нет.

В результате работы программы получен вектор:

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 4.767 & 0 \end{pmatrix}^T \tag{4.0.2}$$

С помощью полученного результата исходная система была скорректирована. Максимум распознающего функционала стал неотрицательным и достиг значения

$$\texttt{tolmax = 0.009} \tag{4.0.3}$$

в точке

$$\texttt{argmax = (0.403, 0.107)}^T \tag{4.0.4}$$

(с точностью до тысячных).

Итоговая ИСЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2.5 \\ 7.2 & 4.6 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [2.4, 2.9] \\ [2.923, 3.876] \\ [3.3, 3.5] \end{pmatrix} \tag{4.0.5}$$

5. Обсуждение

В результате проделанной работы была скорректирована правая часть ИСЛАУ с точечной матрицей. Найденное решение в самом деле обеспечило непустоту доускового множества решения, а значит, сработало корректно.

В то же время стоит отметить, что радиус интервала был увеличен очень значительно: с `0.100` до `0.467`, что зачастую может быть неприемлемо в реальных задачах.

Произведём простейшую оценку корректности полученного результата. Радиусы правой части составляют:

$$\mathrm{rad}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}^T \tag{5.0.1}$$

.

Значение максимума распознающего функционала в исходной системе равно приблизительно -0.2. Значит, используя жадный подход, можно расширить все радиусы на 0.2 и гарантированно достичь неотрицательности распознающего функционала и, следовательно, непустоты допускового множества решений. Таким образом, жадный вектор масштабных коэффициентов:

$$\mathbf{w_{greedy}} = \begin{pmatrix} \frac{0.25+0.2}{0.25} & \frac{0.1+0.2}{0.1} & \frac{0.1+0.2}{0.1} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1.8 & 3 & 3 \end{pmatrix}^T \tag{5.0.2}$$

и его норма: $\|\mathbf{w_{greedy}}\|_1 = 7.8$

Найденное симплекс-методом решение оптимальнее жадного практически в два раза (в смысле l_1-нормы).

Список литературы

[1] А. Н. Баженов. *Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры*. URL: `https://elib.spbstu.ru/dl/2/s20-76.pdf/info`.

6. Приложения

1. Репозиторий с кодом программы и кодом отчёта:

   https://github.com/kystyn/interval

2. `tolsolvty` Максима Смольского для Python:

   https://github.com/MaximSmolskiy/tolsolvty