Санкт-Петербургский политехнический университет имени Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра прикладной математики

Интервальный анализ
Отчёт по лабораторной работе №2

Выполнил:

Студент: Дамаскинский Константин
Группа: 3630102/70201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент
Баженов Андрей Николаевич

2020 г.

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1. Постановка задачи

Для демонстрации интервальной глобальной оптимизации требуется использовать функцию [1]:

$$function[Z, WorkList] = globopt0(X) \tag{1.0.1}$$

Данная функция возвращает точку глобального экстремума Z и рабочий список $WorkList$.

1.1. Задача 1

Рассмотреть пример из лекционного материала (функцию Растригина). Построить рабочий список и график сужения интервала.

1.2. Задача 2

Взять пример с сайта [2]. Изучить сходимость метода.

2. Теория

2.1. Описание алгоритма GlobOpt

Задача глобальной оптимизации состоит в поиске точки глобального минимума целевой функции $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ с помощью её интервального расширения $\mathbf{f} : \mathbb{IX} \to \mathbb{IR}$ с наперёд заданной точностью (шириной выходного интервала): $\mathrm{wid}\, \mathbf{f}(\mathbf{X}^*) < \varepsilon$.

Алгоритм [1] работает по принципу половинного деления исходного бруса по некоторым координатам с записью пары "(аргумент; значение)" в **рабочий список**. В наивной версии производятся все возможные половинные деления исходного бруса, однако достаточно рассекать только те, на которых достигаются нижний и верхний концы интервальной оценки области значений функции.

2.2. Функция Растригина

Функция задаётся следующим образом:

$$f_R = x^2 + y^2 - \cos(18x) - \cos(18y) \tag{2.2.1}$$

Достигает глобального минимума в точке $x^* = (0; 0)$. $f_R(x^*) = -2$.

2.3. Функция Бута

Функция задаётся следующим образом:

$$f(x,y) = (x+2y-7)^2 + (2x+y-5)^2 \tag{2.3.1}$$

Достигает глобального минимума в точке $x^* = (1;30)$. $f_R(x^*) = 0$.

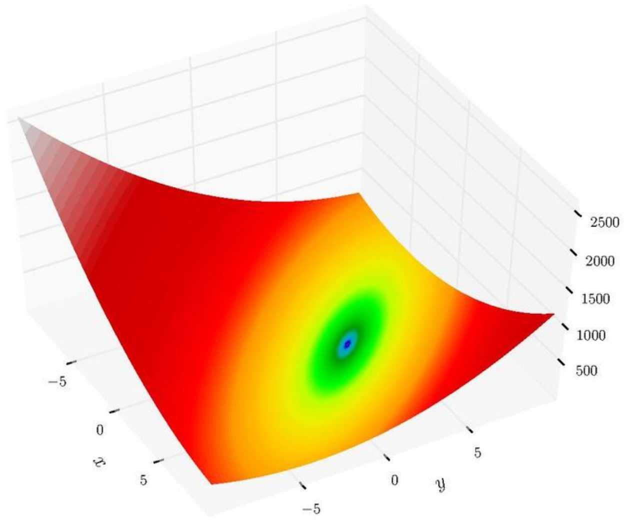

Рис. 1. Функция Бута

3. Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью математического пакета Octave. Операционная система Ubuntu 20.04.

Ссылка на исходный код лабораторной работы и отчёта находится в разделе “Приложения”.

4. Результаты

4.1. Задача 1

На следующем графике показана зависимость диаметра текущего бруса от номера итерации (график сужения):

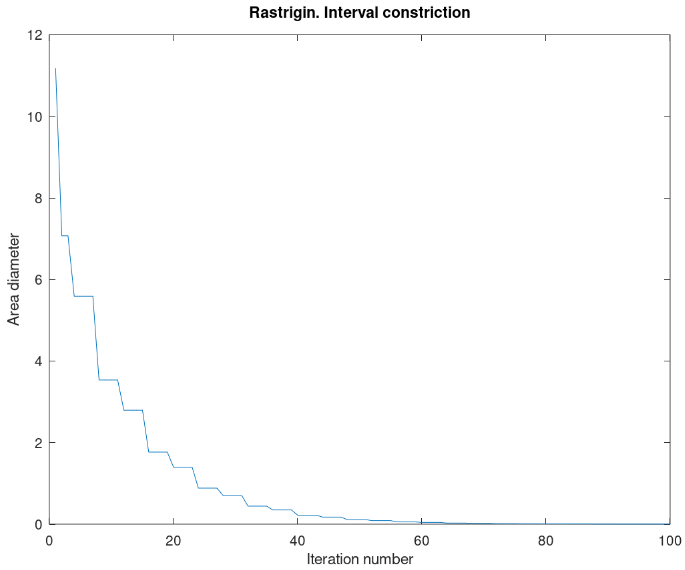

Рис. 2. Функция Растригина. Зависимость диаметра от номера итерации

Для решения данной задачи в функцию GlobOpt0 была добавлена возможность сохранять список диаметров брусов. Кроме того, для удобства использования в GlobOpt0 передаётся указатель на целевую минимизируемую функцию.

На данном рисунке показана траектория центров бруса:

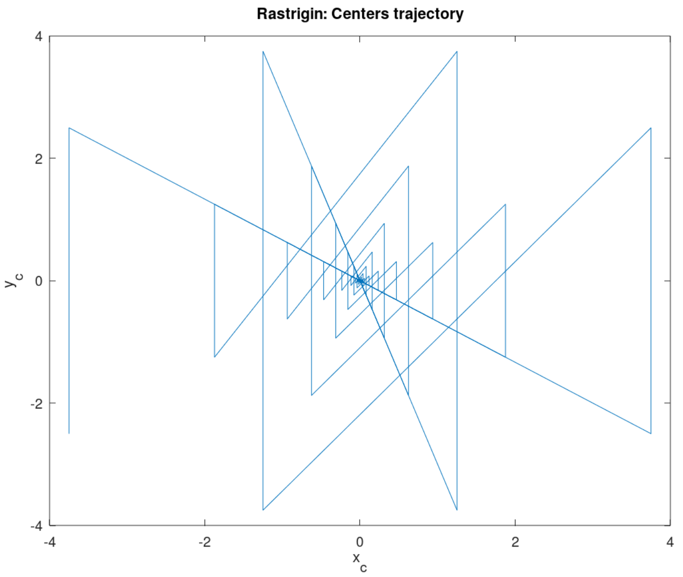

Рис. 3. Функция Растригина. Траектория центров брусов

4.2. Задача 2

На следующем графике показана зависимость расстояния от текущего решения до истинного от номера итерации в полулогарифмических координатах (график сходимости):

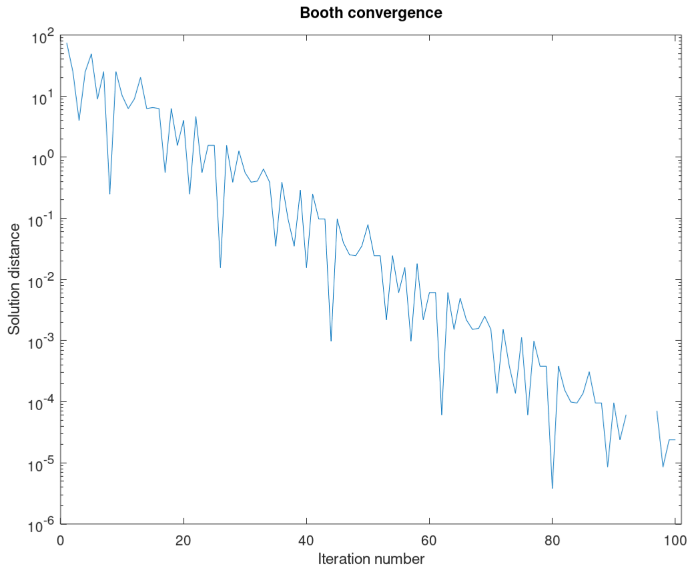

Рис. 4. Функция Бута. График сходимости

Также в ходе написания обсуждения был построен аналогичны график для функции Растригина:

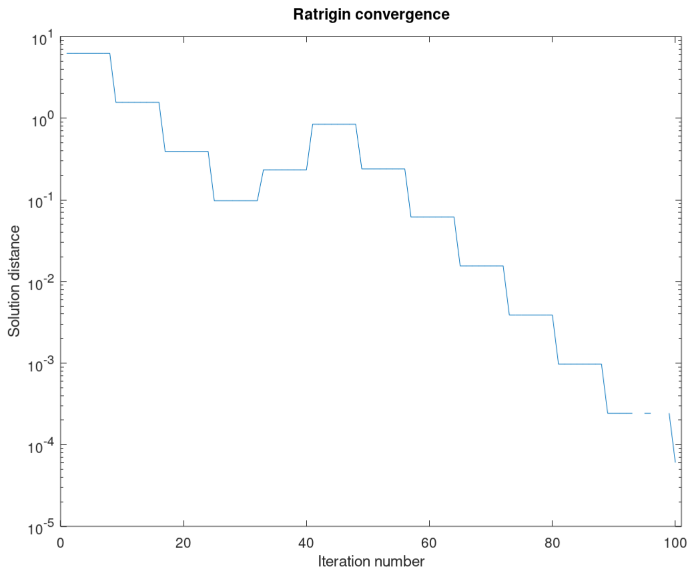

Рис. 5. Функция Растригина. График сходимости

На данном рисунке показана траектория центров бруса и линии уровня функции Бута:

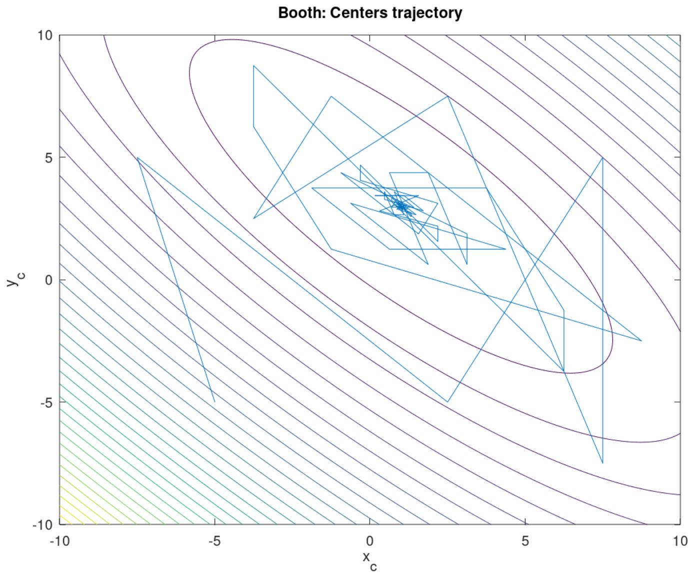

Рис. 6. Функция Бута. Траектория центров брусов. Линии уровня

5. Обсуждение

Результаты решения первой задачи являются ожидаемыми: размер бруса уменьшается с каждой итерацией. Результаты решения второй задачи более интересны: видна тенденция к экспоненциальной сходимости.

Наблюдается следующее свойство: результат, который был достигнут на шестой итерации (первый “большой выброс вниз”), становится стабильным (то есть алгоритм не имеет итераций с более поздним номером, доставляющих результат хуже данного) только приблизительно на сороковой итерации работы алгоритма, причём такие выбросы происходят регулярно (раз в двадцать итераций).

После обнаружения этого свойства был построен такой же график для функции Растригина. Из полученного результата (см. 4.2) можно сделать вывод, что описанное свойство скорее связано со свойствами функции, нежели алгоритма, поскольку сходимость на функции Растригина имеет абсолютно иную форму: начиная с пятидесятой итерации метод не ухудшает результат.

Разрывы в графиках связаны с тем, что значение по оси ординат достигло области машинного нуля, поэтому не смогло быть корректно прологарифмировано.

На рисунках 4.1 и 4.2 видно, что центры брусов не выходят за начальный диапазон значений, однако также хорошо видно, особенно у функции Бута, что сходиться к точке минимума центры начинают не сразу, а начиная с некоторой итерации, что ещё раз подтверждает выводы, сделанные при анализе графиков сходимости. Также видно, что направление спуска является отнюдь не оптимальным. Более того, совершенно нормальной является ситуация, когда очередная итерация метода даёт худший результат, чем предыдущая.

Список литературы

[1] *GlobOpt0*. URL: http://www.nsc.ru/interval/Programing/MCodes/globopt0.m.
[2] *Функции для оптимизации*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Test_functions_for_optimization.

6. Приложения

1. Репозиторий с кодом программы и кодом отчёта:

   https://github.com/kystyn/interval