Funciones a valores vectoriales

#funcionesVectoriales

Avanzaremos ahora en el estudio del movimiento de una partícula en el espacio cuya posición está dada por las funciones coordenadas:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Para cada valor del parámetro t definimos un vector $\vec{r}$ cuyas componentes son las coordenadas $x(t), y(t), z(t)$ al que llamaremos vector de posición de la curva parametrizada. Esto es:

$$\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$$

Movimiento Rectilíneo Uniforme

Como un primer ejemplo consideremos dos puntos en el espacio $A(1, 0 - 3)$ y $B(2, -1, 6)$ y sea L la recta que pasa por esos puntos. Podemos escribir la ecuación vectorial de L:

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}$$

Para diferentes valores de t obtenemos diferentes puntos P sobre la recta.

Pensemos ahora que una partícula se está moviendo sobre la recta L y supongamos que la ecuación nos informa en qué punto de L se encuentra la partícula en el instante t. El vector de posición es:

$$r(t) = t\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}$$

Desplazamiento:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t1) - \mathbf{r}(t0) = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$$

Velocidd media:

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t1) - \mathbf{r}(t0)}{t1 - t0} = \overrightarrow{AB}$$

La derivada de una función vectorial

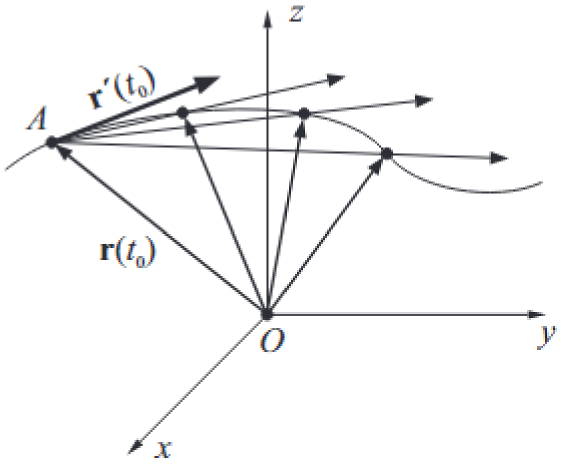
Definición

Para una función vectorial cualquiera $r(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ se define su derivada como el vector:

$$r\prime(t) = \langle x\prime(t), y\prime(t), z\prime(t) \rangle$$

siempre que las componentes sean funciones derivables. Cuando $r(t)$ es una función de posición, el vector

$v(t) = r\prime(t)$ es el vector velocidad.



Definición

Dada una función de posición $r(t)$, llamamos *rapidez* al módulo del vector velocidad, es decir, rapidez

$$= |v(t)| = |r\prime(t)|$$

La aceleración es la derivada de la velocidad

$$a(t) = r\prime\prime(t)$$

Resumen

Rumiendo:

Una función vectorial es una función que a cada número real de su dominio le asocia un vector (del plano o del espacio).

Las funciones componentes de una función vectorial pueden verse como las funciones coordenadas de una curva parametrizada. De la misma forma dada una curva parametrizada sus coordenadas dan origen a una función vectorial.

La “mirada vectorial” es adecuada para estudiar el movimiento de un objeto en el plano o en el espacio.

Una función vectorial $r(t)$ puede derivarse componente a componente; al hacerlo se obtiene una nueva función vectorial $r\prime(t)$. Este último vector -si es diferente de 0- es tangente a la curva que es imagen de $r(t)$, para cada valor de t.

Si pensamos en una función vectorial $r(t)$ como el vector de posición de una partícula que se mueve en el plano o en el espacio, $r\prime(t)$ es la velocidad de la partícula en el instante t. La derivada segunda $r\prime\prime(t)$ se interpreta como la aceleración de la partícula en el instante t.

Observación

La notación de *Leibniz* para la derivada de una función de una variable es la siguiente:

$$f'(t) = \frac{df}{dt}$$

También usaremos la notación de Leibniz para la derivada de una función vectorial, de manera que:

$$\frac{dr}{dt} = r'(t)$$