関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $x\in\mathbb{R}$ で連続であることは,

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{|x-y|<\delta}|f(y)-f(x)|=0 \tag{0.1}$$

となるための必要十分条件であることを示したい.

まず,十分性を示す.任意の $\epsilon>0$ をとる.f が x で連続だから,

$$\exists\delta_0>0, |x-y|<\delta_0 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon \tag{0.2}$$

となる.ここで,$\gamma=\delta_0$ とする.この時,$\delta<\gamma$ を満たす任意の $\delta>0$ に対し,

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon \tag{0.3}$$

となる.よって,

$$\sup_{|x-y|<\delta}|f(x)-f(y)|\leq\epsilon \tag{0.4}$$

となる.ϵ 未満であることを示すことができればいいのだが,ここで行き詰まっている.何か間違えているか?