(S,d) を距離空間とし，$((S^*,d^*),\phi),((\tilde{S}^*,\tilde{d}^*),\tilde{\phi})$ は，以下の条件を満たす距離空間とする．

1. (S^*,d^*) は完備である．
2. 任意の $x,y \in S$ に対して $d(x,y)=d^*(\phi(x),\phi(y))$.
3. $\phi(S)$ は S^* において密である．すなわち，$\overline{\phi(S)}=S^*$

ここで，x^* を S^* の任意の点とすれば，$((S^*,d^*),\phi)$ に関する条件 3 によって，

$$x^* = \lim_{n\to\infty} \phi(x_n) \tag{0.1}$$

となる S の点列 (x_n) が存在する．また，点列 $(\tilde{\phi}(x_n))$ は $(\tilde{S}^*,\tilde{d}^*)$ の Cauchy 列となり，条件 1 より $(\tilde{S}^*,\tilde{d}^*)$ は完備だから $(\tilde{\phi}(x_n))$ は収束列である．従って，$\tilde{S}^*$ において

$$\tilde{x}^* = \lim_{n\to\infty} \tilde{\phi}(x_n) \tag{0.2}$$

が存在する．ここで，$x^* \in §^*$ に $\tilde{x}^* \in \tilde{S}^*$ を対応させる S^* から $\tilde{S}^*$ への写像を f とする．

この時，(x_n) の取り方によらず $\tilde{x}^*$ が一意に定まることを示したい．ここで，ある S の点列 $(x_n),(y_n)$ が存在して，

$$\tilde{x}^* = \lim_{n\to\infty} \tilde{\phi}(x_n), \quad \tilde{y}^* = \lim_{n\to\infty} \tilde{\phi}(y_n) \tag{0.3}$$

とする．この時，任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow \tilde{d}^*(\tilde{x}^*, \tilde{\phi}(x_n)) < \frac{\epsilon}{3} \tag{0.4}$$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, n > n_1 \Rightarrow \tilde{d}^*(\tilde{y}^*, \tilde{\phi}(y_n)) < \frac{\epsilon}{3} \tag{0.5}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\tilde{d}^*(\tilde{x}^*,\tilde{y}^*) &\le \tilde{d}^*(\tilde{x}^*,\tilde{\phi}(x_n)) + \tilde{d}^*(\tilde{\phi}(x_n),\tilde{\phi}(y_n)) + \tilde{d}^*(\tilde{\phi}(y_n),\tilde{y}^*) && (0.6)\\ &< \frac{\epsilon}{3} + \tilde{d}^*(\tilde{\phi}(x_n),\tilde{\phi}(y_n)) + \frac{\epsilon}{3} && (0.7)\end{aligned}$$

ここから先が行き詰まっています.