$\mathbb{R}$ で考える．関数 f の振動量は

$$o(f,x) = \lim_{\delta\to\infty}\left(\sup_{y\in I_x(\delta)} f(y) - \inf_{y\in I_x(\delta)} f(y)\right) \tag{0.1}$$

で定義される．ここで，$I_x(\delta) = (x-\delta, x+\delta)$ である．関数 f が x で連続であることと，$o(f,x) = 0$ が同値であることを示せる？

$$\sup_{y\in I_x(\delta)} f(y) - \inf_{y\in I_x(\delta)} f(y) \leq \epsilon \tag{0.2}$$

が任意の $\epsilon > 0$ で成り立つ時に，なぜ

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\sup_{y\in I_x(\delta)} f(y) - \inf_{y\in I_x(\delta)} f(y)\right) = 0 \tag{0.3}$$

になるのですか？

関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が $x\in\mathbb{R}$ で連続であることは,

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{|x-y|<\delta}|f(y)-f(x)| = 0 \tag{0.4}$$

となるための必要十分条件であることを示したい.

まず，十分性を示す．任意の $\epsilon > 0$ をとる．f が x で連続だから,

$$\exists\delta_0 > 0, |x-y| < \delta_0 \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon \tag{0.5}$$

となる．ここで，$\gamma = \delta_0$ とする．この時，$\delta < \gamma$ を満たす任意の $\delta > 0$ に対し,

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon \tag{0.6}$$

となる．よって,

$$\sup_{|x-y|<\delta}|f(x)-f(y)| \leq \epsilon \tag{0.7}$$

となる．ϵ 未満であることを示すことができればいいのだが，ここで行き詰まっている．何か間違えているか？