W はベクトル空間 V の部分空間とし、W の零元 $\mathbf{0}_W \in W$ と V の零元 $\mathbf{0}_V \in V$ をとる。$\mathbf{0}_W$ は W の零元だから、

$$\forall \boldsymbol{w} \in W,\ \boldsymbol{w} + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \tag{0.1}$$

が成り立つ。また、$\mathbf{0}_V$ は V の零元だから、

$$\forall \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{v} + \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \tag{0.2}$$

が成り立つ。ここで、$W \subset V$ より、

$$\forall \boldsymbol{w} \in W,\ w \in V,\ \boldsymbol{w} + \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \tag{0.3}$$

となる。よって、

$$\forall \boldsymbol{w} \in W,\ \boldsymbol{w} + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \tag{0.4}$$

が成り立つ。よって、$\forall \boldsymbol{w} \in W \subset V,\ \exists - \boldsymbol{w} \in V,$

$$\begin{aligned}
\mathbf{0}_V &= \mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V && (0.5)\\
&= \mathbf{0}_V + \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w} && (0.6)\\
&= \mathbf{0}_W + \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w} && (0.7)\\
&= \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_V && (0.8)\\
&= \mathbf{0}_W && (0.9)
\end{aligned}$$

よって、$\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_W \in W$ となるから、V の零元 $\mathbf{0}_V$ は W の元でもあり、W の零元 $\mathbf{0}_W$ に一致するからこれは W の零元でもある。

これあってますかね？