

1) Βρείτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{x^2+1} \sin(ax)$, όπου $x > 0$ και a σταθερά, μέχρι όρους $4^{\text{ης}}$ τάξης γύρω από το 0.

2) Βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 \sqrt{x+1} \sin x \, dx$ (αριθμητική τιμή με 20 δεκαδικά)

3) Βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 g(x) \, dx$ όπου $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x+1}, & x < 0 \end{cases}$

4) Βρείτε την ορίζουσα και τις ιδιοτιμές του παρακάτω πίνακα (δώστε τις με ακρίβεια 3 δεκαδικά)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Βρείτε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για την συνάρτηση $y = y(x)$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + b^2 y = \sin(bx), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

και γράψτε την αφού πρώτα την απλοποιήσετε.

6) Δίνονται οι λίστες $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f\}$. Φτιάξτε με μια εντολή την λίστα $AB = \{\{1, a\}, \{2, b\}, \{3, c\}, \{4, d\}, \{5, e\}, \{6, f\}\}$. (δώστε τον κώδικα)

7) Δημιουργείστε μια λίστα A με 100 τυχαίους αριθμούς x, όπου $-1 \leq x \leq 1$. (δώστε τον κώδικα)

8) Δημιουργείστε μια λίστα A με στοιχεία -1 και 1 (100 σε αριθμό) με τυχαία σειρά, πχ $A = \{1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, \dots\}$

9) Σχεδιάστε τη λύση $y = y(x)$ του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y^3 + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

10) Δίνεται η λίστα δεδομένων

$$A = \{\{0, 0.1\}, \{1, 0.2\}, \{1.5, 0.4\}, \{2, 0.5\}, \{2.5, 0.4\}, \{3, 0.44\}, \{4, 0.55\}, \{5, 0.7\}\}$$

Βρείτε τη συνάρτηση παρεμβολής $y = y(x)$ (interpolation function) του Mathematica και βρείτε τη τιμή της συνάρτησης y στη θέση $x = 2.35$.

11) Να βρεθούν όλες οι λύσεις του αλγεβρικού συστήματος εξισώσεων

$$x^2 + y^2 = 1, \quad ye^x = x$$

12) Η συνάρτηση $y = x - xe^{-x+a}$, όπου a σταθερά, έχει ένα ακρότατο. Να βρεθεί το ακρότατο. Ποια η θέση (x,y) του ακρότατου για $a=1$.

13) Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x^2+1} \, dx$ και να δοθεί με ακρίβεια 10 δεκαδικών ψηφίων.