

# Tarea Semanal 2

Karel Zapfe  
Introducción al Caos y Dinámica No Lineal

4 de septiembre de 2014

Supongamos que tenemos un sistema dinámico en un espacio fase  $\mathbb{M}$  definido por la transformación  $T$  (no necesariamente invertible) y que preserva una medida  $\mu$ . Por simplicidad supondremos que el sistema es discreto en el tiempo (las iteraciones de  $T$  están indexadas por un número entero). La medida total de nuestro espacio es 1, es decir,  $\mu(\mathbb{M}) = 1$ . La noción que usan los matemáticos de “*casi donde sea*” quiere decir, en todos lados excepto en conjuntos de medida cero.

**Lema Definiciones Equivalentes.** Las siguientes nociones de Ergodicidad son equivalentes.

- Los únicos conjuntos (medibles) que se mantienen invariantes bajo la transformación son aquellos de medida 0 o 1, excepto subconjuntos despreciables:

$$T^{-1}(A) = A \pmod{0} \Leftrightarrow \mu(A) = 0, 1$$

- El promedio de cualquier función integrable a lo largo de una órbita coincide con el promedio del espacio fase, para casi cualquier condición inicial:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=0}^N f(T^t(x)) = \int_{\mathbb{M}} dx f(x)$$

- Las únicas funciones invariantes frente a la transformación son constantes *casi donde sea*:

$$f(T(x)) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = \text{constante}.$$

Para entender bien estas nociones deberán saber que no todos los conjuntos son *medibles*. Existen subconjuntos de un espacio que donde la noción de medida no está definida. Vamos a hacer un poco de investigación de “campo” al respecto.

**Pregunta 1.** Averiguen con un amigo matemático que haya cursado Análisis I y II o con algún físico que haya llevado un curso de Matemáticas avanzadas que quiere decir  $\sigma$ -álgebra (sigma-álgebra) en el contexto de subconjuntos de un conjunto. De paso averiguen que quiere decir álgebra en el mismo contexto y que son los borelianos. Escribanme las definiciones de forma que cualquiera de ustedes las entienda, pero que sean rigurosas. Las medidas están definidas para conjuntos que pertenecen esta  $\sigma$ -álgebra. Nosotros usaremos medidas suaves, como longitud, área, volumen, sobre los borelianos.

**Pregunta 2.** Para el mapeo logístico  $T(x) = kx(1 - x)$ , encontrar analíticamente las siguientes cualidades.

- Los puntos fijos (puntos de periodo 1) en función de  $k$ .
- La derivada del mapeo evaluada en el mismo punto. ¿En que valor de  $k$  deja de ser estable? ¿que otros valores *chistosos* ocurren?
- Hagan unas gráficas bonitas que ilustren los dos puntos anteriores.
- Punto Extra: ¿Pueden hacer lo mismo para los puntos de periodo 2? ¿En que momento aparecen, al menos?

**Pregunta 3.** Lean el *paper* adjunto, “*Chaos in a double Pendulum*”.