Tarea Semanal 3

Karel Zapfe
Introducción al Caos y Dinámica No Lineal

4 de septiembre de 2014

Desempolvemos y mejoremos la simulación del péndulo que hicimos para la Tarea 1. Si alguno de ustedes no la consiguió hacer bien, este es el momento para formalizarla y dejarla perfecta. Si queremos tener una simulación super precisa, le pedimos a Alejandra que nos comparta su ejemplo de como lo resolvió usando Runge-Kutta.

El espacio fase del péndulo es un cilindoro, ya que la "posición" es una variable angular, pero el momento es una variable potencialmente no acotada, es decir, un número real. Esto quiere decir que hay que identificar extremos opuestos del eje $q =: \theta$. En particular a mi me gusta identificar $\theta = pi$ con $\theta = pi$, de forma que el punto de equilibrio sea $\theta = 0$ y el punto inestable el ángulo opuesto, es decir, el ángulo de identificación. Cada uno es libre de usar su propia convención, pero de esta forma las ecuaciones Lagrangianas quedan con la forma particularmente simple del primer dia. En mi notación l es el momento (angular) conjugado a θ. Sea L la longitud del brazo del péndulo y m su masa:

$$H(\theta, l) = \frac{l^2}{2mR^2} - mgR\cos\theta \tag{1}$$

Podemos escoger unidades tales que $mgR = 1$ y $mR^2 = 1$. Con eso el sistema termina con la siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\dot{l} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\sin\theta, \tag{2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial l} = l. \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

Dado que el sistema es conservativo, básicamente la energia indexa las trayectorias.

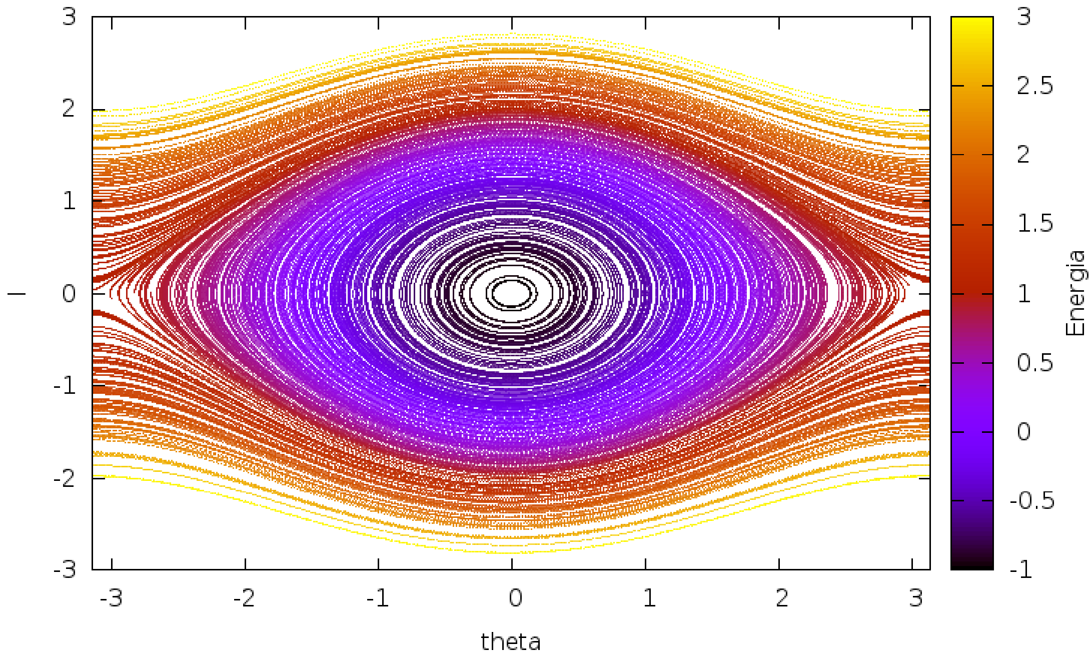

Figura 1: El espacio fase del Péndulo, fibrado por variedades de energia constante. En este caso, coinciden con las trayectorias
.

Les deje en `github` dos archivos auxiliares, aparte de la fuente de este mismo archivo, para que se inspiren. El pendulo simple, resuelto a lo Euler en python, en `PenduloSimple.py`, y como hice el dibujo, en `GraficandoPenduloSimple01.gpl`.

Pregunta 1. Veamos que tan mezclante es el sistema, si es que lo es. Considera un pequeño rectangulo de condiciones inciciales, centrado en algun lugar del espacio fase.

- Coloca tu cuadrado de condiciones iniciales en un lugar del espacio fase, y muestrame sus imagenes para varias selecciones de t. Deja algunas lineas de energia constante debajo, como referencia visual, para que veamos por donde se mueve el cuadrado. Prueba para t pequeño (del orden de tu dt), t mediano (del orden de 10 o 100 dts), y muy grande. ¿Qué observas?
- Repite lo anterior, pero busca lugares especiales del espacio fase para colocarlo. Ya sabes cuales. ¿Cómo le llamarías a las figuras producidas?
- El sistema, sobre el espacio fase total, no puede ser mezclante, porque es conservativo. Explica este punto.
- ¿Podría ser mezclante en cada "superficie" de energía constante?

Pregunta 2. Dibujen el diagrama de las escaleras y caracoles para el mapeo de Bernoulli.

- Si exageran en el número de lineas, queda muy claro algo... ¿qué?

- Busquen una orbita periodica de periodo medio, por decir algo, 10. Hagan el diagrama.
- ¿Que pasa si prueban hacer algo similar a lo del problema anterior? Usen una linea de condiciones iniciales. El sistema es mezclante, aunque la medida conservada no sea intuitiva. De todas maneras, algo se debe de poder percibir. Inventen un análisis gráfico que delate esta propiedad.

Pregunta 3. Hay un mapeo que es algo así como una mezcla del mapeo de Bernoulli y el mapeo logístico con $k = 4$. Se llama el mapeo de la tienda y esta dado por la regla siguiente, en el intervalo unitario.

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1/2 \\ 2(1-x) & \text{si } 1/2 < x \leq 1. \end{cases} \tag{5}$$

- ¿Porqué se llama el mapeo de la tienda?
- ¿Porque digo que es algo así como una mezcla de los otros dos?
- ¿Qué tan lejos está del mapeo de Bernoulli? ¿Lo puedes transformar en aquél? (Esto sería, en lenguaje matematico moderno, buscar una biyección entre los dos sistemas dinámicos tal que sean uno conjugado del otro).
- Punto Extra: Si se parece al mapeo logístico, tal vez podemos reducir el tamaño de la tienda con algun parámetro... y hacer un diagrama de bifurcaciones.