Matematyka I, Kognitywistyka, Zadania

Konrad Zdanowski

8 listopada 2024

Tekst ten zawiera listę najbardziej istotnych definicji i twierdzeń z wykładu oraz przykładowe zadania.

1 Teoria liczb

1.1 Faktoryzacja, $\gcd$, lcm

1. Czy 113, 201, 213 to liczby pierwsze? ([FR15, 4.6.3, zad. 2])

2. Znajdź faktoryzację: 3465, 40 320, 14641. ([FR15])

3. Czy 1 111 111 111 jest pierwsza? ([FR15])

4. Niech $m = 2^2 * 3^3 * 5 * 7 * 11$, $n = 2 * 3 * 11$. Wyznacz $\gcd$, lcm. ([FR15])

5. Niech $m = 5^2 * 7 * 11 * 13^2$, $n = 2 * 3 * 7^3 * 11^2 * 13$, $k = 3 * 5 * 7^2 * 11^3$. Wyznacz $\gcd(m, n, k)$, $\mathrm{lcm}(m, n, k)$.

6. Czy jest nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $n^2 - 49$, dla pewnego $n \in \mathbb{N}$? ([FR15])

7. Jeśli p jest pierwsza, to czy $2^p - 1$ jest pierwsza? ([FR15])

8. ([FR15]) Wyznacz $\gcd(756, 2205)$, $\gcd(4725, 17460)$, $\gcd(465, 3861)$, $\gcd(4600, 2116)$, $\gcd(630, 990)$, $\gcd(96, 144)$.

   Wyznacz $\mathrm{lcm}(756, 2205)$, $\mathrm{lcm}(4725, 17460)$, $\mathrm{lcm}(465, 3861)$, $\mathrm{lcm}(4600, 2116)$, $\mathrm{lcm}(630, 990)$, $\mathrm{lcm}(96, 144)$.

9. Wyznacz wszystkie liczby, których nie dzieli żadna liczba pierwsza większa od pięciu i które mają dokładnie pięć dzielników.

10. Wyznacz wszystkie liczby, które dzielą $5 * 7$. Ile jest takich liczb?

1.2 Przystawanie modulo

1. Rozstrzygnij, czy jest prawdą

    - $0 \equiv 6 \pmod 3$,
    - $35 \equiv 55 \pmod 9$,
    - $(-23) \equiv 20 \pmod 7$
    - $(-3) \equiv 3 \pmod 6$,
    - $(-2) \equiv 2 \pmod 3$,
    - $16 \equiv 185 \pmod 1 1$.

    ([FR15, sec. 6.1, p. 154])

2. Wyznacz wszystkie liczby $n \in \mathbb{Z}$ takie, że $n \equiv 2 \pmod 5$.

3. Czy $(-1) \equiv 1 \pmod 2$?

4. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $17 * 23 * 45$ przez 8. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $17 * 23 * 45$ przez 5.

    Nie używaj kalkulatora.

5. Znajdź $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n \equiv 3 \pmod 5$ i $n \equiv 2 \pmod 3$.

6. Znajdź $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n \equiv 4 \pmod 4$ i $n \equiv 2 \pmod 5$.

7. Nie znajdź $n \in \mathbb{N}$ takiego, że $n \equiv 3 \pmod 6$ is $n \equiv 0 \pmod 2$.

    Dlaczego takie n nie istnieje?

8. Nie znajdź $n \in \mathbb{N}$ takiego, że $n \equiv 3 \pmod 6$ is $n \equiv 2 \pmod 9$.

    Dlaczego takie n nie istnieje?

9. Wyznacz wszystkie liczby, które dzielą $5 * 7$.

10. Korzystając z Twierdzenia Eulera ($a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$), gdy $\gcd(a, n) = 1$) i Małego Twierdzenia Fermata ($x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$), dla liczby pierwszej p) i z tego, że relacja przystawania modulo jest kongruencją względem dodawania i mnożenia, oblicz

    - $3^{100} \bmod 5$,
    - $5^{100} \bmod 7$,
    - $3^{100} \bmod 10$,
    - $3^{100} \bmod 6$ (uwaga),
    - $4^{100} \bmod 9$,
    - $2^{2^{100}} \bmod 5$,
    - $5^{5^{100}} \bmod 3$.

1.3 Indukcja

1. Udowodnij $\Sigma_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Udowodnij $\Sigma_{i=0}^{n}(2i + 1) = (n + 1)^2$ (sumę n pierwszych liczb nieparzystych).

3. Udowodnij, dla każdego $n \geqslant 1$, dla wszystkich $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $|x_1 + ... + x_n| \leqslant |x_1| + ... + |x_n|$.

4. Dla dowolnego $n \geqslant 1$, $\forall x \in (0, 1)\, x^n \leqslant x$.

   Skorzystaj z faktu, że dla dowolnych a, b, jeśli $0 \leqslant a < 1$ i $b \geqslant 0$, to $ab < b$.

5. Udowodnij, że dla dowolnego n, $\Sigma_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} \leqslant 2$.

   Rozważ wzmocnienie tezy, do $\Sigma_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} \leqslant 2 - \frac{1}{2^n}$.

6. Udowodnij, że dla dowolnego $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

   Której części dowodu indukcyjnego nie można przeprowadzić dla tezy $\forall n \geqslant 0\, (2^n \geqslant n^2)$.

   Której części dowodu indukcyjnego nie można przeprowadzić dla tezy $\forall n \geqslant 3\, (2^n \geqslant n^2)$.

7. Ciąg Fibbonacciego definiujmy jako $F(1) = F(2) = 1$, oraz $F(n+2) = F(n) + F(n+1)$ dla $n \geqslant 1$.

   Udowodnij, że dla $n \geqslant 1$,

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

8. (Nierówność Bernoulliego, uproszczony przypadek) Dla dowolnego $n \geqslant 1$,

$$\forall x \geqslant 0 \, ((1+x)^n \geqslant (1+nx)).$$

2 Matematyka dyskretna

2.1 Zliczania

Notacje. $|X|$ to moc zbioru X. $\mathcal{P}(X)$ to zbiór podzbiorów X. $\mathcal{P}^{=k}(X)$ to ilość k elementowych podzbiorów zbioru X, gdzie $k \in \mathbb{N}$.

2.1.1 Zliczania zbiorów

Twierdzenie 1. *Niech X, Y, Z zbiory skończone. Wtedy $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ oraz*

$$\begin{aligned} X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| + \\ - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|. \end{aligned}$$

Twierdzenie 2. *Niech X będzie zbiorem skończonym o mocy (liczności) n. Wtedy $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.*

Definicja 3. *Dwumian Newtona to wyrażenie $\binom{n}{k}$, gdzie $0 \leqslant k \leqslant n$, zdefiniowane jako*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ponieważ $0! = 1$, to $\binom{0}{0} = 1$.

Twierdzenie 4. *Dla $0 \leqslant k \leqslant n$, ilość k-elementowych podzbiorów n elementowego to $\binom{n}{k}$.*

Innymi słowy, jeśli $|X| = n$, to $|\mathcal{P}^{=k}(X)| = \binom{n}{k}$.

Dwumian Newtona spełnia rekurencyjną zależność, dla $k+1 \leqslant n$,

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

2.1.2 Zliczania wyborów

Definicja 5. *Niech X będzie n elementowym zbiorem. Wtedy r-kombinacja zbioru X to r elementowy podzbiór X.*

Np. Jeśli X jest zbiorem trzech osób, $X = \{\text{ala}, \text{ola}, \text{ela}\}$, to 2-kombinacja to dowolny dwuelementowy podzbiór X, np. $\{\text{ala}, \text{ola}\}$, $\{\text{ala}, \text{ela}\}$.

Twierdzenie 6. *Niech X będzie n-elementowym zbiorem, niech $0 \leqslant r \leqslant n$. Ilość r-kombinacji X to $\binom{n}{r}$.*

Przykładowe 2-kombinacje zbioru $\{\text{ala}, \text{ela}, \text{ola}\}$, to $\{\text{ala}, \text{ela}\}$, $\{\text{ala}, \text{ola}\}$. (Uwaga, w zbiorach nie ma znaczenia kolejność wypisywania elementów.)

Definicja 7. *Niech X będzie n elementowym zbiorem . Permutacja zbioru X to sposób uporządkowania elementów X.*

Np. jeśli X jest zbiorem 3 osób, to możemy na sześć sposobów ustawić te osoby w kolejce.

Twierdzenie 8. *Ilość permutacji zbioru n elementowego, to $n!$.*

Definicja 9. *Niech X będzie zbiorem n elementowym i niech $r \leqslant n$. Wtedy, r-wariacja bez powtórzeń zbioru X to sposób na wybranie i uporządkowanie r różnych elementów z X.*

Przykładowe 2-wariacje zbioru $\{\text{ala}, \text{ela}, \text{ola}\}$, to (ala, ola), (ola, ala), (ela, ala).

Twierdzenie 10. *Ilość r-wariacji bez powtórzeń n elementowego zbioru to $\frac{n!}{(n-r)!}$.*

Definicja 11. *Niech X będzie zbiorem n elementowym i niech $r \leqslant n$. Wtedy, r-wariacja z powtórzeniami zbioru X to sposób na wybranie i uporządkowanie r elementóW z X, gdy elementy mogą się powtarzać.*

Przykładowe 2-wariacje z powtórzeniami zbioru $\{\text{ala}, \text{ela}, \text{ola}\}$, to (ala, ala), (ola, ala), (ala, ola), (ola, ola).

Twierdzenie 12. *Ilość r-wariacji z powtórzeniami n elementowego zbioru to n^r.*

Jeśli losujemy kule tak jak w totolotku, to jest to kombinacja (kolejność wylosowania nie ma znaczenia). Jeśli losujemy r ponumerowanych kul i układamy je w rządek (bez zwracania do worka), to mamy wariację bez powtórzeń. Jeśli zapisujemy wyniki kolejnych losowań a same kule wrzucamy z powrotem do worka, to mamy wariację z powtórzeniami.

Dodatkowo, jeśli umieszczamy n takich samych przedmiotów w r różnych pudełkach, to możemy zrobić to na $\binom{n+r-1}{r-1}$ sposobów.

Na przykład, jeśli mamy 1, 2, 5 i 10 groszówki, to możemy wybrać z nich 10 moment na $\binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3}$ sposobów.

2.1.3 Zadania

1. Zad. ([RW06], Cw. 5.3.1, p.302) Wśród 200 osób 150 uprawia pływanie lub jogging lub oba sporty. 85 uprawia pływanie, 60 uprawia pływanie i jogging. Ile osób pływa?

   Czy informacja o ilości wszystkich osób była istotna?

2. Zad. Ile liczb z $\{10, ..., 99\}$ ma dokładnie jedną liczbę równą 7? Ile ma przynajmniej jedną siódemkę? Ile ma przynajmniej jedną 7 lub 3? Ile ma przynajmniej jedną 7 i przynajmniej jedną 3?

3. Ile liczb ze zbioru $\{1, ..., 100\}$ jest podzielnych przez 3 i przez 5? Ile przez 6 i przez 9?

4. Na ile sposobów można usadzić n osób na ławce?

5. Na ile sposobów można usadzić n osób przy okrągłym stole?

6. Na ile sposobów można rozdać 52 karty po równo między 4 graczy?

7. Ile przekątnych ma n-kąt wypukły?

8. Ile jest różnych sposobów ustawienia na półce dzieła 5-tomowego tak, aby:

   a tomy I i II stały obok siebie

   b tomy I i II nie stały obok siebie?

9. Ile czteroosobowych komisji można stworzyć z grupy 9 urzędników, jeżeli wiadomo, że wśród nich są osoby A oraz B, które nie chcą razem pracować?

10. Ile jest liczb całkowitych pomiędzy 1000 a 9999, których suma cyfr wynosi dokładnie 9?

11. Na ile sposobów można podzielić $3n$ osób na n grup 3-osobowych?

12. W klasie jest n chłopców i n dziewczynek. Na ile sposobów mogą utworzyć pary do tańca.

13. Jaka jest szansa trafienia szóstki w totolotku (losujemy sześć liczb z 49)? Ile powinna wynosić kumulacja, żeby przy cenie zakładu 3zł. opłacało się zagrać?

14. Na ile sposobów można przejść z lewego górnego do prawego dolnego pola szachownicy, jeśli możemy poruszać się tylko w prawo i w dół?

15. Na ile sposobów można odwiedzić wszystkie wierzchołki w grafie pełnym o n wierzchołkach? Na ile sposobów można to zrobić, ale tak, żeby wrócić do punktu wyjścia?

16. Ile jest możliwych wyników rzutu dwiema rozróżnialnymi kostkami do gry?

    Ile jest takich wyników, jeśli nie rozróżniamy kostek?

    Jaka jest szansa na wyrzucenie w sumie 12 oczek? Jaka jest szansa na wyrzucenie dwóch szóstek? Jaka jest szansa na wyrzucenie w sumie 11?

    Jak jest szansa na wyrzucenie w sumie 7? Jak jest szansa na wyrzucenie w sumie 8?

2.2 Teoria grafów

3 Uwagi lub (p)odpowiedzi

- Część 1.2, zadanie 10. Aby policzyć np. $3^{5^100} \bmod 7$ trzeba wykorzystać twierdzenie Eulera, moulo równego 7 i równego 6. Zauważmy, że $\varphi(7) = 6$, $\varphi(6) = 2$. Po pierwsze, jeśli przedstawimy $5^{100} = 6k + i$, gdzie $0 \leqslant i < 6$, to
$$3^{6k+i} \equiv (3^6)^k 3^i \equiv 1^k 3^i \equiv 3^i \pmod 7.$$

Teraz, aby sprawdzić, jaka jest reszta z dzielenia 5^100 przez 6, czyli aby znaleźć i takie, że

$$5^{100} \equiv i \pmod 6.$$

Ponieważ 5 jest względnie pierwsze z 6, z twierdzenia Eulera mamy $5^2 \equiv 1 \pmod 6$. Wtedy

$$5^100 \equiv (5^2)^{50} \equiv 1^{50} \equiv 1 \pmod 6.$$

Skoro szukana wartość i wynosi 1, to

$$3^{5^100} \equiv 3^1 \equiv 3 \pmod 7.$$

- Część 1.3, zadanie 6.

  W tezie $\forall n \geqslant 0(2^n \geqslant n^2)$ nie uda się udowodnić kroku indukcyjnego.

  W tezie $\forall n \geqslant 3(2^n \geqslant n^2)$ krok indukcyjny da się udowodnić, ale nie da się udowodnić przypadek bazowy.

Literatura

[FR15] Sylvia Forman and Agnes M. Rash. *The Whole Truth About Whole Numbers: An Elementary Introduction to Number Theory*. Springer International Publishing, 2015.

[RW06] Kenneth A. Ross and Charles R. B. Wright. *Matematyka dyskretna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2006.