

# Matematyka I, Kognitywistyka, Zadania

Konrad Zdanowski

29 listopada 2024

Tekst ten zawiera listę najbardziej istotnych definicji i twierdzeń z wykładu oraz przykładowe zadania.

## 1 Teoria relacji i funkcji

### 1.1 Relacje

**Definicja 1.** Niech  $X, Y$  będą dowolnymi zbiorami. Iloczyn kartezjański  $X \times Y$  to zbiór par uporządkowanych postaci  $(a, b)$  gdzie  $a \in X$  i  $b \in Y$ .

Relacja między zbiorami  $X$  i  $Y$  to dowolny podzbiór  $R$  iloczynu kartezjańskiego  $X \times Y$ .

Jeśli  $R \subseteq X \times X$  to mówimy, że  $R$  jest relacją na  $X$ .

Zamiast pisać  $(x, y) \in R$  będziemy często posługiwać się wygodniejszą notacją  $xRy$ .

Możemy wyróżnić relację pełną, równą  $X \times Y$ , relację pustą  $\emptyset$ . Wyróżniamy też relację identycznościową na  $X$ ,

$$\text{id}_X = \{(a, a) : a \in X\}.$$

**Definicja 2.** Niech  $R \subseteq X \times Y$ . Dziedzina relacji  $\text{dom}(R)$  nazywamy zbiór elementów, które występują jako lewy element pary w relacji,

$$\text{dom}(R) = \{x \in X : \exists y \in Y xRy\}.$$

Przeciwdziedzina (obraz) relacji  $\text{rng}(R)$  to zbiór elementów występujących jako prawy element pary w relacji,

$$\text{rng}(R) = \{y \in Y : \exists x \in X xRy\}.$$

### 1.1.1 Jak możemy przedstawić relację?

Relację możemy opisać jako

1. zbiór par,
2. rysunek,
3. macierz.

Następujące własności relacji będą dla nas istotne.

**Definicja 3** (Własności relacji). *Niech  $R$  będzie relacją na  $X$ .  $R$  jest*

- *zwrotna gdy  $\forall x \in X \ xRx$ ,*
- *przeciwzwrotna gdy  $\forall x \in X \neg xRx$ ,*
- *symetryczna gdy  $\forall x, y \in X (xRy \Rightarrow yRx)$ ,*
- *przeciwsymetryczna gdy  $\forall x, y \in X (xRy \Rightarrow \neg yRx)$ ,*
- *antysymetryczna gdy  $\forall x, y \in X (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$ ,*
- *przechodnia gdy  $\forall x, y, z \in X (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$ ,*
- *spójna gdy  $\forall x, y \in X (xRy \vee yRx)$ .*

**Definicja 4** (Rodzaje relacji). •  *$R$  jest relacją równoważności gdy jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.*

- *$R$  jest relacją (częściowego) porządku gdy jest zwrotna, antisymetryczna i przechodnia.*
- *$R$  jest relacją ostrego porządku gdy jest przeciwzwrotna, przeciwsymetryczna i przechodnia.*
- *$R$  jest relacją liniowego porządku jeśli jest relacją porządku i jest spójna (czyli dowolne dwa elementy są ze sobą porównywalne).*

Jeśli  $R$  jest relacją porządku, to  $S$  zdefiniowane jako

$$xSy \iff xRy \wedge x \neq y$$

jest odpowiadającym mu ostrym porządkiem.

Jeśli  $S$  jest relacją ostrego porządku, to  $R$  zdefiniowane jako

$$xRy \iff xSy \vee x = y$$

jest odpowiadającym mu porządkiem.

Jeśli relacja  $R$  jest relacją równoważności na  $X$ , to definiuje podział zbioru  $X$  na rozłączne podzbiory.

**Definicja 5** (Klasa abstrakcji). *Niech  $R$  będzie relacją równoważności na zbiorze  $X$  i niech  $a \in X$ . Klasa abstrakcji  $a$  względem  $R$  to zbiór elementów, które wchodzi w relację z  $a$ . Klasę abstrakcji oznaczamy przez*

$$[a]_R = \{x \in X : aRx\}.$$

Każde dwie różne klasy abstrakcji są rozłączne. Zbiór klas abstrakcji  $\{[a]_R\}_{a \in X}$  definiuje podział zbioru  $X$  na rozłączne podzbiory.

### 1.1.2 Operacje na relacjach

**Definicja 6.** *Niech  $R \subseteq X \times Y$ ,  $S \subseteq Y \times Z$ .*

- *Relacja odwrotna*

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : xRy\}.$$

- *Złożenie relacji  $S \circ R \subseteq X \times Z$  to relacja między  $X$  i  $Z$  zdefiniowana jako*

$$S \circ R = \{(x, z) \in X \times Z : \exists y \in Y (xRy \wedge yRz)\}.$$

- *Tranzytywne domknięcie relacji  $R$  to najmniejsza relacja przechodnia zawierająca  $R$ . Tranzytywne domknięcie  $R$  oznaczamy często przez  $R^*$ .*

## 1.2 Funkcje

**Definicja 7.** Niech  $R \subseteq X \times Y$ .  $R$  jest funkcją jeśli

$$\forall x \in X \forall y, z \in Y (xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z)$$

Piszemy  $f: X \rightarrow Y$  jeśli  $f \subseteq X \times Y$ ,  $f$  jest funkcją oraz  $\text{dom}(f) = X$ .

Jeśli  $f: X \rightarrow Y$  i  $(x, f(x))$  to piszemy  $f(x)$  na oznaczenie  $y$ .

**Definicja 8.** Niech  $f: X \rightarrow Y$  i  $g: Y \rightarrow Z$ .

- $f$  jest iniekcją (różnowartościowa, 1-1) gdy dla każdych

$$\forall x, y \in X (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y),$$

- $f$  jest surjekcją („na”) gdy  $\forall y \in Y \exists x \in X f(x) = y$ ,
- $f$  jest bijekcją jeśli jest iniekcją i surjekcją.
- Złożenie funkcji  $f$  i  $g$  to funkcja oznaczana przez  $g \circ f$  i zdefiniowana jako

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

**Definicja 9.** Niech  $f: X \rightarrow Y$  i  $A \subseteq X$ . Ograniczenie  $f$  do zbioru  $A$ , to funkcja

$$f \upharpoonright A = \{(x, y) \in A \times Y : f(x) = y\}.$$

Inaczej,  $f \upharpoonright A = f \cap (A \times Y)$  lub po prostu są to te pary  $(x, y) \in f$ , dla których argument  $x \in A$ .

Jeśli  $f$  jest funkcją, to  $f^{-1}$  jest funkcją wtedy i tylko wtedy gdy  $f$  jest różnowartościowa. Wtedy,  $f^{-1}$  jest funkcją z  $\text{rng}(f)$ .

Złożenie dwóch iniekcji jest iniekcją. Złożenie dwóch surjekcji jest suriekcją.

## 2 Matematyka dyskretna

### 2.1 Zliczania

Notacje.  $|X|$  to moc zbioru  $X$ .  $\mathcal{P}(X)$  to zbiór podzbiorów  $X$ .  $\mathcal{P}^k(X)$  to ilość  $k$  elementowych podzbiorów zbioru  $X$ , gdzie  $k \in \mathbb{N}$ .

### 2.1.1 Zliczania zbiorów

**Twierdzenie 10.** Niech  $X, Y, Z$  zbiory skończone. Wtedy  $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$  oraz

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|.$$

**Twierdzenie 11.** Niech  $X$  będzie zbiorem skończonym o mocy (liczności)  $n$ . Wtedy  $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$ .

**Definicja 12.** Dwumian Newtona to wyrażenie  $\binom{n}{k}$ , gdzie  $0 \leq k \leq n$ , zdefiniowane jako

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ponieważ  $0! = 1$ , to  $\binom{0}{0} = 1$ .

**Twierdzenie 13.** Dla  $0 \leq k \leq n$ , ilość  $k$ -elementowych podzbiorów  $n$ -elementowego to  $\binom{n}{k}$ .

Innymi słowy, jeśli  $|X| = n$ , to  $|\mathcal{P}^k(X)| = \binom{n}{k}$ .

Dwumian Newtona spełnia rekurencyjną zależność, dla  $k+1 \leq n$ ,

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

### 2.1.2 Zliczania wyborów

**Definicja 14.** Niech  $X$  będzie  $n$ -elementowym zbiorem. Wtedy  $r$ -kombinacja zbioru  $X$  to  $r$ -elementowy podzbiór  $X$ .

Np. Jeśli  $X$  jest zbiorem trzech osób,  $X = \{\text{ała, ola, ela}\}$ , to 2-kombinacja to dowolny dwuelementowy podzbiór  $X$ , np.  $\{\text{ała, ola}\}$ ,  $\{\text{ała, ela}\}$ .

**Twierdzenie 15.** Niech  $X$  będzie  $n$ -elementowym zbiorem, niech  $0 \leq r \leq n$ . Ilość  $r$ -kombinacji  $X$  to  $\binom{n}{r}$ .

Przykładowe 2-kombinacje zbioru  $\{\text{ała, ela, ola}\}$ , to  $\{\text{ała, ela}\}$ ,  $\{\text{ała, ola}\}$ . (Uwaga, w zbiorach nie ma znaczenia kolejność wypisywania elementów.)

**Definicja 16.** Niech  $X$  będzie  $n$  elementowym zbiorem. Permutacja zbioru  $X$  to sposób uporządkowania elementów  $X$ .

Np. jeśli  $X$  jest zbiorem 3 osób, to możemy na sześć sposobów ustawić te osoby w kolejce.

**Twierdzenie 17.** Ilość permutacji zbioru  $n$  elementowego, to  $n!$ .

**Definicja 18.** Niech  $X$  będzie zbiorem  $n$  elementowym i niech  $r \leq n$ . Wtedy,  $r$ -wariacja bez powtórzeń zbioru  $X$  to sposób na wybranie i uporządkowanie  $r$  różnych elementów z  $X$ .

Przykładowe 2-wariacje zbioru  $\{\text{ala}, \text{ela}, \text{ola}\}$ , to  $(\text{ala}, \text{ola})$ ,  $(\text{ola}, \text{ala})$ ,  $(\text{ela}, \text{ala})$ .

**Twierdzenie 19.** Ilość  $r$ -wariacji bez powtórzeń  $n$  elementowego zbioru to  $\frac{n!}{(n-r)!}$ .

**Definicja 20.** Niech  $X$  będzie zbiorem  $n$  elementowym i niech  $r \leq n$ . Wtedy,  $r$ -wariacja z powtórzeniami zbioru  $X$  to sposób na wybranie i uporządkowanie  $r$  elementów z  $X$ , gdy elementy mogą się powtarzać.

Przykładowe 2-wariacje z powtórzeniami zbioru  $\{\text{ala}, \text{ela}, \text{ola}\}$ , to  $(\text{ala}, \text{ala})$ ,  $(\text{ola}, \text{ala})$ ,  $(\text{ala}, \text{ola})$ ,  $(\text{ola}, \text{ola})$ .

**Twierdzenie 21.** Ilość  $r$ -wariacji z powtórzeniami  $n$  elementowego zbioru to  $n^r$ .

Jeśli losujemy kule tak jak w totolotku, to jest to kombinacja (kolejność wylosowania nie ma znaczenia). Jeśli losujemy  $r$  ponumerowanych kul i układamy je w rzadek (bez zwracania do worka), to mamy wariację bez powtórzeń. Jeśli zapisujemy wyniki kolejnych losowań a same kule wrzucamy z powrotem do worka, to mamy wariację z powtórzeniami.

Dodatkowo, jeśli umieszczamy  $n$  takich samych przedmiotów w  $r$  różnych pudełkach, to możemy zrobić to na  $\binom{n+r-1}{r-1}$  sposobów.

Na przykład, jeśli mamy 1, 2, 5 i 10 groszówki, to możemy wybrać z nich 10 monet na  $\binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3}$  sposobów.

**Twierdzenie 22** (Zasada szufladkowa). Niech  $n \geq m \geq 1$ . Jeśli  $n$  przedmiotów umieścimy w  $m$  pudełkach, to będzie pudełko, w którym znajdzie się przynajmniej  $\lceil \frac{n}{m} \rceil$  przedmiotów.

**Wniosek 23.** Jeśli  $n + 1$  przedmiotów umieścimy w  $n$  pudełkach, gdzie  $n \geq 1$ , to w pewnym pudełku znajdą się przynajmniej dwa przedmioty.

## 2.2 Teoria grafów

Do uzupełnienia.

## 3 Zadania

### 3.1 Teoria liczb

#### 3.1.1 Faktoryzacja, gcd, lcm

1. Czy 113, 201, 213 to liczby pierwsze? ([FR15, 4.6.3, zad. 2])
2. Znajdź faktoryzację: 3465, 40 320, 14641. ([FR15])
3. Czy 1 111 111 111 jest pierwsza? ([FR15])
4. Niech  $m = 2^2 * 3^3 * 5 * 7 * 11$ ,  $n = 2 * 3 * 11$ . Wyznacz gcd, lcm. ([FR15])
5. Niech  $m = 5^2 * 7 * 11 * 13^2$ ,  $n = 2 * 3 * 7^3 * 11^2 * 13$ ,  $k = 3 * 5 * 7^2 * 11^3$ . Wyznacz gcd( $m, n, k$ ), lcm( $m, n, k$ ).
6. Czy jest nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci  $n^2 - 49$ , dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$ ? ([FR15])
7. Jeśli  $p$  jest pierwsza, to czy  $2^p - 1$  jest pierwsza? ([FR15])
8. ([FR15]) Wyznacz gcd(756, 2205), gcd(4725, 17460), gcd(465, 3861), gcd(4600, 2116), gcd(630, 990), gcd(96, 144).  
Wyznacz lcm(756, 2205), lcm(4725, 17460), lcm(465, 3861), lcm(4600, 2116), lcm(630, 990), lcm(96, 144).
9. Wyznacz wszystkie liczby, których nie dzieli żadna liczba pierwsza większa od pięciu i które mają dokładnie pięć dzielników.
10. Wyznacz wszystkie liczby, które dzielą  $5 * 7$ . Ile jest takich liczb?

#### 3.1.2 Przystawanie modulo

1. Rozstrzygnij, czy jest prawdą
  - $0 \equiv 6 \pmod{3}$ ,

- $35 \equiv 55 \pmod{9}$ ,
- $(-23) \equiv 20 \pmod{7}$
- $(-3) \equiv 3 \pmod{6}$ ,
- $(-2) \equiv 2 \pmod{3}$ ,
- $16 \equiv 185 \pmod{1}$ .

([FR15, sec. 6.1, p. 154])

2. Wyznacz wszystkie liczby  $n \in \mathbb{Z}$  takie, że  $n \equiv 2 \pmod{5}$ .
3. Czy  $(-1) \equiv 1 \pmod{2}$ ?
4. Wyznacz resztę z dzielenia liczby  $17 * 23 * 45$  przez 8. Wyznacz resztę z dzielenia liczby  $17 * 23 * 45$  przez 5.

Nie używaj kalkulatora.

5. Znajdź  $n \in \mathbb{N}$  takie, że  $n \equiv 3 \pmod{5}$  i  $n \equiv 2 \pmod{3}$ .
6. Znajdź  $n \in \mathbb{N}$  takie, że  $n \equiv 4 \pmod{4}$  i  $n \equiv 2 \pmod{5}$ .
7. Nie znajdź  $n \in \mathbb{N}$  takiego, że  $n \equiv 3 \pmod{6}$  i  $n \equiv 0 \pmod{2}$ .  
Dlaczego takie  $n$  nie istnieje?
8. Nie znajdź  $n \in \mathbb{N}$  takiego, że  $n \equiv 3 \pmod{6}$  i  $n \equiv 2 \pmod{9}$ .  
Dlaczego takie  $n$  nie istnieje?
9. Wyznacz wszystkie liczby, które dzielą  $5 * 7$ .
10. Korzystając z Twierdzenia Eulera ( $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ , gdy  $\gcd(a, n) = 1$ ) i Małego Twierdzenia Fermata ( $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ , dla liczby pierwszej  $p$ ) i z tego, że relacja przystawania modulo jest kongruencją względem dodawania i mnożenia, oblicz

- $3^{100} \pmod{5}$ ,
- $5^{100} \pmod{7}$ ,
- $3^{100} \pmod{10}$ ,
- $3^{100} \pmod{6}$  (uwaga),
- $4^{100} \pmod{9}$ ,
- $2^{2^{100}} \pmod{5}$ ,
- $5^{5^{100}} \pmod{3}$ .



### 3.1.3 Indukcja

1. Udowodnij  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ .
2. Udowodnij  $\sum_{i=0}^n (2i + 1) = (n + 1)^2$  (sumę  $n$  pierwszych liczb nieparzystych).
3. Udowodnij, dla każdego  $n \geq 1$ , dla wszystkich  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ,  $|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$ .
4. Dla dowolnego  $n \geq 1$ ,  $\forall x \in (0, 1) \ x^n \leq x$ .

Skorzystaj z faktu, że dla dowolnych  $a, b$ , jeśli  $0 \leq a < 1$  i  $b \geq 0$ , to  $ab < b$ .

5. Udowodnij, że dla dowolnego  $n$ ,  $\sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} \leq 2$ .

Rozważ wzmocnienie tezy, do  $\sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} \leq 2 - \frac{1}{2^n}$ .

6. Udowodnij, że dla dowolnego  $n \geq 4$ ,  $2^n \geq n^2$ .

Której części dowodu indukcyjnego nie można przeprowadzić dla tezy  $\forall n \geq 0 \ (2^n \geq n^2)$ .

Której części dowodu indukcyjnego nie można przeprowadzić dla tezy  $\forall n \geq 3 \ (2^n \geq n^2)$ .

7. Ciąg Fibbonacciego definiujemy jako  $F(1) = F(2) = 1$ , oraz  $F(n + 2) = F(n) + F(n + 1)$  dla  $n \geq 1$ .

Udowodnij, że dla  $n \geq 1$ ,

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

8. (Nierówność Bernoulliego, uproszczony przypadek) Dla dowolnego  $n \geq 1$ ,

$$\forall x \geq 0 \ ((1 + x)^n \geq (1 + nx)).$$

### 3.2 Relacje – zadania

1. Wypisz wszystkie relacje na zbiorze  $X = \{0, 1\}$ . Przedstaw wybrane relacje w postaci macierzowej.

Wypisz trzy relacje na zbiorze  $Y = \{0, 1, 2\}$  i przedstaw je w postaci macierzowej.

Wypisz wszystkie relacje porządku na zbiorze  $Y$ . Wypisz wszystkie relacje liniowego porządku na  $Y$ . Ile jest relacji liniowego porządku na zbiorze  $n$  elementowym?

2. Niech  $R$  będzie relacją na zbiorze  $X = \{0, 1, \dots, 6\}$  zdefiniowaną jako  $aRb$  gdy  $\max(a, b) + a \leq \min(a, b) + b$ .

Wyznacz własności relacji  $R$ . Oblicz złożenie  $R \circ R$ . Oblicz  $R^{-1}$ . Oblicz  $R \circ R^{-1}$ .

3. Rozważ relację  $R$  na zbiorze  $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (1, 0), (2, 1)\}$  gdzie  $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$  gdy  $x_1 = y_1 \vee x_2 = y_2$ .

Określ jej własności.

4. Określ własności relacji na  $\mathbb{N}$ ,

- (a)  $xRy$  gdy  $\gcd(x, y) = 1$ ,
- (b)  $xSy$  gdy  $\text{lcm}(x, y) = x * y$ .

5. Wyznacz klasy abstrakcji relacji na  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$  zdefiniowanej jako  $xRy$  gdy  $\text{Supp}(x) = \text{Supp}(y)$ , gdzie  $\text{Supp}(x)$  to zbiór liczb pierwszych, które dzielą  $x$ .

6. Znajdź relację symetryczną i przechodnią, która nie jest zwrotna.

7. Znajdź relację symetryczną i zwrotną, która nie jest przechodnia.

8. Znajdź relację zwrotną i przechodnią, która nie jest symetryczna.

9. Znajdź relację przechodnią, symetryczną i przeciwzwrotną.

10. Narysuj na układzie współrzędnych kartezjańskich zbiór punktów  $(x, y)$  należących do poniższych relacji

- (a)  $y = |x|$ ,
- (b)  $|y| = |x|$ ,
- (c)  $y = x^2$ ,
- (d)  $x = y^2$ ,
- (e)  $x \leq y$ ,
- (f)  $y \leq x^2 + 1$ ,

(g)  $y \geq x^2 + 1$ ,

(h)  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

Jeśli któraś z tych relacji jest relacją równoważności, to wyznacz jej klasy abstrakcji.

11. Wyznacz klasy abstrakcji relacji na  $\mathbb{N}^2$  zdefiniowanej jako  $(x, y)R(a, b)$  gdy  $x + y = a + b$ .
12. Czy jest relacją równoważności na  $\mathbb{N}^2$  relacja zdefiniowana jako  $(x, y)R(a, b)$  gdy  $x + b = y + a$ .

### 3.3 Relacje, zadania (ChatGPT, zmodyfikowane)

1. Relacja na zbiorze liczb całkowitych.

Rozważ zbiór liczb całkowitych  $\mathbb{Z}$ . Zdefiniuj relację  $R$  na  $\mathbb{Z}$  jako:

$$x R y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = y.$$

Udowodnij, że relacja  $R$  jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

2. Relacja "większe niż"

Rozważ zbiór liczb naturalnych  $\mathbb{N}$ . Zdefiniuj relację  $R$  na  $\mathbb{N}$  jako:

$$x R y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x > y.$$

Sprawdź, czy relacja  $R$  jest antysymetryczna i przechodnia. Udowodnij, że ta relacja nie jest zwrotna.

3. Relacja na zbiorze osób.

Rozważ zbiór osób  $P = \{A, B, C\}$ . Zdefiniuj relację  $R$  na  $P$  jako:

$$x R y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy osoba } x \text{ jest starsza od osoby } y.$$

Sprawdź, czy relacja  $R$  jest antysymetryczna i przechodnia. Czy relacja jest zwrotna? Uzasadnij odpowiedź.

4. Relacja podzielności.

Rozważ zbiór liczb naturalnych  $\mathbb{N}$ . Zdefiniuj relację  $R$  na  $\mathbb{N}$  jako:

$$x R y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x \text{ jest podzielne przez } y.$$

Sprawdź, czy relacja  $R$  jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

5. Relacja „przyjaciele”.

Rozważ zbiór osób  $P$  i zdefiniuj relację  $R$  na  $P$  jako:

$x R y$  wtedy i tylko wtedy, gdy osoby  $x$  i  $y$  są przyjaciółmi.

Czy relacja  $R$  jest symetryczna? Uzasadnij odpowiedź. Czy relacja  $R$  jest zwrotna? Uzasadnij odpowiedź.

6. Relacja „parzystość”,

Rozważ zbiór liczb naturalnych  $\mathbb{N}$ . Zdefiniuj relację  $R$  na  $\mathbb{N}$  jako:

$x R y$  wtedy i tylko wtedy, gdy suma liczb  $x$  i  $y$  jest liczbą parzystą.

Sprawdź, czy relacja  $R$  jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Jeśli tak, to jakie są jej klasy abstrakcji?

7. Relacja identyczności id.

Rozważ zbiór  $S = \{1, 2, 3\}$ . Zdefiniuj relację  $R$  na  $S$  jako:

$x R y$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = y$ .

Sprawdź, czy relacja  $R$  jest zwrotna, symetryczna, przechodnia i antysymetryczna. Jeśli  $R$  jest relacją równoważności, to jakie są jej klasy abstrakcji.

8. Relacja „wspólnej współrzędnej”.

Rozważ zbiór punktów na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$ . Zdefiniuj relację  $R$  na  $\mathbb{R}^2$  jako:

$(x_1, y_1) R (x_2, y_2)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x_1 = x_2 \vee y_1 = y_2$ .

Sprawdź, czy relacja  $R$  jest zwrotna, symetryczna, przechodnia i antysymetryczna.

9. Relacja „bycie większym lub równym”.

Rozważ zbiór liczb całkowitych  $\mathbb{Z}$ . Zdefiniuj relację  $R$  na  $\mathbb{Z}$  jako:

$x R y$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x \geq y$ .

Sprawdź, czy relacja  $R$  jest zwrotna, symetryczna, przechodnia i antysymetryczna.

10. Relacja na zbiorze liter.

Rozważ zbiór liter  $A, B, C, D$ . Zdefiniuj relację  $R$  jako:

$x R y$  wtedy i tylko wtedy, gdy litera  $x$  sąsiaduje z  $y$  w alfabecie.

Sprawdź, czy relacja  $R$  jest zwrotna, symetryczna, antysymetryczna i przechodnia.

11. Własności relacji na zbiorze liczb

Niech  $R$  będzie relacją na zbiorze  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  zdefiniowaną jako  $aRb$ , jeśli  $a \leq b$ . Ustal, czy relacja  $R$  jest zwrotna, symetryczna, przechodnia.

12. Relacja podzielności

Niech  $R$  będzie relacją na zbiorze liczb całkowitych  $A = \{2, 3, 6, 9, 12\}$ , gdzie  $aRb$  zachodzi, gdy  $a$  dzieli  $b$  bez reszty. Ustal, czy relacja  $R$  jest zwrotna, symetryczna, przechodnia.

13. Relacja równości modulo

Rozważ zbiór  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  oraz relację  $R$  zdefiniowaną jako  $aRb$ , gdy  $a \equiv b \pmod{2}$ . Ustal, czy relacja  $R$  jest zwrotna, symetryczna, przechodnia. Jeśli tak, to jak wyglądają jej klasy abstrakcji.

14. Relacja na zbiorze punktów

Na płaszczyźnie rozważmy zbiór punktów  $A = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (1, 0), (2, 1)\}$ . Zdefiniuj relację  $R$  jako  $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ , jeśli  $x_1 = x_2 \vee y_1 = y_2$ . Ustal, czy relacja  $R$  jest zwrotna, symetryczna, przechodnia.

15. Relacja porządku

Niech  $R$  będzie relacją na zbiorze  $A = \{a, b, c\}$  zdefiniowaną jako  $aRb$ , jeśli  $a$  jest "mniejsze lub równe" od  $b$  według pewnej kolejności alfabetycznej. Sprawdź, czy relacja  $R$  jest relacją porządku częściowego. Zapisz diagram Hassego dla tej relacji.

16. Właściwości relacji na zbiorze liczb

Rozważ zbiór  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  oraz relację  $R$  zdefiniowaną jako  $aRb$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $a + b$  jest liczbą parzystą. Sprawdź, czy relacja  $R$  jest zwrotna, symetryczna, przechodnia.

17. Klasy abstrakcji

Na zbiorze  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  zdefiniowana jest relacja  $R$ , gdzie  $aRb$ , jeśli  $a - b$  jest podzielne przez 3. Wykaż, że  $R$  jest relacją równoważności. Wyznacz klasy abstrakcji dla tej relacji.

18. Zapis relacji w postaci macierzy

Rozważ zbiór  $A = \{1, 2, 3\}$  oraz relację  $R$  zdefiniowaną jako  $aRb$ , gdy  $a + b$  jest liczbą nieparzystą. Przedstaw relację  $R$  w postaci macierzy. Na podstawie macierzy ustal, czy relacja  $R$  jest symetryczna.

### 3.4 Funkcje – zadania

1. Niech  $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{0, 1, 2\}$ . Wypisz przykładową funkcję  $f: A \rightarrow B$ . Ile jest takich funkcji? Ile jest takich funkcji różnowartościowych? Ile jest takich funkcji „na”?
2. Ile jest surjekcji ze zbioru  $\{0, 1, 2, 3\}$  na ten zbiór? Ile jest iniekcji ze zbioru  $\{0, 1, 2, 3\}$  w ten zbiór?
3. Ile jest surjekcji ze zbioru  $\{0, 1, 2, 3\}$  na zbiór  $\{0, 1, 2\}$ ? Ile jest iniekcji ze zbioru  $\{0, 1, 2, 3\}$  w zbiór  $\{0, 1, 2\}$ ?
4. Czy  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zdefiniowana jako  $f(x) = x^2$  jest różnowartościowa? Czy jest „na”?  
Czy  $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  jest różnowartościowa, czy jest „na”?  
Czy  $g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  zdefiniowana jako  $g(x) = x^2$  jest różnowartościowa i czy jest „na”?
5. Czy funkcja  $f: \emptyset \rightarrow \emptyset$  jest różnowartościowa i czy jest „na”?
6. Znajdź bijekcję między  $\mathbb{Z}$  i  $\mathbb{N}$ . Znajdź bijekcję między zbiorem liczb parzystych  $2\mathbb{N}$  i  $\mathbb{N}$ .

### 3.5 Kombinatoryka – zadania

1. Zad. ([RW06], Cw. 5.3.1, p.302) Wśród 200 osób 150 uprawia pływanie lub jogging lub oba sporty. 85 uprawia pływanie, 60 uprawia pływanie i jogging. Ile osób pływa?  
Czy informacja o ilości wszystkich osób była istotna?

2. Zad. Ile liczb z  $\{10, \dots, 99\}$  ma dokładnie jedną liczbę równą 7? Ile ma przynajmniej jedną siódmkę? Ile ma przynajmniej jedną 7 lub 3? Ile ma przynajmniej jedną 7 i przynajmniej jedną 3?
3. Ile liczb ze zbioru  $\{1, \dots, 100\}$  jest podzielnych przez 3 i przez 5? Ile przez 6 i przez 9?
4. Na ile sposobów można usadzić  $n$  osób na ławce?
5. Na ile sposobów można usadzić  $n$  osób przy okrągłym stole?
6. Na ile sposobów można rozdać 52 karty po równo między 4 graczy?
7. Ile przekątnych ma  $n$ -kąt wypukły?
8. Ile jest różnych sposobów ustawienia na półce dzieła 5-tomowego tak, aby:
  - a tomy I i II stały obok siebie
  - b tomy I i II nie stały obok siebie?
9. Ile czteroosobowych komisji można stworzyć z grupy 9 urzędników, jeżeli wiadomo, że wśród nich są osoby  $A$  oraz  $B$ , które nie chcą razem pracować?
10. Ile jest liczb całkowitych pomiędzy 1000 a 9999, których suma cyfr wynosi dokładnie 9?
11. Na ile sposobów można podzielić  $3n$  osób na  $n$  grup 3-osobowych?
12. W klasie jest  $n$  chłopców i  $n$  dziewczynek. Na ile sposobów mogą utworzyć pary do tańca.
13. Jaka jest szansa trafienia szóstki w totolotku (losujemy sześć liczb z 49)? Ile powinna wynosić kumulacja, żeby przy cenie zakładu 3zł. opłacało się zagrać?
14. Na ile sposobów można przejść z lewego górnego do prawego dolnego pola szachownicy, jeśli możemy poruszać się tylko w prawo i w dół?
15. Na ile sposobów można odwiedzić wszystkie wierzchołki w grafie pełnym o  $n$  wierzchołkach? Na ile sposobów można to zrobić, ale tak, żeby wrócić do punktu wyjścia?

16. Ile jest możliwych wyników rzutu dwiema rozróżnialnymi kostkami do gry?

Ile jest takich wyników, jeśli nie rozróżniamy kostek?

Jaka jest szansa na wyrzucenie w sumie 12 oczek? Jaka jest szansa na wyrzucenie dwóch szóstek? Jaka jest szansa na wyrzucenie w sumie 11?

Jak jest szansa na wyrzucenie w sumie 7? Jak jest szansa na wyrzucenie w sumie 8?

17. Układamy ośmio literowe hasło z 26 liter alfabetu. Ile jest haseł, jeśli symbole mogą się powtarzać. Ile jest takich haseł, w których musi wystąpić przynajmniej jedna samogłoska (a, e, o, u, i). Ile jest haseł, w których musi wystąpić przynajmniej jedna samogłoska i przynajmniej jedna spółgłoska.

18. W worku jest 20 kul ponumerowanych od 1 do 20. Losujemy (bez zwracania) pięć kul. Jaka jest szansa, że wylosujemy tylko kule o numerach parzystych? Jaka jest szansa, że wylosujemy przynajmniej jedną kulę o numerze parzystym? Jaka jest szansa, że wylosujemy przynajmniej jedną kulę o numerze parzystym i przynajmniej jedną kulę o numerze nieparzystym.

Jak zmieni się odpowiedź, jeśli będziemy zwracali po wylosowaniu kule do worka?

### **3.6 Kombinatoryka – zadania z ChatGPT**

#### **3.6.1 Zasada szufladkowa**

1. W klasie jest 26 uczniów, którzy przynieśli na zajęcia 10 różnych książek. Udowodnij, że co najmniej trzech uczniów przyniosło tę samą książkę.
2. W grupie liczącej 13 osób udowodnij, że przynajmniej dwie osoby obchodzą urodziny w tym samym miesiącu.
3. Mamy dany zbiór 10 liczb naturalnych z zakresu od 1 do 18. Udowodnij, że istnieją dwie liczby w zbiorze, których różnica wynosi co najwyżej 2.
4. Pięciu przyjaciół ma razem 25 monet. Udowodnij, że przynajmniej jedna osoba ma co najmniej 5 monet.
5. Na okręgu rozmieszczono 9 punktów. Udowodnij, że istnieją dwa punkty, których odległość (mierząc po łuku) nie jest większa niż 40 stopni.



6. 30 jabłek rozdzielono pomiędzy 8 koszyków. Udowodnij, że przynajmniej w jednym koszyku znajduje się co najmniej 4 jabłka.
7. Wybieramy 8 różnych liczb całkowitych spośród liczb 2, 4, 6, ..., 20. Udowodnij, że wśród wybranych liczb istnieją dwie, których różnica wynosi 4.
8. Na biurku znajduje się 12 długopisów w trzech różnych kolorach. Udowodnij, że przynajmniej cztery długopisy mają ten sam kolor.
9. W prostokącie umieszczono 6 punktów. Udowodnij, że można wybrać dwa punkty, których odległość jest mniejsza lub równa połowie długości przekątnej prostokąta.
10. Mamy 7 klocków, każdy o masie całkowitej (w kilogramach) z zakresu od 1 do 12 kg. Udowodnij, że można wybrać dwa klocki, których masy różnią się o co najwyżej 2 kg.

### **3.6.2 Permutacje**

1. Ile różnych słów można utworzyć, przestawiając litery w słowie "KOT"?
2. Ile różnych słów można utworzyć, przestawiając litery w słowie "MAMA"?
3. Czworo dzieci siada w jednym rzędzie na 4 miejscach. Na ile sposobów mogą się usiąść?
4. Na ile różnych sposobów pięć osób może usiąść przy okrągłym stole?

### **3.6.3 Kombinacje**

1. Z grupy 10 osób wybieramy drużynę składającą się z 4 osób. Na ile sposobów można wybrać drużynę?
2. Na półce znajduje się 8 różnych książek. Ile sposobów jest na wybranie 3 książek, które zamierzasz przeczytać?
3. Sześcioro przyjaciół chce się podzielić na trzy dwuosobowe zespoły. Na ile sposobów można utworzyć takie zespoły?

### 3.6.4 Wariacje bez powtórzeń i z powtórzeniami

1. Z grupy 5 uczniów wybieramy trzech, którzy zajmą miejsca na podium (złoto, srebro, brąz). Na ile sposobów można to zrobić?
2. Do zamka szyfrowego wybieramy 3-cyfrowy kod, gdzie cyfry nie mogą się powtarzać, a do wyboru mamy cyfry od 1 do 5. Na ile sposobów można ustawić taki kod?
3. Na półce mamy 7 różnych książek. Na ile sposobów możemy wybrać i ustawić trzy z nich?
4. Na ile sposobów można utworzyć 3-literowe "słowa" z liter A, B, C, przy czym litery mogą się powtarzać?
5. Tworzymy czterocyfrowy kod PIN, przy czym każda cyfra może być dowolnie powtórzona, a do wyboru mamy cyfry od 0 do 9. Na ile sposobów można stworzyć taki PIN?
6. Mamy do wyboru trzy kolory kulek: czerwony, zielony i niebieski. Na ile sposobów można ułożyć pięć kulek, jeśli mogą być one tego samego koloru?
7. Na ile sposobów można utworzyć liczbę 2-cyfrową, wybierając cyfry spośród 1, 2, 3, 4, przy czym cyfry mogą się powtarzać?

## 4 Uwagi lub (p)odpowiedzi

- Część 3.1.2, zadanie 10. Aby policzyć np.  $3^{5^{100}} \bmod 7$  trzeba wykorzystać twierdzenie Eulera, moulou równego 7 i równego 6. Zauważmy, że  $\varphi(7) = 6$ ,  $\varphi(6) = 2$ . Po pierwsze, jeśli przedstawimy  $5^{100} = 6k + i$ , gdzie  $0 \leq i < 6$ , to

$$3^{6k+i} \equiv (3^6)^k 3^i \equiv 1^k 3^i \equiv 3^i \pmod{7}.$$

Teraz, aby sprawdzić, jaka jest reszta z dzielenia  $5^{100}$  przez 6, czyli aby znaleźć  $i$  takie, że

$$5^{100} \equiv i \pmod{6}.$$

Ponieważ 5 jest względnie pierwsze z 6, z twierdzenia Eulera mamy  $5^2 \equiv 1 \pmod{6}$ . Wtedy

$$5^{100} \equiv (5^2)^{50} \equiv 1^{50} \equiv 1 \pmod{6}.$$

Skoro szukana wartość  $i$  wynosi 1, to

$$3^{5^{100}} \equiv 3^1 \equiv 3 \pmod{7}.$$

- Część 3.1.3, zadanie 6.

W tezie  $\forall n \geq 0 (2^n \geq n^2)$  nie uda się udowodnić kroku indukcyjnego.

W tezie  $\forall n \geq 3 (2^n \geq n^2)$  krok indukcyjny da się udowodnić, ale nie da się udowodnić przypadku bazowy.

## Literatura

- [FR15] Sylvia Forman and Agnes M. Rash. *The Whole Truth About Whole Numbers: An Elementary Introduction to Number Theory*. Springer International Publishing, 2015.
- [RW06] Kenneth A. Ross and Charles R. B. Wright. *Matematyka dyskretna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2006.