Matematyka I, Kognitywistyka, Zadania

Konrad Zdanowski

6 listopada 2024

Tekst ten zawiera listę najbardziej istotnych definicji i twierdzeń z wykładu oraz przykładowe zadania.

1 Teoria liczb

1.1 Faktoryzacja, $\gcd$, lcm

1. Czy 113, 201, 213 to liczby pierwsze? ([FR15, 4.6.3, zad. 2])
2. Znajdź faktoryzację: 3465, 40 320, 14641. ([FR15])
3. Czy 1 111 111 111 jest pierwsza? ([FR15])
4. Niech $m = 2^2 * 3^3 * 5 * 7 * 11$, $n = 2 * 3 * 11$. Wyznacz $\gcd$, lcm. ([FR15])
5. Niech $m = 5^2 * 7 * 11 * 13^2$, $n = 2 * 3 * 7^3 * 11^2 * 13$, $k = 3 * 5 * 7^2 * 11^3$. Wyznacz $\gcd(m, n, k)$, $\operatorname{lcm}(m, n, k)$.
6. Czy jest nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $n^2 - 49$, dla pewnego $n \in \mathbb{N}$? ([FR15])
7. Jeśli p jest pierwsza, to czy $2^p - 1$ jest pierwsza? ([FR15])
8. ([FR15]) Wyznacz $\gcd(756, 2205)$, $\gcd(4725, 17460)$, $\gcd(465, 3861)$, $\gcd(4600, 2116)$, $\gcd(630, 990)$, $\gcd(96, 144)$.

   Wyznacz $\operatorname{lcm}(756, 2205)$, $\operatorname{lcm}(4725, 17460)$, $\operatorname{lcm}(465, 3861)$, $\operatorname{lcm}(4600, 2116)$, $\operatorname{lcm}(630, 990)$, $\operatorname{lcm}(96, 144)$.

9. Wyznacz wszystkie liczby, których nie dzieli żadna liczba pierwsza większa od pięciu i które mają dokładnie pięć dzielników.

10. Wyznacz wszystkie liczby, które dzielą $5 * 7$. Ile jest takich liczb?

1.2 Przystawanie modulo

1. Rozstrzygnij, czy jest prawdą

   - $0 \equiv 6 \pmod 3$,
   - $35 \equiv 55 \pmod 9$,
   - $(-23) \equiv 20 \pmod 7$
   - $(-3) \equiv 3 \pmod 6$,
   - $(-2) \equiv 2 \pmod 3$,
   - $16 \equiv 185 \pmod 1 1$.

   ([FR15, sec. 6.1, p. 154])

2. Wyznacz wszystkie liczby $n \in \mathbb{Z}$ takie, że $n \equiv 2 \pmod 5$.

3. Czy $(-1) \equiv 1 \pmod 2$?

4. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $17 * 23 * 45$ przez 8. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $17 * 23 * 45$ przez 5.

   Nie używaj kalkulatora.

5. Znajdź $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n \equiv 3 \pmod 5$ i $n \equiv 2 \pmod 3$.

6. Znajdź $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n \equiv 4 \pmod 4$ i $n \equiv 2 \pmod 5$.

7. Nie znajdź $n \in \mathbb{N}$ takiego, że $n \equiv 3 \pmod 6$ is $n \equiv 0 \pmod 2$.

   Dlaczego takie n nie istnieje?

8. Nie znajdź $n \in \mathbb{N}$ takiego, że $n \equiv 3 \pmod 6$ is $n \equiv 2 \pmod 9$.

   Dlaczego takie n nie istnieje?

9. Wyznacz wszystkie liczby, które dzielą $5 * 7$.

10. Korzystając z Twierdzenia Eulera ($a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$), gdy $\gcd(a, n) = 1$) i Małego Twierdzenia Fermata ($x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$), dla liczby pierwszej p) i z tego, że relacja przystawania modulo jest kongruencją względem dodawania i mnożenia, oblicz

    - $3^{100} \bmod 5$,
    - $5^{100} \bmod 7$,
    - $3^{100} \bmod 10$,
    - $3^{100} \bmod 6$ (uwaga),
    - $4^{100} \bmod 9$,
    - $2^{2^{100}} \bmod 5$,
    - $5^{5^{100}} \bmod 3$.

1.3 Indukcja

1. Udowodnij $\Sigma_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Udowodnij $\Sigma_{i=0}^{n}(2i + 1) = (n + 1)^2$ (sumę n pierwszych liczb nieparzystych).

3. Udowodnij, dla każdego $n \geqslant 1$, dla wszystkich $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $|x_1 + ... + x_n| \leqslant |x_1| + ... + |x_n|$.

4. Dla dowolnego $n \geqslant 1$, $\forall x \in (0, 1)\, x^n \leqslant x$.

   Skorzystaj z faktu, że dla dowolnych a, b, jeśli $0 \leqslant a < 1$ i $b \geqslant 0$, to $ab < b$.

5. Udowodnij, że dla dowolnego n, $\Sigma_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} \leqslant 2$.

   Rozważ wzmocnienie tezy, do $\Sigma_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} \leqslant 2 - \frac{1}{2^n}$.

6. Udowodnij, że dla dowolnego $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

   Której części dowodu indukcyjnego nie można przeprowadzić dla tezy $\forall n \geqslant 0\, (2^n \geqslant n^2)$.

   Której części dowodu indukcyjnego nie można przeprowadzić dla tezy $\forall n \geqslant 3\, (2^n \geqslant n^2)$.

7. Ciąg Fibbonacciego definiujmy jako $F(1) = F(2) = 1$, oraz $F(n+2) = F(n) + F(n+1)$ dla $n \geqslant 1$.

   Udowodnij, że dla $n \geqslant 1$,

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

8. (Nierówność Bernoulliego, uproszczony przypadek) Dla dowolnego $n \geqslant 1$,

$$\forall x \geqslant 0 \, ((1+x)^n \geqslant (1+nx)).$$

2 Matematyka dyskretna

2.1 Zliczania

Notacje. $|X|$ to moc zbioru X. $\mathcal{P}(X)$ to zbiór podzbiorów X. $\mathcal{P}^{=k}(X)$ to ilość k elementowych podzbiorów zbioru X, gdzie $k \in \mathbb{N}$.

2.1.1 Zliczania zbiorów

Twierdzenie 1. *Niech X, Y, Z zbiory skończone. Wtedy $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ oraz*

$$X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| + \\ - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|.$$

Twierdzenie 2. *Niech X będzie zbiorem skończonym o mocy (liczności) n. Wtedy $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.*

Definicja 3. *Dwumian Newtona to wyrażenie $\binom{n}{k}$, gdzie $0 \leqslant k \leqslant n$, zdefiniowane jako*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ponieważ $0! = 1$, to $\binom{0}{0} = 1$.

Twierdzenie 4. *Dla $0 \leqslant k \leqslant n$, ilość k-elementowych podzbiorów n elementowego to $\binom{n}{k}$.*

Innymi słowy, jeśli $|X| = n$, to $|\mathcal{P}^{=k}(X)| = \binom{n}{k}$.

Dwumian Newtona spełnia rekurencyjną zależność, dla $k + 1 \leqslant n$,

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

2.1.2 Zliczania wyborów

Definicja 5. *Niech X będzie n elementowym zbiorem. Wtedy r-kombinacja zbioru X to r elementowy podzbiór X.*

Np. Jeśli X jest zbiorem trzech osób, $X = \{\text{ala}, \text{ola}, \text{ela}\}$, to 2-kombinacja to dowolny dwuelementowy podzbiór X, np. $\{\text{ala}, \text{ola}\}$, $\{\text{ala}, \text{ela}\}$.

Twierdzenie 6. *Niech X będzie n-elementowym zbiorem, niech $0 \leqslant r \leqslant n$. Ilość r-kombinacji X to $\binom{n}{r}$.*

Przykładowe 2-kombinacje zbioru $\{\text{ala}, \text{ela}, \text{ola}\}$, to $\{\text{ala}, \text{ela}\}$, $\{\text{ala}, \text{ola}\}$. (Uwaga, w zbiorach nie ma znaczenia kolejność wypisywania elementów.)

Definicja 7. *Niech X będzie n elementowym zbiorem . Permutacja zbioru X to sposób uporządkowania elementów X.*

Np. jeśli X jest zbiorem 3 osób, to możemy na sześć sposobów ustawić te osoby w kolejce.

Twierdzenie 8. *Ilość permutacji zbioru n elementowego, to $n!$.*

Definicja 9. *Niech X będzie zbiorem n elementowym i niech $r \leqslant n$. Wtedy, r-wariacja bez powtórzeń zbioru X to sposób na wybranie i uporządkowanie r różnych elementów z X.*

Przykładowe 2-wariacje zbioru $\{\text{ala}, \text{ela}, \text{ola}\}$, to (ala, ola), (ola, ala), (ela, ala).

Twierdzenie 10. *Ilość r-wariacji bez powtórzeń n elementowego zbioru to $\frac{n!}{(n-r)!}$.*

Definicja 11. *Niech X będzie zbiorem n elementowym i niech $r \leqslant n$. Wtedy, r-wariacja z powtórzeniami zbioru X to sposób na wybranie i uporządkowanie r elementóW z X, gdy elementy mogą się powtarzać.*

Przykładowe 2-wariacje z powtórzeniami zbioru $\{\text{ala}, \text{ela}, \text{ola}\}$, to (ala, ala), (ola, ala), (ala, ola), (ola, ola).

Twierdzenie 12. *Ilość r-wariacji z powtórzeniami n elementowego zbioru to n^r.*

Jeśli losujemy kule tak jak w totolotku, to jest to kombinacja (kolejność wylosowania nie ma znaczenia). Jeśli losujemy r ponumerowanych kul i układamy je w rządek (bez zwracania do worka), to mamy wariację bez powtórzeń. Jeśli zapisujemy wyniki kolejnych losowań a same kule wrzucamy z powrotem do worka, to mamy wariację z powtórzeniami.

Dodatkowo, jeśli umieszczamy n takich samych przedmiotów w r różnych pudełkach, to możemy zrobić to na $\binom{n+r-1}{r-1}$ sposobów.

Na przykład, jeśli mamy 1, 2, 5 i 10 groszówki, to możemy wybrać z nich 10 moment na $\binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3}$ sposobów.

2.1.3 Zadania

1. Zad. ([RW06], Cw. 5.3.1, p.302) Wśród 200 osób 150 uprawia pływanie lub jogging lub oba sporty. 85 pływa, 60 pływanie i jogging. Ile osób pływa?
2. Zad. Ile liczb z $\{10, ..., 99\}$ ma dokładnie jedną liczbę równą 7? Ile ma przynajmniej jedną siódemkę? Ile ma przynajmniej jedną 7 lub 3? Ile ma przynajmniej jedną 7 i przynajmniej jedną 3?
3. Ile liczb ze zbioru $\{1, ..., 100\}$ jest podzielnych przez 3 i przez 5? Ile przez 6 i przez 9?
4. Na ile sposobów można usadzić n osób na ławce?
5. Na ile sposobów można usadzić n osób przy okrągłym stole?
6. Na ile sposobów można rozdać 52 karty po równo między 4 graczy?
7. Ile przekątnych ma n-kąt wypukły?
8. Ile jest różnych sposobów ustawienia na półce dzieła 5-tomowego tak, aby:

   a tomy I i II stały obok siebie

   b tomy I i II nie stały obok siebie?
9. Ile czteroosobowych komisji można stworzyć z grupy 9 urzędników, jeżeli wiadomo, że wśród nich są osoby A oraz B, które nie chcą razem pracować?

10. Ile jest liczb całkowitych pomiędzy 1000 a 9999, których suma cyfr wynosi dokładnie 9?

11. Na ile sposobów można podzielić $3n$ osób na n grup 3-osobowych?

12. W klasie jest n chłopców i n dziewczynek. Na ile sposobów mogą utworzyć pary do tańca.

13. Jaka jest szansa trafienia szóstki w totolotku (losujemy sześć liczb z 49)? Ile powinna wynosić kumulacja, żeby przy cenie zakładu 3zł. opłacało się zagrać?

2.2 Teoria grafów

3 Uwagi lub (p)odpowiedzi

- Część 1.3, zadanie 6.

  W tezie $\forall n \geqslant 0 (2^n \geqslant n^2)$ nie uda się udowodnić kroku indukcyjnego.

  W tezie $\forall n \geqslant 3 (2^n \geqslant n^2)$ krok indukcyjny da się udowodnić, ale nie da się udowodnić przypadek bazowy.

Literatura

[FR15] Sylvia Forman and Agnes M. Rash. *The Whole Truth About Whole Numbers: An Elementary Introduction to Number Theory*. Springer International Publishing, 2015.

[RW06] Kenneth A. Ross and Charles R. B. Wright. *Matematyka dyskretna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2006.