

# Zadania

## Matematyka I, Kognitywistyka,

Konrad Zdanowski

6 listopada 2024

### 1 Teoria liczb

#### 1.1 Faktoryzacja, gcd, lcm

1. Czy 113, 201, 213 to liczby pierwsze? ([FR15, 4.6.3, zad. 2])
2. Znajdź faktoryzację: 3465, 40 320, 14641. ([FR15])
3. Czy 1 111 111 111 jest pierwsza? ([FR15])
4. Niech  $m = 2^2 * 3^3 * 5 * 7 * 11$ ,  $n = 2 * 3 * 11$ . Wyznacz gcd, lcm. ([FR15])
5. Niech  $m = 5^2 * 7 * 11 * 13^2$ ,  $n = 2 * 3 * 7^3 * 11^2 * 13$ ,  $k = 3 * 5 * 7^2 * 11^3$ . Wyznacz  $\gcd(m, n, k)$ ,  $\text{lcm}(m, n, k)$ .
6. Czy jest nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci  $n^2 - 49$ , dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$ ? ([FR15])
7. Jeśli  $p$  jest pierwsza, to czy  $2^p - 1$  jest pierwsza? ([FR15])
8. ([FR15]) Wyznacz  $\gcd(756, 2205)$ ,  $\gcd(4725, 17460)$ ,  $\gcd(465, 3861)$ ,  $\gcd(4600, 2116)$ ,  $\gcd(630, 990)$ ,  $\gcd(96, 144)$ .  
Wyznacz  $\text{lcm}(756, 2205)$ ,  $\text{lcm}(4725, 17460)$ ,  $\text{lcm}(465, 3861)$ ,  $\text{lcm}(4600, 2116)$ ,  $\text{lcm}(630, 990)$ ,  $\text{lcm}(96, 144)$ .
9. Wyznacz wszystkie liczby, których nie dzieli żadna liczba pierwsza większa od pięciu i które mają dokładnie pięć dzielników.
10. Wyznacz wszystkie liczby, które dzielą  $5 * 7$ . Ile jest takich liczb?

## 1.2 Przystawanie modulo

1. Rozstrzygnij, czy jest prawdą

- $0 \equiv 6 \pmod{3}$ ,
- $35 \equiv 55 \pmod{9}$ ,
- $(-23) \equiv 20 \pmod{7}$
- $(-3) \equiv 3 \pmod{6}$ ,
- $(-2) \equiv 2 \pmod{3}$ ,
- $16 \equiv 185 \pmod{1}$ .

([FR15, sec. 6.1, p. 154])

2. Wyznacz wszystkie liczby  $n \in \mathbb{Z}$  takie, że  $n \equiv 2 \pmod{5}$ .

3. Czy  $(-1) \equiv 1 \pmod{2}$ ?

4. Wyznacz resztę z dzielenia liczby  $17 * 23 * 45$  przez 8. Wyznacz resztę z dzielenia liczby  $17 * 23 * 45$  przez 5.

Nie używaj kalkulatora.

5. Znajdź  $n \in \mathbb{N}$  takie, że  $n \equiv 3 \pmod{5}$  i  $n \equiv 2 \pmod{3}$ .

6. Znajdź  $n \in \mathbb{N}$  takie, że  $n \equiv 4 \pmod{4}$  i  $n \equiv 2 \pmod{5}$ .

7. Nie znajdź  $n \in \mathbb{N}$  takiego, że  $n \equiv 3 \pmod{6}$  i  $n \equiv 0 \pmod{2}$ .

Dlaczego takie  $n$  nie istnieje?

8. Nie znajdź  $n \in \mathbb{N}$  takiego, że  $n \equiv 3 \pmod{6}$  i  $n \equiv 2 \pmod{9}$ .

Dlaczego takie  $n$  nie istnieje?

9. Wyznacz wszystkie liczby, które dzielą  $5 * 7$ .

10. Korzystając z Twierdzenia Eulera ( $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ , gdy  $\gcd(a, n) = 1$ ) i Małego Twierdzenia Fermata ( $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ , dla liczby pierwszej  $p$ ) i z tego, że relacja przystawania modulo jest kongruencją względem dodawania i mnożenia, oblicz

- $3^{100} \pmod{5}$ ,

- $5^{100} \bmod 7$ ,
- $3^{100} \bmod 10$ ,
- $3^{100} \bmod 6$  (uwaga),
- $4^{100} \bmod 9$ ,
- $2^{2^{100}} \bmod 5$ ,
- $5^{5^{100}} \bmod 3$ .

### 1.3 Indukcja

1. Udowodnij  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ .
2. Udowodnij  $\sum_{i=0}^n (2i+1) = (n+1)^2$  (sumę  $n$  pierwszych liczb nieparzystych).
3. Udowodnij, dla każdego  $n \geq 1$ , dla wszystkich  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ,  $|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$ .
4. Dla dowolnego  $n \geq 1$ ,  $\forall x \in (0, 1) \ x^n \leq x$ .  
Skorzystaj z faktu, że dla dowolnych  $a, b$ , jeśli  $0 \leq a < 1$  i  $b \geq 0$ , to  $ab < b$ .
5. Udowodnij, że dla dowolnego  $n$ ,  $\sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} \leq 2$ .  
Rozważ wzmocnienie tezy, do  $\sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} \leq 2 - \frac{1}{2^n}$ .
6. Udowodnij, że dla dowolnego  $n \geq 4$ ,  $2^n \geq n^2$ .  
Której części dowodu indukcyjnego nie można przeprowadzić dla tezy  $\forall n \geq 0 \ (2^n \geq n^2)$ .  
Której części dowodu indukcyjnego nie można przeprowadzić dla tezy  $\forall n \geq 3 \ (2^n \geq n^2)$ .
7. Ciąg Fibbonacciego definiujemy jako  $F(1) = F(2) = 1$ , oraz  $F(n+2) = F(n) + F(n+1)$  dla  $n \geq 1$ .  
Udowodnij, że dla  $n \geq 1$ ,

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

8. (Nierówność Bernoulliego, uproszczony przypadek) Dla dowolnego  $n \geq 1$ ,  
 $\forall x \geq 0 \ ((1+x)^n \geq (1+nx))$ .

## 2 Matematyka dyskretna

### 2.1 Zliczania

Notacje.  $|X|$  to moc zbioru  $X$ .  $\mathcal{P}(X)$  to zbiór podzbiorów  $X$ .  $\mathcal{P}^k(X)$  to ilość  $k$  elementowych podzbiorów zbioru  $X$ , gdzie  $k \in \mathbb{N}$ .

**Twierdzenie 1.** Niech  $X, Y, Z$  zbiory skończone. Wtedy  $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$  oraz

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|.$$

**Twierdzenie 2.** Niech  $X$  będzie zbiorem skończonym o mocy (liczności)  $n$ . Wtedy  $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$ .

**Definicja 3.** Dwumian Newtona to wyrażenie  $\binom{n}{k}$ , gdzie  $0 \leq k \leq n$ , zdefiniowane jako

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ponieważ  $0! = 1$ , to  $\binom{0}{0} = 1$ .

**Twierdzenie 4.** Dla  $0 \leq k \leq n$ , ilość  $k$ -elementowych podzbiorów  $n$  elementowego to  $\binom{n}{k}$ .

Innymi słowy, jeśli  $|X| = n$ , to  $|\mathcal{P}^k(X)| = \binom{n}{k}$ .

Dwumian Newtona spełnia rekurencyjną zależność, dla  $k+1 \leq n$ ,

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

### 2.2 Teoria grafów

## 3 Uwagi lub (p)odpowiedzi

- Część 1.3, zadanie 6.

W tezie  $\forall n \geq 0 (2^n \geq n^2)$  nie uda się udowodnić kroku indukcyjnego.

W tezie  $\forall n \geq 3 (2^n \geq n^2)$  krok indukcyjny da się udowodnić, ale nie da się udowodnić przypadku bazowy.

## Literatura

- [FR15] Sylvia Forman and Agnes M. Rash. *The Whole Truth About Whole Numbers: An Elementary Introduction to Number Theory*. Springer International Publishing, 2015.