Matematyka I, Kognitywistyka, Zadania

Konrad Zdanowski

16 listopada 2024

Tekst ten zawiera listę najbardziej istotnych definicji i twierdzeń z wykładu oraz przykładowe zadania.

1 Teoria liczb

1.1 Faktoryzacja, $\gcd$, lcm

1. Czy 113, 201, 213 to liczby pierwsze? ([FR15, 4.6.3, zad. 2])

2. Znajdź faktoryzację: 3465, 40 320, 14641. ([FR15])

3. Czy 1 111 111 111 jest pierwsza? ([FR15])

4. Niech $m = 2^2 * 3^3 * 5 * 7 * 11$, $n = 2 * 3 * 11$. Wyznacz $\gcd$, lcm. ([FR15])

5. Niech $m = 5^2 * 7 * 11 * 13^2$, $n = 2 * 3 * 7^3 * 11^2 * 13$, $k = 3 * 5 * 7^2 * 11^3$. Wyznacz $\gcd(m, n, k)$, $\operatorname{lcm}(m, n, k)$.

6. Czy jest nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $n^2 - 49$, dla pewnego $n \in \mathbb{N}$? ([FR15])

7. Jeśli p jest pierwsza, to czy $2^p - 1$ jest pierwsza? ([FR15])

8. ([FR15]) Wyznacz $\gcd(756, 2205)$, $\gcd(4725, 17460)$, $\gcd(465, 3861)$, $\gcd(4600, 2116)$, $\gcd(630, 990)$, $\gcd(96, 144)$.

   Wyznacz $\operatorname{lcm}(756, 2205)$, $\operatorname{lcm}(4725, 17460)$, $\operatorname{lcm}(465, 3861)$, $\operatorname{lcm}(4600, 2116)$, $\operatorname{lcm}(630, 990)$, $\operatorname{lcm}(96, 144)$.

9. Wyznacz wszystkie liczby, których nie dzieli żadna liczba pierwsza większa od pięciu i które mają dokładnie pięć dzielników.

10. Wyznacz wszystkie liczby, które dzielą $5 * 7$. Ile jest takich liczb?

1.2 Przystawanie modulo

1. Rozstrzygnij, czy jest prawdą

   - $0 \equiv 6 \pmod 3$,
   - $35 \equiv 55 \pmod 9$,
   - $(-23) \equiv 20 \pmod 7$
   - $(-3) \equiv 3 \pmod 6$,
   - $(-2) \equiv 2 \pmod 3$,
   - $16 \equiv 185 \pmod 1 1$.

   ([FR15, sec. 6.1, p. 154])

2. Wyznacz wszystkie liczby $n \in \mathbb{Z}$ takie, że $n \equiv 2 \pmod 5$.

3. Czy $(-1) \equiv 1 \pmod 2$?

4. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $17 * 23 * 45$ przez 8. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $17 * 23 * 45$ przez 5.

   Nie używaj kalkulatora.

5. Znajdź $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n \equiv 3 \pmod 5$ i $n \equiv 2 \pmod 3$.

6. Znajdź $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n \equiv 4 \pmod 4$ i $n \equiv 2 \pmod 5$.

7. Nie znajdź $n \in \mathbb{N}$ takiego, że $n \equiv 3 \pmod 6$ is $n \equiv 0 \pmod 2$.

   Dlaczego takie n nie istnieje?

8. Nie znajdź $n \in \mathbb{N}$ takiego, że $n \equiv 3 \pmod 6$ is $n \equiv 2 \pmod 9$.

   Dlaczego takie n nie istnieje?

9. Wyznacz wszystkie liczby, które dzielą $5 * 7$.

10. Korzystając z Twierdzenia Eulera ($a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, gdy $\gcd(a, n) = 1$) i Małego Twierdzenia Fermata ($x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, dla liczby pierwszej p) i z tego, że relacja przystawania modulo jest kongruencją względem dodawania i mnożenia, oblicz

    - $3^{100} \bmod 5$,
    - $5^{100} \bmod 7$,
    - $3^{100} \bmod 10$,
    - $3^{100} \bmod 6$ (uwaga),
    - $4^{100} \bmod 9$,
    - $2^{2^{100}} \bmod 5$,
    - $5^{5^{100}} \bmod 3$.

1.3 Indukcja

1. Udowodnij $\Sigma_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Udowodnij $\Sigma_{i=0}^{n}(2i + 1) = (n + 1)^2$ (sumę n pierwszych liczb nieparzystych).

3. Udowodnij, dla każdego $n \geqslant 1$, dla wszystkich $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $|x_1 + ... + x_n| \leqslant |x_1| + ... + |x_n|$.

4. Dla dowolnego $n \geqslant 1$, $\forall x \in (0, 1)\, x^n \leqslant x$.

   Skorzystaj z faktu, że dla dowolnych a, b, jeśli $0 \leqslant a < 1$ i $b \geqslant 0$, to $ab < b$.

5. Udowodnij, że dla dowolnego n, $\Sigma_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} \leqslant 2$.

   Rozważ wzmocnienie tezy, do $\Sigma_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} \leqslant 2 - \frac{1}{2^n}$.

6. Udowodnij, że dla dowolnego $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

   Której części dowodu indukcyjnego nie można przeprowadzić dla tezy $\forall n \geqslant 0\, (2^n \geqslant n^2)$.

   Której części dowodu indukcyjnego nie można przeprowadzić dla tezy $\forall n \geqslant 3\, (2^n \geqslant n^2)$.

7. Ciąg Fibbonacciego definiujmy jako $F(1) = F(2) = 1$, oraz $F(n+2) = F(n) + F(n+1)$ dla $n \geqslant 1$.

   Udowodnij, że dla $n \geqslant 1$,

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

8. (Nierówność Bernoulliego, uproszczony przypadek) Dla dowolnego $n \geqslant 1$,

$$\forall x \geqslant 0 \, ((1+x)^n \geqslant (1+nx)).$$

2 Teoria relacji i funkcji

Definicja 1. *Niech X, Y będą dowolnymi zbiorami. Iloczyn kartezjański $X \times Y$ to zbiór par uporządkowanych postaci (a, b) gdzie $a \in X$ i $b \in Y$.*

Relacja między zbiorami X i Y to dowolny podzbiór R iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$.

Jeśli $R \subseteq X \times X$ to mówimy, że R jest relacją na X.

Zamiast pisać $(x, y) \in R$ będziemy często posługiwać się wygodniejszą notacją xRy.

Możemy wyróżnić relację pełną, równą $X \times Y$, relację pustą $\emptyset$. Wyróżniamy też relację identycznościową na X,

$$\mathrm{id}_X = \{(a, a) \colon a \in X\}.$$

Definicja 2. *Niech $R \subseteq X \times Y$. Dziedzina relacji $\mathrm{dom}(R)$ nazywamy zbiór elemntów, które występują jako lewy element pary w relacji,*

$$\mathrm{dom}(R) = \{x \in X \colon \exists y \in Y \; xRy\}.$$

Przeciwdziedzina (obraz) relacji $\mathrm{rng}(R)$ to zbiór elementów występujących jako prawy element pary w relacji,

$$\mathrm{rng}(R) = \{y \in Y \colon \exists x \in X \; xRy\}.$$

2.1 Jak możemy przedstawić relację?

Relację możemy opisać jako

1. zbiór par,
2. rysunek,
3. macierz.

Następujące własności relacji bedą dla nas istotne.

Definicja 3 (Własności relacji)**.** *Niech R będzie relacją na X. R jest*

- *zwrotna gdy* $\forall x \in X \; xRx$,
- *przeciwzwrotna gdy* $\forall x \in X \; \neg xRx$,
- *symetryczna gdy* $\forall x, y \in X (xRy \Rightarrow yRx)$,
- *przeciwsymetryczna gdy* $\forall x, y \in X (xRy \Rightarrow \neg yRx)$,
- *antysymetryczna gdy* $\forall x, y \in X (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$,
- *przechodnia gdy* $\forall x, y, z \in X (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$,
- *spójna gdy* $\forall x, y \in X (xRy \vee yRx)$.

Definicja 4 (Rodzaje relacji)**.**

- *R jest relacją równoważności gdy jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.*
- *R jest relacją (częściowego) porządku gdy jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia.*
- *R jest relacją ostrego porządku gdy jest przeciwzwrotna, przeciwsymetryczna i przechodnia.*
- *R jest relacja liniowego porządku jeśli jest relacją porządku i jest spójna (czyli dowolne dwa elementy są ze sobą porównywalne).*

Jeśli R jest relacją porządku, to S zdefiniowane jako

$$xSy \iff xRy \wedge x \neq y$$

jest odpowiadającym mu ostrym porządkiem.

Jeśli S jest relacją ostrego porządku, to R zdefiniowane jako

$$xRy \iff xSy \vee x = y$$

jest odpowiadającym mu porządkiem.

Jeśli relacja R jest relacją równoważnośći na X, to definiuje podział zbioru X na rozłączne podzbiory.

Definicja 5 (Klasa abstrakcji)**.** *Niech R będzie relacją równoważnośći na zbiorze X i niech $a \in X$. Klasa abstrakcji a względem R to zbiór elementów, które wchodzą w relację z a. Klasę abstrakcji oznaczamy przez*

$$[a]_R = \{x \in X \colon aRx\}.$$

Każde dwie różne klasy abstrakcji są rozłączne. Zbiór klas abstrakcji $\{[a]_R\}_{a\in X}$ definiuje podział zbioru X na rozłączne podzbiory.

2.2 Operacje na relacjach

Definicja 6. *Niech $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$.*

- *Relacja odwrotna*

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \colon xRy\}.$$

- *Złożenie relacji $S \circ R \subseteq X \times Z$ to relacja między X i Z zdefiniowana jako*

$$S \circ R = \{(x, z) \in X \times Z \colon \exists y \in Y (xRy \wedge yRz)\}.$$

- *Tranzytywne domknięcie relacji R to najmniejsza relacja przechodnia zawierająca R. Tranzytywne domknięcie R oznaczamy często przez R^*.*

2.3 Funkcje

Definicja 7. *Niech $R \subseteq X \times Y$. R jest funkcją jeśli*

$$\forall x \in X \forall y, z \in Y (xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z)$$

Piszemy $f \colon X \to Y$ jeśli $f \subseteq X \times Y$, f jest funkcją oraz $\mathrm{dom}(f) = X$. Jeśli $f \colon X \to Y$ i (xfy) to piszemy $f(x)$ na oznaczenie y.

Definicja 8. *Niech $f \colon X \to Y$ i $g \colon Y \to Z$.*

- *f jest injekcją (różnowartościowa, 1-1) gdy dla każdych $\forall x, y \in X(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$,*
- *f jest surjekcją („na”) gdy $\forall y \in Y \exists x \in X f(x) = y$,*
- *f jest bijekcją jeśli jest injekcją i surjekcją.*

2.4 Zadania (ChatGPT)

1. Relacja na zbiorze liczb całkowitych.

   Rozważ zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$. Zdefiniuj relację R na $\mathbb{Z}$ jako:

   $$x\,R\,y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = y.$$

   Udowodnij, że relacja R jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

2. Relacja "większe niż"

   Rozważ zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Zdefiniuj relację R na $\mathbb{N}$ jako:

   $$x\,R\,y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x > y.$$

   Sprawdź, czy relacja R jest antysymetryczna i przechodnia. Udowodnij, że ta relacja nie jest zwrotna.

3. Relacja na zbiorze osób.

   Rozważ zbiór osób $P = \{A, B, C\}$. Zdefiniuj relację R na P jako:

   $$x\,R\,y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy osoba } x \text{ jest starsza od osoby } y.$$

   Sprawdź, czy relacja R jest antysymetryczna i przechodnia. Czy relacja jest zwrotna? Uzasadnij odpowiedź.

4. Relacja podzielności.

   Rozważ zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Zdefiniuj relację R na $\mathbb{N}$ jako:

   $$x \, R \, y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x \text{ jest podzielne przez } y.$$

   Sprawdź, czy relacja R jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

5. Relacja „przyjaciele”.

   Rozważ zbiór osób P i zdefiniuj relację R na P jako:

   $$x \, R \, y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy osoby } x \text{ i } y \text{ są przyjaciółmi.}$$

   Czy relacja R jest symetryczna? Uzasadnij odpowiedź. Czy relacja R jest zwrotna? Uzasadnij odpowiedź.

6. Relacja „parzystość”,

   Rozważ zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Zdefiniuj relację R na $\mathbb{N}$ jako:

   $$x \, R \, y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy suma liczb } x \text{ i } y \text{ jest liczbą parzystą.}$$

   Sprawdź, czy relacja R jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Jeśli tak, to jakie są jej klasy abstrakcji?

7. Relacja identyczności id.

   Rozważ zbiór $S = \{1, 2, 3\}$. Zdefiniuj relację R na S jako:

   $$x \, R \, y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = y.$$

   Sprawdź, czy relacja R jest zwrotna, symetryczna, przechodnia i antysymetryczna. Jeśli R jest relacją równoważności, to jakie są jej klasy abstrakcji.

8. Relacja „wspólnej współrzędnej”.

   Rozważ zbiór punktów na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Zdefiniuj relację R na $\mathbb{R}^2$ jako:

   $$(x_1, y_1) \, R \, (x_2, y_2) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x_1 = x_2 \vee y_1 = y_2.$$

   Sprawdź, czy relacja R jest zwrotna, symetryczna, przechodnia i antysymetryczna.

9. Relacja „bycie większym lub równym”.

   Rozważ zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$. Zdefiniuj relację R na $\mathbb{Z}$ jako:

   $$x\,R\,y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x \geqslant y.$$

   Sprawdź, czy relacja R jest zwrotna, symetryczna, przechodnia i antysymetryczna.

10. Relacja na zbiorze liter.

    Rozważ zbiór liter A, B, C, D. Zdefiniuj relację R jako:

    $$x\,R\,y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy litera } x \text{ sasiąduje z } y \text{ w alfabecie.}$$

    Sprawdź, czy relacja R jest zwrotna, symetryczna, antysymetryczna i przechodnia.

11. Własności relacji na zbiorze liczb

    Niech R będzie relacją na zbiorze $A = \{1, 2, 3, 4\}$ zdefiniowaną jako aRb, jeśli $a \leqslant b$. Ustal, czy relacja R jest zwrotna, symetryczna, przechodnia.

12. Relacja podzielności

    Niech R będzie relacją na zbiorze liczb całkowitych $A = \{2, 3, 6, 9, 12\}$, gdzie aRb zachodzi, gdy a dzieli b bez reszty. Ustal, czy relacja R jest zwrotna, symetryczna, przechodnia.

13. Relacja równości modulo

    Rozważ zbiór $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz relację R zdefiniowaną jako aRb, gdy $a \equiv b \pmod 2$. Ustal, czy relacja R jest zwrotna, symetryczna, przechodnia. Jeśli tak, to jak wyglądają jej klasy abstrakcji.

14. Relacja na zbiorze punktów

    Na płaszczyźnie rozważmy zbiór punktów $A = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (1, 0), (2, 1)\}$. Zdefiniuj relację R jako $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$, jeśli $x_1 = x_2 \vee y_1 = y_2$. Ustal, czy relacja R jest zwrotna, symetryczna, przechodnia.

15. Relacja porządku

    Niech R będzie relacją na zbiorze $A = \{a, b, c\}$ zdefiniowaną jako aRb, jeśli a jest "mniejsze lub równe" od b według pewnej kolejności alfabetycznej. Sprawdź, czy relacja R jest relacją porządku częściowego. Zapisz diagram Hassego dla tej relacji.

16. Właściwości relacji na zbiorze liczb

    Rozważ zbiór $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz relację R zdefiniowaną jako aRb wtedy i tylko wtedy, gdy $a + b$ jest liczbą parzystą. Sprawdź, czy relacja R jest zwrotna, symetryczna, przechodnia.

17. Klasy abstrakcji

    Na zbiorze $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ zdefiniowana jest relacja R, gdzie aRb, jeśli $a - b$ jest podzielne przez 3. Wykaż, że R jest relacją równoważności. Wyznacz klasy abstrakcji dla tej relacji.

18. Zapis relacji w postaci macierzy

    Rozważ zbiór $A = \{1, 2, 3\}$ oraz relację R zdefiniowaną jako aRb, gdy $a + b$ jest liczbą nieparzystą. Przedstaw relację R w postaci macierzy. Na podstawie macierzy ustal, czy relacja R jest symetryczna.

3 Matematyka dyskretna

3.1 Zliczania

Notacje. $|X|$ to moc zbioru X. $\mathcal{P}(X)$ to zbiór podzbiorów X. $\mathcal{P}^{=k}(X)$ to ilość k elementowych podzbiorów zbioru X, gdzie $k \in \mathbb{N}$.

3.1.1 Zliczania zbiorów

Twierdzenie 9. *Niech X, Y, Z zbiory skończone. Wtedy $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ oraz*

$$X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| + \\ - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|.$$

Twierdzenie 10. *Niech X będzie zbiorem skończonym o mocy (liczności) n. Wtedy $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.*

Definicja 11. *Dwumian Newtona to wyrażenie $\binom{n}{k}$, gdzie $0 \leqslant k \leqslant n$, zdefiniowane jako*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ponieważ $0! = 1$, to $\binom{0}{0} = 1$.

Twierdzenie 12. *Dla $0 \leqslant k \leqslant n$, ilość k-elementowych podzbiorów n elementowego to $\binom{n}{k}$.*

Innymi słowy, jeśli $|X| = n$, to $|\mathcal{P}^{=k}(X)| = \binom{n}{k}$.

Dwumian Newtona spełnia rekurencyjną zależność, dla $k + 1 \leqslant n$,

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

3.1.2 Zliczania wyborów

Definicja 13. *Niech X będzie n elementowym zbiorem. Wtedy r-kombinacja zbioru X to r elementowy podzbiór X.*

Np. Jeśli X jest zbiorem trzech osób, $X = \{\text{ala}, \text{ola}, \text{ela}\}$, to 2-kombinacja to dowolny dwuelementowy podzbiór X, np. $\{\text{ala}, \text{ola}\}$, $\{\text{ala}, \text{ela}\}$.

Twierdzenie 14. *Niech X będzie n-elementowym zbiorem, niech $0 \leqslant r \leqslant n$. Ilość r-kombinacji X to $\binom{n}{r}$.*

Przykładowe 2-kombinacje zbioru $\{\text{ala}, \text{ela}, \text{ola}\}$, to $\{\text{ala}, \text{ela}\}$, $\{\text{ala}, \text{ola}\}$. (Uwaga, w zbiorach nie ma znaczenia kolejność wypisywania elementów.)

Definicja 15. *Niech X będzie n elementowym zbiorem . Permutacja zbioru X to sposób uporządkowania elementów X.*

Np. jeśli X jest zbiorem 3 osób, to możemy na sześć sposobów ustawić te osoby w kolejce.

Twierdzenie 16. *Ilość permutacji zbioru n elementowego, to $n!$.*

Definicja 17. *Niech X będzie zbiorem n elementowym i niech $r \leqslant n$. Wtedy, r-wariacja bez powtórzeń zbioru X to sposób na wybranie i uporządkowanie r różnych elementów z X.*

Przykładowe 2-wariacje zbioru $\{\text{ala}, \text{ela}, \text{ola}\}$, to (ala, ola), (ola, ala), (ela, ala).

Twierdzenie 18. *Ilość r-wariacji bez powtórzeń n elementowego zbioru to $\frac{n!}{(n-r)!}$.*

Definicja 19. *Niech X będzie zbiorem n elementowym i niech $r \leqslant n$. Wtedy, r-wariacja z powtórzeniami zbioru X to sposób na wybranie i uporządkowanie r elementóW z X, gdy elementy mogą się powtarzać.*

Przykładowe 2-wariacje z powtórzeniami zbioru $\{\text{ala}, \text{ela}, \text{ola}\}$, to (ala, ala), (ola, ala), (ala, ola), (ola, ola).

Twierdzenie 20. *Ilość r-wariacji z powtórzeniami n elementowego zbioru to n^r.*

Jeśli losujemy kule tak jak w totolotku, to jest to kombinacja (kolejność wylosowania nie ma znaczenia). Jeśli losujemy r ponumerowanych kul i układamy je w rządek (bez zwracania do worka), to mamy wariację bez powtórzeń. Jeśli zapisujemy wyniki kolejnych losowań a same kule wrzucamy z powrotem do worka, to mamy wariację z powtórzeniami.

Dodatkowo, jeśli umieszczamy n takich samych przedmiotów w r różnych pudełkach, to możemy zrobić to na $\binom{n+r-1}{r-1}$ sposobów.

Na przykład, jeśli mamy 1, 2, 5 i 10 groszówki, to możemy wybrać z nich 10 moment na $\binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3}$ sposobów.

Twierdzenie 21 (Zasada szufladkowa)**.** *Niech $n \geqslant m \geqslant 1$. Jeśli n przedmiotów umieścimy w m pudełkach, to będzie pudełko, w którym znajdzie się przynajmniej $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ przedmiotów.*

Wniosek 22. *Jeśli $n + 1$ przedmiotów umieścimy w n pudełkach, gdzie $n \geqslant 1$, to w pewnym pudełku znajdą się przynajmniej dwa przedmioty.*

3.1.3 Zadania

1. Zad. ([RW06], Cw. 5.3.1, p.302) Wśród 200 osób 150 uprawia pływanie lub jogging lub oba sporty. 85 uprawia pływanie, 60 uprawia pływanie i jogging. Ile osób pływa?

   Czy informacja o ilości wszystkich osób była istotna?

2. Zad. Ile liczb z $\{10, ..., 99\}$ ma dokładnie jedną liczbę równą 7? Ile ma przynajmniej jedną siódemkę? Ile ma przynajmniej jedną 7 lub 3? Ile ma przynajmniej jedną 7 i przynajmniej jedną 3?

3. Ile liczb ze zbioru $\{1, ..., 100\}$ jest podzielnych przez 3 i przez 5? Ile przez 6 i przez 9?

4. Na ile sposobów można usadzić n osób na ławce?
5. Na ile sposobów można usadzić n osób przy okrągłym stole?
6. Na ile sposobów można rozdać 52 karty po równo między 4 graczy?
7. Ile przekątnych ma n-kąt wypukły?
8. Ile jest różnych sposobów ustawienia na półce dzieła 5-tomowego tak, aby:

   a tomy I i II stały obok siebie

   b tomy I i II nie stały obok siebie?
9. Ile czteroosobowych komisji można stworzyć z grupy 9 urzędników, jeżeli wiadomo, że wśród nich są osoby A oraz B, które nie chcą razem pracować?
10. Ile jest liczb całkowitych pomiędzy 1000 a 9999, których suma cyfr wynosi dokładnie 9?
11. Na ile sposobów można podzielić $3n$ osób na n grup 3-osobowych?
12. W klasie jest n chłopców i n dziewczynek. Na ile sposobów mogą utworzyć pary do tańca.
13. Jaka jest szansa trafienia szóstki w totolotku (losujemy sześć liczb z 49)? Ile powinna wynosić kumulacja, żeby przy cenie zakładu 3zł. opłacało się zagrać?
14. Na ile sposobów można przejść z lewego górnego do prawego dolnego pola szachownicy, jeśli możemy poruszać się tylko w prawo i w dół?
15. Na ile sposobów można odwiedzić wszystkie wierzchołki w grafie pełnym o n wierzchołkach? Na ile sposobów można to zrobić, ale tak, żeby wrócić do punktu wyjścia?
16. Ile jest możliwych wyników rzutu dwiema rozróżnialnymi kostkami do gry?

    Ile jest takich wyników, jeśli nie rozróżniamy kostek?

    Jaka jest szansa na wyrzucenie w sumie 12 oczek? Jaka jest szansa na wyrzucenie dwóch szóstek? Jaka jest szansa na wyrzucenie w sumie 11?

    Jak jest szansa na wyrzucenie w sumie 7? Jak jest szansa na wyrzucenie w sumie 8?

17. Układamy ośmio literowe hasło z 26 liter alfabetu. Ile jest haseł, jeśli symbole mogą się powtarzać. Ile jest takich haseł, w których musi wystąpić przynajmniej jedna samogłoska (a, e, o, u, i). Ile jest haseł, w których musi wystąpić przynajmniej jedna samogłoska i przynajmniej jedna spółgłoska.

18. W worku jest 20 kul ponumerowanych od 1 do 20. Losujemy (bez zwracania) pięć kul. Jaka jest szansa, że wylosujemy tylko kule o numerach parzystych? Jaka jest szansa, że wylosujemy przynajmniej jedną kulę o numerze parzystym? Jaka jest szansa, że wylosujemy przynajmniej jedną kulę o numerze parzystym i przynajmniej jedną kulę o numerze nieparzystym.

    Jak zmieni sie odpowiedź, jeśli będziemy zwracali po wylosowaniu kule do worka?

3.2 Zadania z ChatGPT

3.2.1 Zasada szufladkowa

1. W klasie jest 26 uczniów, którzy przynieśli na zajęcia 10 różnych książek. Udowodnij, że co najmniej trzech uczniów przyniosło tę samą książkę.

2. W grupie liczącej 13 osób udowodnij, że przynajmniej dwie osoby obchodzą urodziny w tym samym miesiącu.

3. Mamy dany zbiór 10 liczb naturalnych z zakresu od 1 do 18. Udowodnij, że istnieją dwie liczby w zbiorze, których różnica wynosi co najwyżej 2.

4. Pięciu przyjaciół ma razem 25 monet. Udowodnij, że przynajmniej jedna osoba ma co najmniej 5 monet.

5. Na okręgu rozmieszczono 9 punktów. Udowodnij, że istnieją dwa punkty, których odległość (mierząc po łuku) nie jest większa niż 40 stopni.

6. 30 jabłek rozdzielono pomiędzy 8 koszyków. Udowodnij, że przynajmniej w jednym koszyku znajduje się co najmniej 4 jabłka.

7. Wybieramy 8 różnych liczb całkowitych spośród liczb $2, 4, 6, \ldots, 20$. Udowodnij, że wśród wybranych liczb istnieją dwie, których różnica wynosi 4.

8. Na biurku znajduje się 12 długopisów w trzech różnych kolorach. Udowodnij, że przynajmniej cztery długopisy mają ten sam kolor.

9. W prostokącie umieszczono 6 punktów. Udowodnij, że można wybrać dwa punkty, których odległość jest mniejsza lub równa połowie długości przekątnej prostokąta.

10. Mamy 7 klocków, każdy o masie całkowitej (w kilogramach) z zakresu od 1 do 12 kg. Udowodnij, że można wybrać dwa klocki, których masy różnią się o co najwyżej 2 kg.

3.2.2 Permutacje

1. Ile różnych słów można utworzyć, przestawiając litery w słowie "KOT"?

2. Ile różnych słów można utworzyć, przestawiając litery w słowie "MAMA"?

3. Czworo dzieci siada w jednym rzędzie na 4 miejscach. Na ile sposobów mogą się usiąść?

4. Na ile różnych sposobów pięć osób może usiąść przy okrągłym stole?

3.2.3 Kombinacje

1. Z grupy 10 osób wybieramy drużynę składającą się z 4 osób. Na ile sposobów można wybrać drużynę?

2. Na półce znajduje się 8 różnych książek. Ile sposobów jest na wybranie 3 książek, które zamierzasz przeczytać?

3. Sześcioro przyjaciół chce się podzielić na trzy dwuosobowe zespoły. Na ile sposobów można utworzyć takie zespoły?

3.2.4 Wariacje bez powtórzeń i z powtórzeniami

1. Z grupy 5 uczniów wybieramy trzech, którzy zajmą miejsca na podium (złoto, srebro, brąz). Na ile sposobów można to zrobić?

2. Do zamka szyfrowego wybieramy 3-cyfrowy kod, gdzie cyfry nie mogą się powtarzać, a do wyboru mamy cyfry od 1 do 5. Na ile sposobów można ustawić taki kod?

3. Na półce mamy 7 różnych książek. Na ile sposobów możemy wybrać i ustawić trzy z nich?

4. Na ile sposobów można utworzyć 3-literowe "słowa" z liter A, B, C, przy czym litery mogą się powtarzać?

5. Tworzymy czterocyfrowy kod PIN, przy czym każda cyfra może być dowolnie powtórzona, a do wyboru mamy cyfry od 0 do 9. Na ile sposobów można stworzyć taki PIN?

6. Mamy do wyboru trzy kolory kulek: czerwony, zielony i niebieski. Na ile sposobów można ułożyć pięć kulek, jeśli mogą być one tego samego koloru?

7. Na ile sposobów można utworzyć liczbę 2-cyfrową, wybierając cyfry spośród 1, 2, 3, 4, przy czym cyfry mogą się powtarzać?

3.3 Teoria grafów

Do uzupełnienia.

4 Uwagi lub (p)odpowiedzi

- Część 1.2, zadanie 10. Aby policzyć np. $3^{5^100} \bmod 7$ trzeba wykorzystać twierdzenie Eulera, moulo równego 7 i równego 6. Zauważmy, że $\varphi(7) = 6$, $\varphi(6) = 2$. Po pierwsze, jeśli przedstawimy $5^{100} = 6k + i$, gdzie $0 \leqslant i < 6$, to
$$3^{6k+i} \equiv (3^6)^k 3^i \equiv 1^k 3^i \equiv 3^i \pmod 7.$$
Teraz, aby sprawdzić, jaka jest reszta z dzielenia 5^100 przez 6, czyli aby znaleźć i takie, że
$$5^{100} \equiv i \pmod 6.$$
Ponieważ 5 jest względnie pierwsze z 6, z twierdzenia Eulera mamy $5^2 \equiv 1 \pmod 6$. Wtedy
$$5^100 \equiv (5^2)^{50} \equiv 1^{50} \equiv 1 \pmod 6.$$
Skoro szukana wartość i wynosi 1, to
$$3^{5^100} \equiv 3^1 \equiv 3 \pmod 7.$$

- Część 1.3, zadanie 6.

  W tezie $\forall n \geqslant 0 (2^n \geqslant n^2)$ nie uda się udowodnić kroku indukcyjnego.

  W tezie $\forall n \geqslant 3 (2^n \geqslant n^2)$ krok indukcyjny da się udowodnić, ale nie da się udowodnić przypadek bazowy.

Literatura

[FR15] Sylvia Forman and Agnes M. Rash. *The Whole Truth About Whole Numbers: An Elementary Introduction to Number Theory*. Springer International Publishing, 2015.

[RW06] Kenneth A. Ross and Charles R. B. Wright. *Matematyka dyskretna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2006.