

Zadania

Matematyka I, Kognitywistyka,

Konrad Zdanowski

4 listopada 2024

1 Teoria liczb

1.1 Faktoryzacja, gcd, lcm

1. Czy 113, 201, 213 to liczby pierwsze? ([FR15, 4.6.3, zad. 2])
2. Znajdź faktoryzację: 3465, 40 320, 14641. ([FR15])
3. Czy 1 111 111 111 jest pierwsza? ([FR15])
4. Niech $m = 2^2 * 3^3 * 5 * 7 * 11$, $n = 2 * 3 * 11$. Wyznacz gcd, lcm. ([FR15])
5. Niech $m = 5^2 * 7 * 11 * 13^2$, $n = 2 * 3 * 7^3 * 11^2 * 13$, $k = 3 * 5 * 7^2 * 11^3$. Wyznacz $\gcd(m, n, k)$, $\text{lcm}(m, n, k)$.
6. Czy jest nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $n^2 - 49$, dla pewnego $n \in \mathbb{N}$? ([FR15])
7. Jeśli p jest pierwsza, to czy $2^p - 1$ jest pierwsza? ([FR15])
8. ([FR15]) Wyznacz $\gcd(756, 2205)$, $\gcd(4725, 17460)$, $\gcd(465, 3861)$, $\gcd(4600, 2116)$, $\gcd(630, 990)$, $\gcd(96, 144)$.
Wyznacz $\text{lcm}(756, 2205)$, $\text{lcm}(4725, 17460)$, $\text{lcm}(465, 3861)$, $\text{lcm}(4600, 2116)$, $\text{lcm}(630, 990)$, $\text{lcm}(96, 144)$.
9. Wyznacz wszystkie liczby, których nie dzieli żadna liczba pierwsza większa od pięciu i które mają dokładnie pięć dzielników.
10. Wyznacz wszystkie liczby, które dzielą $5 * 7$. Ile jest takich liczb?

1.2 Przystawanie modulo

1. Rozstrzygnij, czy jest prawdą

- $0 \equiv 6 \pmod{3}$,
- $35 \equiv 55 \pmod{9}$,
- $(-23) \equiv 20 \pmod{7}$
- $(-3) \equiv 3 \pmod{6}$,
- $(-2) \equiv 2 \pmod{3}$,
- $16 \equiv 185 \pmod{1}$.

([FR15, sec. 6.1, p. 154])

2. Wyznacz wszystkie liczby $n \in \mathbb{Z}$ takie, że $n \equiv 2 \pmod{5}$.

3. Czy $(-1) \equiv 1 \pmod{2}$?

4. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $17 * 23 * 45$ przez 8. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $17 * 23 * 45$ przez 5.

Nie używaj kalkulatora.

5. Znajdź $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n \equiv 3 \pmod{5}$ i $n \equiv 2 \pmod{3}$.

6. Znajdź $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n \equiv 4 \pmod{4}$ i $n \equiv 2 \pmod{5}$.

7. Nie znajdź $n \in \mathbb{N}$ takiego, że $n \equiv 3 \pmod{6}$ i $n \equiv 0 \pmod{2}$.

Dlaczego takie n nie istnieje?

8. Nie znajdź $n \in \mathbb{N}$ takiego, że $n \equiv 3 \pmod{6}$ i $n \equiv 2 \pmod{9}$.

Dlaczego takie n nie istnieje?

9. Wyznacz wszystkie liczby, które dzielą $5 * 7$.

10. Korzystając z Twierdzenia Eulera ($a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, gdy $\gcd(a, n) = 1$) i Małego Twierdzenia Fermata ($x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, dla liczby pierwszej p) i z tego, że relacja przystawania modulo jest kongruencją względem dodawania i mnożenia, oblicz

- $3^{100} \pmod{5}$,

- $5^{100} \bmod 7$,
- $3^{100} \bmod 10$,
- $3^{100} \bmod 6$ (uwaga),
- $4^{100} \bmod 9$,
- $2^{2^{100}} \bmod 5$,
- $5^{5^{100}} \bmod 3$.

1.3 Indukcja

1. Udowodnij $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Udowodnij $\sum_{i=0}^n (2i+1) = (n+1)^2$ (sumę n pierwszych liczb nieparzystych).
3. Udowodnij, dla każdego $n \geq 1$, dla wszystkich $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$.
4. Dla dowolnego $n \geq 1$, $\forall x \in (0, 1) \ x^n \leq x$.
Skorzystaj z faktu, że dla dowolnych a, b , jeśli $0 \leq a < 1$ i $b \geq 0$, to $ab < b$.
5. Udowodnij, że dla dowolnego n , $\sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} \leq 2$.
Rozważ wzmocnienie tezy, do $\sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} \leq 2 - \frac{1}{2^n}$.
6. Udowodnij, że dla dowolnego $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.
Której części dowodu indukcyjnego nie można przeprowadzić dla tezy $\forall n \geq 0 \ (2^n \geq n^2)$.
Której części dowodu indukcyjnego nie można przeprowadzić dla tezy $\forall n \geq 3 \ (2^n \geq n^2)$.
7. Ciąg Fibbonacciego definiujemy jako $F(1) = F(2) = 1$, oraz $F(n+2) = F(n) + F(n+1)$ dla $n \geq 1$.
Udowodnij, że dla $n \geq 1$,

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

8. (Nierówność Bernoulliego, uproszczony przypadek) Dla dowolnego $n \geq 1$,
 $\forall x \geq 0 \ ((1+x)^n \geq (1+nx))$.

2 Uwagi lub (p)odpowiedzi

- Część 1.3, zadanie 6.

W tezie $\forall n \geq 0 (2^n \geq n^2)$ nie uda się udowodnić kroku indukcyjnego.

W tezie $\forall n \geq 3 (2^n \geq n^2)$ krok indukcyjny da się udowodnić, ale nie da się udowodnić przypadek bazowy.

Literatura

- [FR15] Sylvia Forman and Agnes M. Rash. *The Whole Truth About Whole Numbers: An Elementary Introduction to Number Theory*. Springer International Publishing, 2015.