Zadania
Matematyka I, Kognitywistyka,

Konrad Zdanowski

31 października 2024

1 Teoria liczb

1.1 Faktoryzacja, gcd, lcm

1. Czy 113, 201, 213 to liczby pierwsze? ([**?**, 4.6.3, zad. 2])

2. Znajdź faktoryzację: 3465, 40 320, 14641. ([**?**])

3. Czy 1 111 111 111 jest pierwsza? ([**?**])

4. Niech $m = 2^2 * 3^3 * 5 * 7 * 11$, $n = 2 * 3 * 11$. Wyznacz gcd, lcm. ([**?**])

5. Niech $m = 5^2 * 7 * 11 * 13^2$, $n = 2 * 3 * 7^3 * 11^2 * 13$, $k = 3 * 5 * 7^2 * 11^3$. Wyznacz $\mathrm{gcd}(m, n, k)$, $\mathrm{lcm}(m, n, k)$.

6. Czy jest nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $n^2 - 49$, dla pewnego $n \in \mathbb{N}$? ([**?**])

7. Jeśli p jest pierwsza, to czy $2^p - 1$ jest pierwsza? ([**?**])

8. ([**?**]) Wyznacz $\mathrm{gcd}(756, 2205)$, $\mathrm{gcd}(4725, 17460)$, $\mathrm{gcd}(465, 3861)$, $\mathrm{gcd}(4600, 2116)$, $\mathrm{gcd}(630, 990)$, $\mathrm{gcd}(96, 144)$.

   Wyznacz $\mathrm{lcm}(756, 2205)$, $\mathrm{lcm}(4725, 17460)$, $\mathrm{lcm}(465, 3861)$, $\mathrm{lcm}(4600, 2116)$, $\mathrm{lcm}(630, 990)$, $\mathrm{lcm}(96, 144)$.

9. Wyznacz wszystkie liczby, których nie dzieli żadna liczba pierwsza większa od pięciu i które mają dokładnie pięć dzielników.

10. Wyznacz wszystkie liczby, które dzielą $5 * 7$. Ile jest takich liczb?

1.2 Przystawanie modulo

1. Rozstrzygnij, czy jest prawdą
   - $0 \equiv 6 \pmod 3$,
   - $35 \equiv 55 \pmod 9$,
   - $(-23) \equiv 20 \pmod 7$
   - $(-3) \equiv 3 \pmod 6$,
   - $(-2) \equiv 2 \pmod 3$,
   - $16 \equiv 185 \pmod 1 1$.

   ([**?**, sec. 6.1, p. 154])

2. Wyznacz wszystkie liczby $n \in \mathbb{Z}$ takie, że $n \equiv 2 \pmod 5$.

3. Czy $(-1) \equiv 1 \pmod 2$?

4. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $17 * 23 * 45$ przez 8. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $17 * 23 * 45$ przez 5.

   Nie używaj kalkulatora.

5. Znajdź $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n \equiv 3 \pmod 5$ i $n \equiv 2 \pmod 3$.

6. Znajdź $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n \equiv 4 \pmod 4$ i $n \equiv 2 \pmod 5$.

7. Nie znajdź $n \in \mathbb{N}$ takiego, że $n \equiv 3 \pmod 6$ is $n \equiv 0 \pmod 2$.

   Dlaczego takie n nie istnieje?

8. Nie znajdź $n \in \mathbb{N}$ takiego, że $n \equiv 3 \pmod 6$ is $n \equiv 2 \pmod 9$.

   Dlaczego takie n nie istnieje?

9. Wyznacz wszystkie liczby, które dzielą $5 * 7$.

10. Korzystając z Twierdzenia Eulera ($a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$, gdy $\gcd(a, n) = 1$) i Małego Twierdzenia Fermata ($x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, dla liczby pierwszej p) i z tego, że relacja przystawania modulo jest kongruencją względem dodawania i mnożenia, oblicz
    - $3^{100} \bmod 5$,

- $5^{100} \bmod 7$,
- $3^{100} \bmod 10$,
- $3^{100} \bmod 6$ (uwaga),
- $4^{100} \bmod 9$,
- $2^{2^{100}} \bmod 5$,
- $5^{5^{100}} \bmod 3$.

1.3 Indukcja

1. Udowodnij $\Sigma_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Udowodnij $\Sigma_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$ (sumę n pierwszych liczb nieparzystych).
3. Udowodnij, dla każdego $n \geqslant 1$, dla wszystkich $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $|x_1 + ... + x_n| \leqslant |x_1| + ... + |x_n|$.
4. Dla dowolnego $n \geqslant 1$, $\forall x \in (0,1)\ x^n \leqslant x$.

   Skorzystaj z faktu, że dla dowolnych a, b, jeśli $0 \leqslant a < 1$ i $b \geqslant 0$, to $ab < b$.
5. Udowodnij, że dla dowolnego n, $\Sigma_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} \leqslant 2$.

   Rozważ wzmocnienie tezy, do $\Sigma_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} \leqslant 2 - \frac{1}{2^n}$.
6. Udowodnij, że dla dowolnego $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

   Której części dowodu indukcyjnego nie można przeprowadzić dla tezy $\forall n \geqslant 0\, (2^n \geqslant n^2)$.

   Której części dowodu indukcyjnego nie można przeprowadzić dla tezy $\forall n \geqslant 3\, (2^n \geqslant n^2)$.
7. Ciąg Fibbonacciego definiujmy jako $F(1) = F(2) = 1$, oraz $F(n+2) = F(n) + F(n+1)$ dla $n \geqslant 1$.

   Udowodnij, że dla $n \geqslant 1$,
   $$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$
8. (Nierówność Bernoulliego, uproszczony przypadek) Dla dowolnego $n \geqslant 1$,
   $$\forall x \geqslant 0\, ((1+x)^n \geqslant (1+nx)).$$

2 Uwagi lub (p)odpowiedzi

- Część **??**, zadanie **??**.

  W tezie $\forall n \geqslant 0 (2^n \geqslant n^2)$ nie uda się udowodnić kroku indukcyjnego.

  W tezie $\forall n \geqslant 3 (2^n \geqslant n^2)$ krok indukcyjny da się udowodnić, ale nie da się udowodnić przypadek bazowy.