ESCUELA PROFESIONAL CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

Matemática Aplicada a la Computación.

Tema: Base y dimensión

Prof. Adha Morales

Apellidos y Nombres: Cuevas Apaza Kathia Yerardine   Fecha: 20/09/25

Resolver los siguientes ejercicios:

1. Determine si el conjunto S es un generador del espacio vectorial $\mathbb{V}$

(1.f.) $S = \{x^2+2x-3,\ 2x^2-x-4,\ x^2+7x-5\}$ y $\mathbb{V} = \mathbb{P}_2[x]$

i) Sea $P(x) = ax^2+bx+c \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

$$0x^2+0x+0 = \alpha(x^2+2x-3)+\beta(2x^2-x-4)+\gamma(x^2+7x-5)$$
$$= \alpha x^2+2\beta x^2+\gamma x^2+2\alpha x-\beta x+7\gamma x-3\alpha-4\beta-5\gamma$$
$$0x^2+0x+0 = x^2\underbrace{(\alpha+2\beta+\gamma)}_{0}+x\underbrace{(2\alpha-\beta+7\gamma)}_{0}\underbrace{-3\alpha-4\beta-5\gamma}_{0}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\2&-1&7&0\\-3&-4&-5&0\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&-5&5&0\\0&2&-2&0\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&1&-1&0\\0&2&-2&0\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right] \begin{array}{l}\to \alpha+2\beta+\gamma=0\\ \to \beta=\gamma\\ \\ \end{array}$$

$\to \alpha+2\beta+\beta = \alpha+3\beta=0 \to \alpha=-3\beta$
$\to \beta=\gamma$ } SCI

$\therefore$ El conjunto S es LD

Como S es LD, no es una base de $\mathbb{V}$

(1.h) $S = \left\{\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&-1\\0&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&4\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ y $\mathbb{V} = \{A \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid A$ es triangular superior$\}$

i) Sea $M(x) = \begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ ∧ triangular superior

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1&-1\\0&3\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}1&4\\0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha+\beta+\gamma & -\alpha-\beta+4\gamma\\ 0 & 2\alpha+3\beta\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ -\alpha-\beta+4\gamma=0\\ 2\alpha+3\beta=0\end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\-1&-1&4&0\\2&3&0&0\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&0&5&0\\0&1&-2&0\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&-2&0\\0&0&1&0\end{array}\right]$$

$\to \alpha+\beta+\gamma=0 \to \alpha=0$
$\to \beta-2\gamma=0 \to \beta=0$
$\to \gamma=0$

$\alpha=\beta=\gamma=0$ $\therefore$ El conjunto S es LI

$\Rightarrow \dim(V)=3$

S es base de $\mathbb{V}$, por lo tanto si es generador

2. Determinar si el conjunto de polinomio B es una base para $\mathbb{P}_3[x]$

(2.c) $B = \{2+3x-2x^2+2x^3,\ -x+4x^2,\ 1-x^3,\ 3-2x+3x^2-2x^3\}$

i) Es generador sustentando que el conjunto $B = 4$ elementos.

ii) (Forma por la determinante)

$$M = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & -1 & -3/2 & -13/2 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 13/2 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 13/2 \\ 0 & 0 & -5 & -20 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{vmatrix} = (-2)(-5) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 13/2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 13/2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (10)(3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 13/2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 30$$

$\det(M) = 30 \neq 0$,
$\therefore$ los vectores son L.I.
$\therefore B$ es una base para $P_2[X]$

(2.e) $B = \{x^3 + 3x^2, -2x^3 - 3x^2 + x\}$

i) $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{P}_3[x]$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = \alpha(x^3 + 3x^2) + \beta(-2x^3 - 3x^2 + x)$$
$$= \alpha x^3 - 2\beta x^3 + 3\alpha x^2 - 3\beta x^2 + \beta x$$

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = a \\ 3\alpha - 3\beta = b \\ \beta = c \\ 0 = d \end{cases}$$

$\times$ Solo generamos polinomios sin término independiente.

$\therefore B$ no es generador de $\mathbb{P}_3[X] \Rightarrow$ no es una base

(3. c) Determina el valor de α para que el vector v pertenezca al subespacio de $\mathbb{R}^3$ generando por el conjunto G.

$v = (-3, -2, \alpha^2 - 3\alpha + 1)$ y $G = \{(-1, -1, 1), (2, 1, 0), (3, 1, \alpha + 1)\}$

$v = \alpha_1(-1, -1, 1) + \alpha_2(2, 1, 0) + \alpha_3(3, 1, \alpha + 1)$

$$\begin{cases} -a_1 + 2a_2 + 3a_3 = -3 \\ -a_1 + a_2 + a_3 = -2 \\ a_1 + 0 + a_3(\alpha + 1) = \alpha^2 - 3\alpha + 1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & \alpha+1 & \alpha^2 - 3\alpha + 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} +1 & -2 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & \alpha+1 & \alpha^2 - 3\alpha + 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha+4 & \alpha^2 - 3\alpha - 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & \alpha+4 & \alpha^2 - 3\alpha - 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha^2 - 3\alpha \end{array}\right]$$

$\rightarrow \theta - 2\beta - 3\gamma = 3 \rightarrow \theta = 3 + 2\beta + 3\gamma$

$\rightarrow \beta + 2\gamma = -1 \rightarrow \beta = -1 - 2\gamma$

$\rightarrow \gamma = \dfrac{\alpha^2 - 3\alpha}{\alpha} = \alpha - 3 \quad \wedge \alpha \neq 0$

$\rightarrow 0 = 1 + 4\alpha + 10 + 3\alpha + 9 = -\alpha + 4$

$\rightarrow \beta = -1 - 2\alpha + 6 = -2\alpha + 5$

$\rightarrow \gamma = \alpha - 3 \quad \wedge \quad \alpha \neq 0$

∴ Para todo $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, $v \in$ subespacio G

7. En los siguientes ejercicios determine una base del espacio vectorial $\mathbb{V}$ y su dimensión.

(7.c) $\mathbb{V} = \{\underbrace{(x,y,z,t)}_{\mathbb{R}^4} \;/ x = z,\; y = -t\}$

* i) $(x,y,z,t) = (z, -t, z, t) = z(1,0,1,0) + t(0,-1,0,1)$

$B = \{(1,0,1,0); (0,-1,0,1)\}$ ∴ B es generador

* ii) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Ran (A) = 2 = Nro de variables ∴ es LCD } es LI

∴ B es generador y es LI $\Rightarrow$ B es una base de V, Dim (V) = 2

(7.g) $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + 3z + 3t = 0,\; x + 3y + 4z + 5t = 0\}$, $\mathbb{V} = S + T$

* i) $-\begin{cases} x + 2y + 3z + 3t = 0 & \dots (1) \\ x + 3y + 4z + 5t = 0 \end{cases}$ ↳ reemplazamos 'y' en (1)

$y + z + 2t = 0$

$y = -z - 2t$

$x = -2y - 3z - 3t = -2(-z-2t) - 3z - 3t = 2z + 4t - 3z - 3t$

$x = t - z$

$(x,y,z,t) = (t - z, -z - 2t, z, t)$

$= z(-1,-1,1,0) + t(1,-2,0,1)$

$B_s = \{(-1,-1,1,0); (1,-2,0,1)\}$ ∴ B es generador

* ii) $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Ran (A) = 2 = # de variables ∴ es LCD, es LI

* iii) $T = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0,\; -x + z + t = 0\}$, $\mathbb{V} = S + T$

$x = z + t$

$x + y + z = 0 \Rightarrow y = -x - z = -z - t - z = -2z - t$

$(x,y,z,t) = (z + t, -2z - t, z, t) = z(1,-2,1,0) + t(1,-1,0,1)$

$B_T = \{(1,-2,1,0); (1,-1,0,1)\}$ ∴ B es generador

∴ Dim (S) = 2

$*$ iv) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Ran (A) = 2 = # de variables

$\therefore$ es LCD, es L.I

$\therefore$ Dim (T) = 2

$*$ v) $W = S + T$

$\{(-1,-1,1,0);(1,-2,0,1)\}$ $\{(1,-2,1,0);(1,-1,0,1)\}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & +1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Base de $W = S + T = \{(-1,-1,1,0);(1,-2,0,1);(1,-2,1,0);(1,-1,0,1)\}$

Dim (W) = 4

(7.k) $V = \text{gen}\{(1,2,-4,1);(-1,3,-6,4);(-2,-4,8,-2);(-3,-1,2,2)\}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & -1 \\ -4 & -6 & 8 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -10 & 0 & -10 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Ran (A) = 2

#filas = 4

2 < 4

2 vectores son LI

Base de V:

$B = \{(1,2,-4,1);(-1,3,-6,4)\}$ y Dim (V) = 2

8. Sea $W = \{p(x) \in \mathbb{P}_2[x] / p(-3) = p(1)\}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{P}_2[x]$. Halle una base para W e indique su Dim (W).

$q(x) = ax^2 + bx + c \quad \in \mathbb{P}_2[x]$

$p(-3) = p(1)$

$a(-3)^2 + b(-3) + c = a(1)^2 + b(1) + c$

$9a - 3b + \cancel{c} = a + b + \cancel{c}$

$8a = 4b \Rightarrow b = 2a \quad \Rightarrow q(x) = ax^2 + 2ax + c$

$q(x) = a(x^2 + 2x) + c(1)$ $\therefore$ es generador

$B = \{(x^2+2x), 1\}$

$\alpha(x^2+2x) + \beta = 0x^2 + 0x + 0$

$\alpha x^2 + 2\alpha x + \beta = 0x^2 + 0x + 0$

$\alpha = 0$

$\beta = 0 \quad \therefore \alpha = \beta = 0 \quad \therefore B$ es L.I.

Base de $W = \{x^2+2x, 1\}$ y Dim (W) = 2

9. Obtenga una base y la dimensión para el espacio solución $\mathbb{W}$ del sistema homogéneo.

9.b
$$\begin{cases} x-4y+z=0 \\ -2x+2y-3z=0 \\ -3x+6y-4z=0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -4 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow x-4y+z=0 \rightarrow x=4y+6y=10y \\ \rightarrow -6y-z=0 \rightarrow z=-6y \end{array}$$

$$(x,y,z) = (10y, y, -6y) = y(10, 1, -6)$$

Base de $\mathbb{W} = \{(10, 1, -6)\}$

Dim $\mathbb{W} = 1$