Задание №5
Рекурсивные числовые вычисления

1. Общая постановка задачи

На языке Standard ML опишите реализацию функции `f5`, реализующую вычисление функции двух аргументов в соответствии с Вашим вариантом. Функция должна представлять собой подсчёт суммы первых `n` слагаемых ряда, являющегося разложением в ряд некоторой функции. Для проверки результата вычислений исходная функция прилагается к заданию.

При описании функции `f5` должны быть явно прописаны типы аргументов и тип результата. Сигнатура функции `int * real -> real`.

В функции ни одно выражение (подвыражение) не должно вычисляться дважды. В случае необходимости такого вычисления нужно связать значение вычисленного выражения с некоторым локальным именем для дальнейшего использования.

По возможности, в функции не должно определяться имён, используемых только один раз. Если с именем связано значение некоторого выражения, то это имя должно использоваться не менее двух раз. Можно сделать исключение из этого правила, если введение дополнительного имени снижает громоздкость выражений и/или добавляет ясности в логику программы.

Реализация функции должна предполагать, что в ходе вызова параметры заданы корректно (не следует добавлять реализацию «защиты от дурака»).

В файле с программой приведите несколько вызовов функции `f5`, демонстрирующих корректную работу в различных ситуациях.

Файлу с программой дайте имя `task5-NN.sml`, где вместо NN — номер вашего варианта. Полученный файл загрузите на портал в качестве решения задания.

Вспомогательные функции и значения (если они необходимы для решения) должны определяться только в качестве локальных. Результат загрузки файла с решением в интерпретатор — только определение функции `f5`. Дополнительно может быть определена функция для проверки правильности подсчёта суммы ряда.

Не следует делать предположений насчёт задания, не сформулированных явно в условии. Если возникают сомнения — задайте вопрос на форуме «Язык Standard ML».

2. Пример выполнения задания

0. $S(x,n) = \dfrac{4+3}{12} + \dfrac{4^2+(-3)^2}{12^2}x + \dfrac{4^3+(-3)^3}{12^3}x^2 + \dfrac{4^{n+1}+(-3)^{n+1}}{12^{n+1}}x^n$;
$\lim\limits_{n\to\infty} S(x,n) = \dfrac{7}{12-x-x^2}$

Решение: Содержимое файла `task5-00.sml`:

```
fun f5 (x : real, n : int) : real =
  let
    (* Вспомогательная функция, реализующая цикл *)
    fun f5Iter ( i : int          (* счетчик слагаемых *)
               , accum : real     (* аккумулятор суммы *)
               , fourDeg : real   (* степень четверки *)
               , threeDeg : real (* степень тройки *)
               , sign : real      (* знак степени тройки в числителе *)
               , xDeg : real )    (* степень икса *)
               :real =
      if i > n then accum
      else
        f5Iter ( i + 1
               , accum
                 + (fourDeg - sign * threeDeg) / (fourDeg * threeDeg) * xDeg
               , fourDeg * 4.0
               , threeDeg * 3.0
               , sign * ~1.0
               , xDeg * x )
  in
    (* передаем во вспомогательную функцию параметры первого слагаемого *)
    f5Iter (0, 0.0, 4.0, 3.0, ~1.0, 1.0)
  end

(* функция для проверки результата разложения в ряд *)
fun f5Test (x : real) : real = 7.0 / (12.0 - x - x * x)

val test11 = f5 (0.3, 100)
val test12 = f5Test 0.3

val test21 = f5 (0.9, 100)
val test22 = f5Test 0.9

val test31 = f5 (1.8, 100)
val test32 = f5Test 1.8
```

Текст примера (файл `task5-00.sml`) можно загрузить с портала.

3. Необходимый минимум

Для выполнения работы потребуются сведения о следующих функциях, операциях и конструкциях:

- конструкции **`fun`** и **`val`** для определения функций и переменных
- конструкция **`if...then...else...`**
- конструкция **`let...in...end`**
- конструктор кортежа `( , )`
- арифметические операции `+`, `-`, `*`, `/`
- логические операции **`orelse`**, **`andalso`**, `not`
- операции сравнения `<`, `>`, `=`, `<>`, `<=`, `>=`
- функции модуля `Math` (только в функции для проверки результата вычислений и в тестах).

Нельзя использовать конструкции и функции, не перечисленные в этом разделе (за исключением функций собственного сочинения). Если вы считаете, что для выполнения какого-то из заданий необходима функция/конструкция, отсутствующая в перечислении, то задайте вопрос на форуме «Язык Standard ML»;

4. Варианты заданий

1. $S(x,n) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$;
$\lim\limits_{n\to\infty} S(x,n) = e^x$

2. $S(x,n) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dots \pm \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$
$\lim\limits_{n\to\infty} S(x,n) = \sin x$

3. $S(x,n) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \dots \pm \dfrac{x^{2n}}{(2n)!};$
$\lim\limits_{n\to\infty} S(x,n) = \cos x$

4. $S(x,n) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dots \pm \dfrac{x^n}{n};$
$\lim\limits_{n\to\infty} S(x,n) = \ln(1+x)$

5. $S(x,n) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \dots \pm \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1};$
$\lim\limits_{n\to\infty} S(x,n) = \operatorname{arctg} x$

6. $S(x,n) = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \dots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$
$\lim\limits_{n\to\infty} S(x,n) = \operatorname{sh} x$

7. $S(x,n) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \dots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!};$
$\lim\limits_{n\to\infty} S(x,n) = \operatorname{ch} x$

8. $S(x,n) = \dfrac{2}{2!}x^2 - \dfrac{2^3}{4!}x^4 + \dfrac{2^5}{6!}x^6 - \dots \pm \dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n};$
$\lim\limits_{n\to\infty} S(x,n) = \sin^2 x$

9. $S(x,n) = -\dfrac{3^2}{2!} + \dfrac{3^4}{4!}x^2 - \dfrac{3^6}{6!}x^4 + \dots \pm \dfrac{3^{2n+2}}{(2n+2)!}x^{2n};$
$\lim\limits_{n\to\infty} S(x,n) = \dfrac{\cos 3x - 1}{x^2}$

10. $S(x,n) = -(5-4) - \dfrac{5^2+(-4)^2}{2}x - \dfrac{5^3+(-4)^3}{3}x^2 - \dots - \dfrac{5^{n+1}+(-4)^{n+1}}{n+1}x^n;$
$\lim\limits_{n\to\infty} S(x,n) = \ln(1-x-20x^2)$

11. $S(x,n) = -\dfrac{4}{2^3} + \dfrac{6}{2^4}(1-x) - \dfrac{4}{2^5}(1-x)^2 + \dfrac{6}{2^6}(1-x)^3 - \dots \pm \dfrac{5-(-1)^{n+1}}{2^{n+3}}(1-x)^n;$
$\lim\limits_{n\to\infty} S(x,n) = \dfrac{x+2}{x^2-2x-3}$

12. $S(x,n) = x + \dfrac{1}{2\cdot 3}x^3 + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \dots + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \cdots\ \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ \cdots\ \cdot(2n)(2n+1)}x^{2n+1};$
$\lim\limits_{n\to\infty} S(x,n) = \arcsin x$

13. $S(x,n) = x - \dfrac{2}{6}x^2 + \dfrac{2\cdot 5}{6\cdot 9}x^3 - \dots \pm \dfrac{2\cdot 5\cdot\ \cdots\ \cdot(3N-4)}{6\cdot 9\cdot\ \cdots\ \cdot 3n}x^n;$
$\lim\limits_{n\to\infty} S(x,n) = 3\sqrt[3]{1+x} - 3$

14. $S(x,n) = \dfrac{x(x+2)}{2!} - \dfrac{x^3(x+4)}{4!} + \dfrac{x^5(x+6)}{6!} - \dots \pm \dfrac{x^{2n-1}(x+2n)}{(2n)!};$
$\lim\limits_{n\to\infty} S(x,n) = \sin x - \cos x + 1$

15. $S(x,n) = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1\cdot 5}{4\cdot 8}x^2 + \dfrac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}x^3 - \dots \pm \dfrac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ \cdots\ \cdot(4n-3)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot\ \cdots\ \cdot 4n}x^n;$
$\lim\limits_{n\to\infty} S(x,n) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt[4]{1+x}}$

16. $S(x,n) = \dfrac{3x^2}{4!} - \dfrac{5x^4}{6!} + \dfrac{7x^6}{8!} + \dots \pm \dfrac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+2)!};$
$\lim\limits_{n\to\infty} S(x,n) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1 - \cos x - x\sin x}{x^2}$

17. $S(x,n)=\frac{1}{3}x-\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}x^2+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}x^3-\dots\pm\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ \cdots\ \cdot(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot\ \cdots\ \cdot 3n}x^n;$
$\lim\limits_{n\to\infty}S(x,n)=1-\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$

18. $S(x,n)=\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^4}{6!}+\frac{x^6}{8!}-\frac{x^8}{10!}+\dots\pm\frac{x^{2n}}{(2n+2)!};$
$\lim\limits_{n\to\infty}S(x,n)=\frac{1}{2}+\frac{\cos x}{x^2}$

19. $S(x,n)=1-\frac{3}{2}x+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}x^2-\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\dots\pm\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ \cdots\ (2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ \cdots\ \cdot 2n}x^n;$
$\lim\limits_{n\to\infty}S(x,n)=\frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}}$

20. $S(x,n)=\frac{(2x)^2}{2!}-\frac{(2x)^4}{4!}+\frac{(2x)^6}{6!}-\dots\pm\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!};$
$\lim\limits_{n\to\infty}S(x,n)=2\sin^2 x$

21. $S(x,n)=\frac{1}{2}x-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\dots\pm\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \cdots\ \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ \cdots\ \cdot 2n}x^n;$
$\lim\limits_{n\to\infty}S(x,n)=1-\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

22. $S(x,n)=\frac{x}{3!}-\frac{x^3}{5!}+\frac{x^5}{7!}-\frac{x^7}{9!}+\dots\pm\frac{x^{2n-1}}{(2n+1)!};$
$\lim\limits_{n\to\infty}S(x,n)=\frac{x-\sin x}{x^2}$

23. $S(x,n)=1-\frac{5}{2}x+\frac{5\cdot 7}{2\cdot 4}x^2-\frac{5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\dots\pm\frac{5\cdot 7\cdot 9\cdot\ \cdots\ \cdot(2n+3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ \cdots\ \cdot 2n}x^n;$
$\lim\limits_{n\to\infty}S(x,n)=\frac{1}{\sqrt{(1+x)^5}}$

24. $S(x,n)=\frac{2x}{1!}-\frac{3x^2}{2!}+\frac{4x^3}{3!}-\frac{5x^4}{4!}+\dots\pm\frac{(n+1)x^n}{n!};$
$\lim\limits_{n\to\infty}S(x,n)=xe^{-x}-e^{-x}+1$

25. $S(x,n)=x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8}x^4+\dots\pm\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \cdots\ \cdot(2n-3)}{4\cdot 6\cdot 8\cdot\ \cdots\ \cdot 2n}x^n;$
$\lim\limits_{n\to\infty}S(x,n)=2\sqrt{1+x}-2$