Problem dystrybucji towarów z najwcześniejszymi i najpóźniejszymi terminami dostaw

Dawid Ryznar, Krzystof Zielonka

24 październik 2012

Opis problemu (orginalny)

Jako firma transportowa mamy dostarczyć towary do miast. Każde miasto ma ustaloną kare za spóźnienie lub przybycie zawcześnie. Przemieszczenia się między miastami trwa pewną liczbę czasu. Należy znalęść ciąg miast, dla którego ciężarówka odwiedza każde miasto i minimalizujący sumę kar jaką trzeba zapłacić za zbyt wczesne lub zbyt późne przybycie.

Nasze założenia

- Ciężarówka ma nieskończoną pojemność (jest w stanie zabrać towary dla wszystkich miast).
- Dla każdego miasta mamy funkcje kary od czasu (ogólniejszy wariant kar).
- Czas jest w postaci liczby naturalnej (np liczba sekund).
- Znamy pewne górne ogranicznie czasowe, które okresla maksymalny czas przejazdu.
- Rozładunek i załadunek nie wymaga czasu.
- W kązdym miesic możemy czekać dowolną liczbe czasu znim wyładujemy towar.
- Znamy wierzchołek startowy (magazyn).

Instancja problemu

Miastom przyporządkowujmey numery. Instancją problemu jest para:

$$P = \langle T, p \rangle \tag{1}$$

Macierz czasu przajazdów

$$T = [t_{ij}]_{n \times n} \tag{2}$$

Kwadratowa maciarz gdzie element t_{ij} to czas potrzebny na przejazd najszybszą drogą z miasta i do j.

Funkcja kary

$$p : N \to N \to R \tag{3}$$

Funkcja kary, przyjmująca kolejno numer miasta, czas rozładunku i zwracająca karę w postaci liczby rzeczywistej.

Problem dystrybucji towarów z najwcześniejszymi i najpóźniejszymi terminami dostaw

Opis problemu

- Pełny graf ważony z n wierzchołkami,
- Wyróżniony jeden wierzchołek startowy v_{start}
- Wprowadzmy funckje kary p jaką trzeba zapłacić za dostarczenie towaru w czasie t do pewnego miasta (bardziej ogólny wariant, miasta mogą nadawać kary bardziej swobodnie oraz mogą nadawać nagorody)
- Każda krawędź ma przyparzadkowany czas potrzebny na jej pokonanie.
- Dodatkowo zakładamy, że w każdym mieście możemy przeczekać pewien okres czasu.
- Dla uproszczenie zakładamy, że jest pewne górne ograniczenie na czas potrzebny na pokonaniem trasy. Jeżeli rozwiązanie potrzebuje więcej czasu zakładamy, że jest ono nieakceptowalne.

Problem dystrybucji towarów z najwcześniejszymi i najpóźniejszymi terminami dostaw

Opis problemu

Przez *DT* oznaczmy problem dystrybucji towarów:

$$DT = \langle V, w, p, t_{max} \rangle \tag{4}$$

$$t : V \to N \tag{5}$$

$$p : V \times N \to R \tag{6}$$

w – przyporządkowuje krawędziom wagi (czasy podróży)

p – funckja kary, dla danego wierzchołka i czasu przybcia zwraca kare w postaci liczby rzeczywistej

t_{max} – górne ograniczenie na czas potrzebny na pokonaniem dystansu

Nierówność trójkąta

$$a < b + c \ \wedge \ b < a + c \ \wedge \ c < a + b \tag{7}$$

- Zakładamy, że dany czas przejazdu między dowolnymi dwoma miastami to średni czas potrzebny na pokonanie najszybszej trasy łączącej te dwa miasta.
- Dzięki temu założeniu graf dla miast spełnia nierówność trójkąta czyli:

$$\forall_{a,b,c \in V} t(\{a, c\}) < t(\{a, b\}) + t(\{b, c\}) \tag{8}$$

- Eleminujemy możliwość rozwiązania gdzie miasta mogą sie powtarzać, jeżeli mamy dostarczyć towar do miasta b, a znajdujemy sie w mieścia a to najszybsza droga między tymi miastami zajmuje $t(\{a, b\})$.

Problem dystrybucji towarów z najwcześniejszymi i najpóźniejszymi terminami dostaw

Cel

- **Celem** jest znalezienie ścieżki startującej w x, która minimalizuje sumę wartości funkcji F i G oraz długość ścieżki,

Problem dystrybucji towarów z najwcześniejszymi i najpóźniejszymi terminami dostaw

Cel

- **Celem** jest znalezienie ścieżki startującej w x, która minimalizuje sumę wartości funkcji F i G oraz długość ścieżki,
- Problem dystrybucji towarów z najwcześniejszymi i najpóźninejszymi terminami dostaw redukuje się do NP-zupełnego "Problemu Podziału na Podzbiory" [ang. *SPP - Set Partitioning Problem*],

Rozwiązanie

* Rozwiązanie zawiera wszystkie wierzchołki. ** Rozwiązanie nie zawiera cykli:

- Krawędzie spełniają nierówność trójkąta
- Przed rozładunkiem może przeczekać w danym mieście dowolny okres czasu nie płacąc żadnej kary

Rozwiązaniem jest permutacja wierzchołków z V.

Problem dystrybucji towarów z najwcześniejszymi i najpóźniejszymi terminami dostaw

Funkcja celu

$$F : V^n \to R \tag{9}$$

$$F(v_1 \cdots v_n) = C(v_1, \cdots, V_n, 0) \tag{10}$$

$$C : V^m \times t \to R \quad \text{gdzie } m > 0 \tag{11}$$

$$C(v,t) = \begin{cases} p(v,t) & \text{gdy } t < t_{max} \\ +inf & \text{wpp} \end{cases} \tag{12}$$

$$C(v_1, \cdots, v_n, t) = \min_{t \le t_c \le t_{max}} \{C(v_2, \cdots, v_n, t_c + w(v_1, v_2)) + p(t_c)\} \tag{13}$$

Problem dystrybucji towarów z najwcześniejszymi i najpóźniejszymi terminami dostaw

Przestrzeń poszukiwań

- W celu znalezienia rozwiązania instancji problemu dystrybucji towarów z najwcześniejszymi i najpóźninejszymi terminami dostaw, musimy rozważać zbiory wszystkich możliwych scieżek zaczynających się w x, w pełnym grafie.

Problem dystrybucji towarów z najwcześniejszymi i najpóźniejszymi terminami dostaw

Przestrzeń poszukiwań

- W celu znalezienia rozwiązania instancji problemu dystrybucji towarów z najwcześniejszymi i najpóźninejszymi terminami dostaw, musimy rozważać zbiory wszystkich możliwych scieżek zaczynających się w x, w pełnym grafie.
- Dla grafu n wierzchołkowego mamy

Problem dystrybucji towarów z najwcześniejszymi i najpóźniejszymi terminami dostaw

Przestrzeń poszukiwań

- W celu znalezienia rozwiązania instancji problemu dystrybucji towarów z najwcześniejszymi i najpóźninejszymi terminami dostaw, musimy rozważać zbiory wszystkich możliwych scieżek zaczynających się w x, w pełnym grafie.
- Dla grafu n wierzchołkowego mamy
- tutaj jebnać trzeba wzór