

Problem dystrybucji towarów z najwcześniejszymi i najpóźniejszymi terminami dostaw

Dawid Ryznar, Krzysztof Zielonka

5 Grudnia 2012

Opis problemu (originalny)

Jako firma transportowa mamy dostarczyć towary do miast. Każde miasto ma ustaloną karę za spóźnienie lub przybycie zawczasie. Przemieszczenie się między miastami trwa pewną liczbę czasu. Należy znaleźć ciąg miast, dla którego ciężarówka odwiedza każde miasto i minimalizujący sumę kar jaką trzeba zapłacić za zbyt wczesne lub zbyt późne przybycie.

- Ciężarówka ma nieskończoną pojemność. Jest w stanie zabrać towary dla wszystkich miast
- Dla każdego miasta mamy funkcje kary od czasu. Ogólniejszy wariant kar
- Czas jest w postaci liczby naturalnej np. liczba sekund
- Znamy pewne górne ograniczenie czasowe, które określa maksymalny czas przejazdu
- Rozładunek i załadunek nie wymaga czasu
- W każdym mieście możemy czekać dowolną liczbę czasu zanim wyładujemy towar
- Znamy wierzchołek startowy (magazyn)

- Pełny graf ważony z n wierzchołkami
- Wyróżniony jeden wierzchołek startowy v_{start}
- Wprowadzmy funkcje kary p jaką trzeba zapłacić za dostarczenie towaru w czasie t do pewnego miasta (bardziej ogólny wariant, miasta mogą nadawać kary bardziej swobodnie oraz mogą nadawać nagrody)
- Każda krawędź ma przyporzadkowany czas potrzebny na jej pokonanie
- Dodatkowo zakładamy, że w każdym mieście możemy przeczekać pewien okres czasu
- Dla uproszczenia zakładamy, że jest pewne górne ograniczenie na czas potrzebny na pokonaniem trasy. Jeżeli rozwiązanie potrzebuje więcej czasu zakładamy, że jest ono nieakceptowalne

$$DT = \langle V, w, p, t_{max} \rangle \quad (1)$$

$$t : V \rightarrow N \quad (2)$$

$$p : V \times N \rightarrow R \quad (3)$$

w – przyporządkowuje krawędziom wagi (czasy podróży)

p – funkcja kary, dla danego wierzchołka i czasu przybycia zwraca karę w postaci liczby rzeczywistej

t_{max} – górne ograniczenie na czas potrzebny na pokonaniem dystansu

Instancja problemu

Miastom przyporządkowujemy kolejno numery $2, \dots, n$. Dla uproszczenia będziemy zakładać, że magazyn zawsze ma numer 1. Instancją problemu jest para:

$$P = \langle T, p \rangle \quad (4)$$

Macierz czasu przjazdów

$$T = [t_{ij}]_{n \times n} \quad (5)$$

Kwadratowa macierz gdzie element t_{ij} to czas potrzebny na przejazd najszybszą drogą z miasta i do j .

Funkcja kary

$$p : N \rightarrow N \rightarrow R \quad (6)$$

Funkcja kary, przyjmująca kolejno numer miasta, czas rozładunku i zwracająca karę w postaci liczby rzeczywistej.

W grafie miast, wierzchołki interpretujemy jako miasta, a wagi na krawędziach jako czasy potrzebne na przedostanie się z jednego miasta do drugiego. Czas na krawędzi $\{u, v\}$ jest najszybszym czasem potrzebnym na przedostanie się z miasta u do v .

- Graf miast spełnia nierówność trójkąta

$$a < b + c \wedge b < a + c \wedge c < a + b \quad (7)$$

$$\forall_{a,b,c \in V} t(\{a, c\}) < t(\{a, b\}) + t(\{b, c\}) \quad (8)$$

- Graf miast jest grafem pełnym

Jeżeli graf niespełnia jednego z powyższych założeń to możemy go do takiego przekonwertować wywołując dla każdego wierzchołka *BFS*.

$$a < b + c \wedge b < a + c \wedge c < a + b \quad (9)$$

- Zakładamy, że dany czas przejazdu między dowolnymi dwoma miastami to średni czas potrzebny na pokonanie najszybszej trasy łączącej te dwa miasta
- Dzięki temu założeniu graf dla miast spełnia nierówność trójkąta czyli:

$$\forall_{a,b,c \in V} t(\{a, c\}) < t(\{a, b\}) + t(\{b, c\}) \quad (10)$$

- Eliminujemy możliwość rozwiązania gdzie miasta mogą się powtarzać, jeżeli mamy dostarczyć towar do miasta b , a znajdujemy się w mieście a to najszybsza droga między tymi miastami zajmuje $t(\{a, b\})$

Rozwiązania dopuszczalne

Rozwiązaniem dopuszczalnym (spełniającym warunki zadania) jest permutacja liczb $1, \dots, n$.

Uzasadnienie

- W rozwiązaniu muszą znaleźć się wszystkie miasta. (definicja problemu)
- W rozwiązaniu miasta nie mogą się powtarzać. (nierówność trójkąta + założenie o nieskończonej ładowności ciężarówki + możliwość czekania w dowolnym mieście)
- W rozwiązaniu nie uwzględniamy magazynu. (to jest punkt startowy i końcowy + założenie o nieskończonej ładowności ciężarówki)

$$F : N^n \rightarrow R \quad (11)$$

$$F(v_1 \cdots v_n) = C(v_1, \cdots V_n, 0) \quad (12)$$

$$C : N^m \times N \rightarrow R \quad \text{gdzie } m > 0 \quad (13)$$

$$C(v, t) = \begin{cases} p(v, t) & \text{gdzy } t < t_{\max} \\ +inf & \text{wpp} \end{cases} \quad (14)$$

$$C(v_1, \dots, v_n, t) = \min_{t \leq t_c \leq t_{\max}} \{C(v_2, \dots, v_n, t_c + t_{1,2}) + p(v_1, t_c)\} \quad (15)$$

Złożoność problemu

Złożoność problemu

Problem dystrybucji towarów jest NP trudny. Udowodnimy to konstruując wielomianową redukcję problemu komiwojażera do problemu dystrybucji towarów.

Problem komiwojażera

Mamy dany pełny ważony graf G . Rozwiązaniem problemu jest minimalny cykl Hamiltona na tym grafie.

Dowód

Data: G -graf pełny wazony, w - funkcja wagowa

Result: trojka $\langle T, p, t_{max} \rangle$

f – funkcja przyporządkowująca wierzchołkom grafu kolejne liczby naturalne

g – funkcja przyporządkowująca krawędziom kolejne liczby naturalne

$$p(v, t) = \lambda(v, t) \rightarrow \sum_{\{u, v\} \in E} (2^{g(\{u, v\})} \& t) \cdot w(\{u, v\})$$

forall $v, u \in V$ **do**

$$T[f(v), f(u)] = 2^{g(\{v, u\})}$$

end

$$t_{max} = \sum_{i=1}^{|V|} w(f(v_{i-1}), f(v_i))$$

return $\langle T, p, t_{max} \rangle$

Algorytm konstrukcyjny

Opis algorytmu konstrukcyjnego

Algorytm konstrukcyjny oparliśmy o algorytm Local Search. Sąsiadów wybieramy wykorzystując wszystkie możliwe transpozycje.

Local Search

Data: x – initial node

Result: *best_neighbour* – the best local node

current = none

best_neighbor = x

repeat

current = *best_neighbour*

neighbours = find all neighbours of *current*

best_neighbour = select best from *neighbours* \cup {*current*}

until $F(\text{best_neighbour}) == F(\text{current})$;

return *best_neighbour*

Neighbors

Data: x – current node

Result: neighbours – set of x 's neighbours

$neighbours = \emptyset$

forall $1 \leq i, j \leq n \wedge i < j$ **do**

$neighbours \cup = x_1 \cdots x_{i-1}, x_j, x_{i+1} \cdots x_{j-1}, x_i, x_{j+1} \cdots x_n$

end

return neighbours

Algorytm konstrukcyjny dla problemu dystrybucji towarów

Data: T, p, t_{max}, x – initial node

Result: $best_neighbor$ – best local neighbour

$current = none$

$best_neighbor = x$

repeat

$current = best_neighbor$

$neighbours = Neighbours(x) \cup \{current\}$

$best_neighbour = \text{select best from } neighbours$

until $F(best_neighbour) == F(current)$;

return $best_neighbor$

Symulowane wyżarzanie [ang. *Simulated Annealing*]

Rodzaj algorytmu heurystycznego przeszukującego przestrzeń alternatywnych rozwiązań problemu w celu wyszukiwania rozwiązań najlepszych. Jest wariantem metody przeszukiwania lokalnego [ang. *Local Search*]. Ogólny szkic działania algorytmu symulowanego wyżarzania:

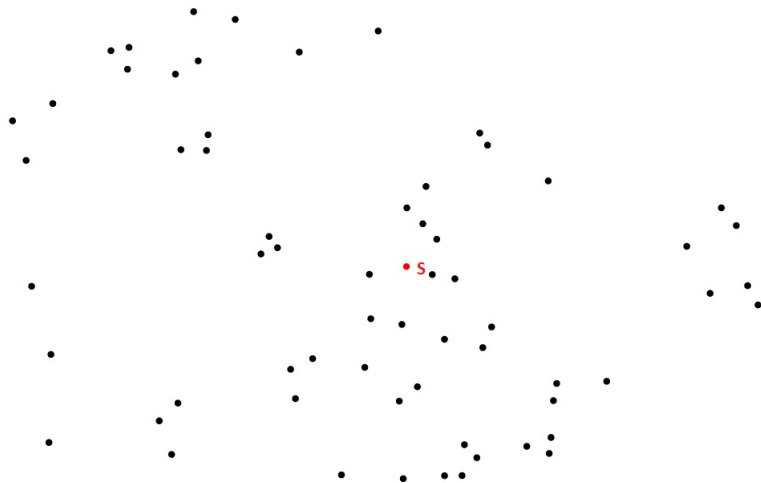
- 1 losowy wybór punktu startowego
- 2 losowy wybór sąsiada
- 3 odpowiednia akceptacja sąsiada
- 4 po każdej iteracji temperatura zostaje zaktualizowana:

$$T = n \cdot T \wedge n \in (0, 1)$$

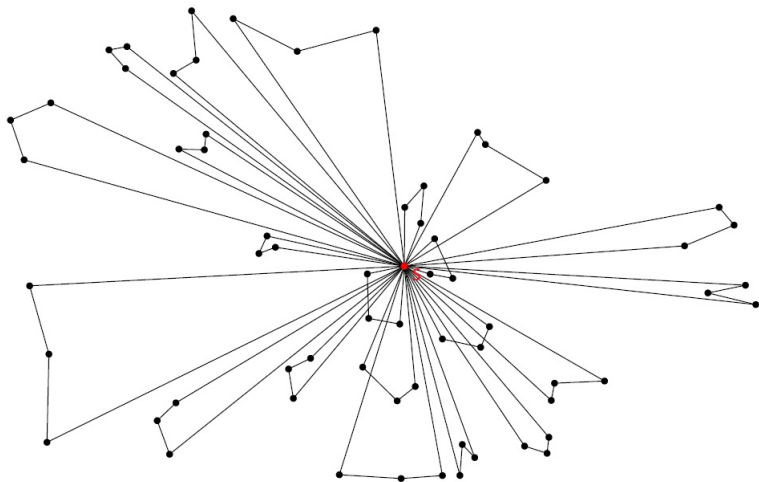
- 5 algorytm zatrzymuje się gdy w ciągu ustalonej liczby iteracji nie uda się osiągnąć lepszego wyniku

Symulowane wyżarzanie [ang. *Simulated Annealing*]

n – długość permutacji **while** $k = 0$ **to** n^3 **do**
end



Symulowane wyżarzanie [ang. *Simulated Annealing*]



Przykładowe optymalne rozwiązanie DP z magazynem w centralnym punkcie.

Symulowane wyżarzanie [ang. *Simulated Annealing*]

```
1  create an initial old_solution as the set of random routes of size 3;  
2  best_solution := old_solution;  
3  equilibrium_counter := 0;           # set the equilibrium counter  
4  T := cost (best_solution) / 1000;  # initial temperature of annealing  
5  repeat  
6      for iteration_counter := 1 to  $n^2$  do  
7          annealing_step (old_solution, best_solution);  
8      end for;  
9      T := T ·  $\alpha$ ;                 # temperature reduction  
10     equilibrium_counter := equilibrium_counter + 1;  
11 until equilibrium_counter > 20;
```

Sekwencyjny algorytm symulowanego wyżarzania dla DP.

Symulowane wyżarzanie [ang. *Simulated Annealing*]

```
1  procedure annealing_step (old_solution, best_solution);
2      select randomly a customer;
3      select randomly a route (distinct from the customer's route selected above)
        from the set containing the routes of the old_solution and an empty
        route;
4      if the route size is less than 3 then
5          create the new_solution by moving the customer into the chosen route;
6      else
7          select randomly a customer in the route;
8          create the new_solution by exchanging the selected customers between
                their routes;
9      end if;
10      $\delta := \text{cost}(\text{new\_solution}) - \text{cost}(\text{old\_solution})$ ;
11     generate random  $x$  uniformly in the range  $(0, 1)$ ;
12     if  $(\delta < 0)$  or  $(x < T/(T + \delta))$  then
13         old_solution := new_solution;
14         if  $\text{cost}(\text{new\_solution}) < \text{cost}(\text{best\_solution})$  then
15             best_solution := new_solution;
16             equilibrium_counter := 0;
17         end if;
18     end if;
19 end annealing_step;
```

Procedura implementująca jeden krok wyżarzania.