Aukcje kombinatoryczne

Piotr Rzepecki, Krzysztof Zielonka

5 lutego 2013

1 Wstęp

1.1 Opis problemu

W aukcjach kombinatorycznych (ang. combinatorial auction) przedmiotem handlu jest wiele towarów. Uczestnicy mogą składać oferty na zbiory towarów i te oferty są niepodzielne, tzn. muszą być przyjęte w całości lub w całości odrzucone. Problem wyznaczania zbioru ofert przyjętych maksymalizujących przychód w takiej aukcji jest w ogólnym przypadku NP trudnym problemem kombinatorycznym.

1.2 Dane i rozwiązania

Dane to liczba towarów n i m ofert, gdzie każda oferta to lista towarów i proponowana za nią cena. Oferty te są niepodzielne, a każdy przedmiot może zostać kupiony tylko raz.

Rozwiązaniem nazywamy zbiór ofert, w którym żadne dwie oferty nie zawierają tego samego przedmiotu.

1.3 Funkcja celu

Funkcją celu jest suma wartości ze zbioru A wybranych ofert (przy czym zbiór ten spełnia wymagania zadania i oferty są niesprzeczne).

$$f(A) = \sum_{a \in A} cena(a) \tag{1}$$

1.4 Reprezentacja danych

Naturalną reprezentacją byłby zbiór identyfikatorów ofert (liczb naturalnych) które zostały wybrane (w szczególności oferty te powinny być niesprzeczne). Ta reprezentacja nie pozwala jednak na efektywne stosowanie operatorów genetycznych i nie nadawała się do zastosowania w algorytmie ewolucyjnym.

Postanowiliśmy wypróbować dwa rodzaje kodowania rozwiązania:

- wektor binarny,
- permutacja liczb naturalnych.

Oba rozwiązania wymagały dodatkowej modyfikacji funkcji celu która na bieżąco odrzucała sprzeczne oferty (w związku z tym obliczenie wartości funkcji przystosowania danego osobnika stało się bardziej złożone czasowo).

1.5 Dane testowe

Do generowania danych testów korzystamy z generatora CATS. Jest on najbardziej popularnym narzędziem dla tego problemu i jak twierdzi autor generuje dane zbliżone dla realnych problemów tego typu.

2 Rozwiązanie przy użycia wektora binarnego

2.1 Reprezentacja rozwiązania

Reprezentacja za pomocą wektora binarnego w której jedynkę interpretujemy jako ofertę możliwą do zaakceptowania, a zero za jej definitywne odrzucenie. W szczególności, wartość 1 nie oznacza, że oferta zostanie zaakceptowana ze względu na możliwy konflikt z inną ofertą (dzięki temu zyskujemy to, że każdy osobnik w populacji koduje poprawne rozwiązanie).

Taka reprezentacja pozwoliła nam zastosować algorytm PBIL do rozwiązania tego problemu.

2.2 Funkcja celu

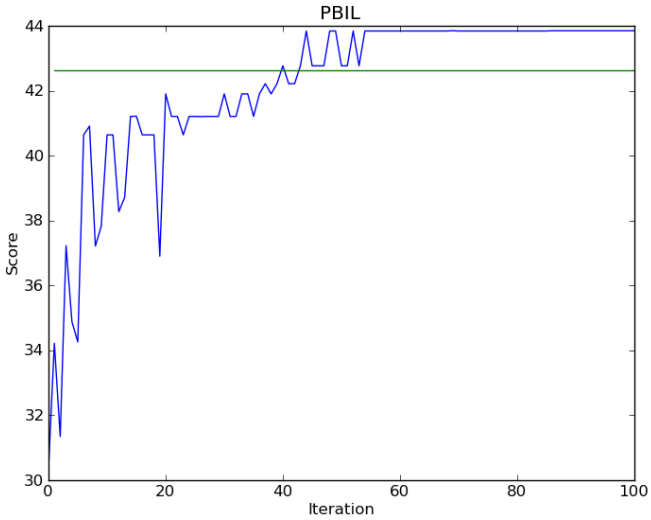
Funkcja celu analizuje wektor binarny rozwiązania od lewej do prawej, akceptując kolejne oferty których bit ustawiony jest na 1. W przypadku wykrycia sprzeczności z wcześniej zaakceptowaną ofertą jest ona pomijana.

2.3 Rozwiązanie

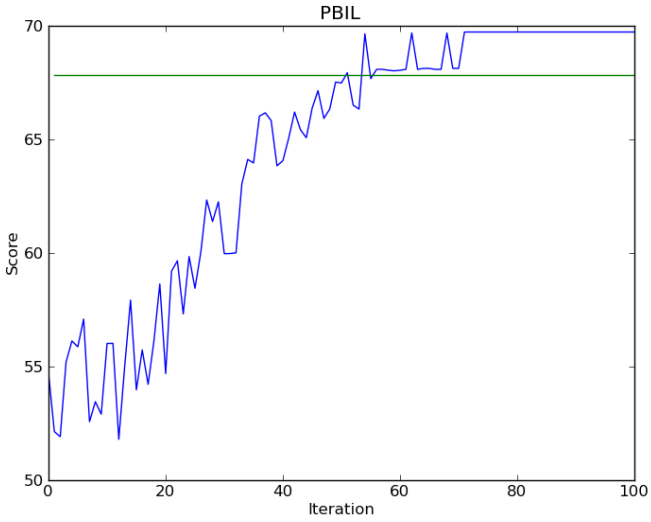
Do rozwiązania tego problemu użyliśmy algorymu PBIL. Współczyniki uczenia, prawdopodobieństwa mutacji i zaburzenia podczas mutacji ustawiliśmy kolejno na 0.2, $\frac{1}{\text{liczba ofert}}$ i 0.1. Liczbę iteracji ustawialiśmy na 100, a populację na 20.

2.4 Wyniki

Wyniki zaprezentowane są na wykresach poniżej (1, 2). Niebieską linią oznaczyliśmy najepszego osobnika dla algorytmu PBIL w danej iteracji. Zielona linia oznacza najlepszy wynik algorytmu losowego, który wybierał najlepszy element ze zbioru osobników o mocy równej liczbie elementów przetwarzanych przez algorytm PBIL.



Rysunek 1: Wykres dla problemu 'matching' z 20 ofertami i 100 towarami.



Rysunek 2: Wykres dla problemu 'matching' z 40 ofertami i 100 towarami.

3 Rozwiązanie przy użyciu permutacji

3.1 Reprezentacja rozwiązania

Rozwiązaniem problemu jest permutacja liczb naturalnych długości równej liczbie ofert. Za oferty przyjęte jako zaakceptowane wybieramy zgodnie z kolejno-

ścią występowania w permutacji z pominięciem tych, których towary pokrywały się z towarami innej oferty występującej wcześniej.

3.2 Funkcja celu

Zgodnie z reprezentacją sumujemy ceny tych ofert, które zostały zaakceptowane. Przeglądamy permutacje od lewej do prawej i wybieramy te oferty, których towary nie zostały wykupione przez wcześniejsze oferty. Koszt obliczenia funkcji przystosowania dla jednego osobnika jest zatem taki sam jak w przypadku reprezentacji za pomocą wektora binarnego.

3.3 Rozwiązanie

Do rozwiązania tego problemu użyliśmy algorytmu SGA. Jego parametry dobraliśmy ostatecznie na 200 iteracji i populację o rozmiarze 100 osobników.

3.3.1 Krzyżowanie

Do krzyżowania użyliśmy lekko zmodyfikowanego algorytmu PMX. Założyliśmy, że funkcja celu zależy bardziej od elementów o mniejszym indeksie w permutacji niż większym. Elementy o mniejszy indeksie są bardziej preferowane co wynika z funkcji celu, a oferty o dalszych indeksach mogą być często nie brane do rozwiązania ze względu na kolizje z wcześniejszymi ofertami. Dlatego staramy się, aby wymieniamy przez operator PMX środkowy segment zaczynał się cześciej w niskich indeksach.

Wprowadzona modyfikacja polega na wyborze punktów a i b będących przedziałem wymienianego środkowego segmentu. W pierwotnej wersji były losowane dwie liczby x, y i na ich podstawie wyliczane punkty a, b.

$$a = min(x, y) \cdot n \ \wedge \ b = max(x, y) \cdot n \ \text{ gdzie n to długość permutacji} \qquad (2)$$

W zmodyfikowanej wersji punty były wyliczane w poniższy sposób.

$$a = min(x, y)^2 \cdot n \ \wedge \ b = max(x, y) \cdot n \qquad (3)$$

3.3.2 Mutacja

Standardowe mutacje które stosowaliśmy w poprzednim projekcie okazały się mało skuteczne w zmienianiu wartości funkcji przystosowania. Wynikało to działania funkcji celu, które to powodowało, że często np. zamiana dwóch elementów w końcowej części permutacji miejscami nie zmieniała jej wartości.

Dodana przez nas mutacja jest dość prosta, ale okazała się znacząco poprawiać wyniki. Polega na cyklicznym przesunięciu całej permutacji o jeden element w lewo. W ten sposób oferta, która była pierwsza w permutacji staje się ostatnią. Z zasady działania funkcji celu wiemy, że pierwsza oferta jest zawsze wybierana, a ostatnio dość rzadko dzięki czemu ta mutacja dość znacząco zmieniała osobniki.

3.3.3 Wymiana

Wymiana elementów polega na zastąpieniu najgorszych osobników stałą liczbą, ustawianą jako parametr, zmutowanych i skrzyżowanych osobników. Dzięki odpowiednim doborze tej liczby populacja zawsze pamiętała stare najlepsze osobniki przez pewną liczbę iteracji co wpływało na poprawę znajdowanych wyników.

3.3.4 Warunek stopu

Na początku za warunek stopu przyjęliśmy unikalność wszystkich elementów. Gdy wartości funkcji celu dla wszystkich elementów w populacji były takie same to przerywaliśmy algorytm. Takie podejście okazało się jednak błędne, gdyż pomimo iż wartości funkcji celu były takie same to osobniki były znacząco różne w sensie permutacji i pozwolenie im na dalsze iteracje pozwalało poprawiać wyniki.

3.4 Wyniki

Wyniki przestawione są na wykresach (3, 4, 5, 6). Na niebiesko zaznaczono wynik dla algorytmu SGA dla kolejnych iteracji. Na zielono zaznaczono najlepszy wynik algorytmu losowego, który wybierał wynik z takiej samej puli losowych osobników ile łącznie przegląda SGA.

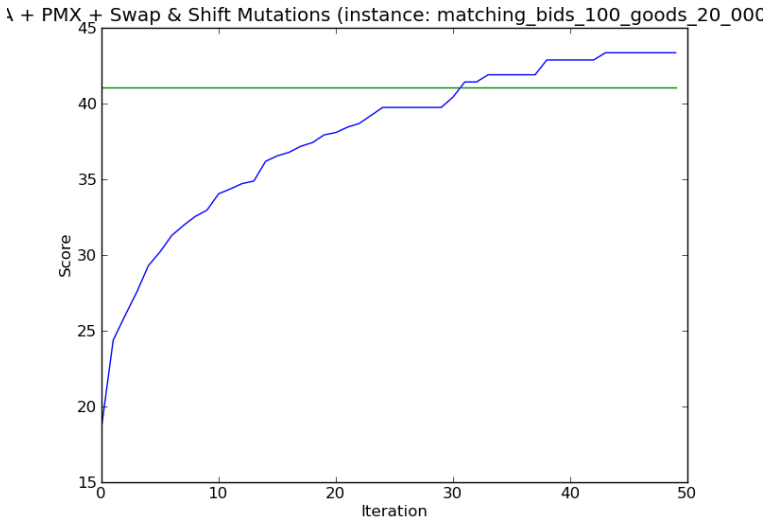
Na wykresach 3, 4 i 5 algortym kończył swoje działanie gdy wszsytkie osobniki w populacji były unikalne pod względem wartości funkcji celu. Na wykresie 6 przestawiona jest wersja algorytmu, która kończyła poszukiwania po ustalonej liczbie iteracji. Podczas algorytmu próbowaliśmy również podmieniać niektóre stare osobniki nowymi losowymi gdy wszystkie poprzednie były już unikalne. Jak widać takie podejście okazało się być lepsze od poprzedniego gdyż algorytm po pewnym czasie działania znajdował nieco lepsze rozwiązanie.

4 Porównanie obu algorytmów

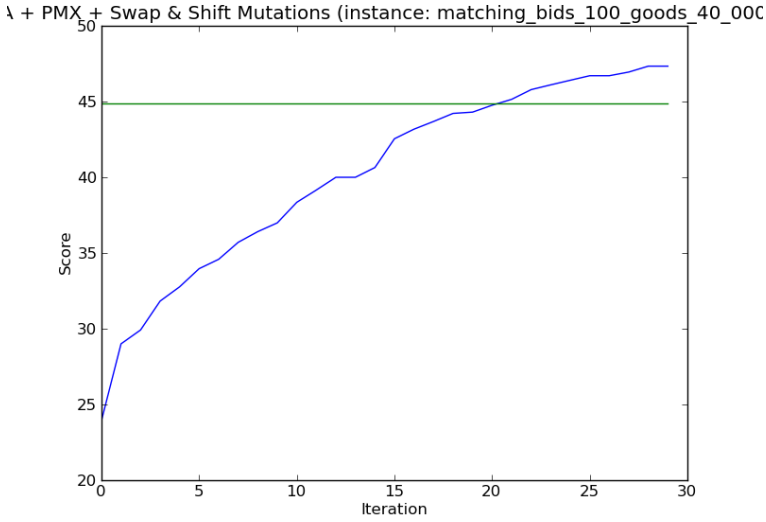
Przeprowadzone testy wskazują, że zdecydowanie lepszy jest algorytm SGA. W tabeli poniżej (1) przedstawione, są wyniki najlepszych rezulatów dla trzech algorytmów. Algorytmy uruchamialiśmy wielokrotnie i wyniki przedstawione w tablece oddają najczęściej występującą tendencje. Zdarzało się, że algorytm losowy był lepszy od algorytmu PBIL, ale SGA prawie zawsze wyprzedzał oba te algorytmy.

Problem	Algorytm losowy	PBIL	SGA
matching, 100 ofert, 20 towarów	43.683	43.848	46.793
matching, 100 ofert, 40 towarów	65.543	67.188	72.785

Tablica 1: Porównanie algorytmów



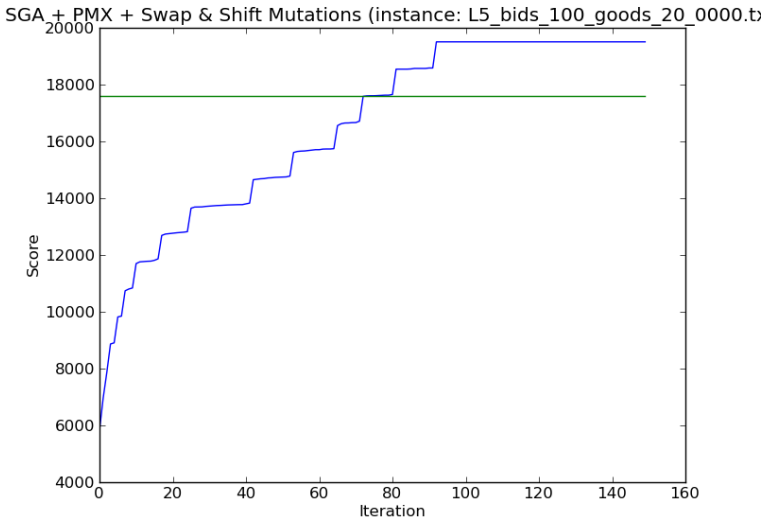
Rysunek 3: Wykres dla problemu 'matching' o parametrach 100 ofert i 20 towarów.



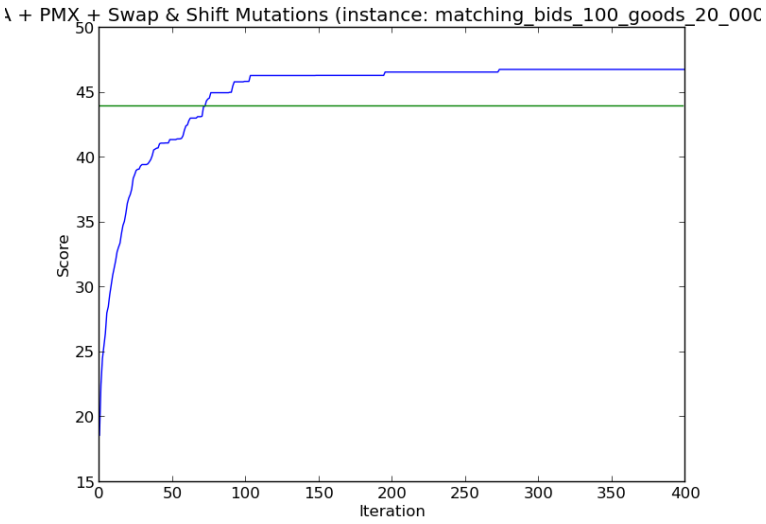
Rysunek 4: Wykres dla problemu 'matching' o parametrach 100 ofert i 40 towarów.

5 Podsumowanie

Przeprowadzone testy wyraźnie pokazują, że algorytm SGA jest znacznie lepszy od algorytmów PBIL i algorytmu losowego. Zdarzało się, że algorytm losowy



Rysunek 5: Wykres dla problemu 'L5' o parametrach 100 ofert i 20 towarów.



Rysunek 6: Wykres dla problemu 'matching' o parametrach 100 ofert i 20 towarów.

dawał prawie tak dobre wyniki jak SGA lub równe, ale w większości przypadków był od niego gorszy. Algorytm PBIL okazał się być trochę lepszy od algorytmu

losowego, ale zdarzały się sytuacje, że oba były równe, a nawet algorytm losowy był lepszy. Zaóważyliśmy, że trudność danych testowych dla algorytmu losowego, zależała od stosunku towarów do ofert. Algorytm SGA i PBIL okazały się być znacznie od niego lepsze gdy liczba ofert znacznie przewyższa liczbę towarów (czyli jest znacznie więcej kolidujących ze sobą ofert).

Wydaje nam się, że najtrudniejszym elementem w tych algorytmach było dobranie odpowiedniej reprezentacji danych. Reprezentacje które wybraliśmy mają tą wadę, że niektóre zbiory zaakceptowanych ofert mogą być nierównomiernie reprezentowane przez osobniki. W efekcie algorytm ma problemy ze znalezieniem optymalnego zbioru ofert, który może być reprezentowany przez bardzo małą liczbę osobników.

Dodatkowo, funkcja celu w pewnych momentach staje się skokowa – dla danych z dużą liczbą kolizji ofert tylko początkowy fragment permutacji może mieć znaczenie przy obliczaniu zysku z aukcji. Utrudniło to zdecydowanie działanie standardowych operatorów mutacji, które często nie wpływały nawet na wynik funkcji przystosowania.