ゼミ発表用ノート ver.1

中越一磨

2022 年 11 月 1 日

はじめに

このノートは，ゼミ発表の補助として用いるために書いております．煩雑な計算をゼミ内ですべて触れることは難しいので適宜このノートを参照していただければ幸いです．なお，各回でノートを作っていく形式ではなく更新していく形を取るので，下記途中や中途半端に書き残しているところなどお見苦しいところはありますでしょうがお許しください．

ここで，発表内容や方針などについて触れておきたいと思います．私の卒業研究のテーマは第 1 回でも触れた通り，「4 次元空間内での重力場方程式の Einstein 方程式の唯一性」や「Gauss-Bonnet term のような高次曲率項についての考察」などです．そこで，これらのことを学ぶ上で以下の論文を読んでいこうと予定しています．[*1]

1. (main) The Einstein Tensor and its Generalizations
2. The Uniqueness of the Einstein Field Equations in a Four-Dimensional Space

順序としては，第 2 回では 2. の論文を扱い，第 3 回で 1. の論文について扱い，今後の状況に応じて第 4 回で 1. の論文か 4 次元に話を絞り Gauss-Bonnet 項についての話題のみとするかを予定しています．

[*1] main 論文などについては今後の進捗状況に応じて変更・追加する可能性があります．

第 I 部
The Uniqueness of the Einstein Field Equations in a Four-Dimensional

1 Introduction

この論文は，前期に求めた Einstein 方程式が 4 次元では Riemann 計量を場の変数に取るような方程式では唯一の方程式になる事実を示したものとなっています.

1.1 場の解析力学

前期にも扱いましたが Lagrangian の変数を場の変数にしたときの Euler-Lagrange 方程式[*2]について少し解説します．今ここでは一般に場の変数を $\Psi^A = \Psi^A(x^i)$ として，Lagrangian は

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\Psi^A, \Psi^A_{,i_1}, \Psi^A_{,i_1 i_2}, ..., \Psi^A_{,i_1 i_2 \ldots i_r})$$

であり，

$$\Psi^A_{,i_1 i_2 \ldots i_r} \equiv \frac{\partial^p \Psi^A}{\partial x^{i_1} ... \partial x^{i_p}}$$

と定義する．このとき，EL 方程式については以下のようになる.

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Psi^A} + \sum_{p=1}^{r} (-1)^p \frac{\partial^p}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} ... \partial x^{i_p}} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Psi^A_{,i_1 i_2 \ldots i_r}} \right) = 0 \tag{1.2}$$

基本的な発想としては通常の EL 方程式の導出と大差はない．つまり，高階微分項の変分を順に取っていき微分と変分を交換し，作用積分の部分積分的操作を行って各項の一つ次元の落ちた表面項での変分がゼロと仮定して，それ以外の部分は $\delta\Psi^A$ でくくることができ，恒等的に作用変分がゼロであるための必要十分条件から導くことができます.

(1.2) においては任意の高階微分まで考えているが，通常 3 階以上の高階微分項が現れてしまうと問題が発生するのでせっかく取った高階微分項は今回は考えずこれ以後は $r = 2$ で考えることとする．また，一般の場の変数を考えているがここでは Riemann 計量 g_{ij} を取ることとする.

[*2] 以後 EL 方程式と省略

1.2　この論文の構成

なので，この論文においては Lagrangian は

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,kh}) \tag{1.3}$$

を取ることとする．この論文の最終目標は，このような Lagrangian のもとで次元を 4 次元に限定したときの EL 方程式を具体的に求めたときに Einstein 方程式が唯一の方程式となることを示すことである．しかしこのような Lagrangian を用いたとき (1.2) を見てもわかるように，4 次の微分項を含んでしまう．Einstein 方程式にはこれらの項は含まれないはずである．

そこで，Section2 では (1.2) の高階微分項 $g_{ij,rst}, g_{ij,rstu}$ が消えるための必要十分条件をそれぞれ求めます．Section3 では具体的に次元を固定し得られた必要十分条件から Lagrangian の形具体的に書き下す．$n = 2, 3$ の場合には,

$$\mathscr{L} = a\sqrt{g}R + b\sqrt{g} \tag{3.1}$$

となる．$n = 4$ では，結論として得られた Lagrangian から，EL 方程式が Einstein 方程式に一致することが導ける．

2 Degenerate Lagrange Densities in n-Dimensions の解説

2.1 準備

2.2 対称性について

2.3 EL 方程式の書き換え

2.4 Lemma 1.

2.5 Lemma 2.

2.6 Theorem 1.

2.7 注意点と Lemma 3.

3 Dimensionality Restrictions の解説

3.1 Lemma 4.

3.2 Proof of Theorem 2.

3.3 Theorem 3.

3.4 Theorem 4.

3.5 Theorem 5.

第 II 部
The Uniqueness of the Einstein Field Equations in a Four-Dimensional

参考文献

[1]

[2]
[3]