

ゼミ発表用ノート ver.1

中越一磨

2022 年 11 月 6 日

はじめに

このノートは，ゼミ発表の補助として用いるために書いている．煩雑な計算をゼミ内ですべて触れることは難しいので適宜このノートを参照していただきたい．なお，各回でノートを作っていく形式ではなく更新していく形を取るので，下記途中や中途半端に書き残しているところなどお見苦しいところはあるがお許しください．

ここで，発表内容や方針などについて触れておきたい．私の卒業研究のテーマは第 1 回でも触れた通り，「4 次元空間内での重力場方程式の Einstein 方程式の唯一性」や「Gauss-Bonnet term のような高次曲率項についての考察」などとなる．そこで，これらのことを学ぶ上で以下の論文を読んでいこうと予定している．^{*1}

1. (main) The Einstein Tensor and its Generalizations
2. The Uniqueness of the Einstein Field Equations in a Four-Dimensional Space

順序としては，第 2 回では 2. の論文を扱い，第 3 回で 1. の論文について扱い，今後の状況に応じて第 4 回で 1. の論文か 4 次元に話を絞り Gauss-Bonnet 項についての話題のみとするかを予定している．

^{*1} main 論文などについては今後の進捗状況に応じて変更・追加する可能性がある．

第 I 部

The Uniqueness of the Einstein Field Equations in a Four-Dimensional

1 Introduction

この論文は、Einstein 方程式が 4 次元では唯一の方程式になる事実を示したものである。

1.1 場の解析力学

前期にも扱いましたが Lagrangian の変数を場の変数にしたときの Euler-Lagrange 方程式*2について少し解説する．今ここでは一般に場の変数を $\Psi^A = \Psi^A(x^i)$ として、Lagrangian は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Psi^A, \Psi^A_{,i_1}, \Psi^A_{,i_1 i_2}, \dots, \Psi^A_{,i_1 i_2 \dots i_r})$$

であり、

$$\Psi^A_{,i_1 i_2 \dots i_r} \equiv \frac{\partial^r \Psi^A}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}}$$

と定義する．このとき、EL 方程式については以下ようになる．

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^A} + \sum_{p=1}^r (-1)^p \frac{\partial^p}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \dots \partial x^{i_p}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^A_{,i_1 i_2 \dots i_r}} \right) = 0 \quad (1.2)$$

基本的な発想としては通常の EL 方程式の導出と大差はない．つまり、高階微分項の変分を順に取っていき微分と変分を交換し、作用積分の部分積分的操作を行って各項の一つ次元の落ちた表面項での変分がゼロと仮定して、それ以外の部分は $\delta \Psi^A$ でくることができる．恒等的に作用変分がゼロであるための必要十分条件から導くことができる．

(1.2) においては任意の高階微分まで考えているが、通常 3 階以上の高階微分項が現れてしまうと問題が発生するのでせっかく取った高階微分項は今回は考えずこれ以後は $r = 2$ で考える．また、一般の場の変数を考えているがここでは Riemann 計量 g_{ij} を取る．

*2 以後 EL 方程式と省略

1.2 この論文の構成

なので、この論文においては Lagrangian は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,kh}) \quad (1.3)$$

を取る．この論文の最終目標は、このような Lagrangian のもとで、次元を 4 次元に限定したときの EL 方程式を具体的に求めたとき、Einstein 方程式が唯一の方程式となることを示すことである．しかしこのような Lagrangian を用いたとき (1.2) を見てもわかるように、4 次の微分項を含んでしまう．Einstein 方程式にはこれらの項は含まれないはずである．

そこで、Section2 では (1.2) の高階微分項 $g_{ij,rst}, g_{ij,rstu}$ が消えるための必要十分条件をそれぞれ求める．Section3 では具体的に次元を固定し得られた必要十分条件から Lagrangian の形具体的に書き下す． $n = 2, 3$ の場合には、

$$\mathcal{L} = a\sqrt{g}R + b\sqrt{g} \quad (3.1)$$

となる． $n = 4$ では、結論として得られた Lagrangian から、EL 方程式が Einstein 方程式に一致することが導ける．

2 Degenerate Lagrange Densities in n -Dimensions の解説

2.1 準備

これ以後では、以下のことを仮定して話を進めていく．座標変換 $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j)$ は、 C^3 級関数まで仮定し、そこから得られる計量は

$$\det \left\| \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right\| > 0$$

のように正定値として定義する．また、議論を円滑にすすめるために以下の記号を定義する．

$$g_{ij,k} \equiv \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}, \text{etc...}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda^{ij,kh} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{ij,kh}} \\
\Lambda^{ij,k} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{ij,k}} \\
\Lambda^{ij} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{ij}}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

最後に、EL 方程式の左辺を

$$E^{hk} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\Lambda^{hk,i} - \frac{\partial}{\partial x^j} \Lambda^{hk,ij} \right] - \Lambda^{hk} \tag{2.4}$$

として、EL 方程式は

$$E^{hk} = 0 \tag{2.3}$$

と表せる。このとき、当然 E^{hk} はそれぞれ愚直に連鎖律に基づき展開すると引数は

$$E^{hk} = E^{hk}(g_{ij}, g_{ij,r}, g_{ij,rs}, g_{ij,rst}, g_{ij,rstu}) \tag{2.5}$$

となり、4 次の微分項まで含んでしまう。^{*3} この Section の主目的はこの 3 次・4 次の微分項の消えるための必要十分条件を探すことである。つまり、最終的に E^{hk} は、

$$E^{hk} = E^{hk}(g_{ij}, g_{ij,r}, g_{ij,rs}) \tag{2.6}$$

になることを目的としている。このようになるような条件を見つけられれば、Lagrangian と E^{hk} は同じ引数を持つ函数となる。この論文では、この E^{hk} を *L-degenerate* と呼ぶことにする。

2.2 対称性について

この項では、定義した記号の対称性について触れていく。Lagrangian 密度であるためには、スカラー函数である必要がある。そのためには、以下のような恒等式を満たしている必要がある。

$$\Lambda^{ij,kh} + \Lambda^{ih,jk} + \Lambda^{ik,hj} = 0 \tag{2.7}$$

$$-\Lambda^{hk,i} = \Gamma_{jm}^i \Lambda^{hk,jm} + 2\Gamma_{jm}^k \Lambda^{hj,im} + 2\Gamma_{jm}^h \Lambda^{kj,im} \tag{2.8}$$

^{*3} 具体的に展開したものに関しては Section 2.3 以降で触れる。

ここで, Γ_{jm}^i については通常の Christoffel 記号

$$\Gamma_{jm}^i = \frac{1}{2}g^{ih}(g_{hj,m} + g_{mh,j} - g_{jm,h})$$

を用いる. (2.7) から次のような対称性が導ける.

$$\Lambda^{ij,kh} = \Lambda^{kh,ij} \quad (2.9)$$

この対称性は, Bianchi 恒等式から Einstein テンソルを導いたときのように導くことができる.

Proof. (2.7) の添字を cyclic にまわしてできる 4 つの式を符号を交互に入れ替え辺々足し合わせていく.

$$\begin{aligned} \Lambda^{ij,kh} + \Lambda^{ih,jk} + \Lambda^{ik,hj} &= 0 \\ -\Lambda^{hi,jk} - \Lambda^{hk,ij} - \Lambda^{hj,ki} &= 0 \\ \Lambda^{kh,ij} + \Lambda^{kj,hi} + \Lambda^{jh,ik} &= 0 \\ -\Lambda^{jk,hi} - \Lambda^{ji,kh} - \Lambda^{jh,ik} &= 0 \end{aligned}$$

このとき, 偏微分の交換可能性と計量テンソルの添字の対称性を用いて,

$$2\Lambda^{ij,kh} - 2\Lambda^{kh,ij}$$

より, (2.9) を得られる. ■

2.3 EL 方程式の書き換え

この項では, 具体的に 4 次の微分項などが消えていくための必要十分条件を求めるために (2.4) を具体的に展開していく. そのための準備として, 新たに以下の記法を定義していく.

$$\Lambda^{ij,kh;rs,tu} \equiv \frac{\partial \Lambda^{ij,kh}}{\partial g_{rs,tu}} \quad (2.10)$$

$$\chi^{ij,kh;rs,tu} \equiv \Lambda^{ij,kh;rs,tu} + \Lambda^{ij,ku;rs,ht} + \Lambda^{ij,kt;rs,uh} \quad (2.11)$$

また, (2.10) に関して偏微分交換可能性と (2.9) により順序の入れ替えに対して以下のような対称性を持つ.

$$\Lambda^{ij,kh;rs,tu} = \Lambda^{rs,tu;ij,kh} = \Lambda^{ij,kh;tu,rs} \quad (2.12)$$

以上で、準備は整ったので具体的に展開をしていく。Lagrangian は仮定より 2 次の微分項までしか持たないので、 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{mn}, g_{mn,p}, g_{mn,pq})$ となる。このことから、 E^{hk} のそれぞれの項を連鎖律に従い展開していく。

はじめに、 $\partial \Lambda^{hk,i} / \partial x^i$ は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{hk,i}} \right) &= \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial g_{mn} \partial g_{hk,i}} + \frac{\partial q_{mn,p}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial g_{mn,p} \partial g_{hk,i}} + \frac{\partial g_{mn,pq}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial g_{mn,pq} \partial g_{hk,i}} \\ &= \Lambda^{hk,i;mn} g_{mn,i} + \Lambda^{hk,i;mn,p} g_{mn,pi} + \Lambda^{hk,i;mn,pq} g_{mn,pqi} \end{aligned}$$

のようになる。同様にして、 $\partial^2 \Lambda^{hk,ij} / \partial x^i \partial x^j$ の項は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{hk,i}} \right) &= \Lambda^{hk,ij;mn} g_{mn,ij} + \Lambda^{hk,ij;mn,p} g_{mn,pij} + \Lambda^{hk,ij;mn,pq} g_{mn,pqij} \\ &+ \Lambda^{hk,ij;mn;rs} g_{mn,i} g_{rs,j} + \Lambda^{hk,ij;mn;rs,t} g_{mn,i} g_{rs,tj} + \Lambda^{hk,ij;mn;rs,tu} g_{mn,i} g_{rs,tuj} \\ &+ \Lambda^{hk,ij;mn,p;rs} g_{mn,pi} g_{rs,j} + \Lambda^{hk,ij;mn,p;rs,t} g_{mn,pi} g_{rs,tj} + \Lambda^{hk,ij;mn,p;rs,tu} g_{mn,pi} g_{rs,tuj} \\ &+ \Lambda^{hk,ij;mn,pq;rs} g_{mn,pqi} g_{rs,j} + \Lambda^{hk,ij;mn,pq;rs,t} g_{mn,pqi} g_{rs,tj} + \Lambda^{hk,ij;mn,pq;rs,tu} g_{mn,pqi} g_{rs,tuj} \end{aligned}$$

のようになる。これらの計算から 4 次の微分項は青いボックスで囲まれたところのみとなり、3 次以下の微分の項を今は $O^{hk} = O^{hk}(g_{ij}, g_{ij,r}, g_{ij,rs}, g_{ij,rst})$ として

$$E^{hk} = -\Lambda^{hk,ij;rs,tu} g_{rs,tuij} + O^{hk} \quad (2.13)$$

と書き換えることができる。

2.4 Lemma 1.

先の書き換えの結果から、 E^{hk} の $g_{rs,tuij}$ のみを取り出すことができた。また、 E^{hk} の中に 4 次の項を含まないということは、

$$\frac{\partial E^{hk}}{\partial g_{rs,tuij}} = 0$$

が成り立つと言い換えられる。このことから、安直にその係数がゼロになる、つまり

$$\Lambda^{hk,ij;rs,tu} = 0$$

としてしまうとここまでの計算が台無しになってしまう。

注意すべきは，計量の 4 次の微分項に関しては $(tuij)$ の添字はどれを交換しても偏微分は交換可能であると仮定しているため対称であり，さらに今 (2.13) の通りそれぞれの添字は縮約を取っているということだ．このようなことを留意すれば，どのような順序の添字で微分してもしっかりと消去可能であるための条件は以下になる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial E^{hk}}{\partial g_{rs,tuij}} &\simeq \frac{\partial}{\partial g_{rs,tuij}} ((\Lambda^{hk,ij;rs,tu} + \Lambda^{hk,iu;rs,jt} + \Lambda^{hk,it;rs,u} \\ &\quad + \Lambda^{rs,tu;hk,ij} + \Lambda^{rs,tj;hk,ui} + \Lambda^{rs,ti;hk,ju})g_{rs,tuij}) \\ &= \chi^{hk,ij;rs,tu} + \chi^{rs,ij;hk,tu} = 0\end{aligned}$$

Lemma 1. E^{hk} が

$$\frac{\partial E^{hk}}{\partial g_{rs,tuij}} = 0$$

のようになるための必要十分条件は

$$\chi^{hk,ij;rs,tu} = -\chi^{rs,ij;hk,tu} \quad (2.14)$$

である．

2.5 Lemma 2.

2.6 Theorem 1.

2.7 注意点と Lemma 3.

3 Dimensionality Restrictions の解説

3.1 Lemma 4.

3.2 Proof of Theorem 2.

3.3 Theorem 3.

3.4 Theorem 4.

3.5 Theorem 5.

第 II 部

The Uniqueness of the Einstein Field Equations in a Four-Dimensional

参考文献

- [1] D.Lovelock, The Uniqueness of the Einstein Field Equations in a Four-Dimensional Space, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1, 54–70 (1969)