Динамическая связность

Кузнецов Илья Александрович
371 группа

25.05.2022

1(a). Придумайте рекурсивную процедуру $fall(v)$, которая для вершины v, такой, что $N_1(v) = \varnothing$, "роняет"v на правильный уровень BFS-дерева, корректно обновляет уровни соседей v и "роняет" те вершины, чей уровень изменился при падении v.

Решение. Положим, что перед вызовом рекурсивной процедуры $fall(v)$: $N_2(v) \neq \varnothing$. В противном случае будет образована новая компонента связности.

Algorithm 1

function FALL(v)
    $l(v) \leftarrow l(v) + 1$
    for $u \in N_2(v)$ **do**
        $N_2(u) \leftarrow N_2(u) \setminus \{v\}$
        $N_3(u) \leftarrow N_3(u) \cup \{v\}$
    for $u \in N_3(v)$ **do**
        $N_1(u) \leftarrow N_1(u) \setminus \{v\}$
        $N_2(u) \leftarrow N_2(u) \cup \{v\}$
    $N_1(v) \leftarrow N_2(v)$
    $N_2(v) \leftarrow N_3(v)$
    $N_3(v) \leftarrow \varnothing$ ▷ Заполняется при вызове $fall$ от вершин-детей
    for $u \in \{w \mid w \in N_2(v) \text{ and } N_1(w) = \varnothing\}$ **do**
        $fall(u)$

1(b). Докажите, что если в графе n вершин и m рёбер изначально, на все обновления суммарно при удалении m рёбер уйдет время $O(mn)$.

Доказательство. Пусть $deg(v)$ — степень вершины v. Обработка одной вершины внутри описанной рекурсивной процедуры при этом будет занимать $O(deg(v))$ времени.

В случае, когда BFS-дерево вырождается в список, его высоту можно сравнить с n. Тогда наибольшее число вызовов рекурсивной процедуры $fall$, начатых из вершины v, тоже можно сравнить с n. Отсюда, работа процедуры $fall$ для вершины v занимает $O(n\ deg(v))$ времени. Удаление ребра занимает $O(1)$ времени.

Таким образом, имеем: $O(m + \sum_{v \in V} n\ deg(v)) = O(m + n \sum_{v \in V} deg(v)) = O(m + nm) = O(mn)$. □

1(c). Пусть вместо всего BFS-дерева нам разрешено хранить только BFS-дерево с d уровнями, т.е. структура будет поддерживать только расстояния до вершин v, такие, что $d(s, v) \leq d$. Докажите, что суммарное время на все обновления в этом случае равно $O(md)$.

Доказательство. Пусть $deg(v)$ — степень вершины v. Обработка одной вершины внутри описанной рекурсивной процедуры при этом будет занимать $O(deg(v))$ времени.

В случае, когда BFS-дерево вырождается в список, его высоту можно сравнить с d. Тогда наибольшее число вызовов рекурсивной процедуры $fall$, начатых из вершины v, тоже можно сравнить с d. Отсюда, работа процедуры $fall$ для вершины v занимает $O(d\ deg(v))$ времени. Удаление ребра занимает $O(1)$ времени.

Таким образом, имеем: $O(m + \sum_{v \in V} d\ deg(v)) = O(m + d \sum_{v \in V} deg(v)) = O(m + dm) = O(md)$. $\square$

2. Придумайте, как усовершенствовать алгоритм, чтобы научиться поддерживать декрементально (только удаления рёбер) минимальный остовный лес во взвешенном неориентированном графе также за $O(log^2 n)$ амортизированно.

Решение. По условию, введем для алгоритма следующий инвариант: *если ребро e является ребром максимального веса среди рёбер некоторого цикла C, то у e самый низкий уровень среди всех рёбер C* [*].

В случае удаления ребра, принадлежащего остовному дереву, необходимо искать замену этому ребру, чтобы сохранить остовное дерево. Если ребра-замены не нашлось, то остовное дерево распадется на два дерева.

Чтобы поддерживать декрементальную динамическую связность неориентированного графа, нужно перебирать уровни с i до $logn$. Внесем изменения в данный алгоритм и будем перебирать уровни в обратном порядке: с $logn$ до i.

В оригинальном алгоритме порядок перебора ребер на уровне не был определен, поэтому теперь будем перебирать ребра в порядке увеличения веса. Подходящее ребро-замена должно лежать концами в обоих деревьях, образовавшихся после удаления ребра, то есть оно должно "склеить"и оставить остовное дерево целостным. Если рассматриваемое ребро не подходит, то ему присваивается уровень $i - 1$.

Теперь покажем, что данный алгоритм получения ребра-замены позволит поддерживать минимальный остовный лес при удалениях ребер. Для этого введем утверждение.

Утверждение (изменено под задачу, из статьи). Пусть выполняется инвариант [*] и F - минимальное остовное дерево. Тогда для любого ребра e из дерева F, ребро с наименьшим весом имеет наибольший уровень среди всех кандидатов на ребро-замену.

Доказательство. Пусть ребра e_1 и e_2 — кандидаты на ребро-замену ребра e. Эти ребра при добавлении в остовное дерево порождают циклы. Обозначим эти циклы как C_i для каждого ребра e_i, где i = 1, 2.

Пусть e_1 легче, чем e_2. Покажем, что тогда $level(e_1) >= level(e_2)$.

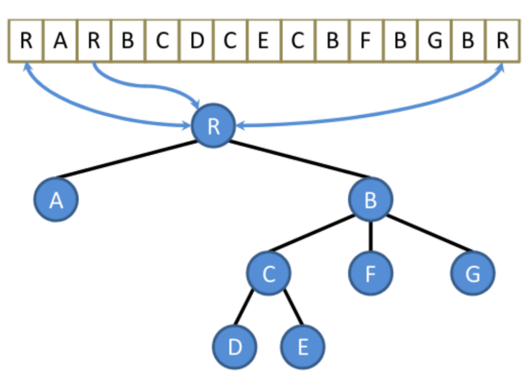
Рассмотрим цикл $C = (C_1 \cup C_2) \setminus (C_1 \cap C_2)$. F — минимальное остовное дерево, а значит e_i будет ребром с самым большим весом в C_i. Получается, что e_2 — ребро с самым большим весом в цикле C. А значит, по инварианту [*], у него будет и самый низкий уровень в C. А значит, $level(e_1) >= level(e_2)$. $\square$

Таким образом, благодаря данному утверждению получится обеспечивать сохранение минимальности остовного леса при поиске ребер-замен.

Какими операциями необходимо дополнить структуру Эйлеров обход + BST для работы с весами ребер?

1. В BST каждая вершина остовного дерева может встретиться более одного раза. Происходит это из-за выполнения Эйлерового обхода.

   Например, на рисунке ниже вершина R повторяется 3 раза.



Чтобы не хранить во всех вершинах дерева списки, среди повторяющихся вершин будем выбирать по одной вершине, называемой *репрезентативной*. Таким образом, это позволит уменьшить общие расходы по памяти.

2. Минимальные остовные деревья мы храним в виде ET_i (структуры Эйлеров обход + BST), но с модификацией: для ET_i в репрезентативных вершинах мы храним ребра, инцидентные с данной вершиной в оригинальном остовном дереве (то дерево, которое изначально поддерживаем на графе), но не принадлежащие этому дереву, так как среди этих ребер мы и будем искать ребро-замену.

3. Также для каждой вершины структуры ET_i мы храним количество инцидентных (вне дерева) с поддеревом ребер и количество репрезентативных вершин, а также указатель на соответствующую ей репрезентативную вершину.

4. Добавляем операцию $GetNonTreeEdgesSorted(v)$, которая возвращает список отсортированных по возрастанию весов ребер. При этом данные ребра инцидентны с поддеревом с корнем v и не принадлежат данному поддереву. Таким образом, получится перебирать репрезентативные вершины, добавлять их в итоговый список и выполнять слияние за $O(nlogn)$ (существует алгоритм за $O(nlogn + mlogm)$ в общем случае, где n — длина первого массива, а m — длина второго массива; в нашем случае $n = m$). Тогда итоговая сложность амортизированно составит $O(logn)$ (так как делим на n для амортизации).

Таким образом, поиск смежных ребер остается таким же, как и в алгоритме поддержки декрементальной динамической связности неориентированного графа, где амортизированная сложность составляет $O(log^2 n)$ на одну операцию удаления. Меняется только алгоритм выбора ребра-замены, поэтому амортизированная сложность остается $O(log^2 n)$ на одну операцию удаления ребра.