Динамические кратчайшие пути

Кузнецов Илья Александрович
371 группа

24.05.2022

1(a). Не более, чем n^3 путей в графе после увеличения веса ребра становятся однородными. В качестве доказательства придумайте такой худший случай.

Доказательство. Мы можем доказать это в общем виде.

Предположим, что был увеличен вес ребра (i, j). При этом для фиксированной пары (ребро, вершина) — $((i, j), x)$, где x — вершина, может существовать единственный однородный путь из i в x по ребру (i, j), иначе не выполнится условие уникальности кратчайших путей. Это означает, если бы могло существовать более одного однородного пути из i в x, то у нас могло бы быть несколько кратчайших подпутей из j в x (ребро (i, j) фиксировано), а это противоречит условию задачи. Этот факт позволяет воспользоваться дальнейшей комбинаторикой, так как у нас есть гарантии, что каждой паре (ребро, вершина) соответствует единственный однородный путь.

При этом произвольное ребро (i, j) может быть выбрано максимум m способами (m — количество ребер в графе по условию), а вершина x максимум n способами (n — количество вершин в графе по условию). Исходя из этого, пар (ребро, вершина) и, соответственно, однородных путей в графе может быть максимум mn. Пользуясь известным фактом $m <= n^2$, получается, что однородных путей может быть максимум n^3. Таким образом, при увеличении веса ребра не более, чем n^3 путей в графе становятся однородными. $\square$

Рассмотрим пример худшего случая, при котором порядка n^3 путей станут однородными после увелечения веса ребра.

В исходном графе однородные пути показаны синим, а ребра, которые в них не входят — красным. Стрелки указывают направления ребер. При этом каждому вертикальному слою $A - F$ соответствует порядка n вершин. Неподписанные веса на ребрах считаем равными 1.

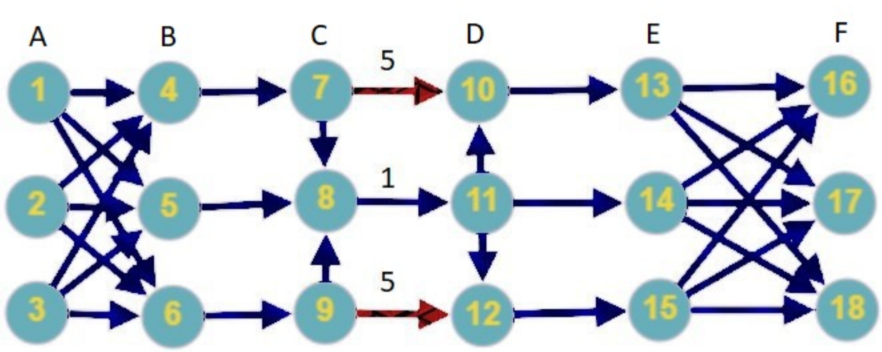

Рис. 1: Граф до увеличения веса ребра $(8, 11)$.

Пусть ребро $(8, 11)$ изменило свой вес при обновлении с 1 на 10.

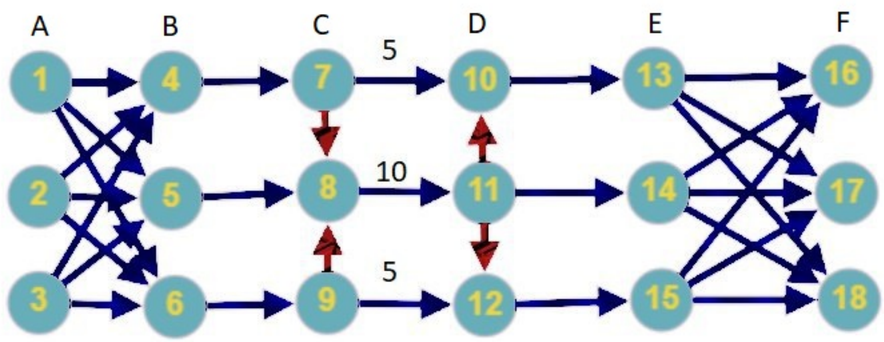

Рис. 2: Граф после увеличения веса ребра $(8, 11)$.

После этого появились однородные пути из слоя C в D через горизонтальные ребра $(7, 10)$ и $(9, 12)$, а вертикальные ребра перестали входить в однородные пути, так как теперь ребро $(8, 11)$ — "невыгодное"и пути через вертикальные ребра не будут кратчайшими.

Посчитаем, сколько образовалось путей. Каждой вершине из слоя A соответствует порядка n вершин из слоя B (например, из вершины 1 можно прийти в 4, 5, 6). В общем случае, из A в B имеем порядка n^2 однородных путей. Из B в C у нас соответствие 1 к 1, то есть из A в C также порядка n^2 однородных путей. Из $C \to D \to E$ также соответствия 1 к 1. Каждой вершине из E соответствует порядка n вершин из F (например, из вершины 13 можно прийти в 16, 17, 18).

Итого, порядка n^3 путей стали однородными после обновления веса ребра $(8, 11)$.

1(b). Не более, чем n^2 путей в графе после увеличения веса ребра перестают быть однородными.

Доказательство. Пусть при обновлении увеличился вес ребра (i, j). Нам нужно посчитать, какое наибольшее количество путей при этом перестанут быть однородными. Предположим, что x путей перестали быть однородными, тогда все их подпути уже не кратчайшие. При увеличении веса ребра (i, j) это значит, что все эти подпути проходят через (i, j). Таким образом, необходимо посчитать наибольшее количество однородных путей, у которых подпути проходят через ребро (i, j).

Посчитаем, сколько максимально может быть однородных путей, начинающихся или заканчивающихся в ребре (i, j). Рассмотрим случай для начинающихся в (i, j) (для заканчивающихся аналогично). При этом для фиксированной пары (ребро, вершина) — $((i, j), x)$, где x — вершина, может существовать единственный однородный путь из i в x по ребру (i, j), иначе не выполнится условие уникальности кратчайших путей. Это означает, если бы могло существовать более одного однородного пути из i в x, то у нас могло бы быть несколько кратчайших подпутей из j в x (ребро (i, j) фиксировано), а это противоречит условию задачи. Тогда в качества конца пути можно взять не более n вершин (n — количество вершин в графе по условию). Таким образом, может быть не более n однородных путей, начинающихся или заканчивающихся в ребре (i, j).

Посчитаем, сколько максимально может быть однородных путей, проходящих через ребро (i, j) (не в начале и не в конце, так как этот случай уже был рассмотрен выше). Стартовую вершину, как и конечную, мы можем выбрать не более, чем за n (n — количество вершин в графе по условию), поэтому всего может быть не более n^2 однородных путей, проходящих через ребро (i, j) (не в начале и не в конце).

Таким образом, наибольшее количество однородных путей, у которых подпути проходят через ребро (i, j) составляет $O(n^2)$. Следовательно, не более, чем n^2 путей в графе после увеличения веса ребра перестают быть однородными. $\square$