

Динамическая связность

Кузнецов Илья Александрович

371 группа

13.05.2022

1(a). Придумайте рекурсивную процедуру $fall(v)$, которая для вершины v , такой, что $N_1(v) = \emptyset$, "роняет" v на правильный уровень BFS-дерева, корректно обновляет уровни соседей v и "роняет" те вершины, чей уровень изменился при падении v .

Решение. Положим, что перед вызовом рекурсивной процедуры $fall(v)$: $N_2(v) \neq \emptyset$. В противном случае будет образована новая компонента связности.

Algorithm 1

```
1: function FALL( $v$ )
2:    $l(v) \leftarrow l(v) + 1$ 
3:   for  $u \in N_2(v)$  do
4:      $N_2(u) \leftarrow N_2(u) \setminus \{v\}$ 
5:      $N_3(u) \leftarrow N_3(u) \cup \{v\}$ 
6:   for  $u \in N_3(v)$  do
7:      $N_1(u) \leftarrow N_1(u) \setminus \{v\}$ 
8:      $N_2(u) \leftarrow N_2(u) \cup \{v\}$ 
9:    $N_1(v) \leftarrow N_2(v)$ 
10:   $N_2(v) \leftarrow N_3(v)$ 
11:   $N_3(v) \leftarrow \emptyset$  ▷ Заполняется при вызове  $fall$  от вершин-детей
12:  for  $u \in \{w \mid w \in N_2(v) \text{ and } N_1(w) = \emptyset\}$  do
13:     $fall(u)$ 
```

1(b). Докажите, что если в графе n вершин и m рёбер изначально, на все обновления суммарно при удалении m рёбер уйдёт время $O(mn)$.

Доказательство. Пусть $deg(v)$ — степень вершины v . Обработка одной вершины внутри описанной рекурсивной процедуры при этом будет занимать $O(deg(v))$ времени.

В случае, когда BFS-дерево вырождается в список, его высоту можно сравнить с n . Тогда наибольшее число вызовов рекурсивной процедуры $fall$, начатых из вершины v , тоже можно сравнить с n . Отсюда, работа процедуры $fall$ для вершины v занимает $O(n \deg(v))$ времени. Удаление ребра занимает $O(1)$ времени.

Таким образом, имеем: $O(m + \sum_{v \in V} n \deg(v)) = O(m + n \sum_{v \in V} \deg(v)) = O(m + nm) = O(mn)$. \square

1(c). Пусть вместо всего BFS-дерева нам разрешено хранить только BFS-дерево с d уровнями, т.е. структура будет поддерживать только расстояния до вершин v , такие, что $d(s, v) \leq d$. Докажите, что суммарное время на все обновления в этом случае равно $O(md)$.

Доказательство. Пусть $deg(v)$ — степень вершины v . Обработка одной вершины внутри описанной рекурсивной процедуры при этом будет занимать $O(deg(v))$ времени.

В случае, когда BFS-дерево вырождается в список, его высоту можно сравнить с d . Тогда наибольшее число вызовов рекурсивной процедуры $fall$, начатых из вершины v , тоже можно сравнить

с d . Отсюда, работа процедуры *fall* для вершины v занимает $O(d \deg(v))$ времени. Удаление ребра занимает $O(1)$ времени.

Таким образом, имеем: $O(m + \sum_{v \in V} d \deg(v)) = O(m + d \sum_{v \in V} \deg(v)) = O(m + dm) = O(md)$. \square