第 3 章习题

1 .在 R^3 中，设 $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$，定义 $Tx = (2\xi_1 - \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_1)$，试求 T 在基 $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ 下的矩阵.

2. 六个函数

$x_1 = e^{at}\cos bt$, $x_2 = e^{at}\sin bt$, $x_3 = t\,e^{at}\cos bt$

$x_4 = t\,e^{at}\sin bt$, $x_5 = \frac{1}{2}t^2 e^{at}\cos bt$, $x_6 = \frac{1}{2}t^2 e^{at}\sin bt$

的所有实系数线性组合构成实数域 R 上的一个 6 维线性空间 $V^6 = L(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$，求微分变换 D 在基 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 下的矩阵.

3.在 $R^{2\times2}$ 中定义线性变换

$T_1X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} X$, $T_2X = X\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $T_3X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

求 T_1, T_2, T_3 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵.

4. 设 T 是线性空间 V 的线性变换，且 $T^{k-1}x \neq 0$，但 $T^k x = 0$，证明 $x, Tx, \cdots, T^{k-1}x\ (k > 0)$ 线性无关.

5 . 给定 R^3 的两个基

$x_1 = (1, 0, 1)$, $x_2 = (2, 1, 0)$, $x_3 = (1, 1, 1)$

$y_1 = (1, 2, -1)$, $y_2 = (2, 2, -1)$, $y_3 = (2, -1, -1)$

定义线性变换

$Tx_i = y_i \quad (i = 1, 2, 3)$

(1) 写出由基 x_1, x_2, x_3 到基 y_1, y_2, y_3 的过渡矩阵.
(2) 写出 T 在基 x_1, x_2, x_3 下的矩阵.
(3) 写出 T 在基 y_1, y_2, y_3 下的矩阵.

6. 设 T 是数域 C 上线性空间 V^3 的线性变换，已知 T 在 V^3 的基 x_1, x_2, x_3 下的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

求 T 的特征值与特征向量.

7 .将矩阵 A 相似的变换为上三角矩阵，其中

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8 .计算 $2A^8 - 3A^5 + A^4 + A^2 - 4E_3$，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. 求矩阵 A 的特征多项式和最小多项式，其中

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

10.证明任意矩阵与它的转置矩阵有相同的特征多项式和最小多项式.

11 .求下列各矩阵的 Jordan 标准形.

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

12.设有正整数 m，使 $A^m = I$，证明 A 与对角矩阵相似.