第 4 章习题

1．证明：欧氏空间V中的向量α,β正交的充要条件是对$\forall t\in R$，有

$$|\alpha+t\beta|\ge|\alpha|$$

2．设α,β,γ是$n(n\ge 3)$维欧氏空间V中的线性无关向量．证明：

1）$W=\{x|x\in V,(x,\alpha)=(x,\beta)=(x,\gamma)=0\}$是$V$的子空间．

2）$\dim W=n-3$．

3．设A,B均为n阶正交矩阵且$|A|=-|B|$．证明：$A+B$不可逆．

4．设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$是欧氏空间$V$中的两个向量组且满足

$$(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j),i,j=1,2,\cdots,m$$

证明：由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$生成的$V$的两个子空间同构．

5．设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$是$n$维欧氏空间$V$中的两个向量组．证明：存在$V$上的正交变换$\sigma$，使

$$\sigma(\alpha_i)=\beta_i,i=1,2,\cdots,m$$

的充要条件是$(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j),i,j=1,2,\cdots,m$．

6．设σ,τ是n维欧氏空间V上的两个线性变换，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是$V$的一个基，$A,B$分别为$\sigma,\tau$在$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵．若$\forall\alpha\in V$，均有$|\sigma(\alpha)|=|\tau(\alpha)|$．证明：存在正定矩阵$P$，使

$$A^T PA=B^T PB$$

7．设ε是欧氏空间R^n中的单位向量．在R^n中定义变换σ：

$$\sigma(\alpha)=\alpha-k(\alpha,\varepsilon)\varepsilon,\quad\forall\alpha\in R^n,k\in R$$

1) 证明：σ是R^n上的线性变换．

2) 求k，使σ是R^n上的正交变换．

8．设σ是n维欧氏空间V上的对称变换．若σ在V的标准正交基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵$A$既是正定矩阵又是正交矩阵，证明：$\sigma$是恒等变换．