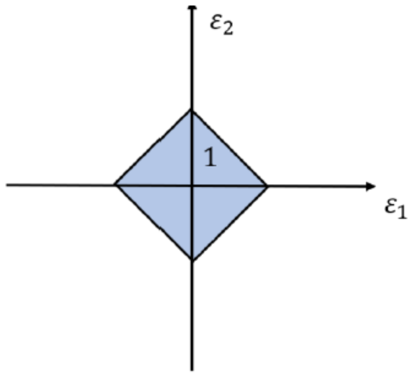
向量与矩阵范数习题

T1

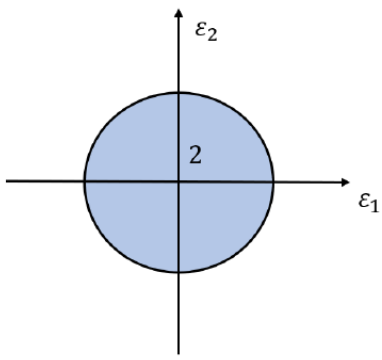
$$\|e\|_1 = n$$
$$\|e\|_2 = \sqrt{n}$$
$$\|e\|_\infty = 1$$

T2

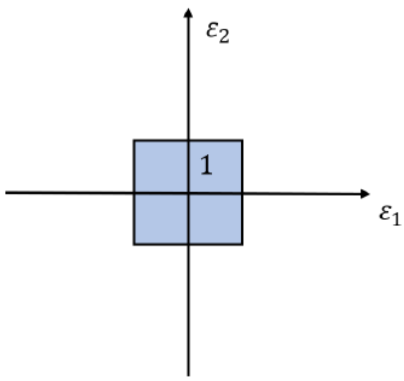
$\|x\|_1 \leq 1$



$\|x\|_2 \leq 2$



$\|x\|_\infty \leq 1$



T3

非负性:

当 $x = 0$ 时，$\|x\|_s = 0$

当 $x \neq 0$ 时，$\|x\|_s = \|Sx\| > 0$

齐次性:

$\forall a \in C, \|kx\|_s = \|Skx\| = \|k\|\|Sx\|$

三角不等式:

$\|x+y\|_s = \|S(x+y)\| = \|Sx\| + \|Sy\|$

综上，$\|x\|_s$ 是一个向量范数

T4

$$\|A\|_1 = 2$$

$$\|A\|_\infty = 4$$

$$A^H A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A^H A) = \lambda^2(\lambda - 6)$$

$$\|A\|_2 = 6$$

$$\|B\|_1 = 4$$

$$\|B\|_2 = 6$$

$$B^H B = \begin{pmatrix} 2 & 2j & 4j \\ -2j & 4 & 6 \\ -4j & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - B^H B) = \lambda\Big(\lambda - \big(8 + 2\sqrt{13}\big)\Big)\Big(\lambda - \big(8 - 2\sqrt{13}\big)\Big)$$

$$\|B\|_2 = 8 + 2\sqrt{13}$$

T5

证明 $|\lambda| \leq \sqrt[m]{\|A^m\|}$

由题意

$Ax = \lambda x \Rightarrow A^m x = \lambda^m x$

取相容范数，于是有

$|\lambda^m|\|x\| = \|A^m x\| \leq \|A^m\|\|x\| \Rightarrow |\lambda|^m \leq \|A^m\|$

即 $|\lambda| \leq \sqrt[m]{\|A^m\|}$

T6

同上题

T7

$$\|A\|_s = \max_{x \neq 0}\left(\frac{\|Ax\|_s}{\|x\|_s}\right) = \max_{x \neq 0}\left(\frac{\|SAx\|_2}{\|Sx\|_2}\right) = \max_{y \neq 0}\left(\frac{\left\|SAS^{-1}y\right\|_2}{\|y\|_2}\right) = \left\|SAS^{-1}\right\|_2$$

T8

易知 $\|A\|$ 满足非负性，齐次性

三角不等式:

$\|A+B\| = \left\|S^{-1}(A+B)S\right\|_M = \left\|S^{-1}AS + S^{-1}BS\right\|_M \leq \left\|S^{-1}AS\right\|_M + \left\|S^{-1}BS\right\|_M = \|A\| + \|B\|$

相容性:

$\|AB\| = \left\|S^{-1}ABS\right\|_M = \left\|S^{-1}ASS^{-1}BS\right\|_M \leq \left\|S^{-1}AS\right\|_M \left\|S^{-1}BS\right\|_M = \|A\|\|B\|$

综上, $\|A\|$ 是一个矩阵范数

T9

由题意有

$1 > \left\|A^{-1}\right\|\|B\| \geq \left\|A^{-1}B\right\|$

由定理 2.8, $A+B$ 可逆

T10

$A^{-1} - (A+\delta A)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{5}{21}\begin{pmatrix} 3 & -1.5 \\ -1.2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{105}\begin{pmatrix} -12 & 16.5 \\ 9 & -74 \end{pmatrix}$

$$\frac{\left\|A^{-1} - (A+\delta A)^{-1}\right\|_\infty}{\left\|A^{-1}\right\|_\infty} = \frac{1}{105} \cdot 5 \cdot \frac{83}{4} = \frac{83}{84}$$