矩阵直积习题

T1

设 A 的特征值为 λ_i， B 的特征值为 μ_i， 则

$A \otimes B$ 的特征值 $\lambda_i \mu_j \geq 0$

故 $A \otimes B$ 半正定

T2

设矩阵 A, B 为两个反 Hermite 矩阵，则

$(A \otimes B)^H = A^H \otimes B^H = -A \otimes -B = A \otimes B$

故 $A \otimes B$ 为 Hermite 矩阵

T3

设 A 的特征值为 λ_i， B 的特征值为 μ_i

因为 $1 + (\lambda_i \mu_j) + (\lambda_i \mu_j)^2 \neq 0$

所以 $\sum_{k=0}^{2} A^k X B^k = X + AXB + A^2 X B^2 = F$ 有唯一解

T4

A 特征值为 $-1, -1, -2$，求得对应特征向量组成的矩阵为 $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$，则

$e^{2At} = P \begin{pmatrix} e^{-2t} & & \\ & e^{-2t} & \\ & & e^{-4t} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ -e^{-2t}+e^{-4t} & 2e^{-2t}-2e^{-4t} & e^{-4t} \end{pmatrix}$

$$X = -\int_0^{+\infty} e^{At} I e^{At} \, \mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} e^{2At} \, \mathrm{d}t = -\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

T5

$$e^{A \otimes I_n + I_m \otimes B} = e^{A \otimes I_n} e^{I_m \otimes B} = (I_n \otimes e^A)(I_m \otimes e^B) = e^A \otimes e^B$$