第四章习题

T1

证:

$|\alpha+t\beta|^2=\langle\alpha+t\beta,\alpha+t\beta\rangle=|\alpha|^2+2t\langle\alpha,\beta\rangle+t^2\ |\beta|^2$

则

$$|\alpha+t\beta|^2\geq|\alpha|^2\Leftrightarrow 2t\langle\alpha,\beta\rangle+t^2\ |\beta|^2\geq 0$$

不等式若要对任意 t 成立，则 $\langle\alpha,\beta\rangle=0$,即 α,β 正交。

T2

(1)

设 $x_1,x_2\in W$,则 $\langle x_1+x_2,\alpha\rangle=\langle x_1,\alpha\rangle+\langle x_2,\alpha\rangle=0$

同理可证 $\langle x_1+x_2,\beta\rangle=\langle x_1+x_2,\gamma\rangle=0$

于是 $x_1+x_2\in W$

$\forall k\in R,\langle kx_1,\alpha\rangle=k\langle x_1,\alpha\rangle=0$

同理可证，$\langle kx_1,\beta\rangle=\langle kx_1,\gamma\rangle=0$

于是 $kx_1\in W$

综上，W 是 V 的子空间

(2)

设 α,β,γ 所构成的空间为 V_1 ，由 W 定义可知，W 是V_1的正交补

则有 $V=W\oplus V_1$, 于是有 $\dim V=\dim W+\dim V_1\Rightarrow\dim W=n-3$

T3

$|A+B|=|A|\ |B^T+A^T|\ |B|=|A|\ |B|\ |A+B|=-\ |A|^2\ |A+B|$

$\Rightarrow(1+|A|^2)\ |A+B|=0\Rightarrow|A+B|=0$

所以 $A+B$ 不可逆

T4

要证两个子空间同构，只需证存在一个双射的线性映射 T

设 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 生成的子空间为 V_1 , $\beta_1,\beta_2,...,\beta_m$ 生成的子空间为 V_2

设映射 T 使得 $T(\alpha_i)=\beta_i$

对于$\forall x\in V_1,x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_m\alpha_m$

则 $T(x)=k_1\beta_1+k_2\beta_2+...+k_m\beta_m$

所以 T 是线性的

下证 T 是单射:

设 $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_m\alpha_m$, 且 $T(x)=0$

则 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+...+k_m\beta_m=0$

对于任意 $j=1,...,m$, 两边同时与 β_j 做内积，有

$$\left(k_1\beta_1+k_2\beta_2+...+k_m\beta_m,\beta_j\right)=0$$
$$k_1\left(\beta_1,\beta_j\right)+k_2\left(\beta_2,\beta_j\right)+...+k_m\left(\beta_m,\beta_j\right)=0$$

又 $\left(\alpha_i,\alpha_j\right)=\left(\beta_i,\beta_j\right)$, 所以

$$k_1\left(\alpha_1,\alpha_j\right)+k_2\left(\alpha_2,\alpha_j\right)+...+k_m\left(\alpha_m,\alpha_j\right)=0$$
$$\left(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_m\alpha_m,\alpha_j\right)=0$$
$$\left(x,\alpha_j\right)=0$$

可得 x 与 α_j 正交

x 是 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 的线性组合，且与 α_j 正交

故 $x=0$

$T(x)=0$, 当且仅当 $x=0$, 故 T 是单射

(这里用到定理: T 是单射 $\Leftrightarrow N(T)=\{0\}$)

下证 T 是满射:

由于 $T(\alpha_i)=\beta_i$， $\beta_1,\beta_2,...,\beta_m$ 均在 T 的像空间

综上，T 是线性的，双射的，故 T 是一个同构映射，所以两个子空间同构

T5

必要性:

正交变换保持向量内积， 所以 $\forall x,y\in V$

$(\sigma(x),\sigma(y))=(x,y)$

所以 $\left(\alpha_i,\alpha_j\right)=\left(\sigma(\alpha_i),\sigma\left(\alpha_j\right)\right)=\left(\beta_i,\beta_j\right)$

充分性:

设 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 生成的子空间为 V_1 , $\beta_1,\beta_2,...,\beta_m$ 生成的子空间为 V_2

由于 $\left(\alpha_i,\alpha_j\right)=\left(\beta_i,\beta_j\right)$, 所以 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_m$ 是等距等角的基(???)

因此，存在正交变换 σ 使得 $\sigma(\alpha_i)=\beta_i$

T6

由题意有

$(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),...,\sigma(\varepsilon_n))=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)A,(\tau(\varepsilon_1),\tau(\varepsilon_2),...,\tau(\varepsilon_n))=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)B$

$\forall\alpha\in V$

$$\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\...\\x_n\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)x$$

则 $\sigma(\alpha)=(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),...,\sigma(\varepsilon_n))\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)Ax$

同理，$\tau(\alpha) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)Bx$

由 $|\sigma(\alpha)| = |\tau(\alpha)| \Leftrightarrow \langle\sigma(\alpha), \sigma(\alpha)\rangle = \langle\tau(\alpha), \tau(\alpha)\rangle$ 有

$x^T A^T \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)Ax = x^T A^T Ax = x^T B^T Bx \Rightarrow A^T A = B^T B$

TODO:

T7

(1)

$\forall x_1, x_2 \in R^n, k_1, k_2 \in R$

$$\begin{aligned}
\sigma(k_1x_1 + k_2x_2) &= k_1x_1 + k_2x_2 - k\langle k_1x_1 + k_2x_2, \varepsilon\rangle\varepsilon \\
&= k_1x_1 + k_2x_2 - k\langle k_1x_1, \varepsilon\rangle\varepsilon - k\langle k_2x_2, \varepsilon\rangle\varepsilon \\
&= k_1x_1 - k\langle k_1x_1, \varepsilon\rangle\varepsilon + k_2x_2 - k\langle k_2x_2, \varepsilon\rangle\varepsilon \\
&= k_1\sigma(x_1) + k_2\sigma(x_2)
\end{aligned}$$

故 σ 是线性变换

(2)

$\forall x, y \in R^n$

$$\begin{aligned}
\langle\sigma(x), \sigma(y)\rangle &= \langle x - k\langle x, \varepsilon\rangle\varepsilon, y - k\langle y, \varepsilon\rangle\varepsilon\rangle \\
&= \langle x, y\rangle - k\langle x, \varepsilon\rangle\langle\varepsilon, y\rangle - k\langle y, \varepsilon\rangle\langle\varepsilon, x\rangle + k^2\langle x, \varepsilon\rangle\langle y, \varepsilon\rangle \\
&= \langle x, y\rangle - 2k\langle x, \varepsilon\rangle\langle y, \varepsilon\rangle + k^2\langle x, \varepsilon\rangle\langle y, \varepsilon\rangle
\end{aligned}$$

要证 $\langle\sigma(x), \sigma(y)\rangle = \langle x, y\rangle$

只需证 $2k\langle x, \varepsilon\rangle\langle y, \varepsilon\rangle = k^2\langle x, \varepsilon\rangle\langle y, \varepsilon\rangle$, 即 $2k = k^2$

解得 $k = 2$ 或 $k = 0$ ，此时 σ 是正交变换

T8

要证 σ 为恒等变换，只需证 $A = I$

由 σ 为对称变换，可得 A 为对称矩阵

由 A 为正定矩阵，可得A 的特征值均为正实数

由 A 为正交矩阵，可得$AA^T = A^2 = I$, A 的特征值 λ 满足 $\lambda^2 = 1$

所以, A 的特征值均为 1，即 $A = I$