习题 2

1.证明：在实函数空间中，$1 , \cos^2 t , \cos 2t$ 是线性相关的.
2.求 P_2 中向量 $1 + t + t^2$ 对基：$1 , t - 1 , (t - 2)(t - 1)$ 的坐标.
3. 设线性空间 V^4 的两个基 (I) x_1, x_2, x_3, x_4 ; (II) y_1, y_2, y_3, y_4 满足

$x_1 + 2x_2 = y_3$, $x_2 + 2x_3 = y_4$

$y_1 + 2y_2 = x_3$, $y_2 + 2y_3 = x_4$

(1) 求由基 (I) 改变为基 (II) 的过渡矩阵 C；
(2) 求向量 $x = 2y_1 - y_2 + y_3 + y_4$ 在基 (I) 下的坐标.

4. 设 R^4 中两个基为

(I): $x_1 = e_1$, $x_2 = e_2$, $x_3 = e_3$, $x_4 = e_4$

(II): $y_1 = (2, 1, -1, 1)$, $y_2 = (0, 3, 1, 0)$, $y_3 = (5, 3, 2, 1)$, $y_4 = (6, 6, 1, 3)$

(1) 求由基(I)改变为基(II)的过渡矩阵；
(2) 求向量 $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ 对基(II)的坐标；
(3) 求对两个基有相同坐标的非零向量.

5.设线性空间 V 中的向量组 $x_1 , x_2 , \cdots , x_m$ 与向量组 $y_1 , y_2 , \cdots , y_m$ 满足关系式

$$(y_1 , y_2 , \cdots , y_m) = (x_1 , x_2 , \cdots , x_m)P$$

其中 P 是 m 阶矩阵，证明：若以下三个条件
(a) 向量组 $x_1 , x_2 , \cdots , x_m$ 线性无关；
(b) 向量组 $y_1 , y_2 , \cdots , y_m$ 线性无关；
(c) 矩阵 P 可逆.
中的任意两个成立时，其余的一个也成立.

6.求 R^4 的两个子空间

$V_1 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 = 0\}$

$V_2 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \mid \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0\}$

的交 $V_1 \cap V_2$ 的基.
7.给定 $R^{2\times2} = \{ A = (a_{ij})_{2\times2} \mid a_{ij} \in R\}$(数域 R 上的 2 阶实方阵按通常矩阵的加法与数乘矩阵构成的线性空间) 的子集

$$V = \{ A = (a_{ij})_{2\times2} \mid a_{ij} \in R \text{ 且 } a_{11} + a_{22} = 0 \}$$

(1) 证明 V 是 $R^{2\times2}$ 的子空间;
(2) 求 V 的维数和一个基.

8. 设多项式 $f(x)$ 和多项式 $g(x)$ 的最大公因式为 1，T 为线性空间 V 的线性变换，

那么 (1). $N(f(T)) \cap N(g(T)) = \{0\}$; (2) $N(f(T)) \oplus N(g(T)) = N(f(T)g(T))$.

9.试证明所有二阶矩阵之集合形成的实线性空间, 是所有二阶实对称矩阵之集合形成的子空间与所有二阶反对称矩阵之集合形成的子空间的直和.

10. 设 V 为次数小于 n 的多项式全体按照普通加法和数乘构成的实线性空间。对

于多项式$P(x)\in V$,定义平移变换为T_s,即 $T_s(P(x))=P(x+s)$，其中 s 为给定实数；微分变换为D,即$D(P(x))=P'(x)$，那么：(1).证明平移变换和微分变换都是V的线性变换；(2). 证明平移变换可以表示为微分变换的多项式， 即存在多项式$f(x)$,满足$T_s=f(D)$成立。