第四章习题

T1

证：

$|\alpha+t\beta|^2=\langle\alpha+t\beta,\alpha+t\beta\rangle=|\alpha|^2+2t\langle\alpha,\beta\rangle+t^2\ |\beta|^2$

则

$$|\alpha+t\beta|^2\geq|\alpha|^2\Leftrightarrow 2t\langle\alpha,\beta\rangle+t^2\ |\beta|^2\geq 0$$

不等式若要对任意 t 成立，则 $\langle\alpha,\beta\rangle=0$,即 α,β 正交。

T2

(1)

设 $x_1,x_2\in W$,则 $\langle x_1+x_2,\alpha\rangle=\langle x_1,\alpha\rangle+\langle x_2,\alpha\rangle=0$

同理可证 $\langle x_1+x_2,\beta\rangle=\langle x_1+x_2,\gamma\rangle=0$

于是 $x_1+x_2\in W$

$\forall k\in R,\langle kx_1,\alpha\rangle=k\langle x_1,\alpha\rangle=0$

同理可证，$\langle kx_1,\beta\rangle=\langle kx_1,\gamma\rangle=0$

于是 $kx_1\in W$

综上，W 是 V 的子空间

(2)

设 α,β,γ 所构成的空间为 V_1 ，由 W 定义可知，W 是V_1的正交补

则有 $V=W\oplus V_1$, 于是有 $\dim V=\dim W+\dim V_1\Rightarrow\dim W=n-3$

T3

$|A+B|=|A|\ |B^T+A^T|\ |B|=|A|\ |B|\ |A+B|=-\ |A|^2\ |A+B|$

$\Rightarrow(1+|A|^2)\ |A+B|=0\Rightarrow|A+B|=0$

所以 $A+B$ 不可逆

T4

设 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 生成的子空间为 V_1 , $\beta_1,\beta_2,...,\beta_m$ 生成的子空间为 V_2

设线性映射 T 使得 $T(\alpha_i)=\beta_i$

对于$\forall x\in V_1,x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_m\alpha_m$

则 $T(x)=k_1T(\alpha_1)+k_2T(\alpha_2)+...+k_mT(\alpha_m)=k_1\beta_1+k_2\beta_2+...+k_m\beta_m$

所以 T 保持线性关系

下证内积不变

$\forall x,y\in V_1,x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_m\alpha_m,y=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+...+c_m\alpha_m$

$$
\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \langle k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_m\alpha_m, c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + ... + c_m\alpha_m\rangle \\
&= k_1c_1\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle + k_2c_2\langle\alpha_2,\alpha_2\rangle + ... + k_mc_m\langle\alpha_m,\alpha_m\rangle \\
\langle T(x), T(y)\rangle &= \langle k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + ... + k_m\beta_m, c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + ... + c_m\beta_m\rangle \\
&= k_1c_1\langle\beta_1,\beta_1\rangle + k_2c_2\langle\beta_2,\beta_2\rangle + ... + k_mc_m\langle\beta_m,\beta_m\rangle
\end{aligned}
$$

由$\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle = \langle\beta_i,\beta_j\rangle$, 可得 $\langle x, y\rangle = \langle T(x), T(y)\rangle$

于是 T 是从 V_1 到 V_2 的同构映射，即 V_1 和 V_2 同构

T5

由 T4 证明过程可知，T 是从 V_1 到 V_2 的正交变换

T6

由题意有

$(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),...,\sigma(\varepsilon_n)) = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)A, (\tau(\varepsilon_1),\tau(\varepsilon_2),...,\tau(\varepsilon_n)) = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)B$

$\forall\alpha\in V$

$$
\alpha = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)x
$$

则 $\sigma(\alpha) = (\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),...,\sigma(\varepsilon_n))\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)Ax$

同理，$\tau(\alpha) = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)Bx$

由 $|\sigma(\alpha)| = |\tau(\alpha)| \Leftrightarrow \langle\sigma(\alpha),\sigma(\alpha)\rangle = \langle\tau(\alpha),\tau(\alpha)\rangle$ 有

$x^TA^T\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)Ax = x^TA^TAx = x^TB^TBx \Rightarrow A^TA = B^TB$

TODO:

T7

(1)

$\forall x_1, x_2 \in R^n, k_1, k_2 \in R$

$$
\begin{aligned}
\sigma(k_1x_1 + k_2x_2) &= k_1x_1 + k_2x_2 - k\langle k_1x_1 + k_2x_2, \varepsilon\rangle\varepsilon \\
&= k_1x_1 + k_2x_2 - k\langle k_1x_1, \varepsilon\rangle\varepsilon - k\langle k_2x_2, \varepsilon\rangle\varepsilon \\
&= k_1x_1 - k\langle k_1x_1, \varepsilon\rangle\varepsilon + k_2x_2 - k\langle k_2x_2, \varepsilon\rangle\varepsilon \\
&= k_1\sigma(x_1) + k_2\sigma(x_2)
\end{aligned}
$$

故 σ 是线性变换

(2)

$\forall x, y \in R^n$

$$
\begin{aligned}
\langle\sigma(x),\sigma(y)\rangle &= \langle x-k\langle x,\varepsilon\rangle\varepsilon, y-k\langle y,\varepsilon\rangle\varepsilon\rangle \\
&= \langle x,y\rangle - k\langle x,\varepsilon\rangle\langle\varepsilon,y\rangle - k\langle y,\varepsilon\rangle\langle\varepsilon,x\rangle + k^2\langle x,\varepsilon\rangle\langle y,\varepsilon\rangle \\
&= \langle x,y\rangle - 2k\langle x,\varepsilon\rangle\langle y,\varepsilon\rangle + k^2\langle x,\varepsilon\rangle\langle y,\varepsilon\rangle
\end{aligned}
$$

要证 $\langle\sigma(x),\sigma(y)\rangle = \langle x,y\rangle$

只需证 $2k\langle x,\varepsilon\rangle\langle y,\varepsilon\rangle = k^2\langle x,\varepsilon\rangle\langle y,\varepsilon\rangle$, 即 $2k = k^2$

解得 $k=2$ 或 $k=0$ ，此时 σ 是正交变换

T8

要证 σ 为恒等变换，只需证 $A=I$

由 σ 为对称变换，可得 A 为对称矩阵

由 A 为正定矩阵，可得A 的特征值均为正实数

由 A 为正交矩阵，可得$AA^T = A^2 = I$, A 的特征值 λ 满足 $\lambda^2 = 1$

所以, A 的特征值均为 1，即 $A=I$