矩阵分析习题

T1

$$\left\|\alpha A^{(k)}+\beta B^{(k)}-\alpha A-\beta B\right\| \leq \alpha\left\|A^{(k)}-A\right\|+\beta\left\|B^{(k)}-B\right\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

证毕

T2

A 的特征值为 $\lambda_1=2c, \lambda_2=\lambda_3=-c$, 则 $\rho(A)=2|c|$

当 $\rho(A)<1$即$|c|<\frac{1}{2}$ 时，A 为收敛矩阵

T3

当 $\forall k, \left|c_k A^k\right| \to 0$ 时，矩阵幂级数收敛

T4

(1)

矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 7\\ -1 & -3\end{pmatrix}$ 的特征值为 $-2,-2$， 则 $\rho(A)=2$

又幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}x^k$ 的收敛半径为 $r=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=1$

故 $\rho(A)>r$，矩阵幂级数发散

(2)

矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -8\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ 的特征值为 $-3,5$， 则 $\rho(A)=5$

又幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{6^k}x^k$ 的收敛半径为 $r=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=6$

故 $\rho(A)<r$，矩阵幂级数收敛

T5

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}x^k$ 的收敛半径为 $r=1$

由矩阵级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}A^{(k)}$ 收敛可得 $\rho(A)<1$

故 A 为收敛矩阵，于是 $\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}=0$

T6

TODO:

T7

$$e^A\left(e^A\right)^T=e^Ae^{A^T}=e^{A-A}=I$$

故 e^A 为正交矩阵

T8

$$e^{iA}\left(e^{iA}\right)^H=e^{iA}e^{(iA)^H}=e^{iA-iA}=I$$

故 e^{iA} 为酉矩阵

T9

$|\lambda I-A|=(\lambda-2)(\lambda^2-1)$

对应特征向量组成的矩阵为 $P=\begin{pmatrix}1&-3&1\\0&3&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}, P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

$$e^A=P\begin{pmatrix}e^2&0&0\\0&e&0\\0&0&e^{-1}\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}e^2&e^2-\frac{3}{2}e+\frac{1}{2}e^{-1}&\frac{3}{2}e-\frac{3}{2}e^{-1}\\0&\frac{3}{2}e-\frac{1}{2}e^{-1}&-\frac{3}{2}e+\frac{3}{2}e^{-1}\\0&\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}e^{-1}&-\frac{1}{2}e+\frac{3}{2}e^{-1}\end{pmatrix}$$

$$e^{tA}=P\begin{pmatrix}e^{2t}&0&0\\0&e^t&0\\0&0&e^{-t}\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}e^{2t}&e^{2t}-\frac{3}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}&\frac{3}{2}e^t-\frac{3}{2}e^{-t}\\0&\frac{3}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t}&-\frac{3}{2}e^t+\frac{3}{2}e^{-t}\\0&\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t}&-\frac{1}{2}e^t+\frac{3}{2}e^{-t}\end{pmatrix}$$

$$\sin A=P\begin{pmatrix}\sin 2&0&0\\0&\sin 1&0\\0&0&\sin(-1)\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}\sin 2&4\sin 2-2\sin 1&2\sin 2-4\sin 1\\0&0&6\sin 1\\0&6\sin 1&0\end{pmatrix}$$

T10

(1)

$$P=\begin{pmatrix}&&&1\\&&1&\\&1&&\\1&&&\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\ln A=P\ln JP^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\-\frac{1}{2}&1&0&0\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}&1&0\end{pmatrix}$$

(2)

$$J_1=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}, J_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\ln J_1=\begin{pmatrix}\ln 2&\frac{1}{2}\\0&\ln 2\end{pmatrix}, \ln J_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\ln A=\begin{pmatrix}\ln 2&\frac{1}{2}&0&0\\0&\ln 2&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

T11

TODO

T12

$\left(e^{At}\right)'=Ae^{At}$

于是有 $A=\left(e^{At}\right)'|_{t=0}=\begin{pmatrix} 2e^t & 0 & 2e^t-4e^{2t} \\ 0 & e^t & 0 \\ 2e^{2t}-e^t & 0 & 4e^{2t}-e^t \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

T13

$$\int_0^1 \sin At\,\mathrm{d}t=\begin{pmatrix} \int_0^1 \sin a_{11}(t)\,\mathrm{d}t & \int_0^1 \sin a_{12}(t)\,\mathrm{d}t & \int_0^1 \sin a_{13}(t)\,\mathrm{d}t \\ \int_0^1 \sin a_{21}(t)\,\mathrm{d}t & \int_0^1 \sin a_{22}(t)\,\mathrm{d}t & \int_0^1 \sin a_{23}(t)\,\mathrm{d}t \\ \int_0^1 \sin a_{31}(t)\,\mathrm{d}t & \int_0^1 \sin a_{32}(t)\,\mathrm{d}t & \int_0^1 \sin a_{33}(t)\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}$$

T14

$A(t)(A(t))^{-1}=I$，两端求导得

$$\frac{d(A(t))}{dt}(A(t))^{-1}+A(t)\frac{d(A(t))^{-1}}{dt}=0$$
$$\Rightarrow\frac{d((A(t))^{-1})}{dt}=-(A(t))^{-1}\frac{d(A(t))}{dt}(A(t))^{-1}$$

T15

已知 $\frac{\partial a^Tx}{\partial x}=a, \frac{\partial x^TAx}{\partial x}=2Ax$

$(x-u)^TA(x-u)=x^TAx-2(Au)^Tx+u^TAu$, 则

$\frac{\mathrm{d}((x-u)^TA(x-u))}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(x^TAx-2(Au)^Tx+u^TAu)}{\mathrm{d}x}=2Ax-2Au=2A(x-u)$

T16

由题意

$\frac{\partial f}{\partial \xi_i}=\left(\frac{\partial f_1}{\partial \xi_i},...,\frac{\partial f_n}{\partial \xi_i}\right)=(a_{1i},...,a_{ni})=a_i$

$\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x^T}=\left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1},...,\frac{\partial f}{\partial \xi_n}\right)=(a_1,...,a_n)$

T17

$\det X=\sum\limits_{p_1,p_2,...,p_n}(-1)^\tau\xi_{1p_1},\xi_{2p_2},...,\xi_{np_n}$

其中, $p_1,p_2,...,p_n$ 是 $1,2,...,n$ 的一个排列，τ 是该排列的逆序数

则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det X)=\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{p_1,p_2,...,p_n}(-1)^\tau\xi_{1p_1},\xi_{2p_2},...,\xi_{np_n}$

又 $\xi_{1p_1}=a_{i1}\xi_{1p_i}+a_{i2}\xi_{2p_i}+...+a_{in}\xi_{np_i}$

当 $k\neq i$ 时，$\sum\limits_{p_1,p_2,...,p_n}(-1)^\tau\xi_{1p_1},\xi_{2p_2},...,\xi_{np_n}$ 的第 i 行与 k 行对应元素成比例，该行列式为 0，于是

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det X)=(\operatorname{tr}A)(\det X)$

即 $\mathrm{d}(\det X)=(\operatorname{tr}A)(\det X)\,\mathrm{d}t$

积分后得 $\det X=ce^{\int_{t_0}^t(\operatorname{tr}A)\,\mathrm{d}t}$

T18

$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}, x(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|\lambda I-A|=(\lambda+1)^3, r(-I-A)=1$，则 $m(\lambda)=(\lambda+1)^2$

设 $f(\lambda)=q(\lambda)m(\lambda)+b_1\lambda+b_0$,则

$$\begin{cases} b_0-b_1=e^{-t} \\ b_1=te^{-t} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} b_0=(1+t)e^{-t} \\ b_1=te^{-t} \end{cases}$$

故 $e^{At}=b_0I+b_1A=e^{-t}\begin{pmatrix} 1+4t & 0 & 8t \\ 3t & 1 & 6t \\ -2t & 0 & 1-4t \end{pmatrix}$

$x(t)=e^{At}x(0)=e^{-t}\begin{pmatrix} 1+12t \\ 1+9t \\ 1-6t \end{pmatrix}$

T19

$t-a=e^u$，则

$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}=\frac{AX}{t-a}(t-a)=AX$

通解为 $X(t)=Ce^{A\ln(t-a)}=C(t-a)^A$