投影矩阵习题

T1

由定义可得

$\big(I - P_{L,M}\big)x = x - P_{L,M}x = x - y = P_{M,L}x$

$\Rightarrow I - P_{L,M} = P_{M,L}$

T2

(1)

充分性:

已知 $P_1P_2 = P_2P_1 = O$

$(P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + 2P_1P_2 + P_2^2 = P_1 + P_2$

故 $P_1 + P_2$ 为投影矩阵

必要性:

由 $(P_1 + P_2)^2 = P_1 + P_2$ 有

$P_1P_2 + P_2P_1 = O$

上式分别左乘和右乘 P_1，并利用 $P_1^2 = P_1$ 可得

$P_1P_2 + P_1P_2P_1 = O, P_1P_2P_1 + P_2P_1 = O$

$\Rightarrow P_1P_2 = P_2P_1 = O$

(2)

$P_1 - P_2$ 为投影矩阵 $\Leftrightarrow I - (P_1 - P_2)$ 为投影矩阵

又 $I - (P_1 - P_2) = (I - P_1) + P_2$

故 $P_1 - P_2$ 为投影矩阵 $\Leftrightarrow (I - P_1) + P_2$ 为投影矩阵

由 (1) 可得

$(I - P_1) + P_2$ 为投影矩阵 $\Leftrightarrow (I - P_1)P_2 = P_2(I - P_1) = O \Leftrightarrow P_1P_2 = P_2P_1 = P_2$

(3)

$(P_1P_2)^2 = P_1P_2P_1P_2 = P_1(P_2P_1)P_2 = P_1(P_1P_2)P_2 = P_1^2P_2^2 = P_1P_2$

故 P_1P_2 为投影矩阵

T3

(1)

$$P_{L,M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{L,M}x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2)

$$P_L = X(X^HX)^{-1}X^H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_L x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

广义逆矩阵习题

T1

设 A_{ij} 表示 A 的第 i 行第 j 列元素为 1

取 $n \times m$ 矩阵 X , X 的第 j 行 第 j 列元素为 1，其余元素任意

则有 $A_{ij} X A_{ij} = A_{ij}, X$ 为 A 的 $\{1\}$ 逆矩阵

T2

对于 (1) 有

$$\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^+ & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$$

对于 (2) 有

$$\begin{pmatrix} d_1^+ & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^+ & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1^+ & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^+ \end{pmatrix}$$

对于 (3) 有

$$\left(\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^+ & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^+ \end{pmatrix} \right)^H = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^+ & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^+ \end{pmatrix}$$

对于 (4) 有

$$\left(\begin{pmatrix} d_1^+ & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \right)^H = \begin{pmatrix} d_1^+ & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$$

T3

对于 (1) 有

$$\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$$

对于 (2) 有

$$\begin{pmatrix} A^+ \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^+ \\ 0 \end{pmatrix}$$

对于 (3) 有

$$\left(\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^+ & 0 \end{pmatrix} \right)^H = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^+ & 0 \end{pmatrix}$$

对于 (4) 有

$$\left(\begin{pmatrix} A^+ \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \end{pmatrix} \right)^H = \begin{pmatrix} A^+ \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \end{pmatrix}$$

故 $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} A^+ & 0 \end{pmatrix}$

T4

$A = O$ 时，结论成立

$A \neq O$ 时，A 的一个奇异值分解为

$A = U_1 \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V_1^H$

则 $B = UAV = (UU_1)\begin{pmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}(V^H V_1)^H$ 为 B 的奇异值分解

$B^+ = (V^H V_1)\begin{pmatrix}\Sigma^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}(UU_1)^H = V^H\left(V_1\begin{pmatrix}\Sigma^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U_1^H\right)U^H = V^H A^+ U^H$

T5

由 $H^2 = H$ 有 $H^3 = H$

由 $H^H = H$ 有 $(H^2)^H = H^2 = H$

故 $H^+ = H$

T6

必要性:

由 $H^+ = H$

有 $(H^2)^2 = H^4 = H^3 H = H^2, (H^2)^H = (HH)^H = H^2$

故 H^2 为幂等的 Hermite 矩阵

$\operatorname{rank}(H^2) = \operatorname{rank}(H)$

充分性:

由 $(H^2)^H = H^2$ 可得 $H \in \{3, 4\}$

由 $\operatorname{rank}(H^2) = \operatorname{rank}(H)$ 可得存在矩阵 P 使得 $H = H^2 U$

则 $H^3 = H^2 H = (H^2)^2 U = H^2 U = H$

于是 $H \in \{1, 2\}$

故 $H \in \{1, 2, 3, 4\}$ 即 $H^+ = H$

T7

由 $A^+ = A^H(AA^H)^+ = (A^H A)^+ A^H$ 有

$$\begin{aligned}A^+A &= (A^H A)^+ A^H A = (AA^H)^+ A^H A \\ &= (AA^H)^+ AA^H = \left[(AA^H)^+ AA^H\right]^H \\ &= AA^H (AA^H)^+ = AA^+\end{aligned}$$

于是有

$A^n(A^+)A^n = (AA^+A)^n = A^n$

$(A^+)^n A^n (A^+)^n = (A^+AA^+)^n = (A^+)^n$

$[A^n(A^+)^n]^H = [(AA^+)^n]^H = \left[(AA^+)^H\right]^n = (AA^+)^n = A^n(A^+)^n$

同理可证 $[(A^+)^n A^n]^H = (A^+)^n A^n$

故 $(A^n)^+ = (A^+)^n$

T8

由题意及 $A^+ = A^H(AA^H)^+ = (A^H A)^+ A^H$ 有

$$\sum_{i=1}^r A_i \sum_{i=1}^r A_i^+ = \sum_{i=1}^r A_i \left(\sum_{i=1}^r A_i^H (A_i A_i^H)^+\right) = \sum_{i=1}^r A_i A_i^H (A_i A_i^H)^+ = \sum_{i=1}^r A_i A_i^+$$

$$\sum_{i=1}^{r} A_i^+ \sum_{i=1}^{r} A_i = \left(\sum_{i=1}^{r} \left(A_i^H A_i\right)^+ A_i^H\right) \sum_{i=1}^{r} A_i = \sum_{i=1}^{r} \left(A_i^H A_i\right)^+ A_i^H A_i = \sum_{i=1}^{r} A_i^+ A_i$$

又 $(AA^+)^H = AA^+, (A^+A)^H = A^+A$

故

$$\left(\sum_{i=1}^{r} A_i \sum_{i=1}^{r} A_i^+\right)^H = \sum_{i=1}^{r} A_i A_i^+ = \sum_{i=1}^{r} A_i \sum_{i=1}^{r} A_i^+$$

$$\left(\sum_{i=1}^{r} A_i^+ \sum_{i=1}^{r} A_i\right)^H = \sum_{i=1}^{r} A_i^+ A_i = \sum_{i=1}^{r} A_i^+ \sum_{i=1}^{r} A_i$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r} A_i \sum_{i=1}^{r} A_i^+ \sum_{i=1}^{r} A_i &= \sum_{i=1}^{r} A_i A_i^+ \sum_{i=1}^{r} A_i \\
&= \left(\sum_{i=1}^{r} A_i \left(A_i^H A_i\right)^+ A_i^H\right) \sum_{i=1}^{r} A_i \\
&= \sum_{i=1}^{r} A_i \left(A_i^H A_i\right)^+ A_i^H A_i \\
&= \sum_{i=1}^{r} A_i \left(\left(A_i^H A_i\right)^+ A_i^H\right) A_i \\
&= \sum_{i=1}^{r} A_i A_i^+ A_i = \sum_{i=1}^{r} A_i
\end{aligned}$$

同理可证

$$\sum_{i=1}^{r} A_i^+ \sum_{i=1}^{r} A_i \sum_{i=1}^{r} A_i^+ = \sum_{i=1}^{r} A_i^+$$

综上

$$\left(\sum_{i=1}^{r} A_i\right)^+ = \sum_{i=1}^{r} A_i^+$$

T9

设 X, Y 为满足这三个方程的解

$XAX = DX = YAX = YB = YAY$

故 $X = Y$, 矩阵解唯一

T10

取 $A \in C_r^{m\times n}$， 非奇异矩阵 $P \in C^{m\times m}, Q \in C^{n\times n}$

则有

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-}=Q\begin{pmatrix} E_r & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}P$$

在 $m=n$ 时，取 $G_{22}\in C^{(n-r)\times(n-r)}$ 的满秩矩阵，此时 A^{-} 可逆

故每个方阵有可逆的{1}-逆

T11

必要性：

由定理可知 x 是最小二乘解 $\Leftrightarrow A^HAx=A^Hb$

取 $y=b-Ax$

则 $A^Hy=A^Hb-A^HAx=0$

于是 $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ 是题目方程的解

充分性：

已知 $A^Hy=0$

取 $y=b-Ax$ ，可得 $A^HAx=A^Hb$

T12

x 是 $\min\sum_{i=1}^{k}\|A_ix-b_i\|^2$ 的解

$\Leftrightarrow x$ 是 $A_ix=b_i$ 的最小二乘解

$\Leftrightarrow x$ 是 $\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \end{bmatrix}x=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}$ 的解

$\Leftrightarrow x$ 是 $\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \end{bmatrix}^H\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \end{bmatrix}x=\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \end{bmatrix}^H\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}$ 的解

$\Leftrightarrow x$ 是 $\left(\sum_{i=1}^{k}A_i^HA_i\right)x=\sum_{i=1}^{k}A_i^Hb_i$ 的解

T13

原问题

$$\min_{Ax=b}\|x-a\|$$

等价于求解 $A(x-a)=b-Aa$ 的极小范数解

由定理可知 $x-a=A^{(1,4)}(b-Aa)$

$\Rightarrow x=A^{(1,4)}b+\left(I-A^{(1,4)}A\right)$

T14

(1)

对 A 进行变换可求得 $Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

取一个$A^{(1)}=Q\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

满足 $AA^{(1)}b=b$ 所以方程相容

通解为 $x = A^{(1)}b + \left(I - A^{(1)}A\right)y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} y$，其中 $y \in C^4$ 任意

对 A 进行满秩分解有 $A = FG = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

则 $A^{+} = G^{H}\left(GG^{H}\right)^{-1}\left(F^{H}F\right)^{-1}F^{H} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

极小范数解为 $x = A^{(1,4)}b = A^{+}b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2)

$AA^{(1)}b \neq b$ 方程不相容

极小范数最小二乘解 $x = A^{+}b = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$