矩阵分解的习题

1. 用 Schmidt 正交化方法求矩阵 A 的 QR 分解，其中

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2. 用 Givens 变换求矩阵 A 的 QR 分解，其中

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

3. 用 Householder 变换求矩阵 A 的 QR 分解，其中

$$A=\begin{pmatrix}0 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

4.设 σ_1,σ_2 是矩阵 A 的最大奇异值和最小值，证明 $\sigma_1=\|A\|_2$;当 A 是可逆矩阵时，证明

$$\|A^{-1}\|_2=\frac{1}{\sigma_n}$$

5. 证明 A 的奇异值分解 $A=U\sum V^H$ 中 V 的行向量与 U 的列向量分别为 A^HA

及 AA^H 的特征向量 .

6. 设 $A\in C_r^{m\times r},(r>0,m\geq n)$，$\sigma_i(i=1,2,\cdots,r)$ 是 A 的全体非零奇异值，证明

$$\|A\|_F^2=\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2$$

7. 求 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 的奇异值分解.

8. 设 $A\in C_r^{m\times n}(r>0)$ 的奇异值分解为 $A=U\begin{pmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V^H$，试求矩阵 $B=\begin{pmatrix}A\\ A\end{pmatrix}$ 的一个奇异值分解.

9. 计算矩阵 A 的谱分解，其中

(1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; (2) $A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$