第三章习题

T1

由题意有

$$T(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}=(e_1,e_2,e_3)A\Rightarrow A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

T2

$$D(x_1)=ae^{at}\cos bt-be^{at}\sin bt=ax_1-bx_2$$

$$D(x_2)=ae^{at}\sin bt+be^{at}\cos bt=ax_2+bx_1$$

$$D(x_3)=e^{at}\cos bt+tD(x_1)=x_1+ax_3-bx_4$$

$$D(x_4)=e^{at}\sin bt+tD(x_2)=x_2+ax_4+bx_3$$

$$D(x_5)=te^{at}\cos bt+\tfrac{1}{2}t^2D(x_1)=x_3+ax_5-bx_6$$

$$D(x_6)=te^{at}\sin bt+\tfrac{1}{2}t^2D(x_2)=x_4+ax_6+bx_5$$

则有

$$A=\begin{pmatrix}a&b&1&0&0&0\\-b&a&0&1&0&0\\0&0&a&b&1&0\\0&0&-b&a&0&1\\0&0&0&0&a&b\\0&0&0&0&-b&a\end{pmatrix}$$

T3

(1)

$$T_1E_{11}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}E_{11}=\begin{pmatrix}a&0\\c&0\end{pmatrix}=aE_{11}+cE_{21}$$

$$T_1E_{12}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}E_{12}=\begin{pmatrix}0&a\\0&c\end{pmatrix}=aE_{12}+cE_{22}$$

$$T_1E_{13}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}E_{13}=\begin{pmatrix}b&0\\d&0\end{pmatrix}=bE_{11}+dE_{21}$$

$$T_1E_{14}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}E_{14}=\begin{pmatrix}0&b\\0&d\end{pmatrix}=bE_{12}+dE_{22}$$

则有

$$A_1=\begin{pmatrix}a&0&b&0\\0&a&0&b\\c&0&d&0\\0&c&0&d\end{pmatrix}$$

(2)

$$T_2E_{11}=E_{11}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix}=aE_{11}+bE_{12}$$

$$T_2E_{12}=E_{12}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&d\\0&0\end{pmatrix}=cE_{11}+dE_{12}$$

$$T_2E_{21}=E_{21}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\a&b\end{pmatrix}=aE_{21}+bE_{22}$$

$$T_2E_{22}=E_{22}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\c&d\end{pmatrix}=cE_{21}+dE_{22}$$

则有

$$A_2=\begin{pmatrix}a&c&0&0\\b&d&0&0\\0&0&a&c\\0&0&b&d\end{pmatrix}$$

(3)

由$T_1X=XA_1,T_2X=XA_2$, 有

$T_3X=(T_2\circ T_1)X=XA_3\Rightarrow T_3X=T_2(T_1X)=T_2(XA_1)=XA_1A_2\Rightarrow A_3=A_1A_2$

则

$$A_3=\begin{pmatrix} a^2 & ac & ab & bc \\ ab & ad & b^2 & bd \\ ac & c^2 & ad & cd \\ bc & cd & bd & d^2 \end{pmatrix}$$

T4

设有一组数$a_i,i=1,...,k$，使得 $a_1x+a_2Tx+...+a_kT^{k-1}x=0$

上式作用一次T, 有 $a_1Tx+a_2T^2x+...+a_{k-1}T^{k-1}x=0$

总共作用 $k-1$ 次 T 后，有 $a_1T^{k-1}x=0$

又因为 $T^{k-1}x\neq 0$，所以 $a_1=0$

同理可证 $a_2=a_3=...=a_k=0$

所以 $x,Tx,...,T^{k-1}x$ 线性无关

T5

(1)

记过渡矩阵为 C

则有 $(y_1,y_2,y_3)=(x_1,x_2,x_3)C$

$$\Rightarrow C=(x_1,x_2,x_3)^{-1}(y_1,y_2,y_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

(2)

$T(x_1,x_2,x_3)=(y_1,y_2,y_3)=(x_1,x_2,x_3)C$

T 在基 x_1,x_2,x_3 下的矩阵为 C

(3)

令 A' 为 T 在基 y_1,y_2,y_3 下的矩阵

$TY=TXC=XCC=YC$

T 在基 y_1,y_2,y_3 下的过渡矩阵为 $A'=C$

T6

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 \\ -4 & 8 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

计算可得 A 的特征值及对应特征向量为:

$\lambda_1=-2,\xi_1=k_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},k_1\neq 0,k_1\in F$

$\lambda_2=\lambda_3=1,\xi_2=k_2\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 20 \end{pmatrix},k_2\neq 0,k_2\in F$

于是 T 的特征值及对应特征向量为：

$\lambda_1=-2,\eta_1=X\xi_1=k_1x_3,k_1\neq 0,k_1\in F$

$\lambda_2=\lambda_3=1,\eta_2=X\xi_2=k_2(3x_1-6x_2+20x_3),k_2\neq 0,k_2\in F$

T7

方法一:

$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

取 $\lambda=2$, 对应特征向量 $p_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

令 $p_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

可得 $P_3=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

$AP_3=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&-4&3\\2&1&0\end{pmatrix}=P_3\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&1\\0&-4&3\end{pmatrix}$

记 $A_2=\begin{pmatrix}-1&1\\-4&3\end{pmatrix},\det(\lambda I-A_2)=(\lambda-1)^2$

其特征值为 $\lambda=1$, 对应特征向量为 $q_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

令 $q_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

可得 $P_2=(q_1,q_2)=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$

$A_2P_2=P_2\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

则

$$A=P_3\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&1\\0&-4&3\end{pmatrix}P_3^{-1}=\widetilde{P}_3\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\widetilde{P}_3^{-1}$$

其中 $\widetilde{P}_3=P_3\begin{pmatrix}1&\\&P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&2&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

方法二:

由特征值可知，矩阵 Jordan 标准型只可能为 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

又 $rank(I-A)=2$

故 A 的 Jordan 标准型为 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

所以 $A\sim\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

T8

$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -2\\ 0 & \lambda+1 & -1\\ 0 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-2\lambda+1$

则

$2A^8-3A^5+A^4+A^2-4E_3=(A^3-2A+1)(2A^5+4A^3-5A^2+9A-14E)+24A^2-37A+10E$

于是

$2A^8-3A^5+A^4+A^2-4E_3=24A^2-37A+10E=\begin{pmatrix}-3&48&-26\\0&95&-61\\0&-61&34\end{pmatrix}$

T9

$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-7&-4&4\\-4&\lambda+8&1\\4&1&\lambda+8\end{vmatrix}=(\lambda-9)(\lambda+9)^2$

又$(A-9I)(A+9I)=O$，则最小多项式为 $(\lambda-9)(\lambda+9)$

T10

因为$|\lambda I-A|=|(\lambda I-A)^T|=|\lambda I-A^T|$

所以 A 和 A^T 有相同的特征多项式和最小多项式

T11

(1)

$\det(\lambda I-A)=\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1=(\lambda-1)(\lambda^2+1)$

所以 A 的特征值为 $1,i,-i$

则 Jordan 标准型为 $\begin{pmatrix}1&&\\&i&\\&&-i\end{pmatrix}$

(2)

$\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^4$

所以 A 的特征值为 1

由 $(A-I)X=0$ 可得对应特征向量 $\xi=(0,0,-1,1)^T$

则 $\lambda=1$ 的几何重数为 1, $J(1)$ 只包含一个 Jordan 块

故 A 的 Jordan 标准型为 $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

T12

设 A 的 Jordan 标准型为 $J=\begin{pmatrix}J_1(\lambda_1)&&\\&\ddots&\\&&J_s(\lambda_s)\end{pmatrix}, J_i(\lambda_i)=\begin{pmatrix}\lambda_i&1&\dots&0\\0&\lambda_i&\ddots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&1\\0&0&\dots&\lambda_i\end{pmatrix}$

于是存在可逆矩阵 P 使得 $A=PJP^{-1}$

则 $J^m=P^{-1}A^mP=I\Rightarrow[J_i(\lambda_i)]^m=I_p\Rightarrow p=1$

则 $J_i(\lambda_i)$ 中的 Jordan 块为 1 阶, 即 $J_i(\lambda_i)=\lambda_i$

故 A 相似于对角矩阵