

矩阵分解实验

代码实现见对应 *py* 文件

题目 1. 利用 Givens 变换实现非奇异矩阵的 QR 分解。

解答. 利用公式 $c = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, s = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$ 构造 Givens 矩阵 G_i

代码运行结果如下：

```
输入的矩阵为：
[[ 2 -1 -2]
 [-4  6  3]
 [-4 -2  8]]
===基于givens的QR分解结果为===
Q矩阵为：
[[ 0.3333  0.      0.9428]
 [-0.6667  0.7071  0.2357]
 [-0.6667 -0.7071  0.2357]]
R矩阵为：
[[ 6.      -3.      -8.     ]
 [ 0.      5.6569 -3.5355]
 [ 0.      0.      0.7071]]
Q矩阵与R矩阵相乘的结果为：
[[ 2. -1. -2.]
 [-4.  6.  3.]
 [-4. -2.  8.]]
```

题目 2. 利用 Householder 变换实现非奇异矩阵的 QR 分解。

解答. 利用公式 $H_u = I - 2uu^T, u = \frac{x - |x|z}{|x - |x|z|}$ 构造 Householder 矩阵 H_i

代码运行结果如下：

```
输入的矩阵为：
[[ 2 -1 -2]
 [-4  6  3]
 [-4 -2  8]]
===基于householder的QR分解结果为===
Q矩阵为：
[[ 0.3333  0.      0.9428]
 [-0.6667  0.7071  0.2357]
 [-0.6667 -0.7071  0.2357]]
R矩阵为：
[[ 6.      -3.      -8.     ]
 [ 0.      5.6569 -3.5355]
 [ 0.      0.      0.7071]]
Q矩阵与R矩阵相乘的结果为：
[[ 2. -1. -2.]
 [-4.  6.  3.]
 [-4. -2.  8.]]
```

题目 3. 实现满秩分解

解答. 化为行最简阶梯矩阵后取对应行列

代码运行结果如下:

```

输入的矩阵为:
[[1 0 0 1]
 [1 1 0 0]
 [0 1 1 0]
 [0 0 1 1]]
===满秩分解结果为===
F矩阵为:
[[1 0 0]
 [1 1 0]
 [0 1 1]
 [0 0 1]]
G矩阵为:
[[ 1.  0.  0.  1.]
 [ 0.  1.  0. -1.]
 [ 0.  0.  1.  1.]]
F矩阵与G矩阵相乘的结果为:
[[1.  0.  0.  1.]
 [1.  1.  0.  0.]
 [0.  1.  1.  0.]
 [0.  0.  1.  1.]]
    
```

题目 4. 略

解答. 题目中的 P 置换就是把偶数索引放前面, 奇数索引放后面, 对矩阵分别进行行列置换后计算对应 Δ_t

代码运行的部分结果如下(32 阶矩阵, 取 $t = 16, k = [1, 2], l = [1, 2, 3]$):

```

输入的矩阵为:
[[194  80 110 ...  53 230 129]
 [ 58 192  79 ...  54 136 217]
 [250 210 109 ...  29  96 253]
 ...
 [235 200 219 ...  18 215 134]
 [127 194 241 ... 146 167  76]
 [154 148  0 ...   4  92 184]]
置换前X的delta: 0.8263217800394251
置换前X的最大元素和最小元素的比值: 28.563185196958994
置换后(行 1 次 列 1 次)的矩阵为:
[[194 110 156 ... 207  53 129]
 [153 203 113 ... 198 155 118]
 [186 228 242 ...  41 180  61]
 ...
 [233  96  70 ... 106 148 180]
 [ 65  38  51 ...  86 210 141]
 [154  0 175 ... 128  4 184]]
置换后Y的delta: 0.8263217800394251
置换后Y的最大元素和最小元素的比值: 28.563185196958994
置换后(行 2 次 列 2 次)的矩阵为:
[[194 156  57 ... 165 207 129]
 [153 113  1 ... 186 198 118]
 [186 242 119 ...  97  41  61]
 ...
 [233  70 247 ... 134 106 180]
 [ 65  51 105 ...  26  86 141]
 [154 175  34 ... 241 128 184]]
置换后Y的delta: 0.8263217800394251
置换后Y的最大元素和最小元素的比值: 28.563185196958994
置换后(行 2 次 列 3 次)的矩阵为:
[[194  57  58 ... 103 165 129]
 [153  1  25 ... 185 186 118]
 [186 119 179 ...  1  97  61]
 ...
 [233 247 104 ...  58 134 180]
 [ 65 105 109 ... 118  26 141]
 [154  34  27 ...  86 241 184]]
置换后Y的delta: 0.8263217800394251
置换后Y的最大元素和最小元素的比值: 28.563185196958994
    
```

从结果可得, 置换前后 Δ_t 没有发生变化, 说明矩阵所含信息保持不变, 置换只改变了数据分布。