Алгоритм Мо

Попов Владимир Сергеевич,
Б01-411

Актуальность

Алгоритм Мо полезен при обработке большого количества запросов к отрезкам на неизменяемом массиве. Основное применение - анализ больших неизменяемых данных

- Олимпиадное программирование
- Обработка логов
- Анализ трафика

Математическая задача

- Множество индексов $I = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Функция $a : I \to A$, где A - множество значений (массив $[a_1, ..., a_n]$).
- Множество запросов $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$, где $q_i = (l_i, r_i) \in I \times I$, причём $l_i \leq r_i$.
- Функция $f : I \times I \to R$, где R - множество результатов.

Требуется вычислить $f(q_i), \forall i = \overline{1, m}$

Математическая задача

Пусть дано состояние $S \in \mathcal{S}$ соответствующее отрезку $[l, r]$, то есть $S = S(l, r)$.

Должна существовать функция $U_\delta : \mathcal{S} \times A \to \mathcal{S}$, где $\delta = \pm 1(1 - remove, -1 - add)$

Должно выполняться:

$$S(L \pm 1, R) = U_{\pm 1}(S(L, R), a[L]) \quad \text{и} \quad S(L, R \pm 1) = U_{\pm 1}(S(L, R), a[R]).$$

Должна существовать функция $G : \mathcal{S} \to R : f(l, r) = G(S(l, r))$

$\forall S \in \mathcal{S}$ и $\forall a \in A$ должно выполняться:

$$U_{-1}(\, U_{+1}(S, a),\, a\,) = S \quad \text{и} \quad U_{+1}(\, U_{-1}(S, a),\, a\,) = S.$$

Как работает

- Работаем в оффлайн.
- Главная идея - переупорядочить запросы так, чтобы переход от прошлого к следующему был дешёвым. Сначала отсортируем по блокам исходя из левой границы, потом по правой
- Проходимся по всем запросам и “дошагиваем” с текущей позиции до запроса прибавлением и удалением элементов справа и слева

```
struct Query:
    int l, r, id

int K = sqrt(N)
int a = 1, b = 0

bool isLess(Query a, Query b):
    if a.l / K != b.l / K:
        return a.l < b.l
    return a.r < b.r

function process(Query[Q] q):
    sort(q, isLess)
    for i = 0 to Q - 1:
        while a > q[i].l:
            addLeft(a - 1)
            a -= 1
        while b < q[i].r:
            addRight(b + 1)
            b += 1
        while a < q[i].l:
            delLeft(a)
            a += 1
        while b > q[i].r:
            delRight(b)
            b -= 1
    result[q[i].id] = answer()
```

Псевдокод алгоритма Мо[1]

Асимптотика

Будем считать, что операции удаления и добавления слева и справа O(1)

- Правая граница во время обработки 1 группы будет только увеличиваться, значит O(n*n/K)

- Для запросов (l_i, r_i]) и (l_j, r_j) очевидно $|l_i - l_j| < K$, значит обработка левых границ одной группы - $O(K^2)$, а всех - O(m*K)

- Также у нас есть сортировка O(m*logm)

- Суммируя получаем $O(m*logm + n^2/K+m*K)$
- Чтобы минимизировать сложность возьмём K = n/sqrt(m)

- Итог: O(m*logm + n*sqrt(m))
- Если m соизмеримо с n то можно взять K = sqrt(n), тогда O(m*logm + n*sqrt(n))

Пример задачи

D. Мощный массив

ограничение по времени на тест: 5 seconds
ограничение по памяти на тест: 256 megabytes

Имеется массив натуральных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$. Рассмотрим некоторый его подмассив $a_l, a_{l+1}, ..., a_r$, где $1 \le l \le r \le n$, и для каждого натурального числа s обозначим через K_s число вхождений числа s в этот подмассив. Назовем *мощностью* подмассива сумму произведений $K_s \cdot K_s \cdot s$ по всем различным натуральным s. Так как количество различных чисел в массиве конечно, сумма содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых.

Необходимо вычислить мощности каждого из t заданных подмассивов.

Входные данные

Первая строка содержит два целых числа n и t $(1 \le n, t \le 200000)$ — длина массива и количество запросов соответственно.

Вторая строка содержит n натуральных чисел a_i $(1 \le a_i \le 10^6)$ — элементы массива.

Следующие t строк содержат по два натуральных числа l и r $(1 \le l \le r \le n)$ — индексы левого и правого концов соответствующего подмассива.

Выходные данные

Выведите t строк, где i-ая строка содержит единственное натуральное число — мощность подмассива i-го запроса.

Пример задачи на алгоритм Мо[2]

Пример задачи. Сравнение решений

- **Решение брутфорсом (brutforce.cpp)**
  Каждый запрос будем проходить от left до right и записывать все частоты в unordered_map.

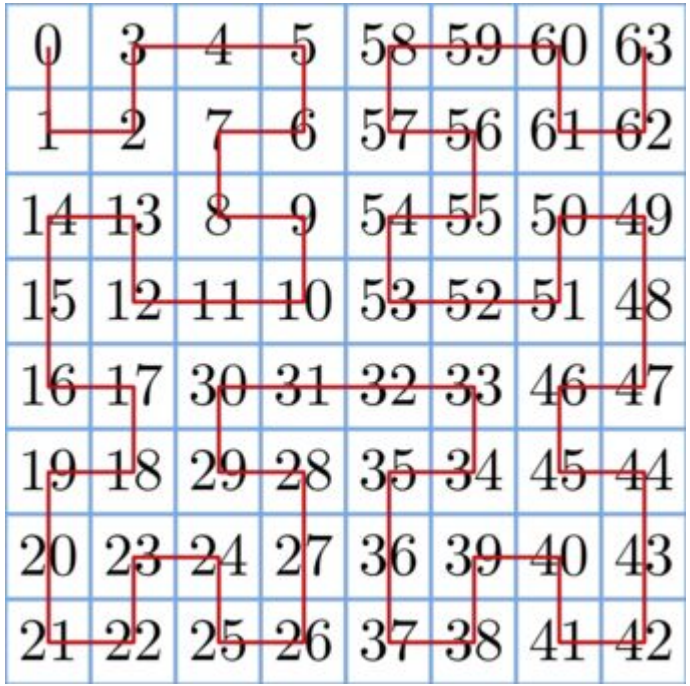
- **Решение через корневую декомпозицию (sqrt_decompose.cpp)**
  Поделим запросы числа на “частые” (freq > sqrt(n)) и “редкие” (иначе). Частые будем считать через префиксные сумма за O(1), а редкие - искать в их массиве позиций бинарным поиском за O(log(sqrt(n))) в среднем.

- **Решение через алгоритм Мо (mo.cpp)**
  Отсортируем запросы, как описывалось ранее. Заводим частотный словарь и в пересчетах обновляем его.

Решение \ Харак-ика	Худшее по времени	Среднее по времени	Память
Брутфорс	$O(t*n^2)$	O(t*n) амортизировано	O(n^2)
Корнячка	O(t*n*log(n))	O(t*sqrt(n)*log(sqrt(n)))	O(n*sqrt(n) + maxA)
Мо	O(t*logt + n*sqrt(n))	O(t*logt + n*sqrt(n))	O(n + t + maxA)

Константные оптимизации

- Каждый чётный блок сортировать right по убыванию, а каждый нечетный - по возрастанию.
- Как ещё меньше “прыгать” - кривая Гильберта



Визуализация кривой Гильберта[3].

```
unsigned long long HilbertOrder(int x, int y, int pow, int rotate) {
    if (pow == 0) {
        return 0ULL;
    }

    const int height = 1 << (pow - 1);

    int seg = (x < height ? 0 : 1) * 2 + (y < height ? 0 : 1);
    seg = (seg + rotate) & 3;

    static constexpr const int rotateDelta[4] = {3, 0, 0, 1};

    int newX = x & (height - 1);
    int newY = y & (height - 1);
    int newRotate = (rotate + rotateDelta[seg]) & 3;

    unsigned long long lowBits = HilbertOrder(newX, newY, pow - 1, newRotate);

    unsigned long long highBits = (unsigned long long)seg << (2 * (pow - 1));

    return highBits | lowBits;
}
```

Расчёт значения кривой гильберта[3].

Список литературы

- [1] Общее описание алгоритма
  https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC_%D0%9C%D0%BE&mobileaction=toggle_view_desktop
- [2] Задача “Мощный массив”
  https://codeforces.com/problemset/problem/86/D
- [3] Оптимизация кривой Гильберта
  https://codeforces.com/blog/entry/61203

Полезные ссылки

- Гитхаб с докладом и кодом
  https://github.com/kzueirf12345/mo
- Мой телеграмм канал
  https://t.me/+DSOn7YUQQN9mODFi