Задача 4. Решение уравнения конвекции-диффузии

Input file: **standard input**
Output file: **standard output**
Time limit: **10 seconds**
Memory limit: **256 megabytes**

Требуется решить двумерное уравнение конвекции-диффузии: $u_t + \lambda_1 u_x + \lambda_2 u_y = \kappa\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + f$ с использованием простейшей разностной схемы типа «крест» и равномерной расчетной сетки $\Delta x = \Delta y = h$. В случае стационарных граничных условий $u|_\Gamma = \varphi(x, y)$ решение данного уравнение будет стремиться к решению уравнения $\lambda_1 u_x + \lambda_2 u_y = \kappa\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + f$ с теми же граничными условиями $u|_\Gamma = \varphi(x, y)$. Здесь u - удельная концентрация переносимого вещества, выраженная в мг/м^3, λ_1, λ_2 - проекции вектора скорости переноса вещества на оси x, y, $\kappa > 0$ - эффективный коэффициент диффузии, правая часть - f позволяет моделировать источники или наоборот стоки переносимого вещества. Разностная аппроксимация уравнения на сеточном шаблоне типа «крест» будет иметь следующий вид:

$$\lambda_1 \frac{u_{1,0} - u_{-1,0}}{2h} + \lambda_2 \frac{u_{0,1} - u_{0,-1}}{2h} = \kappa\left(\frac{u_{1,0} - 2u_{0,0} + u_{-1,0}}{h^2} + \frac{u_{0,1} - 2u_{0,0} + u_{0,-1}}{h^2}\right) + f_{0,0}$$

Представим схему в стандартном виде, выразив $u_{0,0}$ через значения в остальных узлах сеточного шаблона:

$$u_{0,0} = \left(\frac{1}{4} - \frac{\lambda_1 h}{8\kappa}\right)u_{1,0} + \left(\frac{1}{4} + \frac{\lambda_1 h}{8\kappa}\right)u_{-1,0} + \left(\frac{1}{4} - \frac{\lambda_2 h}{8\kappa}\right)u_{0,1} + \left(\frac{1}{4} + \frac{\lambda_2 h}{8\kappa}\right)u_{0,-1} + \frac{h^2}{4\kappa} f_{0,0}$$

Данная схема имеет порядок аппроксимации $O\left(h^2\right)$ и ее коэффициенты должны удовлетворять следующим условиям:

$$0 \le \frac{1}{4} \pm \frac{\lambda_{1,2} h}{8\kappa} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le 1 \pm \frac{\lambda_{1,2} h}{2\kappa} \le 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\left|\lambda_{1,2}\right|}{\kappa} \le \frac{2}{h}$$

Полученное условие гарантирует нам монотонную сходимость разностной схемы к решению исходного дифференциального уравнения. При численном решении методом простых итераций получившегося разностного уравнения, мы приходим к разностной схеме для исходного уравнения конвекции-диффузии:

$$\frac{u_{0,0}^{n+1} - u_{0,0}^n}{\tau} + \lambda_1 \frac{u_{1,0}^n - u_{-1,0}^n}{2h} + \lambda_2 \frac{u_{0,1}^n - u_{0,-1}^n}{2h} = \kappa\left(\frac{u_{1,0}^n - 2u_{0,0}^n + u_{-1,0}^n}{h^2} + \frac{u_{0,1}^n - 2u_{0,0}^n + u_{0,-1}^n}{h^2}\right) + f_{0,0}^n$$

Или

$$u_{0,0}^{n+1} = \left(1 - \frac{4\tau\kappa}{h^2}\right)u_{0,0}^n + \tau\left(\frac{\kappa}{h^2} - \frac{\lambda_1}{2h}\right)u_{1,0}^n + \tau\left(\frac{\kappa}{h^2} + \frac{\lambda_1}{2h}\right)u_{-1,0}^n +$$

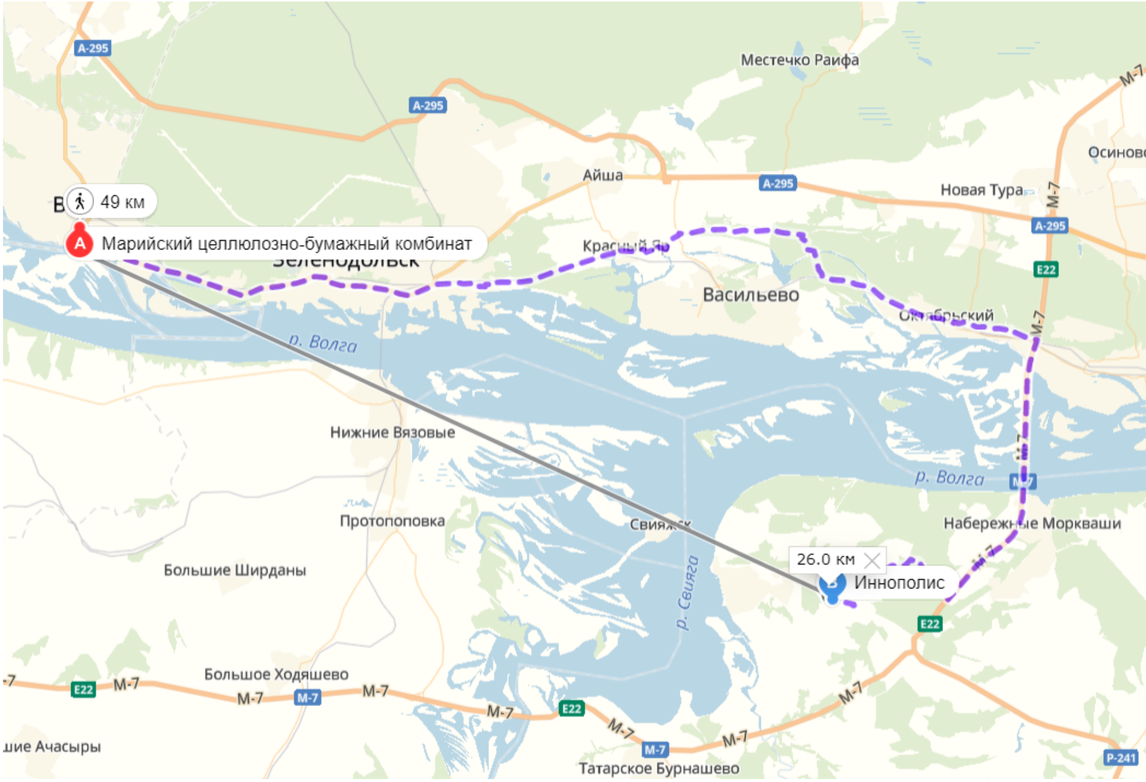
$$+\tau\left(\frac{\kappa}{h^2} - \frac{\lambda_2}{2h}\right)u_{0,1}^n + \tau\left(\frac{\kappa}{h^2} + \frac{\lambda_2}{2h}\right)u_{0,-1}^n + \tau f_{0,0}^n$$

Получившаяся схема имеет порядок аппроксимации $O\left(\tau, h^2\right)$ и она будет устойчивой и монотонной, при выполнении следующего условия:

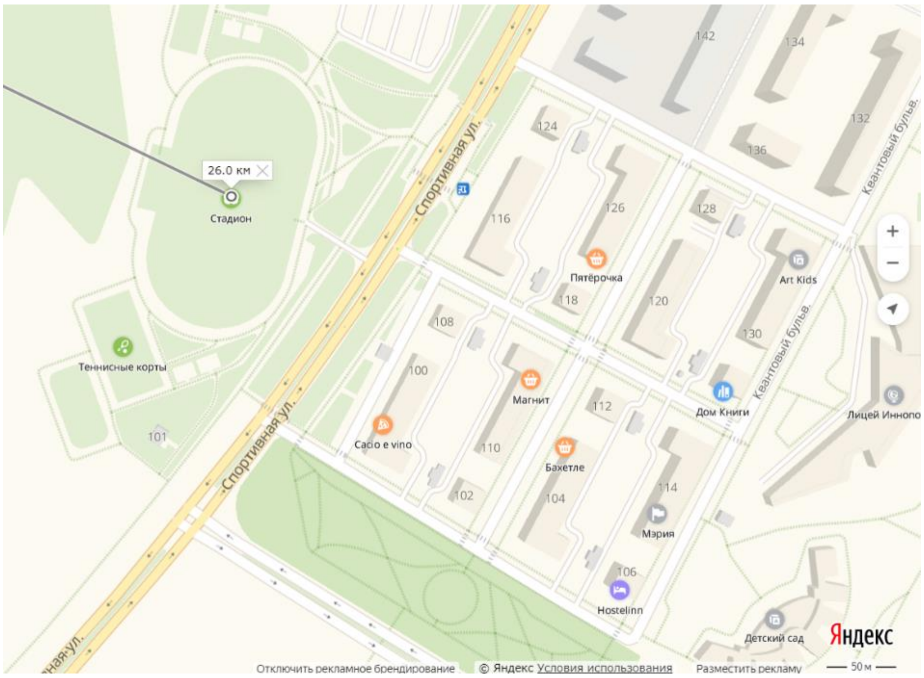
$$\begin{cases} \dfrac{4\tau\kappa}{h^2} \le 1 \\ 0 \le \tau\left(\dfrac{\kappa}{h^2} \pm \dfrac{\lambda_{1,2}}{2h}\right) \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \tau \le \frac{h^2}{4\kappa} = \frac{1}{4\kappa M^2}$$

Заметим, что максимальное значение $\tau = 1/\left(4\kappa M^2\right)$ почти совпадает с значением оптимального итерационного параметра для метода простых итераций.

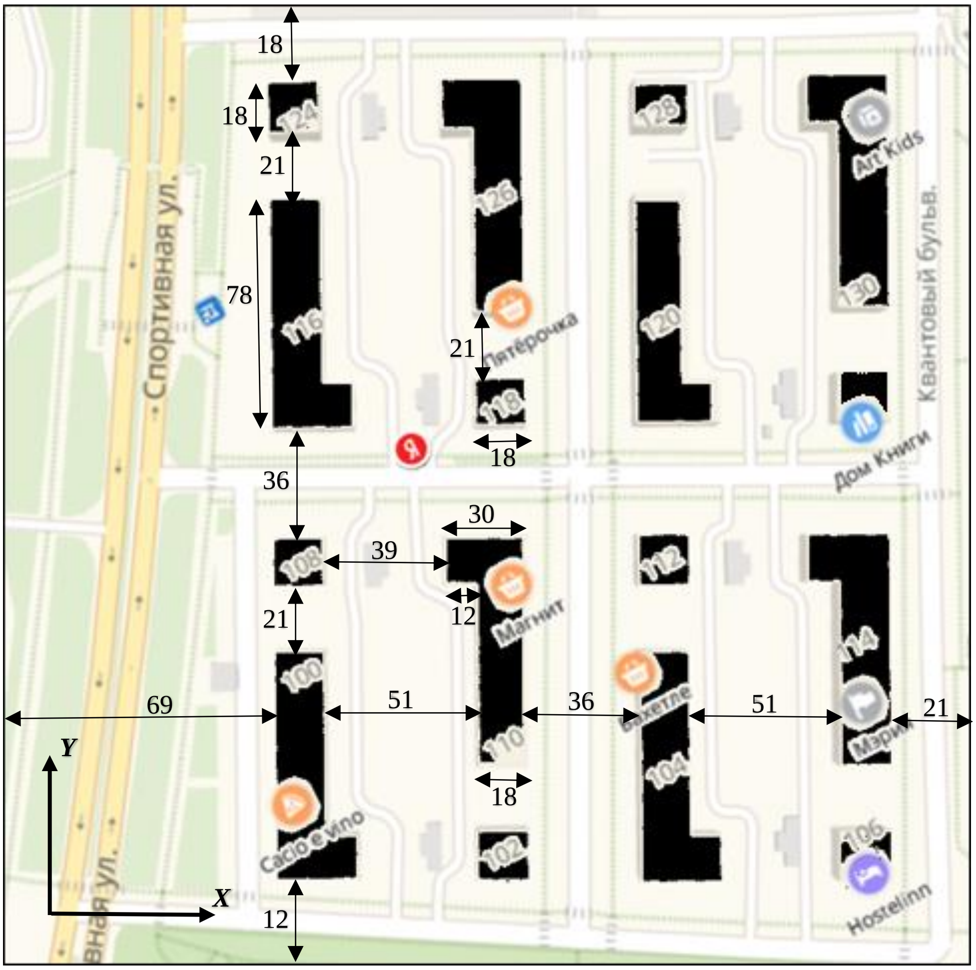
Марийский целлюлозно-бумажный комбинат находится в 26 км от Иннополиса, как это видно на следующей схеме:



Из схемы также видно, что при направлении ветра вдоль русла реки Волги выбросы комбината практически беспрепятственно достигают Иннополиса. На следующей схеме более детально видно, откуда они попадают в город:



В соответствии со схемой решение уравнения конвекции-диффузии будем искать в квадрате городской застройки размером 300x300 метров:



с граничными условиями, заданными в виде: $u(0,y)=1$ и $(\partial u/\partial x)_{x=300}=0$, $(\partial u/\partial y)_{y=o}=0$, $(\partial u/\partial y)_{y=300}=0$ на остальных трех границах. В квадрате находятся здания с граничными условиями на них, заданными также в виде: $\partial u/\partial x=\partial u/\partial y=0$, проекции вектора скорости переноса вещества: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$, эффективный коэффициент диффузии: $\kappa=0.5$, правая часть $f=0$. Используем равномерную расчетную сетку с равным количеством узлов: $\overline{0,M}$ по каждому пространственному направлению и послойную нумерацию неизвестных значений $u(x,y)$ в узлах сетки:

$$X=\left[u_{1,1},\ldots,u_{1,M-1},u_{2,1},\ldots,u_{2,M-1},\ldots,u_{M-1,1},\ldots,u_{M-1,M-1}\right]^T,\ u_{j,i}=u\left(i\Delta x,\,j\Delta y,\right),\quad i,j=\overline{1,M-1}$$

Для решения получившейся СЛАУ: $AX=b$ используем:

1. Самостоятельно реализованный численный метод в любом варианте уравнения стационарном или нет.

Формат входных данных

В входном файле задано только ε — точность численного решения, которую необходимо достигнуть, самостоятельно выбирая шаг равномерной расчетной сетки.

Формат выходных данных

В первую строку выходного файла вы выводите ваше значение сеточного параметра M, в следующей строке нужно вывести через пробел значения координат $\left(x_i=i\Delta x,\,y_j=j\Delta y\right)$ и соответствующее им значение функции $u_{i,j} = u\left(x_i, y_j\right)$ для всех узлов вашей расчетной сетки: $0 \le i, j \le M$.

Ваш ответ будет считаться правильным, если относительная погрешность каждой из компонент не будет превышать ε . А именно, пусть ваш результат в точке с координатами $\left(x_i, y_j\right)$ есть $u_{j,i} = a$, а правильный ответ: $u_{j,i} = b$. Проверяющая система будет считать ваш ответ правильным, если для каждой из компонент искомого вектора значений функции выполняется:
$$\frac{|a-b|}{\max\left(1,|b|\right)} \le \varepsilon .$$

Система оценки

Оцениваться будет точность результатов в каждом из тестов.

Срок сдачи задания — 08.12.2019 не позже 24.00!