Факультет программной
инженерии и компьютерной техники
Вычислительная математика

Лабораторная работа № 5

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений
(Метод Милна)

Преподаватель: Перл Ольга Вячеславовна
Выполнил: Геллер Л. А.
Группа: P3230

Санкт-Петербург, 2021

Описание метода, расчетные формулы

Метод Милна - многошаговый метод прогноза и коррекции.

1) Получаем значения в разгоночных точках (методом Рунге-Кутта).
2) Прогнозируем значения функции в следующей точке

$$y_i^{\text{прогн}} = y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2f_{i-3} - f_{i-2} + 2f_{i-1})$$

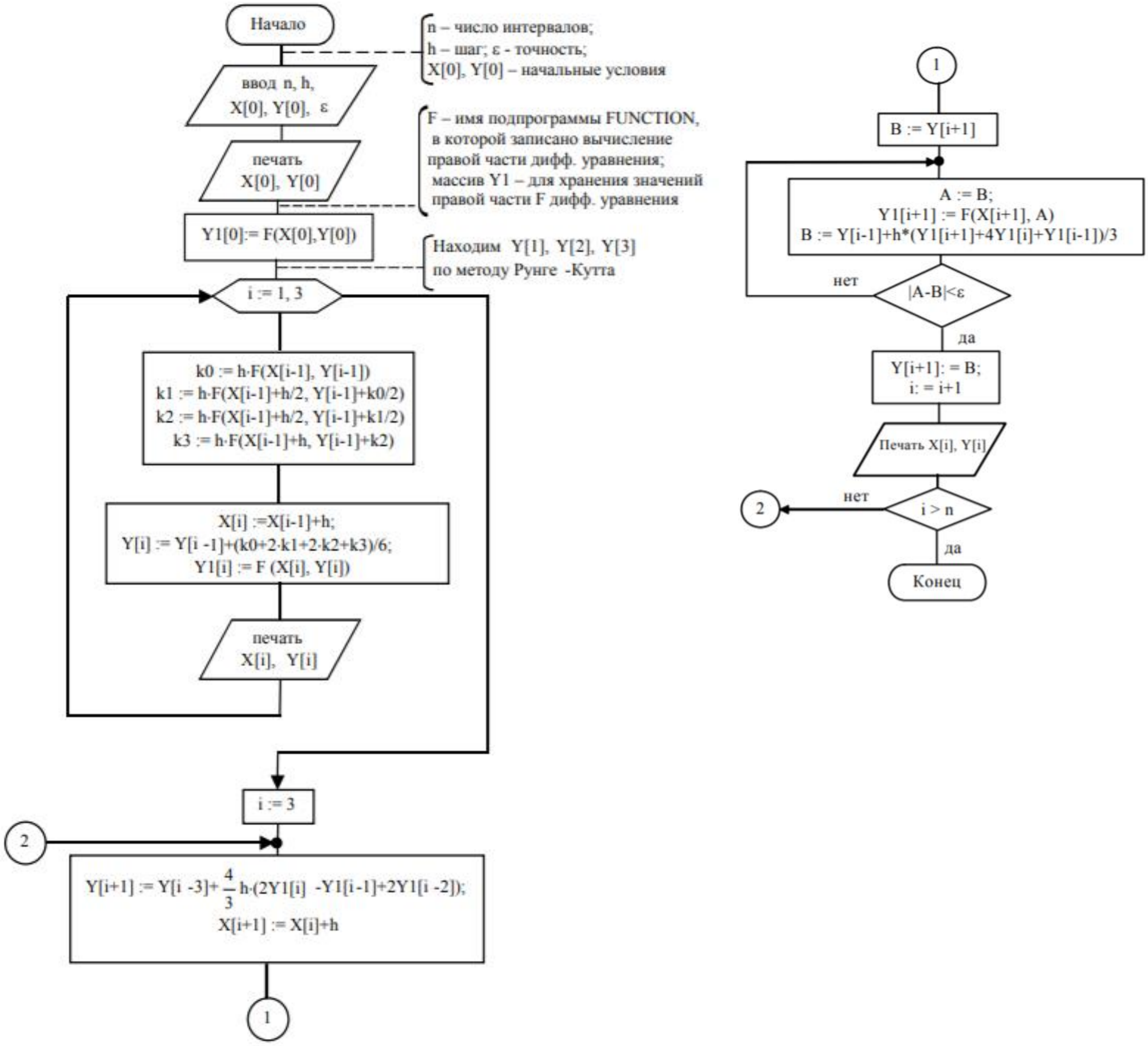
3) Выполняем коррекцию спрогнозированного значения

$$y_i^{\text{корр}} = y_{i-2} + \frac{h}{3}(f_{i-2} - 4f_{i-1} + 2f_i^{\text{прогн}})$$

$$f_i^{\text{прогн}} = f(x_i, y_i^{\text{прогн}})$$

4) Продолжаем проводить коррекцию, пока значение после коррекции не будет отличаться от спрогнозированного больше чем на заданную точность

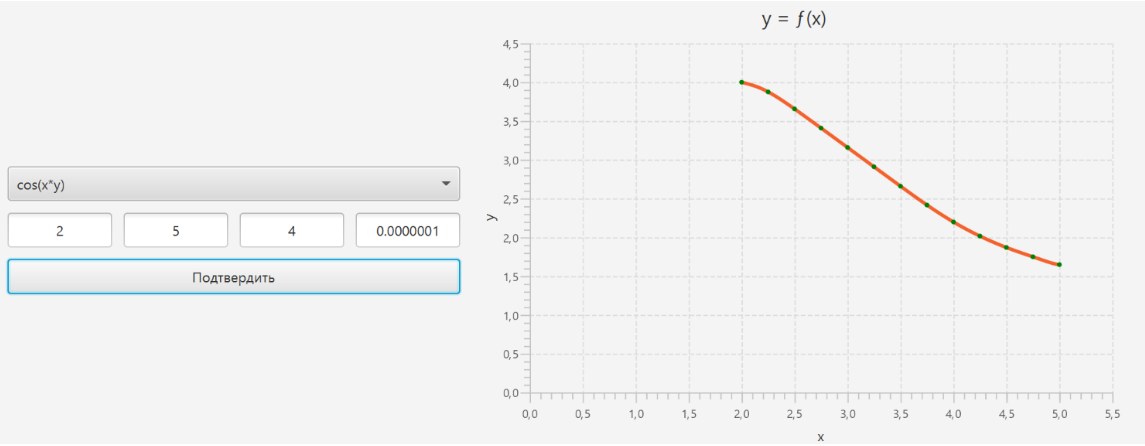
Блок-схема численного метода

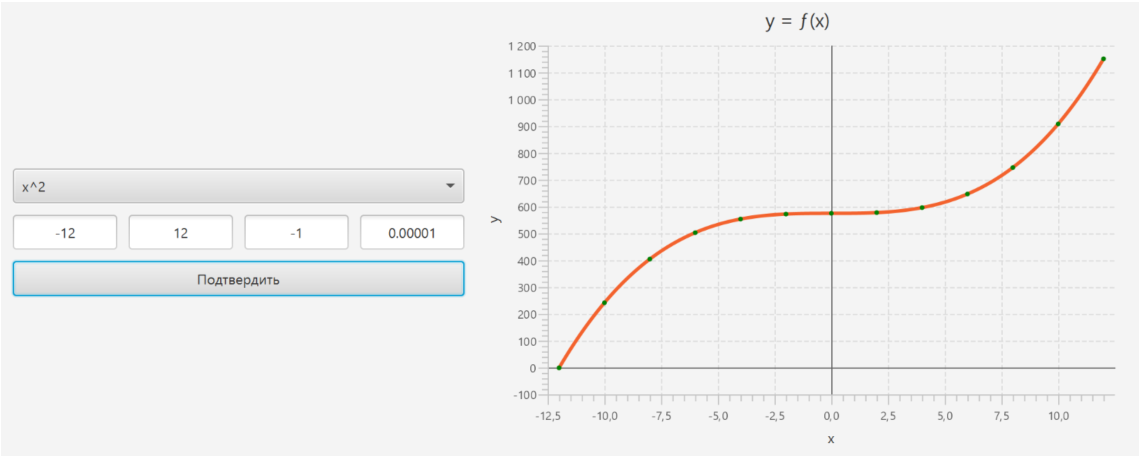


Листинг реализованного численного метода программы

```
public void solve(){
    x[0] = x0;
    y[0] = y0;
    functionValues[0] = f(x[0], y[0]);
    getAcceleratingPoints();
    for (int i=3; i<n; i++) {
        double prediction = y[i-3];
        prediction += (4/3) * h * 2 * functionValues[i-2];
        prediction -= (4/3) * h * functionValues[i-1];
        prediction += (4/3) * h * 2 * functionValues[i];
        x[i+1] = x[i] + h;
        double correction = prediction;
        y[i+1] = correction;
        double a = y[i+1];
        do {
            a = correction;
            functionValues[i+1] = f(x[i+1], a);
            correction = y[i-1];
            correction += (h/3) * functionValues[i-1];
            correction += (h/3) * 4 * functionValues[i];
            correction += (h/3) * functionValues[i+1];
        } while (Math.abs(correction - a) >= eps);
        y[i+1] = correction;
    }
}
private void getAcceleratingPoints() {
    double k0, k1, k2, k3;
    int i=1;
    double dy;
    for (; i<4; i++) {
        k0 = h * f(x[i-1], y[i-1]);
        k1 = h * f( x: x[i-1] + h/2,  y: y[i-1] + k0/2);
        k2 = h * f( x: x[i-1] + h/2,  y: y[i-1] + k1/2);
        k3 = h * f( x: x[i-1] + h,  y: y[i-1] + k2);
        dy = (k0 + 2*k1 + 2*k2 + k3)/6;
        x[i] = x[i-1] + h;
        y[i] = y[i-1] + dy;
        functionValues[i] = f(x[i], y[i]);
    }
}
```

Примеры и результаты работы программы на разных данных





Вывод

Задача Коши – найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям

Устойчивость метода – метод называют устойчивым, если малые погрешности в исходных данных приводят к малой погрешности результата

Дано дифференциальное уравнение первого порядка:

$$F(x, y, y') = 0$$

Одношаговые методы – для вычисления значения используются результаты только одного предыдущего шага

1) Метод Эйлера

   Значение в следующей точке находим как:

   $$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)}$$

   - имеет первый порядок точности
   - увеличение числа узлов приводит к накоплению погрешности результата

2) Усовершенствованный метод Эйлера

   Находим прогнозируемое значение с помощью метода Эйлера:

   $$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

   Уточняем:

   $$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})]$$

   - имеет второй порядок точности
   - увеличение числа узлов приводит к накоплению погрешности результата

3) Метод Рунге-Кутты

   $$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),}$$

   $$\boldsymbol{k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)}$$
   $$\boldsymbol{k_2 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})}$$
   $$\boldsymbol{k_3 = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})}$$
   $$\boldsymbol{k_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3)}$$

   - метод Эйлера и усовершенствованный метод Эйлера являются методами Рунге-Кутты 1 и 2 порядка.
   - методом Рунге-Кутты называют метод Рунге-Кутты 4го порядка точности

Многошаговые методы – для вычисления значения используются результаты нескольких предыдущих шагов. Для начала работы необходимо получить достаточный для работы метода набор точек (разгоночные точки)

1) Метод Адамса

$$\Delta f_i = f_i - f_{i-1}$$
$$\Delta^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$$
$$\Delta^3 f_i = f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}$$

$$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h^2}{2}\Delta f_i + \frac{5h^3}{12}\Delta^2 f_i + \frac{3h^4}{8}\Delta^3 f_i}$$

- зависит от используемого для получения разгоночных точек одношагового метода
- значение функции на каждом шаге считается только один раз (методом Рунге-Кутты четыре)

2) Метод Милна

- является методом типа предиктор-корректор
- зависит от используемого для получения разгоночных точек одношагового метода
- 4й порядок точности