УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет программной
инженерии и компьютерной техники
Вычислительная математика

Лабораторная работа № 3
Метод прямоугольников

Преподаватель: Перл Ольга Вячеславовна
Выполнил: Геллер Л. А.
Группа: P3230

Санкт-Петербург, 2021

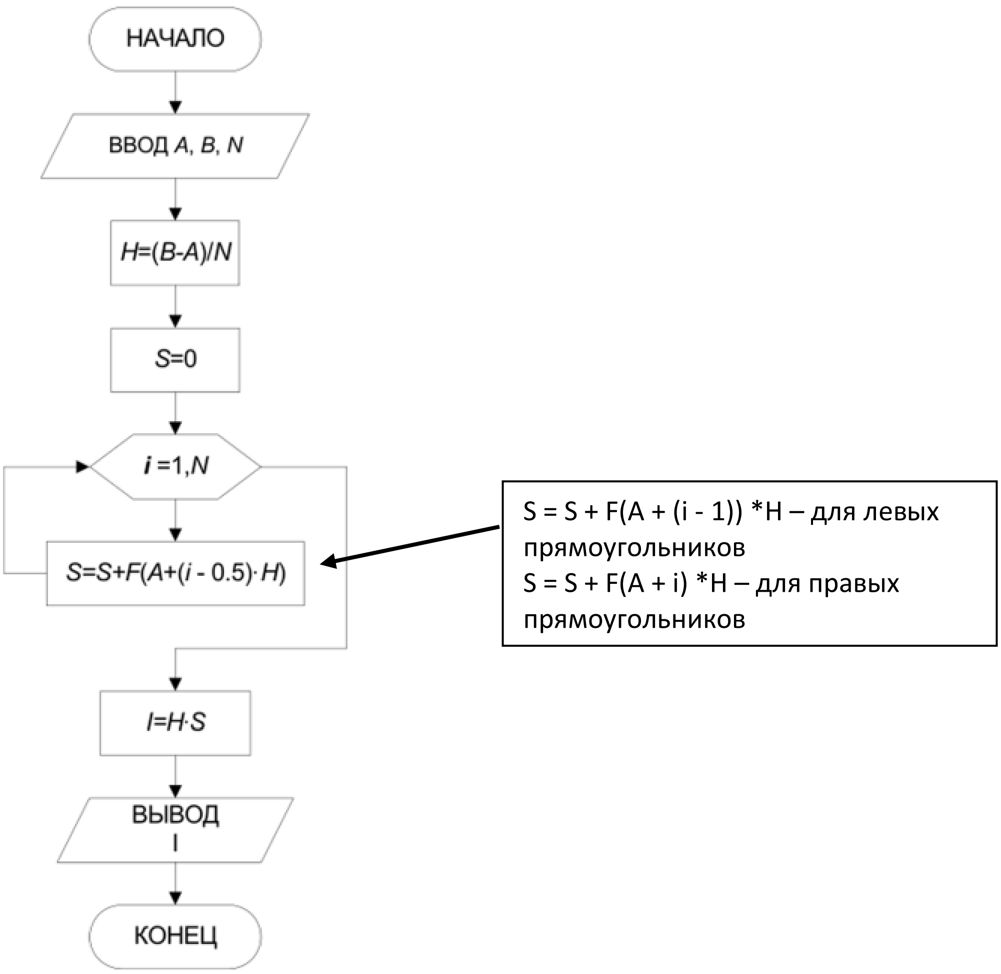
Описание метода, расчетные формулы

Решение нелинейных уравнений

1) Дана интегрируемая функция f(x)
2) Получаем пределы интегрирования и число n, например – начальное количество точек разбиения.
3) Вычисляем интеграл (сумму произведений отрезков разбиения на значение f(x) в левой, средней, или правой точке соответствующего отрезка)
4) Удваиваем количество точек разбиения и вычисляем на них интеграл, пока разница двух последовательных значений интеграла не станет меньше требуемой точности

Блок-схема численного метода

- Метод средних прямоугольников



Листинг реализованного численного метода программы

Метод прямоугольников:

```
public double integrate(DoubleFunction<Double> function, int n, double a, double b, double eps, int mode){
    double sum = 0, prevSum = 0, a0 = a;
    double delta = 0;
    do {
        prevSum = sum;
        sum = 0;
        a = a0;
        delta = (b - a0)/n;
        if (mode == 1) a += (delta / 2); // middle
        if (mode == 2) a += delta; // right
        for (int i=0; i<n; i++){
            sum += (delta * function.apply(a));
            a += delta;
        }
        n *= 2;
    } while (Math.abs( (prevSum - sum) / (Math.pow(2, 2) - 1) ) > eps);
    this.n = n / 2;
    return sum;
}
```

Примеры и результаты работы программы на разных данных

1) Нахождение определенного интеграла функции (нет точек разрыва):

   Выберите функцию, интеграл которой необходимо вычислить методом прямоугольников:
   1: f(x) = x^2, нет точек разрыва
   2: f(x) = sin(x)/x, x = 0 - точка разрыва 1 рода
   3: f(x) = 1/x, x = 0 - точка разрыва 2 рода
   1
   Введите нижний предел интегрирования:
   -5
   Введите верхний предел интегрирования:
   6
   Введите начальное количество узлов разбиения:
   5
   Введите точность:
   0,001
   Определенный левый интеграл функции = 113.66371309403607
   Значение найдено на разбиении n = 20480
   Определенный средний интеграл функции = 113.6663958740234
   Значение найдено на разбиении n = 640
   Определенный правый интеграл функции = 113.66962129716109
   Значение найдено на разбиении n = 20480

2) Нахождение определенного интеграла функции (точка разрыва 2 рода):

   Выберите функцию, интеграл которой необходимо вычислить методом прямоугольников:
   1: f(x) = x^2, нет точек разрыва
   2: f(x) = sin(x)/x, x = 0 - точка разрыва 1 рода
   3: f(x) = 1/x, x = 0 - точка разрыва 2 рода
   3
   Введите нижний предел интегрирования:
   -3
   Введите верхний предел интегрирования:
   6
   В отрезок интегрирования входит точка разрыва 2 порядка

3) Нахождение определенного интеграла функции (точка разрыва 1 рода):

   Выберите функцию, интеграл которой необходимо вычислить методом прямоугольников:
   1: f(x) = x^2, нет точек разрыва
   2: f(x) = sin(x)/x, x = 0 - точка разрыва 1 рода
   3: f(x) = 1/x, x = 0 - точка разрыва 2 рода
   2
   Введите нижний предел интегрирования:
   -4
   Введите верхний предел интегрирования:
   6
   Введите начальное количество узлов разбиения:
   5
   Введите точность:
   0,005
   Не удалось посчитать левый интеграл функции
   Определенный средний интеграл функции = 3.1805166522609616
   Значение найдено на разбиении n = 10
   Не удалось посчитать правый интеграл функции

Вывод

Определенный интеграл – число, равное пределу интегральных сумм
Необходимое условие его существования – непрерывность функции на интегрируемом промежутке
Достаточное условие – функция ограничена (нет разрывов второго рода на интегрируемом промежутке)

Методы Прямоугольников, Трапеций и Симпсона отличаются степенью многочлена, на который заменяется подынтегральная функция

Остаточный член интегрирования – разность между интегралом и интегральной суммой

Остаточный член:

1. Для средних прямоугольников: $|\Delta| \leq max_{x\in[a,b]}\left|f^{''}(x)\right| \cdot \frac{(b-a)^3}{24n^2}$

2. Для трапеций: $|\Delta| \leq max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2}$

3. Для метода Симпсона: $|\Delta| \leq max_{x \in [a,b]} \left|f''''(x)\right| \cdot \frac{(b-a)^5}{180n^4}$

Судя по формулам, метод Симпсона выигрывает перед остальными при интегрировании функций, представляющих из себя многочлен высокой степени (за счет использования производной 4-го порядка).
Метод Средних Прямоугольников благодаря меньшему коэффициенту в формуле дает большую точность, чем метод Трапеций.