Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
Факультет математики

Клейменов Аркадий Алексеевич

Задача Штейнера

Курсовая работа студента 1 курса
образовательной программы бакалавриата «Математика»

Научный руководитель:
PhD,
Доцент,
Медведев Владимир Олегович

Москва 2024

Содержание

A Актуальность решаемой задачи

Задача Штейнера, или задача о минимальном остовном дереве с добавочными вершинами, актуальна в наше время, так как призвана решать проблемы оптимизации в различных областях, таких как транспорт, телекоммуникации, биология и другие. Эта задача зарождалась в XIX веке, когда Штейнер впервые сформулировал ее для решение задачи о поиске кратчайшей сети, соединяющей заданный конечный набор точек плоскости. В дальнейшем задача была использована для устранения недостатков в телеграфных сетях. С течением времени задача была адаптирована для решения различных задач маршрутизации, минимизации затрат и повышения эффективности сетей. В настоящее время она остается актуальной и находит применение во многих областях науки и техники.

B Уже решенные задачи

1. **Алгоритм Прима** (1930): Хотя этот алгоритм изначально был разработан для нахождения минимального связывающего дерева (МСД), он также имеет отношение к задаче о сети Штейнера, так как МСД является частным случаем сети Штейнера.

Автор: Войцех Ярник Прим.

Актуальность: Алгоритм Прима используется как базовый подход в задачах, связанных с оптимизацией сетей, и его модификации применяются для решения более сложных задач, включая сети Штейнера.

2. **NP-полнота задачи о сети Штейнера** (1970-е годы): [см [4]] Доказательство того, что задача о сети Штейнера является NP-полной, было важным шагом в понимании ее вычислительной сложности.

Авторы: Фред Гринштейн, Роберт Тарьян.

Актуальность: Это доказательство ограничивает возможности точного решения задачи для больших наборов данных и стимулирует развитие приближенных и эвристических алгоритмов.

3. **Алгоритмы и приближения** (последние десятилетия): В последние годы было разработано множество алгоритмов для приближенного решения задачи о сети Штейнера, включая алгоритмы на основе генетических алгоритмов, эволюционных стратегий и других методов искусственного интеллекта.

Авторы: Различные исследователи в области компьютерных наук и оптимизации.

Актуальность: Эти алгоритмы позволяют решать задачу для более крупных и сложных наборов данных, что имеет важное практическое значение в таких областях, как проектирование коммуникационных сетей, логистика и другие.

C Решение задачи

Начнем рассмотрение решении задачи с тривиального случая, а именно, для 3 вершин. Выводы, которые мы сделаем после его рассмотрения станут фундаментом для наших дальнейших рассуждений. Рассмотрим частный случай решения данной задачи, а именно когда у нас ровно 3 вершины. Оказывается, что наименьшее расстояние от точки, до всех вершин треугольника будет достигаться в **точке Торичелли**. Давайте поймем почему это так, для этого нужно познакомиться с одной из геометрических теорем, которую доказал Румынский математик Димитрие Помпею.

C.1 Формулировка теоремы Помпею

[см. 0:10:00 - 0:15:00 в [3]] Возьмем правильный треугольник с вершинами A, B, C, затем выберем произвольную точку M на плоскости. Оказывается, что сумма расстояний до двух вершин A и B всегда ≥ 1 расстояния до точки. Когда достигается равенство? Равенство $AM + AB = AC$ происходит только в том случае, когда точка лежит на описанной окружности равностороннего треугольника ABC.

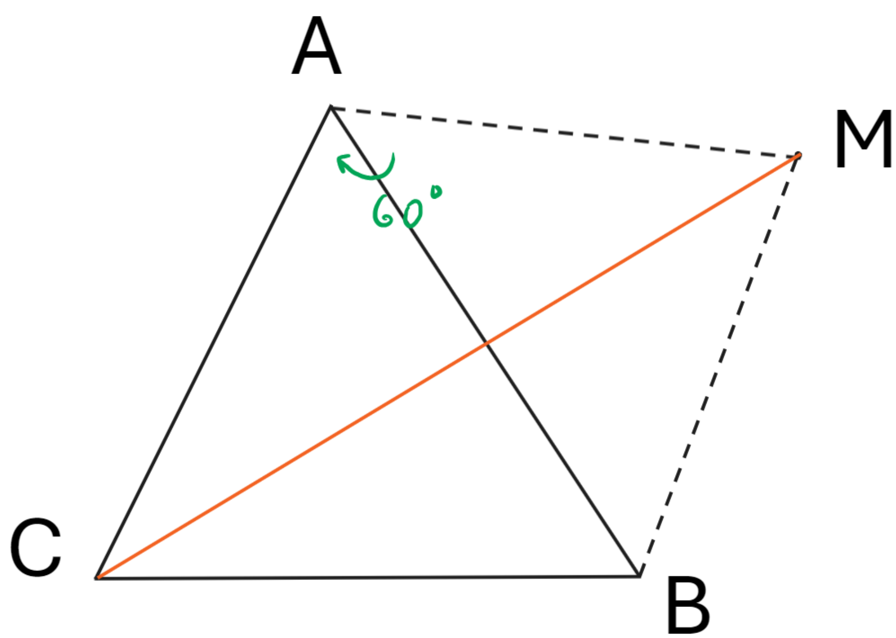

Рис. 1

Поворачиваем угол на 60 градусов по часовоой стрелке. В итоге при повороте вокруг точки A одни точки переходят в другие: $A \to A$, $B \to C$

(см Рис. 1)

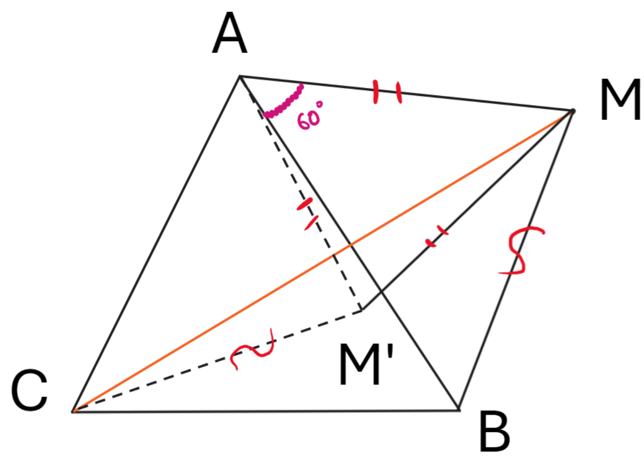

Рис. 2

Теперь заметим, что $AM = AM'$ и $\angle M'AM = 60^\circ \Rightarrow \triangle AMM'$ - равносторонний. $CM' = BM$, значит, $CM \Leftarrow CM' + M'M$ по неравенству треугольника и если $\angle AMB = 120^\circ$, то $CM = CM' + M'M$ (см Рис. 2)

C.2 Точка Торичелли

[см. стр 17-19 пункты 27-28 в [2]] Теперь утверждается, что если все углы в $\triangle ABC < 120^\circ$, тогда:

1. наименьшее расстояние до вершин достигается в точке торичелли;
2. точка Торичелли единственна.

Докажем сначала 2-ой пункт:

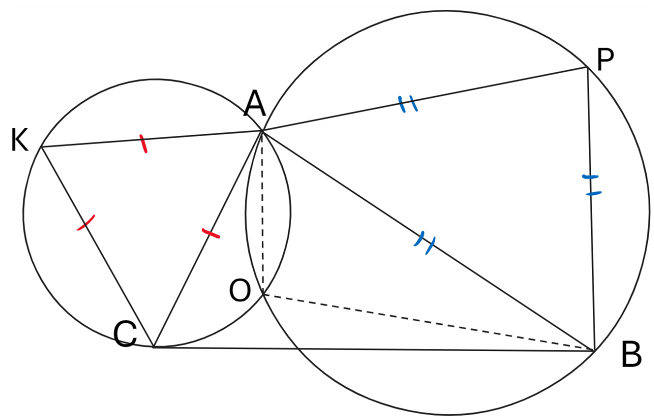

Рис. 3

В произвольном $\triangle ABC$ построим на сторона AC и AB равносторонние треугольники, затем опишем около $\triangle$ и $\triangle PB$ окружности. Так как две окружнсти кроме точки имеют еще не больше чем 1 точку пересечения, то доказали единственность. (см Рис. 3)

Теперь докажем, что наименьшее расстояние действительно достигается в точке Торичелли:

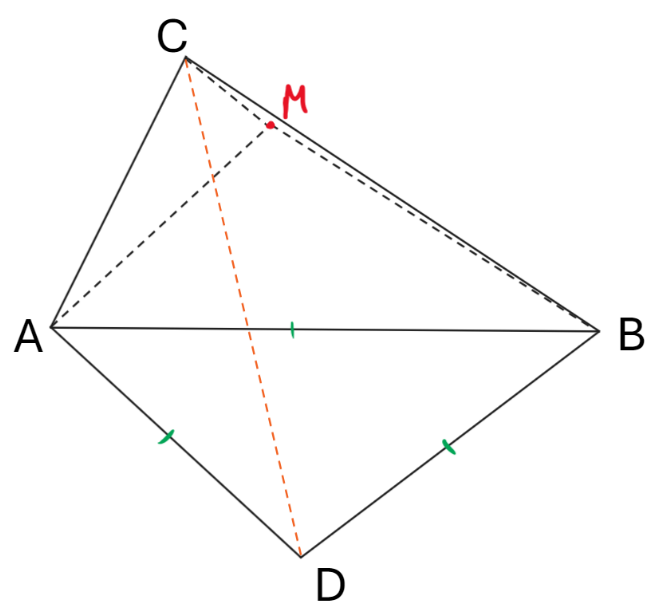

Рис. 4

Возьмем произвольню точку M на плоскости, затем заметим, что по теореме Помпею, что $AM + MB \geq MD$, это значит, что $AM + MB + MC \geq$

$MD + MC \geq CD$. Значит расстояние будет наименьшим, когда каждое из нервенств обращается в равенство. Чтобы достигалось равенство первого неравенства по теореме Помпею должно выполняться следующие условие: $\angle AMB = 120°$. Чтобы достигалось второе, необходимы, чтобы $MD+MC = CD$, те, чтобы точка $M \in CD$. Так как $\angle AMB = 120°$, то при повороте $\triangle AMB$ на $60°$ по часовой стрелке точка $M \in MD$, а значит для того, чтобы $MD + MC = CD$ достаточно, чтобы $\angle AMC = 120°$, тогда заметим, что и $\angle CMB = 120° \Rightarrow M$ – это в точности точка Торичелли (см Рис. 4)

Теперь рассмотрим случай, когда один из угов $\triangle ABC$ больше или равен $120°$. Проводя аналогичные рассуждения, что и в предыдущем случае заметич, что теперь точка Торичелли лежит либо точно вне нашего исходного треугольника, либо совпадает с одной из вершин исходного треугольника. Далее обнаружим, что площади исходного треугольника и $\triangle AMB$ (где M - точка Торичелли) относятся как косинусы углов, а так как $\cos(>120°)/\cos(120°) \leq 1$, то понятно, что наименьшее расстояние будет достигаться тогда, когда M совпадает с той вершиной, при которой угол тупой.

C.3 Задача Штейнера

Теперь решим задачу о поиске наименьшего расстояние среди k точек, где $k \geq 2$. Т.е. задача Штейнера состоит в том, чтобы соединить k точек системой дорог с наименьшей длиной. Будем называть вершину *настоящей*, если она содержится в исходном графе, и *дополнительной*, если мы её добавили к нашей сети. Настоящую вершину сети Штейнера назовём *тупиковой*, если из неё выходит только одно ребро, и это ребро соединяет её с другой настоящей вершиной. Две настоящие вершины назовём *тупиковой парой вершин*, если из каждой из них выходит по одному ребру, и эти рёбра соединяют их с одной и той же дополнительной вершиной.

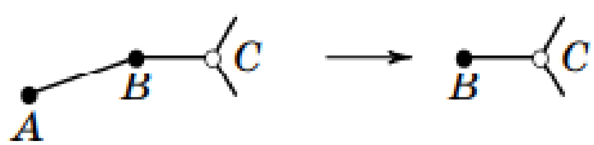

Рис. 5

Лемма. [см. стр 25 Лемма в [2]] В каждой сети Штейнера есть либо тупиковая вершина, либо тупиковая пара вершин.

Доказательство леммы. Среди всех путей по рёбрам графа выберем путь, состоящий из наибольшего числа рёбер. Пусть он начинается в вершине A, а следующая вершина — B. Тогда AB — единственное ребро, выходящее из A, и A — настоящая вершина. Если и B — настоящая, то всё доказано: вершина A — тупиковая. Если B — дополнительная вершина, то из неё выходят ещё два ребра: BC и BD. По крайней мере одно из этих рёбер (пусть это будет BD) не лежит на выбранном пути. Докажем, что BD — единственное ребро, выходящее из вершины D. Если из D выходит ещё какое-нибудь ребро BE, то путь $E \to D \to B \to \ldots$ будет содержать больше рёбер, чем путь $A \to B \to \ldots$, что невозможно. Таким образом, A и D составляют тупиковую пару вершин.

Построение сети Штейнера: [см. стр 24-27 в [2]]

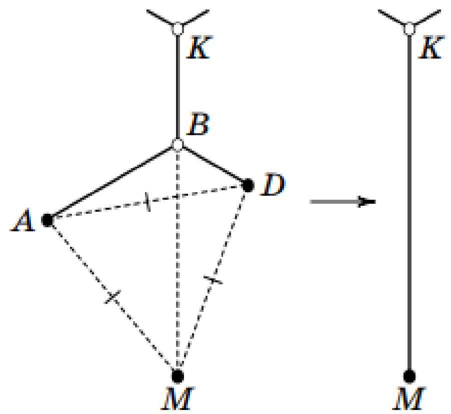

Рис. 6

База индукции. Если $k = 2$, то отрезок, соединяющий две вершины, будет единственной сетью Штейнера. Действительно, как мы доказали, самый длинный путь в графе (т. е. содержащий наибольшее число рёбер) оканчивается либо тупиковой вершиной, либо тупиковой парой вершин. В обоих случаях это две настоящие вершины. У пути два конца, а настоя- щих вершин у нас всего две. Поэтому единственная возможность — самый длинный путь состоит из одного ребра и соединяет две на- стоящие вершины. Значит, вся сеть состоит из одного ребра.

Индуктивный переход. Пусть $k \geq 3$. Предположим, что для любых $k1$ точек на плоскости существует лишь конечное число сетей Штейнера, и мы умеем их все строить. Пусть нам дано k точек. Согласно лемме, любая сеть Штейнера, соединяющая эти точки, содержит либо тупиковую вершину, либо тупиковую пару вершин. В первом случае *(рис. 5)* мы можем убрать тупиковую вершину вместе с единственным исходящим из неё ребром. Получаем граф, который будет сетью Штейнера для оставшихся $k1$ точек. Во втором случае *(рис. 6)* обозначим через A и D тупиковую пару вершин, соединённых с дополнительной вершиной B, а через BK — третье ребро, выходящее из вершины B. Построим на стороне AD равносторонний треугольник AMD так, что точки M и B лежат по разные стороны от прямой AD. Так как B — дополнительная вершина, $\angle ABD = \angle ABK =$

$\angle DBK = 120°$. Следовательно, точки A, B, D и M лежат на одной окружности, поэтому $\angle MBA = \angle MDA = 60°$. Таким образом, точка B лежит на отрезке MK. Уберём вершины A и D вместе с дополнительной вершиной B и со всеми рёбрами, выходящими из B. Вместо них поставим одну настоящую вершину M и соединим её ребром с вершиной K. Получим сеть Штейнера, связывающую $k1$ точек. Таким образом, построение любой сети Штейнера для k точек сводится к аналогичной задаче для k_1 точек. Получаем **индуктивный алгоритм**. Пусть дано k точек A_1 , ..., A_k. Тогда: **1-й способ.** Временно убираем любую из точек A_j, $j = 1, \ldots, k$, строим сеть Штейнера для оставшихся k_1 точек, затем соединяем A_j ребром с любой из этих k_1 точек.

2-й способ. Выбираем две точки A_i, A_j из k данных, строим равносторонний треугольник MA_iA_j и временно заменяем две точки A_i , A_j на одну точку M. Для получившихся k_1 точек строим сеть Штейнера. Обозначаем через B точку пересечения описанной окружности треугольника MA_iA_j с ребром MK, выходящим из вершины M. Теперь убираем вершину M, ставим обратно вершины A_i и A_j, ставим дополнительную вершину B и соединяем её рёбрами с вершинами A_i, A_j и K. После каждого шага нужно проверить, будет ли построенный граф сетью Штейнера для точек A_1, ..., A_k. При этом как бы мы ни действовали, хоть по первому, хоть по второму способу, нет гарантии, что всякий раз будет получаться сеть Штейнера. Например, если действовать по первому способу, то новое ребро, соединяющее точку A_j с некоторой точкой A_m, может составлять угол, меньший 120° с каким-либо из «старых» рёбер, выходящих из A_m. Если действовать по второму способу, то ребро MK может вовсе не пересечь окружность MA_iA_j ,а может пересечь её не в том месте (нужно, напомним, чтобы точка пересечения лежала на дуге A_iA_j, не содержащей точку M). В обоих случаях мы не сможем поставить дополнительную вершину B. Важно другое: любая сеть Штейнера точек $A_1, \ldots, A_k$ получается таким способом! Все сети Штейнера будут содержаться среди построенных графов. Мы уже доказали это, опираясь на лемму.

C.4 Разбор случая с прямоугольником

Докажем, что в прямоугольнике, в котором одна сторона больше другого на $\varepsilon > 0$ сеть Штейнера единственна, для этого построим на стороне $x + \varepsilon$ внешний равносторонний треугольник и докажем, что диаметр окружности, описанной около полученного треугольника больше, чем расстояние от той вершины построенного треугольника, которая не совападет ни с одной вершины прямоугольника до точки Торичелли.

Пусть в нашем прямоугольнике 2 противоположных стороны равны x, две другие $x + \varepsilon$ (см Рис. 5). Построим правильный внешний треугольник на стороне $x + \varepsilon$, радиус описанной около $\triangle BOC$ окужности равен $\frac{x+\varepsilon}{\sqrt{3}}$. Теперь найдем расстояние от точки O до Точки Торичелли $\triangle AOD$.

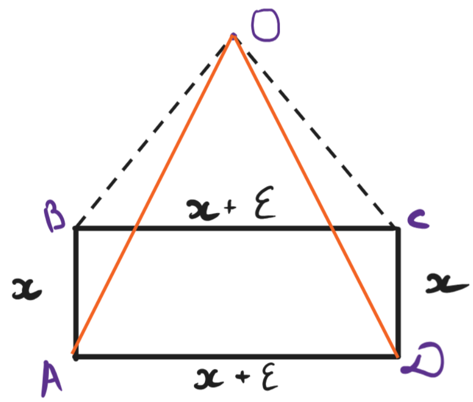

Рис. 7

Пусть $OH \cap BC = M$. Найдем высоту (см Рис. 7). Так как $\triangle BOC$ равнобедренный, то $OM = \sqrt{OC^2 - MC^2} = \frac{\sqrt{3}(x+\varepsilon)}{2}$. Значит $OH = OM + MH = \frac{\sqrt{3}(x+\varepsilon)}{2} + x$.

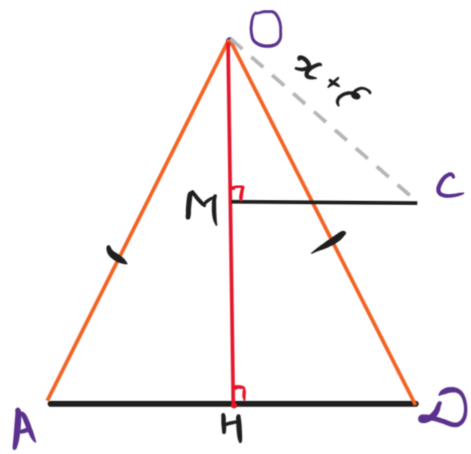

Рис. 8

Теперь докажем, что точка Торичелли лежит на медиане $\triangle AOD$. Для этого построим на сторонах AO и OD окужности θ и ω соответственно (См Рис. 8). Понятно, что эти окружности равны. Построим на одной из них прямую AN_1 и соединим точку N_1 с точкой пересечения окружностей. После чего отразим эту окружность с точками через прямую и отметим на окружности ω точку N_2 (точка куда отобразилась N_1). Тогда $N_1T = N_2T$, $N_1A = N_2D$ и $\angle AN_1T = \angle DN_2T \Rightarrow \triangle AN_1T = \triangle DN_2T \Rightarrow AT = TD$. А значит $T \in OH$.

Тогда можем найти расстояние, на котором Точка Торичелли находится от вершины O, те длину T. $OT = OH - OM$. Из $\triangle ATH$ найдем TH как $AH * \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}(x+\varepsilon)}{2} \Rightarrow OT = OH - TH = x$

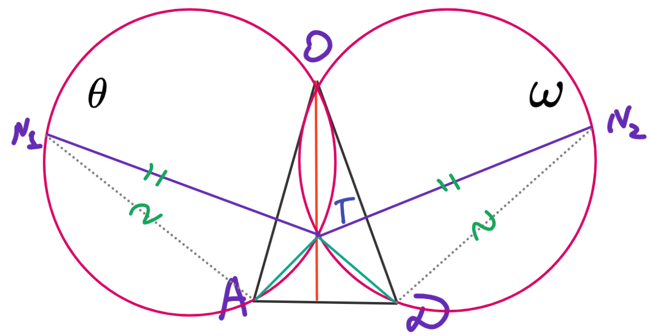

Рис. 9

Теперь сравним диаметр описанной около $\triangle BOC$ окружности с длиной OT:

$$x \vee 2R,$$
$$x \vee 2\frac{2(x+\varepsilon)}{\sqrt{3}},$$
$$x * (\sqrt{3} - 2) \vee \varepsilon \Rightarrow 2R > x.$$

C.5 Разбор случая с трапецией

Построим произвольную трапецию $ABCD$. Рассмотрим следующие случаи, с помощью которых мы будем конструировать сеть Штейнера:

1) построение равностороннего треугольника на боковой стороне трапеции;

2) построение равностороннего треугольника на основаниях трапеции;

3) построение равностороннего треугольника на диагонали;

4) построение сети Штейнера, с помощью способа с выбрасыванием одной из точек.

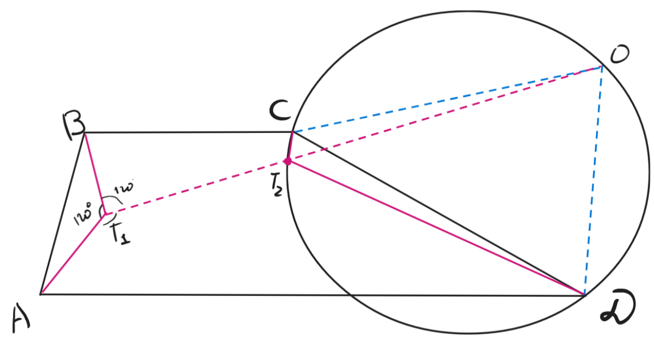

Рис. 10

1-ый случай

1.1) Начнем с первого случая: без ограничения общности выберем сторону CD и построим внешний равносторонний треугольник на ней. Далее построим сеть Штейнера для точек O, A, B. Получили пересечение с окружностью (точка T_2). Теперь соединим полученную точку с C и D и получим $\angle CT_2D = 120°$. Соответственно построили сеть Штейнера BAT_1T_2CD (см Рис.10)

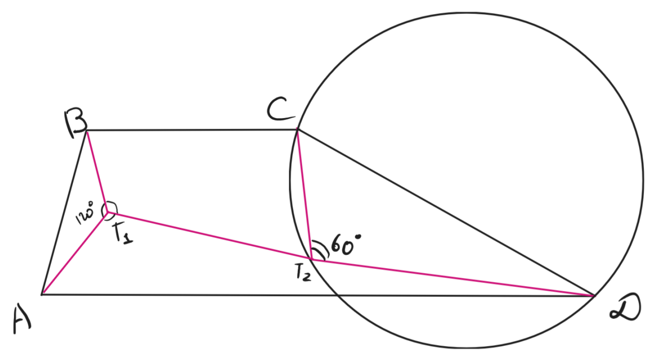

Рис. 11

1.2) Теперь также без ограничения общности выберем сторону CD и построим внутренний равносторонний треугольник на ней. Далее также построим точку Торичелли для точек A, B, T_2. И соединим T_1 с T_2. Далее, тк $\triangle CT_2D$ равносторонний, $\angle CT_2D = 60°$, но тогда ABT_1T_2CD не является сетью Штейнера. (см Рис.11)

2-ой случай

2.1) Возьмем верхнее основание BC и построим на нем равносторонний треугольник. Обращаясь к случаю с прямоугольником можем заключить, что если высота трапеции, опущенная из точки B или C на основание AB на ϵ меньше BC, то мы не сможем построить сеть Штейнера. Случай, когда мы строим внешний равносторонний треугольника на нижнем основании аналогичен.

2.2) При построении равнобедренного треугольника внутрь будет получать угол в $60°$, но в сети Штейнера каждый из угол должен быть $\geq 120°$

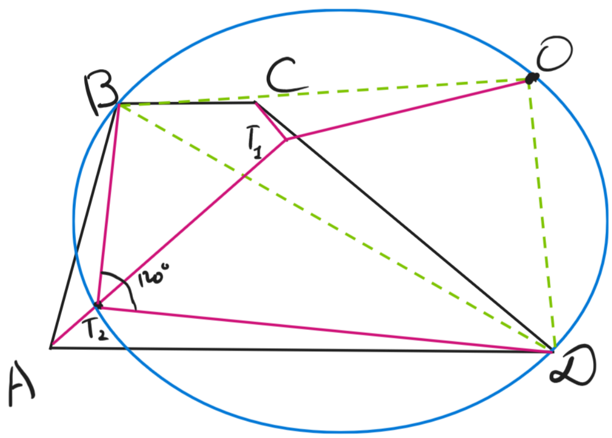

Рис. 12

3-ий случай

3.1) Без ограничения общности выберем точки B и D и построим внешний равносторонний треугольник BOD. Далее рассмотрим еще два случая:

3.1.1) Случай, когда $\angle ACO < 120°$: построим точку Торичелли T_1 для $\triangle ACO$. Затем обозначим точку пересечения окружности с прямой AT_1 за T_2. Понятно, что у нас получилась не сеть Штейнера, потому что $\angle BT_1D = 120°$, но тогда $\angle DT_2T_1 < 120°$, а значит это не сеть Штейнера (см Рис.12).

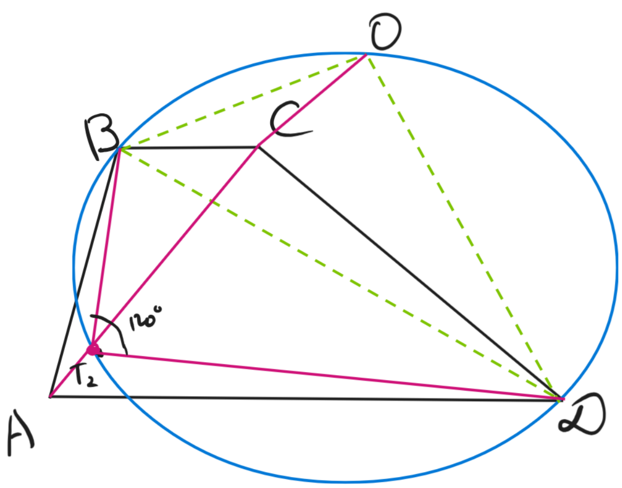

Рис. 13

3.1.2) Случай, когда $\angle ACO > 120^\circ$ рассматривается полностью аналогично, за исключением того, что точка Торичелли будет совпадать с точкой C (см Рис.13)

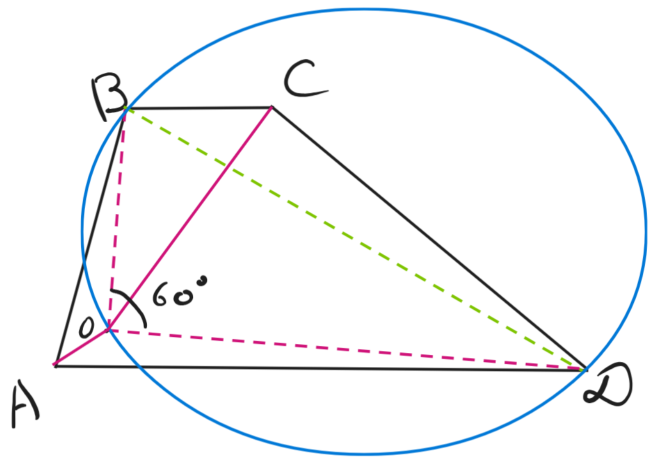

Рис. 14

3.2) Теперь будем строить треугольник внутрь. Также рассматриваем два случая:

3.2.1) В случае, когда $\angle ACO \geq 120^\circ$ получаем, что $\angle DOC < 120^\circ \Rightarrow$ получили не сеть Штейнера (см Рис.14).

3.2.2) Случай с $\angle ACO < 120^\circ$ рассматривается аналогично.

4-ый случай

Рассмотрим 2 подслучая:

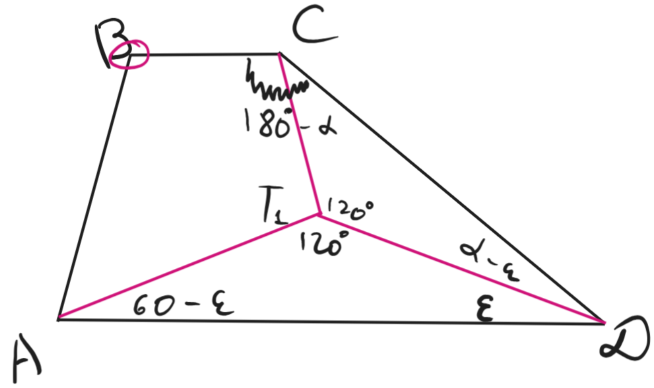

Рис. 15

4.1) Выбрасываем точку из верхнего основания. Без ограничения общности выбросим точку B. Далее построим сеть Штейнера на точках A, C,

D. Если $\angle ADC \geq 120°$, тогда если $\angle BAD \geq 120°$, то можем построит сеть Штейнера, инача нет. Если же $\angle ADC < 120°$, тогда, построив точку Торичелли $\triangle ACD$ попытаемся соединить нашу вершину B так, чтобы получилась сеть Штейнера: Пусть $\angle ADC = \alpha$ и прямая T_1D разбила $\angle ADC$ на ϵ и $\alpha - \epsilon$ (см Рис.15), тогда $\angle T_1CD = 60° - (\alpha - \epsilon)$, значит $\angle BCT_1 = 120 - \epsilon$ $\Rightarrow$ не можем так соединить точку B с C, чтобы вышла сеть Штейнера.

Попробуем соединить точку B с A так, чтобы получилась сеть. Пусть $\angle CBA = \gamma$, $\angle BAT_1 = 120° - \gamma + \epsilon$, значит получаем сеть Штейнера, когда $\gamma \leq \epsilon \Rightarrow \gamma < \alpha$. Но при $\gamma = \alpha$ мы получаем параллелограмм, а при $\gamma < \alpha$ у нас $BC > AD \rightarrow$ при выбрасывании точки из верхнего основания мы не можем построить сеть Штейнера

4.2) Теперь без ограничения общонсти выбросим точку из нижнего основания. Из вышеизложенных рассуждений можно заключить, что если $\gamma < \alpha$, то можем построить сеть Штейнера. Если без ограничения общности выбросить точку A и $\angle BCD \geq 120°$ и $\angle ABC \geq 120°$, то тогда тоже сможем построить сеть Штейнера.

C.6 Выводы

Подведем итоги, которые мы можем сделать по поводу единственности и существования сети Штейнера в прямоугольнике и трапеции:

1. **Прямоугольник**

В случае с прямоугольником мы получили, что сеть единственна, если одна из сторон больше другой, в противном случае прямоугольник является квадратом. У квадата 2 сети Штейнера, которые получаются одна из другой поворотом на 90°.

2. **Трапеция**

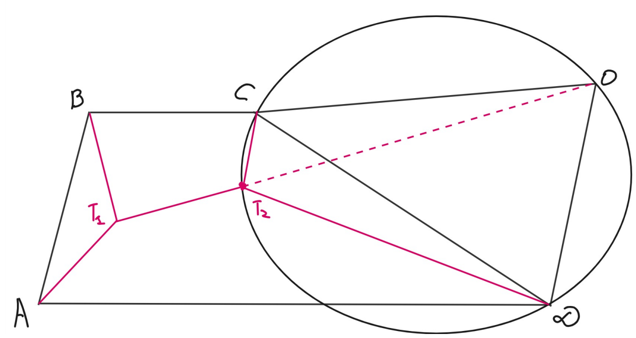

Рис. 16

Когда имеем дело с трапецией, то единственность достигается только когда высота трапеции меньше оснований, $\angle ABC < 120$ и $\angle DCB < 120°$ и $\gamma < \alpha$ (см. 4-ый случаи 4.1-4.2). При соблюдении этих условий мы можем построить только сети Штейнера на сторонах трапеции. Эти две сети будут совпадать, так как треугольники ABT_1 и CDT_2 будут входить в обе сети, а соединить две точки T_1, T_2 можно только одной и той же прямой (см Рис. 16). В противном случае, например, высота больше нижнего верхнего основания, единственности нет (см Рис. 17)

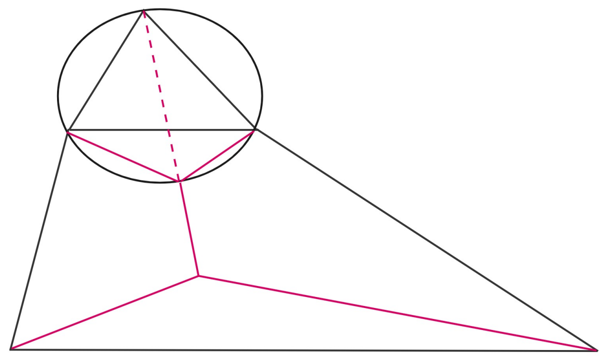

Рис. 17

Список литературы

[1] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Задача Штейнера на плос- кости или плоские минимальные сети, Матем. сб., 1991, том 182, номер 12, 1813–1844

[2] В. Протасов, Максимумы и минимумы в геометрии 1999б выпуск 31, 17-27.

[3] Лекция Малого ШАДА - О дорогах и сетях - Владимир Протасов

[4] Википедия. NP-полная задача