



Réflexions autour de la RBDO pour OpenTURNS

Mathieu Balesdent & Loïc Brevault

Septembre 2021

Définition d'un problème RBDO

Un problème de RBDO (Reliability-Based Design Optimization) est classiquement noté dans la littérature

[Valdebenito2010,Younes2010]:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}, \mathbf{p}} \quad & C(\mathbf{d}, \mathbf{p}) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \mathbb{P}[g_i(\mathbf{d}, \mathbf{X}(\mathbf{p}), \mathbf{Z}) \leq 0] \leq P_{f_i}^T & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}, \mathbf{p}) \leq 0 & j = 1, \dots, M \end{cases} \end{aligned}$$

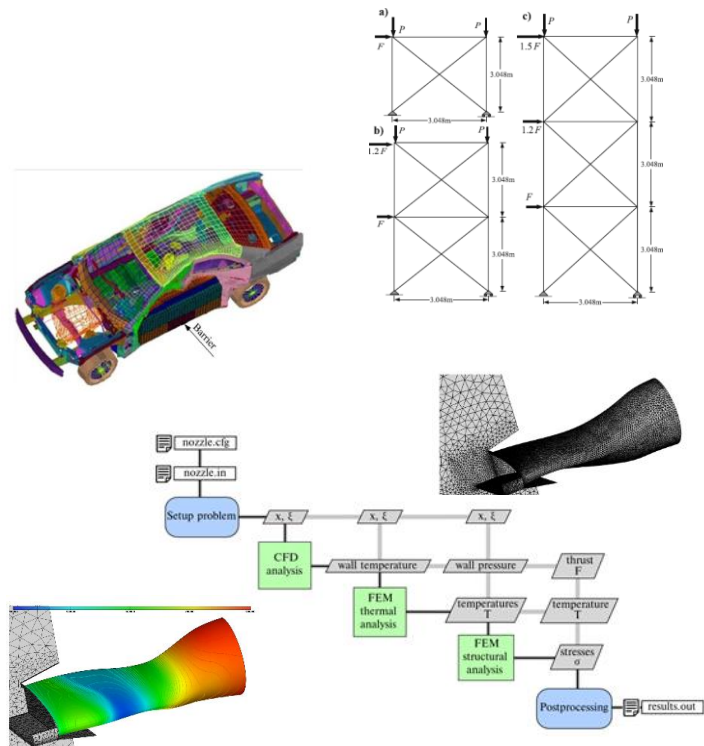
$\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_d}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$, $\mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}|\mathbf{p}}(\cdot)$ dimension n_X , $\mathbf{Z} \sim f_{\mathbf{Z}}(\cdot)$

- \mathbf{d} est un vecteur de **variables déterministes** de taille n_d
- \mathbf{p} est un vecteur de variables déterministes correspondant à des **hyperparamètres des distributions** des variables aléatoires \mathbf{X} (e.g., moyenne, écart-type, paramètre de forme, etc.) de taille n_p
- \mathbf{X} un vecteur de **variables aléatoires dont certains paramètres dépendent de \mathbf{p}** distribué selon $f_{\mathbf{X}|\mathbf{p}}(\cdot)$
- \mathbf{Z} un vecteur de **variables aléatoires** distribuées selon $f_{\mathbf{Z}}(\cdot)$
- $P_{f_i}^T$ un **seuil admissible pour la probabilité de faisabilité** de la contrainte $g_i(\cdot)$

Il est classiquement supposé dans cette formulation que la **fonction objectif $C(\cdot)$ ne dépend que des variables déterministes \mathbf{d}, \mathbf{p}**

Exemples de cas tests RBDO « physiques »

- Optimisation de la masse d'une structure constituée de poutres assemblées en présence de méconnaissances sur les efforts et les propriétés matériaux (module d'Young, coefficient de Poisson, *etc.*).
- Optimisation de la masse moyenne d'un véhicule soumis à un choc (crash latéral) sous contraintes de satisfaction des critères de sécurité en présence de méconnaissances d'épaisseurs et de propriétés matériaux.
- Optimisation de la masse moyenne de la tuyère d'un véhicule hypersonique sous des contraintes probabilistes de poussée, de température et de stress en présence de méconnaissances des propriétés matériaux (thermique, mécanique, *etc.*) et des efforts.



Définition d'un problème RBDO

Réécriture du problème RBDO équivalent en utilisant le *reliability index* :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}, \mathbf{p}} \quad & C(\mathbf{d}, \mathbf{p}) \\ \text{s.t.} \quad & \left\{ \begin{array}{ll} \beta_i^T - \beta_i[\mathbf{d}, \mathbf{X}(\mathbf{p}), \mathbf{Z}] \leq 0 & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}, \mathbf{p}) \leq 0 & j = 1, \dots, M \end{array} \right. \end{aligned}$$

$\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_d}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$, $\mathbf{X} \sim f_{X|\mathbf{p}}(\cdot)$ dimension n_X , $\mathbf{Z} \sim f_Z(\cdot)$

- $\beta_i^T = -\Phi^{-1}(P_{f_i}^T)$
- $\beta_i = -\Phi^{-1}(P_{f_i})$ avec $P_{f_i}(\mathbf{d}, \mathbf{p}) = \int \mathbb{I}_{g_i(\mathbf{d}, \mathbf{w}) \leq 0} f_{\mathbf{W}}(\mathbf{w}) d\mathbf{w}$ et $\mathbf{W} = \{\mathbf{X}(\mathbf{p}), \mathbf{Z}\}^T \sim f_{\mathbf{W}}$
- $\Phi(\cdot)$ CDF loi Normale

Approches classiques pour problème RBDO

Approches classiques pour la résolution de problème RBDO:

- Two-level approaches
 - Reliability Index Approach (RIA)
 - Performance Measure Approach (PMA)
- Mono-level approaches
 - RBDO based on KKT
 - Single Loop Approach (SLA)
- Decoupled approaches:
 - Sequential Optimization and Reliability Assessment (SORA)
 - Sequential Approximate Programming (SAP)
- Surrogate-based approaches
 - Aoues, Younes, and Alaa Chateaneuf. "Benchmark study of numerical methods for reliability-based design optimization." *Structural and multidisciplinary optimization* 41.2 (2010): 277-294.
 - Youn, Byung D., Kyung K. Choi, and Liu Du. "Enriched Performance Measure Approach for Reliability-Based Design Optimization." *AIAA journal* 43.4 (2005): 874-884.
 - Du, Xiaoping, and Wei Chen. "Sequential optimization and reliability assessment method for efficient probabilistic design." *J. Mech. Des.* 126.2 (2004): 225-233.

Approches classiques pour problème RBDO

- Two-level approaches:
 - Reliability Index Approach (RIA)
 - Performance Measure Approach (PMA)
 - Mono-level approaches
 - RBDO based on KKT
 - Single Loop Approach (SLA)
 - Decoupled approaches:
 - Sequential Optimization and Reliability Assessment (SORA)
 - Sequential Approximate Programming (SAP)
 - Surrogate-based approaches
- Approches les plus classiques**
Double boucle :
- Outer loop: optimization
 - Inner loop: reliability index estimation (FORM)
- Objectif : casser la double boucle**
→ Réécriture des contraintes probabilistes par des « contraintes équivalentes ou approximées déterministes »
- Découplage optimisation et analyse fiabiliste**
→ Résolution séquentielle de problèmes d'optimisation déterministes et de problèmes de fiabilité
- Utilisation de surrogate model pour la fiabilité/optimisation**
→ Possibilité d'utiliser des approches d'échantillonnage pour la fiabilité
→ construction des surrogates dans « l'augmented space »
→ Plus « complexe » à mettre en œuvre de façon « automatique » mais réduction temps de calculs et schéma fiabiliste adapté aux problèmes complexes

Approches classiques pour problème RBDO

- Two-level approaches:
 - Reliability Index Approach (RIA)
 - Performance Measure Approach (PMA)
 - Mono-level approaches
 - RBDO based on KKT
 - Single Loop Approach (SLA)
 - Decoupled approaches:
 - Sequential Optimization and Reliability Assessment (SORA)
 - Sequential Approximate Programming (SAP)
 - Surrogate-based approaches
- Approches les plus classiques**
Nested loop:
- Outer loop: optimization
 - Inner loop: reliability index estimation (FORM)
- Casse la double boucle**
→ Réécriture des contraintes probabilistes par des « contraintes équivalentes ou approximées déterministes »
- Découplage optimisation et analyse fiabiliste**
→ Résolution séquentielle de problèmes d'optimisation déterministes et de problèmes de fiabilité
- Utilisation de surrogate model pour la fiabilité/optimisation**
→ Possibilité d'utiliser des approches d'échantillonnage pour la fiabilité
→ Construction des surrogates dans un « espace augmenté »
→ Plus « complexe » à mettre en œuvre de façon « automatique » mais réduction temps de calculs et schéma fiabiliste adapté aux problèmes complexes

Reliability Index Approach (RIA)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}, \mathbf{p}} C(\mathbf{d}, \mathbf{p}) \\ \text{s.t.} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \beta_i^T - \beta_i[\mathbf{d}, \mathbf{X}(\mathbf{p}), \mathbf{Z}] \leq 0 & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}, \mathbf{p}) \leq 0 & j = 1, \dots, M \end{array} \right. \end{aligned}$$

$\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_d}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$, $\mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}|\mathbf{p}}(\cdot)$ dimension n_X , $\mathbf{Z} \sim f_{\mathbf{Z}}(\cdot)$, $\mathbf{W} = \{\mathbf{X}(\mathbf{p}), \mathbf{Z}\}^T \sim f_{\mathbf{W}}$

Utilisation de FORM pour estimer le *reliability index*

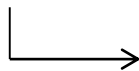
$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{u}\| \\ \text{s.t.} \quad G_i(\mathbf{d}, \mathbf{u}) \leq 0 \end{aligned}$$

avec $G_i(\mathbf{d}, \mathbf{u}) = g_i(\mathbf{d}, \mathcal{T}^{-1}(\mathbf{u}))$ et $\mathbf{u} = \mathcal{T}(\mathbf{w})$ avec $\mathcal{T}(\cdot)$ la transformation iso-probabiliste adéquate

on a alors: $\beta_i[\mathbf{d}, \mathbf{X}(\mathbf{p}), \mathbf{Z}] = \|\mathbf{u}^*\|$ et \mathbf{u}^* le **Most Probable Failure Point** (MPFP)

→ approche très simple à mettre en œuvre

→ coût de calcul « important » (FORM répétés, double boucle, etc.)



Performance Measure Approach (PMA) pour l'analyse fiabiliste: plus simple de minimiser une fonction complexe sous contrainte simple que l'inverse

Performance Measure Approach (PMA)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}, \mathbf{p}} C(\mathbf{d}, \mathbf{p}) \\ \text{s.t.} \quad \left\{ \begin{array}{ll} g_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}_{MPTP_i}(\mathbf{p}), \mathbf{z}_{MPTP_i}) \geq 0 & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}, \mathbf{p}) \leq 0 & j = 1, \dots, M \end{array} \right. \end{aligned}$$

$\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_d}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$, $\mathbf{X} \sim \mathbf{f}_{X|p}(\cdot)$ dimension n_X , $\mathbf{Z} \sim \mathbf{f}_Z(\cdot)$, $\mathbf{W} = \{\mathbf{X}(\mathbf{p}), \mathbf{Z}\}^T \sim \mathbf{f}_W$

Inverse reliability analysis technique:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}} G_i(\mathbf{d}, \mathbf{u}) \\ \text{s.t. } \|\mathbf{u}\| = \beta_i^T \end{aligned}$$

avec $G_i(\mathbf{d}, \mathbf{u}) = g_i(\mathbf{d}, \mathcal{T}^{-1}(\mathbf{u}))$ et $\mathbf{u}_{MPTP_i} = \mathcal{T}(\mathbf{w}_{MPTP_i})$ avec $\mathcal{T}(\cdot)$ la transformation iso-probabiliste adéquate,
 $\mathbf{w}_{MPTP_i} = \{\mathbf{x}_{MPTP_i}(\mathbf{p}), \mathbf{z}_{MPTP_i}\}^T$ on a alors: \mathbf{u}^* le **Minimum Performance Target Point** (MPTP)

- approche très simple à mettre en œuvre
- réduction du nombre d'appels à $g_i(\cdot)$ grâce à « l'inverse FORM » [non implémenté nativement dans openURNS]
- coût de calcul « important » (double boucle, etc.)

Performance Measure Approach (PMA)

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{d}, \mathbf{p}} C(\mathbf{d}, \mathbf{p}) \\ & \text{s.t.} \quad \left\{ \begin{array}{ll} g_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}_{MPTP_i}(\mathbf{p}), \mathbf{z}_{MPTP_i}) \geq 0 & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}, \mathbf{p}) \leq 0 & j = 1, \dots, M \end{array} \right. \end{aligned}$$

$\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_d}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$, $\mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}|\mathbf{p}}(\cdot)$ dimension n_X , $\mathbf{Z} \sim f_{\mathbf{Z}}(\cdot)$, $\mathbf{W} = \{\mathbf{X}(\mathbf{p}), \mathbf{Z}\}^T \sim f_{\mathbf{W}}$

Inverse reliability analysis technique:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}} G_i(\mathbf{d}, \mathbf{u}) \\ & \text{s.t.} \quad \|\mathbf{u}\| = \beta_i^T \end{aligned}$$

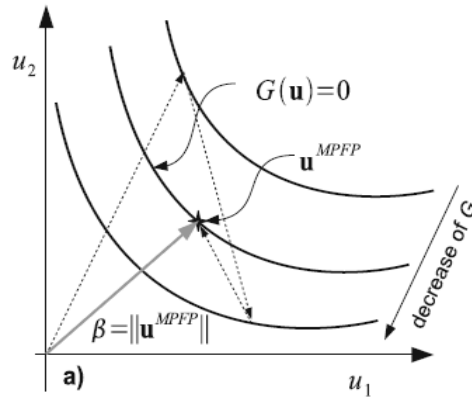
Résolution de « l'inverse FORM » par :

- Algorithme d'optimisation générique (COBYLA, SLSQP, *etc.*) (disponibles nativement dans openTURNS)
- Méthode Advanced Mean Value (AMV) → dérivé de steepest descent
- Conjugate Mean Value (CMV) → dérivé du gradient conjugué
- Hybrid Mean Value (HMV) → combinaison de AMV et HMV

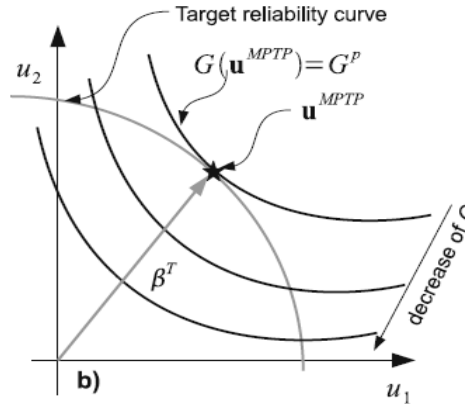
Économie des appels à $g_i(\cdot)$ de la phase « line search »

Comparaison RIA / PMA

RIA



PMA



- Aoues, Younes, and Alaa Chateaneuf. "Benchmark study of numerical methods for reliability-based design optimization." Structural and multidisciplinary optimization 41.2 (2010): 277-294.

Sequential Optimization and Reliability Assessment (SORA)

RBDO – RIA (PMA)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}, \mathbf{p}} C(\mathbf{d}, \mathbf{p}) \\ \text{s.t.} \quad \begin{cases} \beta_i^T - \beta_i[\mathbf{d}, \mathbf{X}(\mathbf{p}), \mathbf{Z}] \leq 0 & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}, \mathbf{p}) \leq 0 & j = 1, \dots, M \end{cases} \end{aligned}$$

\mathbf{d}, \mathbf{p} ↓ $\beta_i[\mathbf{d}, \mathbf{X}(\mathbf{p}), \mathbf{Z}]$

Reliability analysis

FORM / inverse FORM

RBDO – SORA

SORA
iteration (k):
step
optimization

Deterministic optimization

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}, \mathbf{p}} C(\mathbf{d}, \mathbf{p}) \\ \text{s.t.} \quad \begin{cases} g_i(\mathbf{d}, \mathbf{p} - \mathbf{s}_i^{(k-1)}, \mathbf{x}_{MPTP_i}^{(k-1)}, \mathbf{z}_{MPTP_i}^{(k-1)}) \geq 0 \\ h_j(\mathbf{d}, \mathbf{p}) \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\mathbf{s}_i^{(k-1)}, \mathbf{x}_{MPTP_i}^{(k-1)}, \mathbf{z}_{MPTP_i}^{(k-1)}$ fixed

$\mathbf{d}^{*(k)}, \mathbf{p}^{*(k)}$ ↑ $\mathbf{s}_i^{(k)}, \mathbf{x}_{MPTP_i}^{(k)}, \mathbf{z}_{MPTP_i}^{(k)}$

Reliability analysis

inverse FORM

$\mathbf{d}^{*(k)}, \mathbf{p}^{*(k)}$ fixed

Sequential Optimization and Reliability Assessment (SORA)

A l'itération (k) de SORA:

$$\min_{\mathbf{d}, \mathbf{p}} C(\mathbf{d}, \mathbf{p})$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} g_i(\mathbf{d}, \mathbf{p} - \mathbf{s}_i^{(k-1)}, \mathbf{x}_{MPTP_i}^{(k-1)}, \mathbf{z}_{MPTP_i}^{(k-1)}) \geq 0 & i = 1, \dots, m \\ h_j(\mathbf{d}, \mathbf{p}) \leq 0 & j = 1, \dots, M \end{cases}$$

fixé pendant l'optimisation

$$\mathbf{s}_i^{(k-1)} = \mathbf{p}^{*(k-1)} - \mathbf{x}_{MPTP_i}^{(k-1)}$$

$$\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n_d}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}, \mathbf{X} \sim f_{X|\mathbf{p}}(\cdot) \text{ dimension } n_X, \mathbf{Z} \sim f_Z(\cdot), \mathbf{W} = \{\mathbf{X}(\mathbf{p}), \mathbf{Z}\}^T \sim f_W$$

Inverse reliability analysis technique:

$$\min_{\mathbf{u}} G_i(\mathbf{d}^{*(k)}, \mathbf{u})$$

$$\text{s.t.} \quad \|\mathbf{u}\| = \beta_i^T$$

fixé pendant l'inverse FORM

avec $G_i(\mathbf{d}, \mathbf{u}) = g_i(\mathbf{d}, \mathcal{T}^{-1}(\mathbf{u}))$ et $\mathbf{u}_{MPTP_i} = \mathcal{T}(\mathbf{w}_{MPTP_i})$ avec $\mathcal{T}(\cdot)$ la transformation iso-probabiliste adéquate,

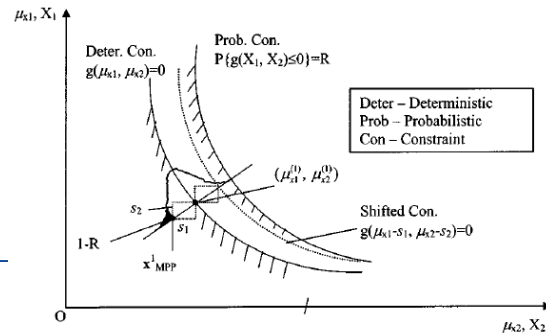
$$\mathbf{w}_{MPTP_i}^{(k)} = \{\mathbf{x}_{MPTP_i}^{(k)}, \mathbf{z}_{MPTP_i}^{(k)}\}^T$$

on a alors : \mathbf{u}^* le **Minimum Performance Target Point (MPTP)**

→ Réduction du nombre d'appels à $g_i(\cdot)$ grâce au découplage

→ Approche un peu plus complexe

→ Limité aux paramètres \mathbf{p} caractérisant la moyenne de \mathbf{X}



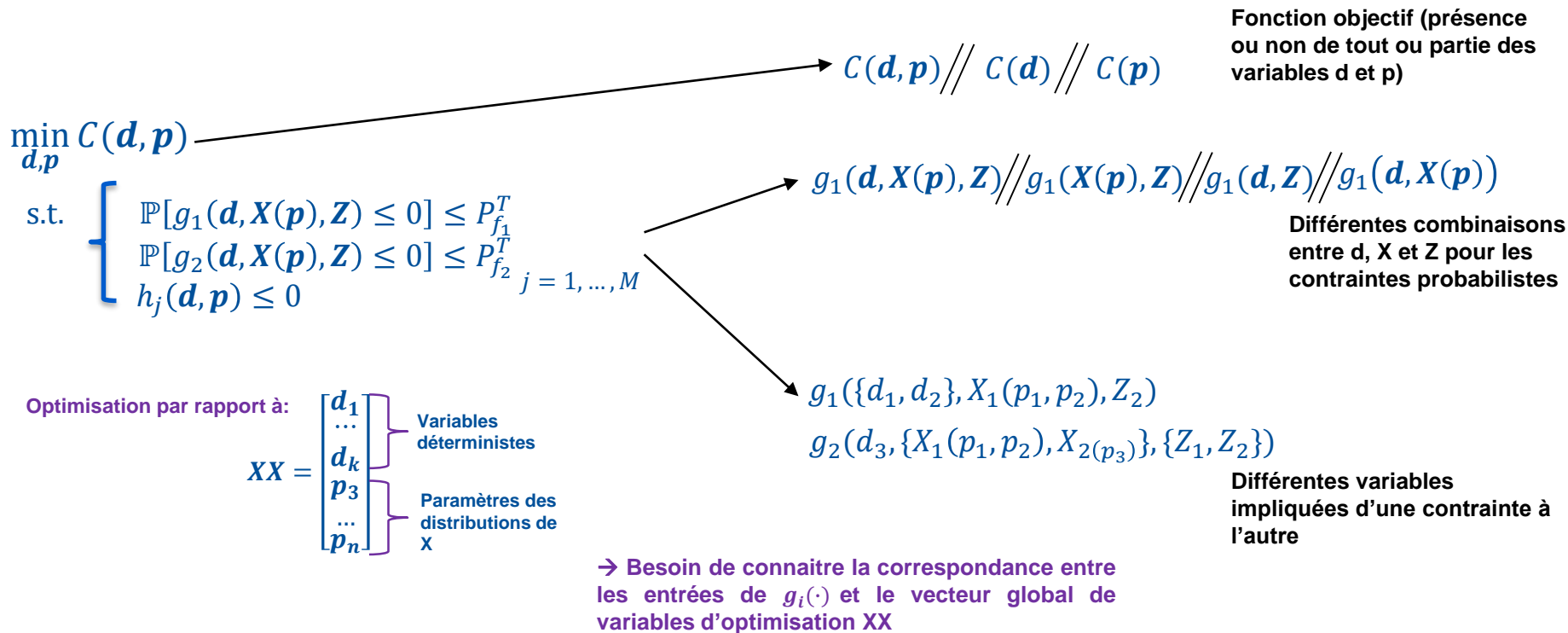
Techniques alternatives

- Concernant les techniques les plus classiques présentées ci-dessus:
 - **Avantages:**
 - « Simplicité »
 - Fournissent en général une bonne première solution optimale candidate
 - **Inconvénients:**
 - Reposent toutes sur FORM ou inverse FORM → limitations classiques en analyse de fiabilité (non-linéarité, multiples régions de défaillances, etc.)
 - Dans les formulations de base, la fonction objectif est déterministe
- Approches « mono-level » → besoin de décomposer l'algorithme d'optimisation étape par étape (compliqué à faire avec les algo d'optimisation openTURNS)
- Approches « surrogate-based » → utilisation de techniques d'active learning, alternatives intéressantes pour OpenTURNS qui pourraient coupler « intelligemment » les techniques AK-MCS/IS dans « l'augmented space »

Considérations pour OpenTURNS

- « Grande diversité » à gérer pour traiter un problème RBDO générique:
 - Quatre types de variables:
 - \mathbf{d} : vecteur des variables déterministes à optimiser lors du problème RBDO
 - \mathbf{X} : vecteur des variables aléatoires en entrée de $g_i(\cdot)$, \mathbf{X} est paramétré par le vecteur \mathbf{p}
 - \mathbf{p} : vecteur des hyperparamètres des distributions de \mathbf{X} , à optimiser lors du problème RBDO
 - \mathbf{Z} : vecteur de variables aléatoires en entrée de $g_i(\cdot)$
 - Variables d'optimisation du problème de RBDO sont concaténées dans le vecteur $\mathbf{XX} = [\mathbf{d}, \mathbf{p}] \rightarrow$ concatène toutes les variables de décisions impliquées dans la fonction objectif, les différentes contraintes probabilistes et les différentes contraintes déterministes
 - Beaucoup de possibilités/combinaisons possibles dans la pose d'un problème RBDO général (présence de \mathbf{d} ou non, présence de \mathbf{Z} ou non, variables différentes pour chaque contrainte, etc.)
 - Spécification par l'utilisateur des variables « actives » pour chacune des contraintes \rightarrow le problème d'optimisation RBDO ne voit que le vecteur \mathbf{XX}
 - Spécification par l'utilisateur des distributions des variables aléatoires (paramétrées (\mathbf{p}) ou fixes) associées à chaque contrainte et des paramètres (\mathbf{p})

Considérations pour OpenTURNS



Considérations pour OpenTURNS

- Pour le moment, première implémentation en classes Python de :
 - RIA, PMA (SLSQP, AMV, CMV, HMV) et SORA
 - Uniformisation des API pour les 3 méthodes (définition d'une API unique pour le traitement des contraintes pour RIA, PMA et SORA)
 - Différents cas tests analytiques et physiques ont été mis en œuvre → cf. notebooks
 - Approche « similaire » à OTRobot dans la décomposition en classes :
 - Définition d'une classe `RBDO_Problem` () qui permet de définir le problème d'optimisation adéquat
 - Définition des classes `Objective` (), `PlneqCons` () et `DlneqCons` () pour définir la fonction objectif et les différents types de contraintes
 - Définition des classes `RIA_Algorithm` (), `PMA_Algorithm` (), `SORA_Algorithm` () qui définissent les algorithmes de résolutions

Considérations pour OpenTURNS

Implémentation reposant sur plusieurs classes Python:

Une classe `RBDO_Problem` afin de définir le problème de RBDO (fonction obj, contraintes probabilistes ,contraintes déterministes ...)

- `problem = RBDO_Problem(obj, PlneqCons_list, DlneqCons_list, Bounds, len_d, len_p)`
 - `obj`: objet de la classe `Objective` (cf notebook) permettant de définir une fonction objectif à partir d'une PythonFunction
 - `PlneqCons_list` : liste de la taille du nombre de contraintes probabilistes contenant un objet de la classe `PlneqCons` (cf notebook) permettant de définir une contrainte probabiliste à partir d'une PythonFunction, des distributions de $X(p)$ et Z et d'un seuil sur la probabilité
 - `DlneqCons_list` : liste de la taille du nombre de contraintes déterministes contenant un objet de la classe `DlneqCons` (cf notebook) permettant de définir une contrainte déterministe à partir d'une PythonFunction
 - `Bounds`: bornes de recherche pour les variables $XX = [d, p]$ du problème RBDO
 - `len_d, len_p`: nombres de variables d et p
- `solver = ot.NLOpt('LN_COBYLA')`

Trois classes `Algorithm` en charge de la resolution du problème RBDO:

- `algo = RIA_Algorithm(problem, solver, InitialPoint)`
Idem pour `PMA_Algorithm()` ou `SORA_Algorithm()`

Considérations pour OpenTURNS

Cas tests de référence issus de la littérature utilisant les classes implémentées et notebooks associés:

- Cas analytique 2d → avec \mathbf{p} et $\mathbf{X}(\mathbf{p})$, 3 contraintes probabilistes [[Notebook: RBDO_analytical_case](#)]
- Cas analytique 3d → avec \mathbf{d} , \mathbf{p} , $\mathbf{X}(\mathbf{p})$ et \mathbf{Z} , 2 contraintes probabilistes [[Notebook: RBDO_analytical_case_2](#)]
- Dimensionnement structurale d'une colonne verticale → 3d avec \mathbf{p} , $\mathbf{X}(\mathbf{p})$ et \mathbf{Z} , 1 contrainte probabiliste, 2 contraintes déterministes [[Notebook: RBDO_Short_column](#)]
- Dimensionnement d'un réducteur de vitesse (Spur speed reducer) → 7d avec \mathbf{p} , $\mathbf{X}(\mathbf{p})$, et \mathbf{Z} , 11 contraintes probabilistes [[Notebook: RBDO_Spur_Speed_Reducer](#)]
- Comparaison avec OT_robopt : cas analytique [[Notebook: Comparaison_otrobpt](#)]

Références

- [Valdebenito 2010] : Valdebenito, Marcos A., and Gerhart I. Schuëller. "A survey on approaches for reliability-based optimization." Structural and Multidisciplinary Optimization 42.5 (2010): 645-663.
- [Younes2010]: Aoues, Younes, and Alaa Chateaneuf. "Benchmark study of numerical methods for reliability-based design optimization." Structural and multidisciplinary optimization 41.2 (2010): 277-294.
- [Du2004]: Du, Xiaoping, and Wei Chen. "Sequential optimization and reliability assessment method for efficient probabilistic design." J. Mech. Des. 126.2 (2004): 225-233.