Université de Bourgogne
ESIREM – Informatique-Electronique - 3ème Année
TP de Traitement d'images

TP 2

Transformée de Fourier

Le travail peut s'effectuer sous octave ou python.

1. Fourier 2D

a. Algorithme

La transformée de Fourier 2D est une généralisation de la version 1D. Elle permet de passer d'une représentation de l'image dans le domaine spatial (coordonnées n, m) à une représentation dans le domaine fréquentiel (coordonnées f_1, f_2). La transformée de Fourier d'une séquence discrète 2D s s'exprime sous la forme :

$$S[f_1, f_2] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} s[n,m] e^{-2j\pi(f_1 n + f_2 m)}$$

avec $f_1 \times f_2 = \left[0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{k}{N}, \ldots, 1 - \frac{1}{N}\right] \times \left[0, \frac{1}{M}, \frac{2}{M}, \ldots, \frac{k}{M}, \ldots, 1 - \frac{1}{M}\right]$

Il apparaît que la transformée de Fourier 2D est séparable. Le principal avantage de cette dissociation est de permettre un calcul rapide de la transformée de Fourier 2D à partir de l'algorithme 1D.

Travail demandé :

- *A partir de sa définition proposer une méthodologie réalisant le calcul de la transformée de Fourier 2D sachant que l'on possède la fonction fft permettant de calculer une TFD 1D.*

b. Harmoniques pures

Vous allez maintenant étudier le spectre de Fourier 2D pour différents types d'images. Vous avez à votre disposition la fonction atom qui s'utilise de la façon suivante :
img=atom(N,M,f1,f2);
Cette fonction permet de créer des images synthétiques de taille N × M composées de bandes périodiques se répétant avec une fréquence f_1 selon n et f_2 selon m.

Travail demandé :

- *Créer une image 128 × 128 présentant des oscillations de fréquence 0.1 selon n et 0 selon m en tapant (fe=1) :*

  img=atom(128,128,0.1,0);
- *Visualiser l'image. Commenter son contenu.*
- *Commenter le code de la fonction* fourier2d(img,fe).
- *Visualiser le spectre 2D de cette image en utilisant la fonction précédente.*
- *Commenter en mettant en avant la corrélation de ce spectre avec l'information spatiale contenue dans le signal 2D, ainsi que ses particularités et propriétés.*

- *Afin d'appréhender entièrement les différents aspects d'une analyse spectrale d'un motif harmonique pur 2D, vous allez créer, analyser et commenter, suivant le même mode, des images correspondant aux paramètres suivants (N = 128, M = 128) :*
    - $f_1 = 0.1 \quad f_2 = 0$
    - $f_1 = 0 \quad f_2 = 0.1$
    - $f_1 = 0.3 \quad f_2 = 0.3$
    - $f_1 = -0.3 \quad f_2 = 0.1$

  N'oubliez pas de comparer aussi les différences entre les images.

c. Contour

L'une des informations essentielles dans les images est l'information contour (limite entre deux objets). Afin d'étudier comment se traduit un contour simple dans le plan fréquentiel, vous allez analyser des images présentant deux zones homogènes avec une seule rupture entre les deux zones (un contour) selon une direction précise.

Travail demandé :

- *Créer 3 images : rupt0, rupt1 et rupt2 contenant un contour horizontal, vertical et oblique.*
- *Pour ces 3 images :*
    1. *Afficher l'image.*
    2. *Visualiser le spectre.*
    3. *Commenter en mettant en avant la corrélation de ce spectre avec l'information contenue dans l'image.*
- *Conclure sur la localisation d'une rupture dans le domaine fréquentiel.*

d. Texture

Vous allez maintenant étudier des images réelles.

Travail demandé :

- *Charger l'image Metal0007G*
- *Visualiser l'image*
- *Visualiser son spectre.*
- *Commenter les paramètres pertinents du spectre. En déduire des caractéristiques particulières sur le motif présent dans l'image.*
- *Même travail pour les images :*
    - *Water0000G*
    - *Leaves0012G*

  N'oubliez pas de comparer aussi les différences entre les images.

2. Le phénomène de repliement

Lors du processus d'échantillonnage d'un signal 1D ou 2D, il faut respecter certaines contraintes pour que cette étape de discrétisation ne se fasse pas au détriment de l'information contenue dans le signal. Cette contrainte se traduit en fonction de la fréquence maximale présente dans le signal analysé. Si l'on prend l'exemple d'un signal monochromatique 1D tel que :

$s(t) = \cos(2\pi t)\ (f_{\max} = 1Hz)$

Intuitivement on en déduit que pour ne pas dégrader l'information (à savoir la fréquence fondamentale présente dans le signal) il faut prendre au moins deux points par période du signal ($F_e > 2f_{max}$). D'une façon générale, cette contrainte est formalisée par le théorème de Shannon. Lorsque cette contrainte n'est pas respectée, il y a un phénomène de repliement spectral (dû à la périodisation du spectre du signal échantillonné). Prenons l'exemple simple d'un signal monochromatique de fréquence 0.75 Hz ($s(t) = \cos(2\pi t \times 0.75)$). Si nous échantillonnons le signal avec $F_e = 1\ Hz$, nous ne vérifions pas le théorème de Shannon et le contenu fréquentiel va alors se replier autour de $F_e\ /2$. Nous illustrons ce phénomène sur la figure 1.

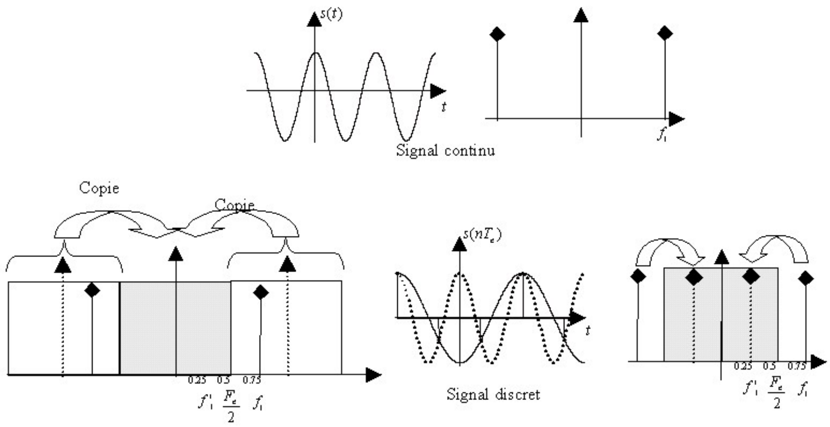

Figure 1 - Repliement spectral dans le cadre d'un signal

Les mêmes conditions sont présentes dans le cadre d'une image. Simplement cette contrainte sur la fréquence d'échantillonnage s'exerce selon les lignes et les colonnes. Lorsque la condition de Shannon n'est pas remplie selon l'une ou l'autre des 2 directions (ou les deux) nous avons alors un phénomène de repliement spectral.

Nous illustrons ce phénomène sur la figure 2 à partir d'un exemple. Soit le signal 2D continu composé d'une seule fréquence fondamentale de coordonnées (0.35, 0.75). Nous échantillonnons ce signal avec une fréquence de 1 selon les lignes et les colonnes. On constate que cet échantillonnage ne respecte pas la condition de Shannon (dans la direction verticale).

Le spectre, après échantillonnage, devient périodique de période 1. Donc, comme nous l'illustrons sur la figure, tous les blocs de coordonnées :

$[0.5 \times k, 0.5 \times (k + 2)] \times [0.5 \times k_2, 0.5 \times (k_2 + 2)]\ avec\ k, k_2 \in Z$

vont être copiés dans le bloc $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$.

Dans cet exemple, ce phénomène explique à la fois les changements de sens des bandes ainsi que leurs "ralentissements".

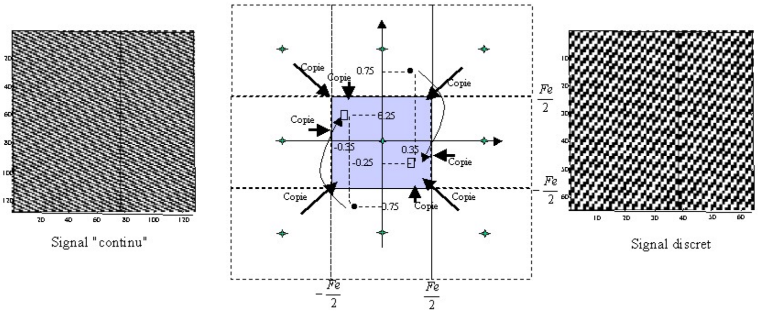

Figure 2 - Repliement spectral dans le cadre d'une image

Nous allons analyser le phénomène de repliement sur une image synthétique composée de bandes périodiques se répétant à une fréquence f_1 selon n et f_2 selon m.

Travail demandé :

- *Créer une image 128 × 128 présentant des oscillations de fréquences (Fe= 1) 0.15 selon n et 0.37 selon m.*
- *Visualiser l'image (pour voir correctement le sens d'oscillation, vous pourrez binariser l'image.*
- *Commenter.*
- *Calculer la transformée de Fourier et afficher son spectre. Commenter.*
- *Rééchantillonner (Fe'=Fe/2) l'image en sous-échantillonnant l'image initiale.*
- *Afficher la nouvelle image ainsi que son spectre.*
- *Commenter l'image et expliquer le phénomène justifiant le résultat.*