Otimização de Portifólios de Markowitz

July 5, 2022

Objetivos - Recolher dados históricos de dois índices (SP500 e IBOV) para detectarmos períodos de movimentações abruptas; - Escolher 4 ações de empresas pertencentes a cada um dos índices e calcular os retornos ao longo do tempo e as respectivas variâncias; - Aplicar o processo de otimização às duas cestas de ativos; exibir o retorno do postifólio otimizado; - Exibir a fronteira eficiente - Calcular a curvatura da fronteira eficiente sobre o portifólio eficiente; - A curvatura sobre o portifólio eficiente pode ser útil como indicativo de períodos de mudanças abrubtas? - Apêndice A: breve comentário sobre as duas implementações da otimização. A primeira fixa o retorno e minimiza a variância; e a segunda fixa a variância e maximiza o retorno; - Apêndice B: curvatura de uma hipérbole

Dados Histórios SP500 e IBOV

Cestas de Ativos

Google, Mycrosoft, Amazon, Meta

Petrobrás, Vale, Itaú, Bradesco

Portifólios Otimizados

A Fronteira Eficiente e a Curvatura

Apêndice A: Otimização de Portifólios de Markowitz Um portfólio é definido através de um conjunto de ativos $A_1, A_2, ..., A_N$ e a respectiva alocação (percentual) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N$. Desse modo, $\alpha_1 \ + \ \alpha_2 \ + \ \cdots \ + \ \alpha_N \ = \ 1$.

Então, **retorno do portfólio** (μ) é dado pela média ponderada dos retornos individuais

$$\mu = \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \cdots \alpha_N\mu_N,$$

onde μ_i é o retorno do ativo A_i.

E a variância? A **variância do portfólio** (σ^2) também pode ser escrita utilizando-se as variâncias dos ativos (σ_i^2). Entretando, temos um momento de segunda ordem, por isso temos a influência de correlações entre os ativos. De forma geral, podemos escrever a variância do portfólio combinado como

$$\sigma^2 = \vec{\alpha}^t\Sigma\vec{\alpha},$$

onde Σ é a **matriz de correlação** entre os ativos. Ela é dada por

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1N} \\ \rho_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1N} & \rho_{2N} & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}.$$

Os elementos na diagonal principal de Σ são as variâncias dos ativos (σ_i^2). Já os termos fora da diagonal (ρ_{ij}) representam correlações entre os ativos. Por exemplo, suponha que o preço do ativo A_1 sobe, se o preço do ativo A_2 também sobe, eles têm **correlação positiva** ($\rho_{12} > 0$), ao passo que se o preço ativo A_2 cai, eles têm **correlação negativa** ($\rho_{12} < 0$).

Se os ativos não têm correlação, temos $\rho_{12} = 0$. E a variância do portfólio pode ser escrita de maneira muito simples

$$\sigma^2 = \alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 + \cdots + \alpha_N^2\sigma_N^2.$$

Podemos formular dois problemas de otimização. Nos dois casos, o intuito é encontrar as alocações $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ que satisfazem as condições. São eles 1. Maximizar o retorno $\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \cdots \alpha_N\mu_N$ e fixar a variância, ou seja, temos $\vec{\alpha}^t\Sigma\vec{\alpha} = \sigma_0^2$;

2. Minimizar a variância $\vec{\alpha}^t\Sigma\vec{\alpha}$ e fixar um retorno $\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \cdots \alpha_N\mu_N = \mu_0$.

Nos dois caso, ainda temos $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N = 1$.

Vamos nos concentrar no primeiro caso.

Apêndice B: A Curvatura de uma Hipérbole

$$\sum_{n=0}^{\infty}$$