



客観確率（頻度主義）と主観確率（ベイズ主義）

— モンティ・ホール問題 —

<https://l-hospitalier.github.io>

2020.3



ベイズのものとされる肖像画。1936年発行の「生命保険の歴史」に収録されていた。

感染対策の基礎知識

#233

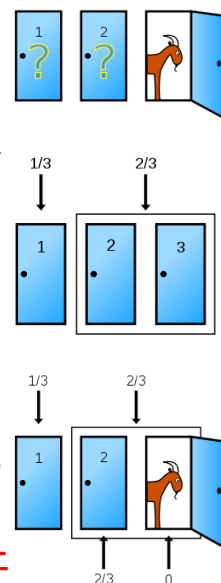
【頻度主義確率論（客観確率）】 犯人である確率？ その確率は未定義（頻度主義では尤度を求める？）。stochastic（確率的）は複数事象に関する性質で単一事象は起きるか起きないかのどちらかで中間はない（都市の複数部分（区）や24時間のうち何%が雨という確率はある）。Pearson 父子や R. Fisher による頻度主義（frequentism）の確率統計学では確率は偶然に起きる独立事象の全事象に占める割合が定義（全事象は1）。1933年コロモゴロフ（Andray Nikolaevich Kolmogorov）により確率は「標本空間と対応する確率分布の関係」と定義、数学的基礎が与えられ「公理論的確率論」として論理的完成度を高めた。

【ベイズ主義（主観確率）】は英国の長老派牧師ベイズ（Thomas Bayes 1702~61）が残した証明が死後発見されラプラスが「ベイズ確率論」として公表した。右上の肖像画は1936年出版の本に掲載。死後200年の出版で本人である（ベイズ流の）確率（尤度）は高くない。小生が教えを受けた研究室の先生は血液乱流の研究者で頻度主義者。「ベジアンと付き合うならもう教えない！」と。確率論では乱流のように1点での瞬間の流速と方向を測定しても血流の性質を記述できないので変化する血流を各点、各時間で計測、計算で時間的、空間的な平均、分散、尖度、歪度などの1~n次のモーメント（統計量、母数）を求める。一方ベイズ流の本日の降水確率70%の予測は（傘を持つ）意思決定に役立つ。ベイズ確率問題としては有名な

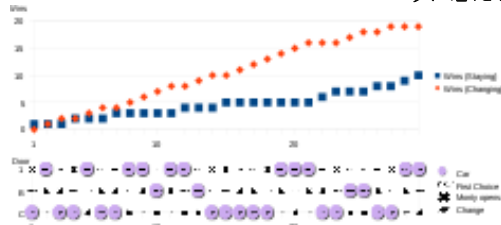
【モンティ・ホール問題】がある。＜投稿された相談＞プレイヤーの前に閉じた3つのドアがあって、1つのドアの後ろには景品の新車が、2つのドアの後ろには、はずれを意味するヤギがいる（右図上）。プレイヤーは新車のドアを当てると新車がもらえる。プレイヤーが1つのドアを選択した後、（結果を知っている）司会のモンティが残りのドアのうちヤギがいるドアを開けてヤギを見せる（これ以降は事後確率）。ここでプレイヤーは最初選んだドアを、残りの開けていないドアに変更してもよいと言われる。

ここでプレイヤーはドアを変更すべきだろうか？ 元々ドアが3枚なので正答率は1/3。この設定はベイズ確率の条件付き確率（事後確率）で、10歳で現在まで人類最高のIQ 228を記録したマリリン・ボス・サバントは1990年「マリリンにおまかせ」で「正解は『ドアを変更する』」である。なぜならドアを変更した場合は景品を当てる確率が2倍になる」と回答、全米の数学者を激怒させた（ポール・エルデシュ¹は1時間でマリリンが正しいのに気づいた）。右最下段の図はエルディシュの学生がパソコンでモンテカルロ法（乱数発生でランダム選択）を適用した結果（青点）で正答率は1/2。選択を常に変更した場合（赤点）は正答率2/3。これでわかるようにドアが2枚残っていても確率1/2ではない。個別のドアの選択ではなく「ハズレを見た後でドアを常に変更する」という選択は、実は右図2番目のように1のドアを選ぶか、2と3のドアのグループを選ぶかになる。2枚ドアを選択すれば再度の選択が必要になるが司会者がハズレを教えてくれるので正答率は2/3（モンティが開けたハズレドアも入れれば1/3）。さてここで事情を知らない宇宙人が突然円盤から下りてきて残りの2枚のドアの前に立てば（事前確率や選択変更は知らない）2枚のドア選択の正答率は（最下段図の青点の）1/2となる。状況により客観確率と主観確率は異なるがどちらも正しい（選択の内容が異なるので確率が異なるのはあたり前）。

【医学における確率論】は通常は独立事象の標本空間での確率分布（頻度主義客観確率）であり、全ての事象を全宇宙にもれなく調査するのは不可能なので全標本調査は前提とされない。もちろん何度も調査された結核罹患率や治療や服薬という事前確率を前提とした有病率や治癒率などのベイズ流の主観的確率を対象にすることもあるので、客観確率（最尤推定法）だけが医学における確率論の全てではない。



モンティ・ホール問題
閉まった3つのドアのうち当たり（自動車が入っている）は一つ。例示のように1つのドアがハズレと判った場合、直感的には残り2枚の当たり確率はどちらも1/2になるように思える。



¹ 20世紀最多論文の数学者（500）。史上最多はレオンハルト・オイラーで850、5万ページ。後半生失明で口述筆記のせいもあるがガウスと並ぶ2大数学者で1911年開始の全集刊行は100年後も未完結。東北大20代総長井上明久（1947~、姫工大卒）は1990年代に10年で金属ガラス関係論文を2800出版（週2）し研究不正が強く疑われている。