

MGM657 Outils Numériques pour l'Ingénieur

Optimisation

`ludovic.charleux@univ-savoie.fr`

`www.polytech.univ-savoie.fr`

- ➊ Introduction : courbe brachistochrone
- ➋ Formulation du problème général
- ➌ Méthodes de résolution
- ➍ Conclusions

Plan

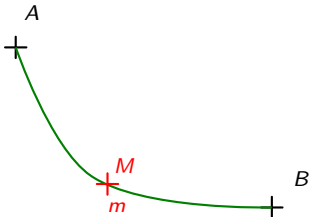
1 Introduction : courbe brachistochrone

2 Formulation du problème général

3 Méthodes de résolution

4 Conclusions

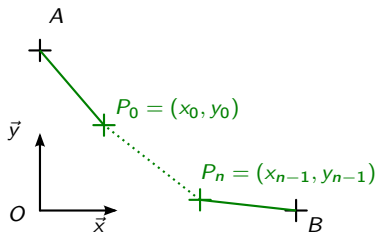
Courbe brachistochrone



Problème

- On lâche une masse ponctuelle M de masse m en A à $t = 0s$.
- Elle suit la trajectoire verte sans frottements.
- Elle arrive en B en $t = t_f$.
- Quelle trajectoire minimise le temps de parcours t_f

Courbe brachistochrone : problème simplifié



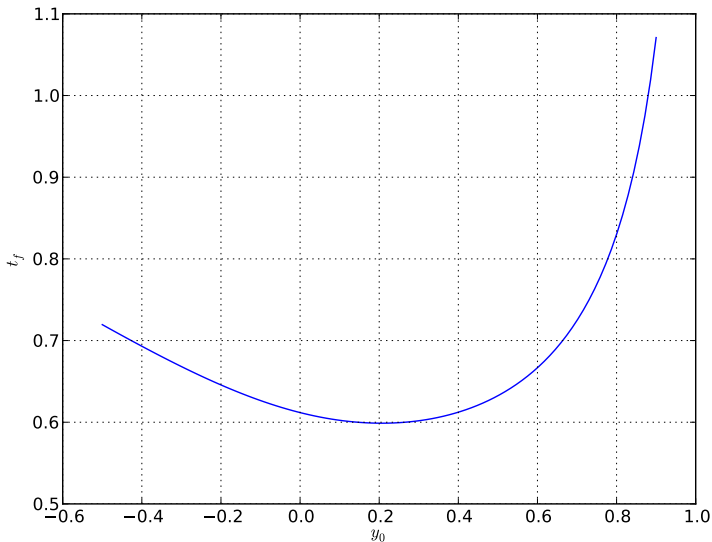
Problème

- Comment évolue l'accélération sur un segment ?
- Quel est le temps de parcours sur un segment ?

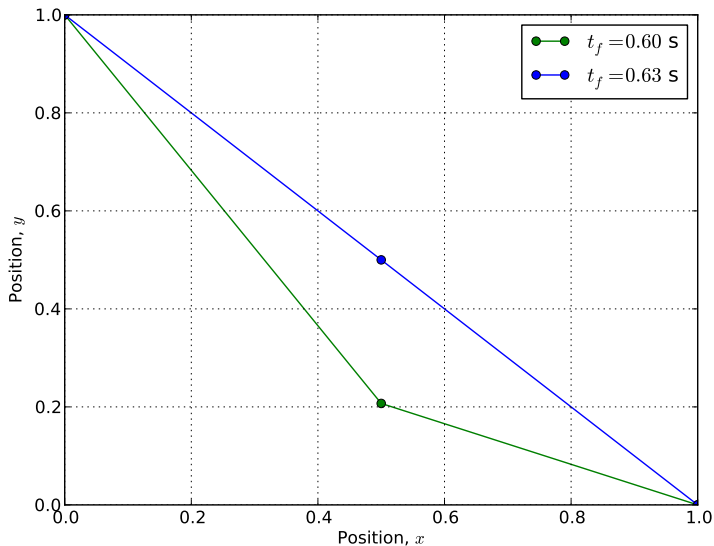
Courbe brachistochrone : problème simplifié

```
1 # CALCUL DU TEMPS DE PARCOURS
2 def temps(Y):
3     # On calcule l'energie potentielle en supposant qu'elle est nulle en A
4     Ep = m * g * (Y - Y[0])
5     # On calcule l'energie cinetique
6     Ec = - Ep
7     # On calcule la vitesse
8     V = (2. / m * Ec) **.5
9     # On calcule la vitesse moyenne sur chaque element
10    Ve = (V[1:] + V[:-1]) / 2.
11    # On calcule le pas en X:
12    dx = X[1] - X[0]
13    # On calcule la longueur de chaque element
14    Le = ( ( Y[1:] - Y[:-1] )**2 + dx**2)**.5
15    # On calcule le temps de parcours par element
16    te = Le / Ve
17    # On calcule le temps de parcours total
18    t = te.sum()
19    return t
```

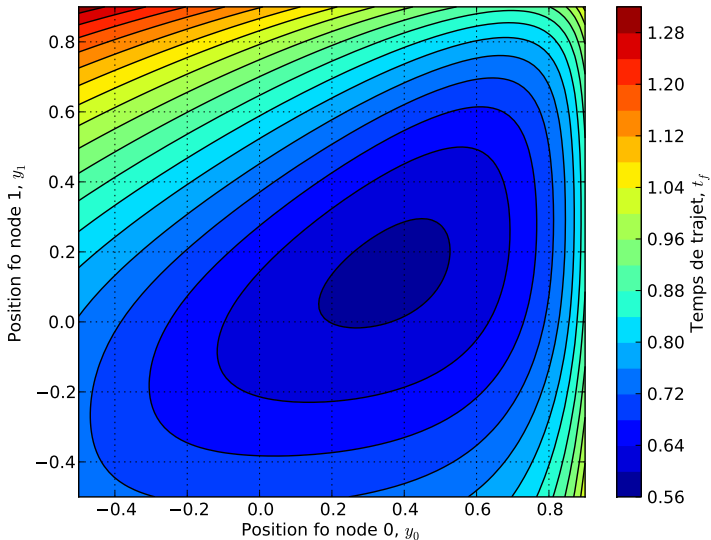
Courbe brachistochrone : problème simplifié à 1 nœud



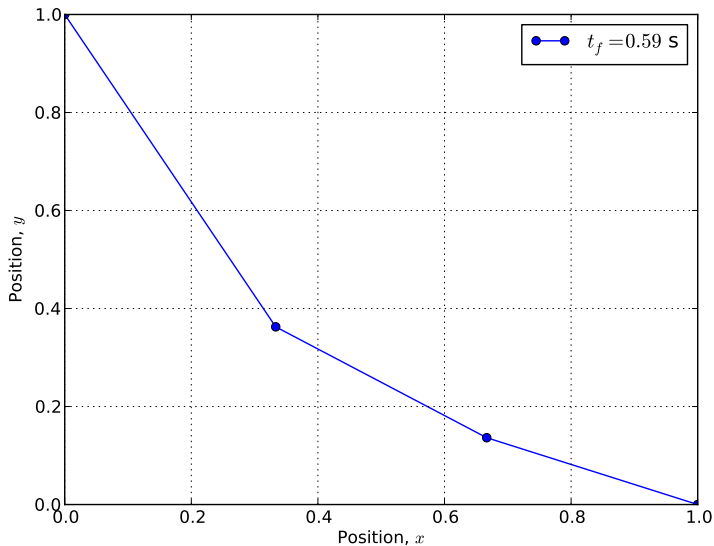
Courbe brachistochrone : problème simplifié à 1 nœud



Courbe brachistochrone : problème simplifié à 2 nœud



Courbe brachistochrone : problème simplifié à 2 nœud



Plan

1 Introduction : courbe brachistochrone

2 Formulation du problème général

3 Méthodes de résolution

4 Conclusions

Formulation d'un problème d'optimisation

Problème d'optimisation

- Minimiser une fonctionnelle $f(X)$.
- La dimension N du problème est celle de X .

Approche pour résoudre

- Évaluer f le moins de fois possible.
- Trouver le minimum de f et pas un minimum local.

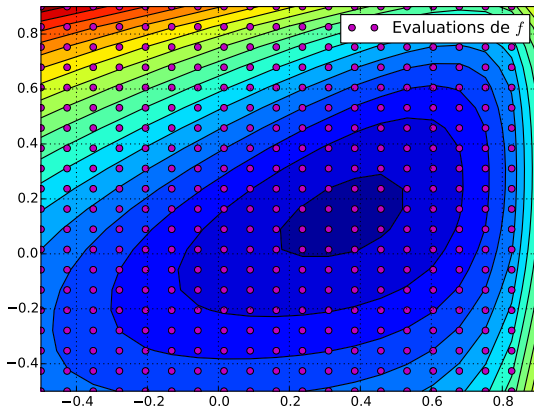
Champ d'application

- Il est très vaste : mécanique, physique, économie, ...
- Sens de f : du temps, de l'énergie, de l'argent, ...

Plan

- 1 Introduction : courbe brachistochrone
- 2 Formulation du problème général
- 3 Méthodes de résolution**
- 4 Conclusions

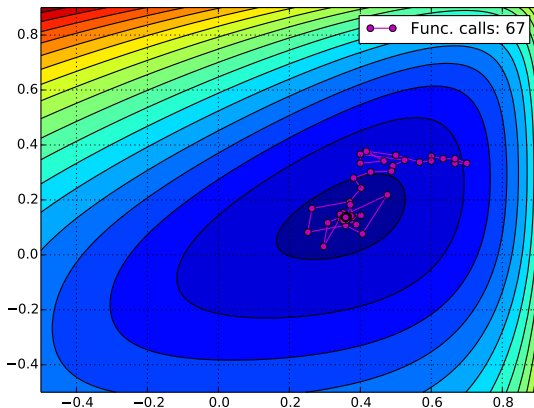
Force brute



Fonctionnement

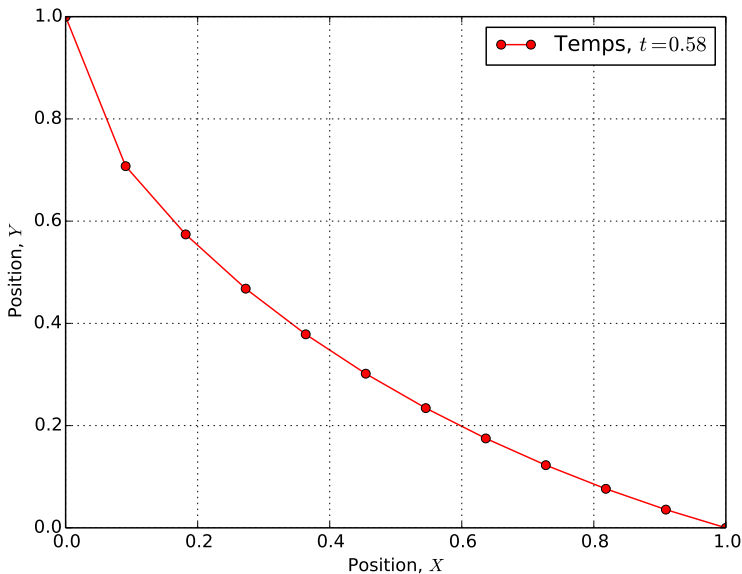
- Discrétisation de chacune des composantes de X en P valeurs.
- Évaluation de f en chaque point et recherche de la valeur minimale (P^N).
- Question : évaluer f demande $1\mu s$. Avec $P = 20$ et $N = 100$, quel temps de calcul ?

Simplexe / Nelder-Mead



Fonctionnement

- Construction d'un simplexe arbitraire (triangle en dimension 2).
- Déformation du simplexe pour converger vers la solution.

Simplexe / Nelder-Mead : $N = 10$ 

Algorithme de descente

Fonctionnement

- Calcul d'une direction de descente.
- Recherche linéaire dans cette direction.
- Exemple : algorithme du gradient, de Newton, BFGS, ...

Plan

- 1 Introduction : courbe brachistochrone
- 2 Formulation du problème général
- 3 Méthodes de résolution
- 4 Conclusions

Conclusions

Points positifs

- Méthodes à très large spectre d'application.
- Il faut juste formuler la fonctionnelle f .

Points négatifs

- Évaluation de la qualité de la solution.
- Difficultés dans le cas de problèmes bruités.
- Conditionnement du problème parfois difficile.