

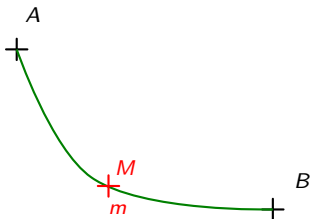
# MGM657 Outils Numériques pour l'Ingénieur

## Optimisation

`ludovic.charleux@univ-savoie.fr`

`www.polytech.univ-savoie.fr`

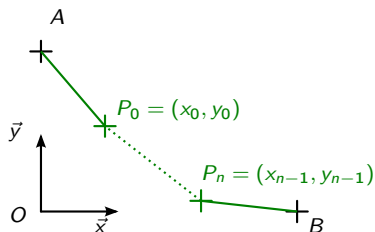




## Problème

- On lâche une masse ponctuelle  $M$  de masse  $m$  en  $A$  à  $t = 0s$ .
- Elle suit la trajectoire verte sans frottements.
- Elle arrive en  $B$  en  $t = t_f$ .
- Quelle trajectoire minimise le temps de parcours  $t_f$

## Courbe brachistochrone : problème simplifié



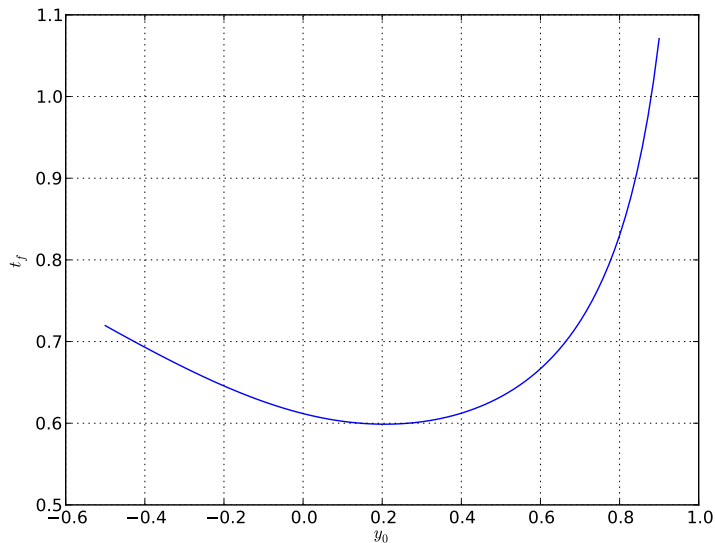
### Problème

- Comment évolue l'accélération sur un segment ?
- Quel est le temps de parcours sur un segment ?

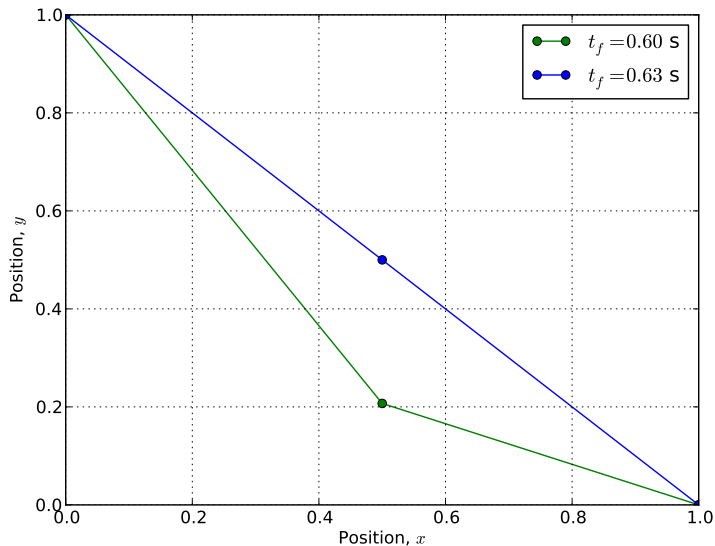
## Courbe brachistochrone : problème simplifié

```
1 # CALCUL DU TEMPS DE PARCOURS
2 def temps(Y):
3     # On calcule l'energie potentielle en supposant qu'elle est nulle en A
4     Ep = m * g * (Y - Y[0])
5     # On calcule l'energie cinetique
6     Ec = - Ep
7     # On calcule la vitesse
8     V = (2. / m * Ec) **.5
9     # On calcule la vitesse moyenne sur chaque element
10    Ve = (V[1:] + V[:-1]) / 2.
11    # On calcule le pas en X:
12    dx = X[1] - X[0]
13    # On calcule la longueur de chaque element
14    Le = ( ( Y[1:] - Y[:-1] )**2 + dx**2)**.5
15    # On calcule le temps de parcours par element
16    te = Le / Ve
17    # On calcule le temps de parcours total
18    t = te.sum()
19    return t
```

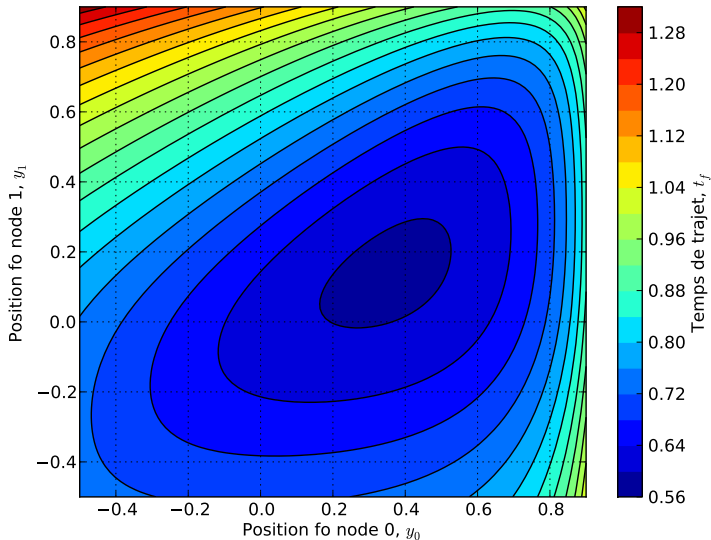
## Courbe brachistochrone : problème simplifié à 1 nœud



## Courbe brachistochrone : problème simplifié à 1 nœud

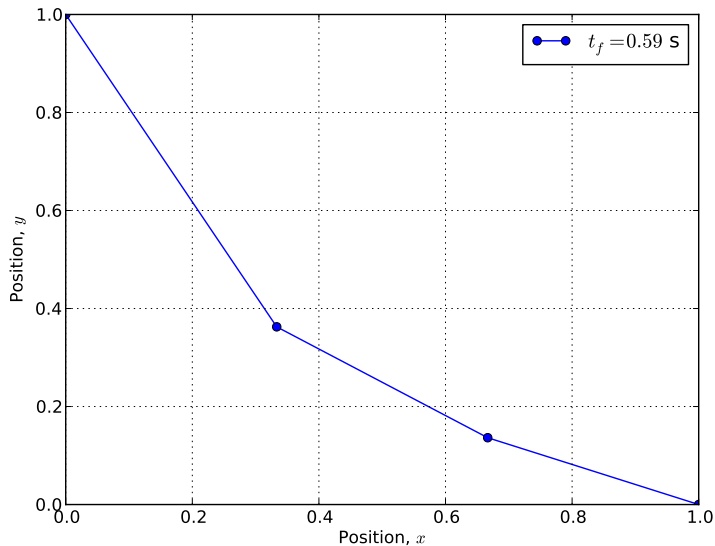


## Courbe brachistochrone : problème simplifié à 2 nœud





## Courbe brachistochrone : problème simplifié à 2 nœud





## Formulation

- Définir une fonctionnelle  $f(X)$  qui est à minimiser.
- Attention à la dimension  $N$  du problème (celle de  $X$ ).

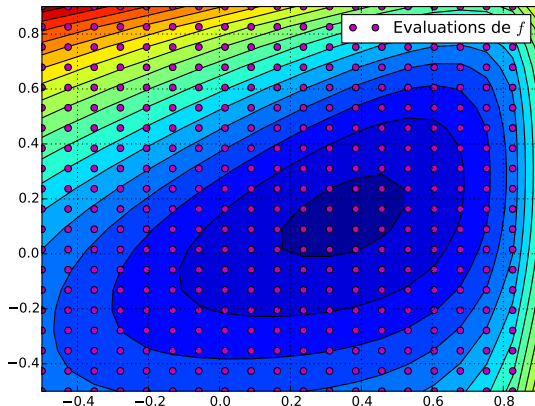
## Approche pour résoudre

- Évaluer  $f$  le moins de fois possible.
- Trouver le minimum de  $f$  et pas un minimum local.

## Champ d'application

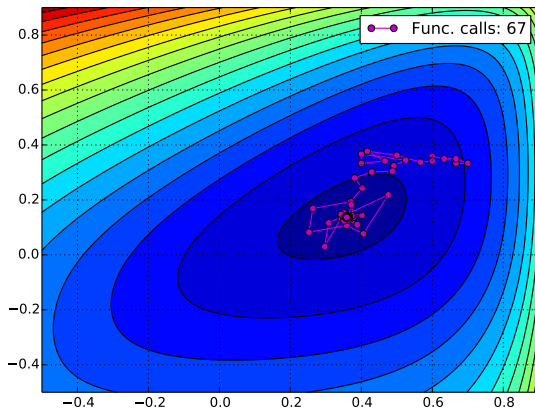
- Il est très vaste : mécanique, physique, économie, ...
- Sens de  $f$  : du temps, de l'énergie, de l'argent, ...





## Fonctionnement

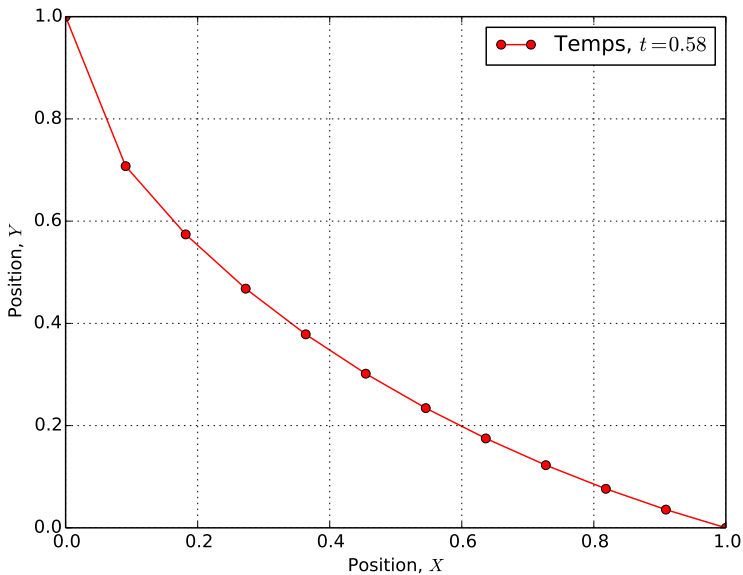
- Discrétisation de chacune des composantes de  $X$  en  $P$  valeurs.
- Évaluation de  $f$  en chaque point et recherche de la valeur minimale ( $P^N$ ).
- Question : évaluer  $f$  demande  $1\mu s$ . Avec  $P = 20$  et  $N = 100$ , quel temps de calcul ?



## Fonctionnement

- Construction d'un simplexe arbitraire (triangle en dimension 2).
- Déformation du simplexe pour converger vers la solution.

## Simplexe / Nelder-Mead : $N = 10$



## Fonctionnement

- Calcul d'une direction de descente.
- Recherche linéaire dans cette direction.
- Exemple : algorithme du gradient, de Newton, BFGS, ...





## Points positifs

- Méthodes à très large spectre d'application.
- Il faut juste formuler la fonctionnelle  $f$ .

## Points négatifs

- Évaluation de la qualité de la solution.
- Difficultés dans le cas de problèmes bruités.
- Conditionnement du problème parfois difficile.