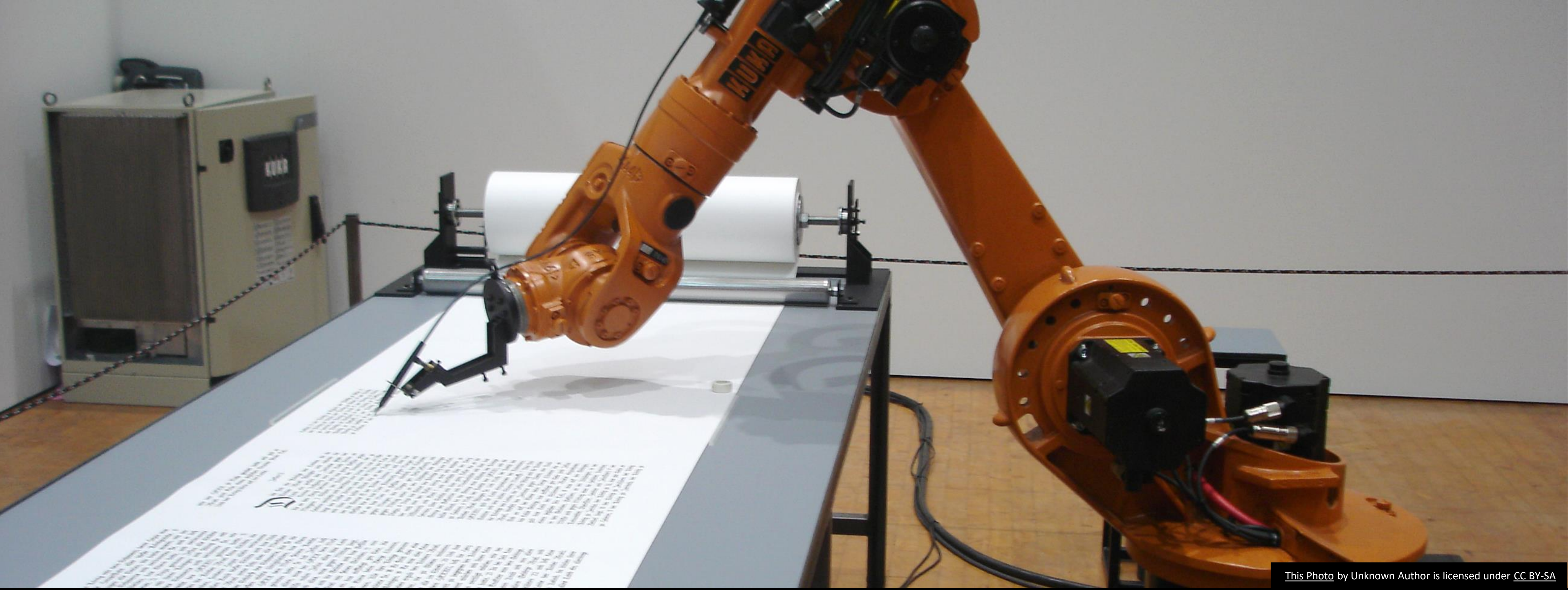


Fundamentos de Sistemas de Controle

Princípios de Controle e Servomecanismos

PARTE IV – Análise e Projeto via Lugar Geométrico das Raízes

Prof. Dr. Matheus Souza – DCA/FEEC/UNICAMP

PARTE IV

ANÁLISE E PROJETO VIA LUGAR DAS RAÍZES

Conteúdo

1. Princípios do Lugar Geométrico das Raízes

Princípios do Lugar das Raízes

Lugar das Raízes: Introdução

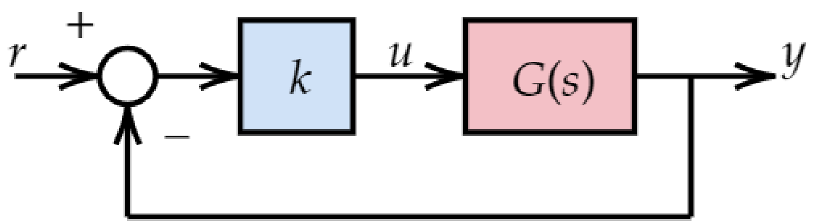
- Considere o sistema de controle ao lado, cuja **equação característica** é

$$\boxed{1 + kG(s) = 0}$$

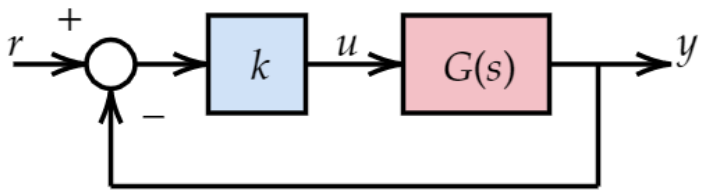
- O conjunto, parametrizado por $k > 0$, de pontos no plano complexo formado pelas raízes desta equação é o **lugar (geométrico) das raízes** deste sistema.

- Embora atualmente o lugar das raízes seja facilmente representável numericamente de forma precisa, as **regras práticas de Evans** para o seu esboço ainda são estudadas pois dão intuição ao projetista.

- Ao final do capítulo, veremos como usar as regras do lugar das raízes no projeto de controladores do tipo **atraso-avanço**.



Princípios do Lugar das Raízes



Exemplo

Esboce o lugar das raízes parametrizado por $k > 0$ do sistema de controle ao lado com

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$

Pela definição: a equação característica do sistema de controle ao lado é

$$s^2 + 4s + (3+k) = 0$$

Assim, as raízes da equação característica, parametrizadas por $k > 0$ são:

$$s = -2 \pm \sqrt{1 - k}.$$

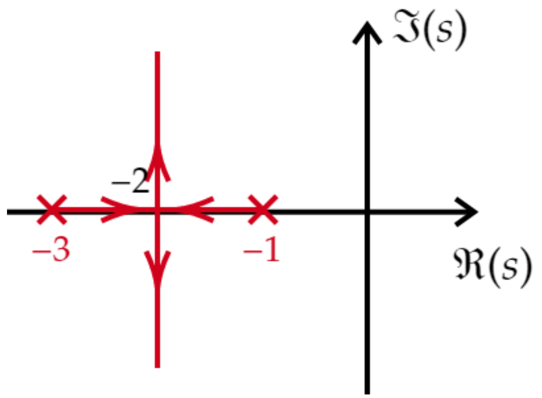
Para o esboço: para fazermos o esboço do lugar geométrico das raízes, observe primeiro que:

- Se $k \in (0,1)$: temos duas raízes reais.
  - Quando $k \to 0^+$, as raízes tendem a -1 e -3 (polos da malha aberta).
  - Quando $k \to 1^-$, as raízes tendem a -2.
- Se $k = 1$: temos duas raízes em $s = -2$.
- Se $k \in (1, \infty)$: temos duas raízes imaginárias dadas por

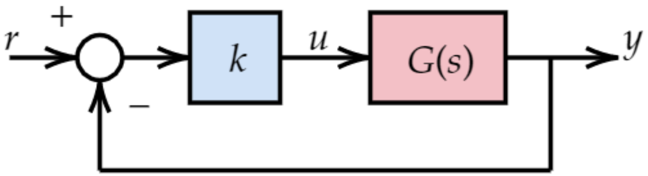
$$s = -2 \pm i\sqrt{k-1}$$

  - Quando $k \to 1^+$, voltamos às raízes em $s = -2$.
  - Quando $k \to \infty$, as raízes "escapam" por assíntotas.

Esboço:



Princípios do Lugar das Raízes



Lugar das Raízes: Princípios

- Voltemos à equação característica do sistema ao lado:

$$\boxed{1 + kG(s) = 0}$$

- Neste capítulo, iremos assumir que o parâmetro k é um **número positivo**.

- Neste capítulo, vamos supor que G é uma **razão de polinômios mônicos**, ou seja,

$$\boxed{G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}}$$

- Na formulação acima, z_i são os **zeros** de G e p_i são os **polos** de G.

- Como esta equação característica é equivalente à equação polinomial

$$\boxed{D(s) + kN(s) = 0}$$

temos o primeiro princípio do lugar das raízes:

> O lugar das raízes tem n **ramos**

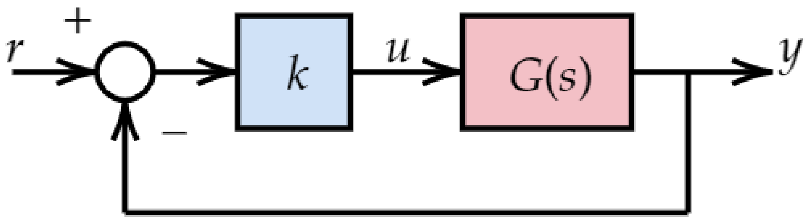
- Cada **ramo** do lugar das raízes corresponde ao "movimento" feito por uma das raízes da equação característica (**polos de malha fechada**) conforme $k > 0$ é variado.

> **Obs:** os ramos do lugar das raízes variam **continuamente** com relação a $k > 0$.

- Além disso, como G tem coeficientes reais, temos o segundo princípio do lugar das raízes:

> O lugar das raízes é **simétrico** com relação ao eixo real.

Princípios do Lugar das Raízes



Lugar das Raízes: Princípios

- Observe ainda que a equação característica é equivalente a

$$G(s) = -\frac{1}{k}$$

- Para cada s no lugar das raízes, podemos reescrever $G(s)$ em termos das formas polares de $s - z_i$ e $s - p_i$, obtendo

$$G(s) = \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)} = \frac{\prod_{i=1}^{m}|s - z_i|e^{i\psi_i}}{\prod_{i=1}^{n}|s - p_i|e^{i\phi_i}}$$

Obs: se G não for uma razão de polinômios mônicos, a condição de módulo **não pode ser usada** para determinar k. Devemos reescrever G como razão entre polinômios mônicos, "embutindo" ganhos extras no ganho k.

- Como a igualdade ao lado deve ser satisfeita por qualquer raiz da equação característica, podemos concluir que as duas condições a seguir são verificadas por qualquer ponto no lugar das raízes:

Condição de Módulo:

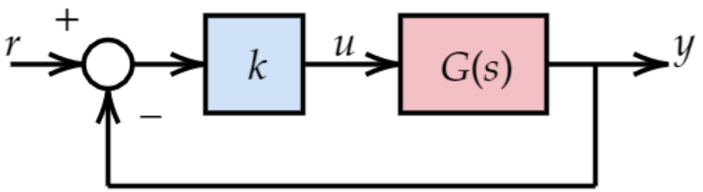
$$k = \frac{\prod_{i=1}^{n}|s - p_i|}{\prod_{i=1}^{m}|s - z_i|}$$

Condição de Ângulo:

$$\sum_{i=1}^{m}\psi_i - \sum_{i=1}^{n}\phi_i = (2k+1)\cdot 180°, k \in \mathbb{Z}$$

- A condição de **módulo** é especialmente útil para determinar o ganho k associado a uma dada posição dos polos de malha fechada.

Princípios do Lugar das Raízes



Exemplo

Voltemos ao lugar das raízes do sistema ao lado para

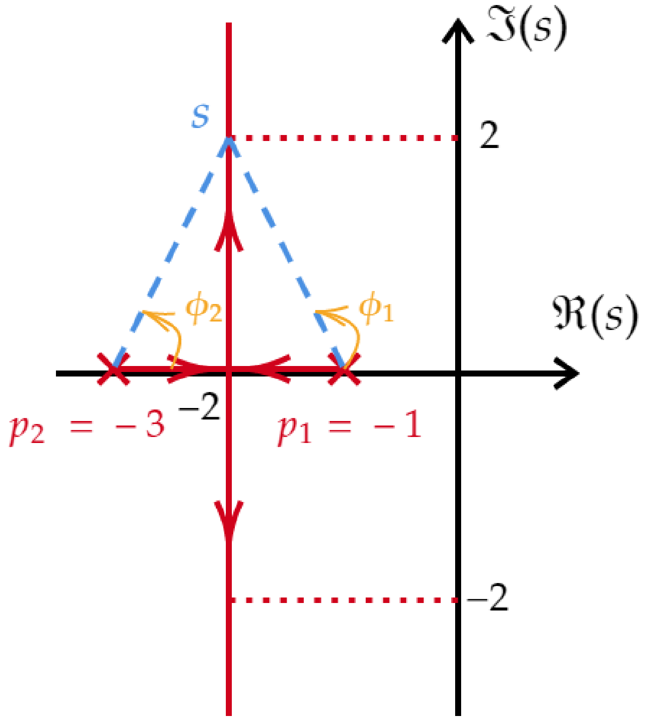
$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$

Verifique que a condição de ângulo é satisfeita pelos pontos $-2 \pm 2i$ e determine o ganho k que aloca os polos do sistema em malha fechada nesta posição.

Observe o esboço ao lado. Tomemos o ponto $s = -2 \pm i$, que, de fato, pertence ao lugar das raízes pelo esboço ao lado.

Condição de ângulo: para o ponto s escolhido, temos, pelo diagrama ao lado, que $\phi_1 + \phi_2 = 180°$. Logo, a condição de ângulo é satisfeita.

Esboço:



Determinação de k: Podemos calcular k usando a condição de modulo. Assim, calculando as distâncias indicadas no desenho:

$$k = |s - p_1| \cdot |s - p_2| = \sqrt{5}^2 = 5$$

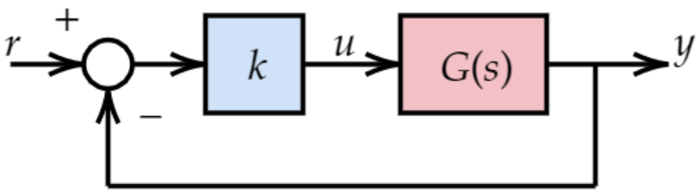
Princípios do Lugar das Raízes

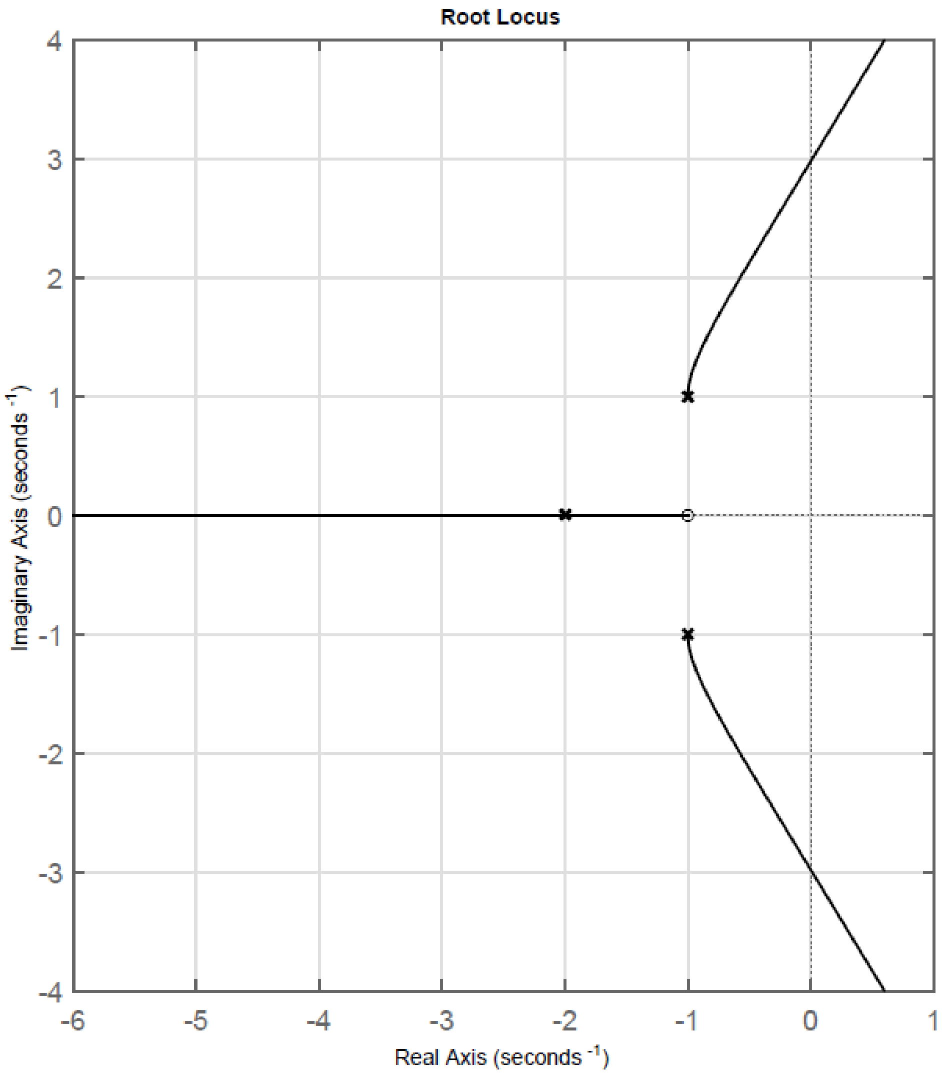
Exercício em Sala

Considere o sistema de controle ao lado, em que a planta G é uma razão de polinômios mônicos. O lugar das raízes deste sistema está representado ao lado e foi obtido com o comando **rlocus** do Matlab. A planta apresenta dois polos em $s = -2$; os demais polos e zeros, representados no diagrama, são simples.

(a) Este sistema pode ficar instável se um controlador proporcional for adotado na malha de controle ao lado?

(b) Sabendo que o sistema de controle é estável para ganhos pequenos, determine o **ganho crítico** k_c que leva o sistema ao limiar de estabilidade.

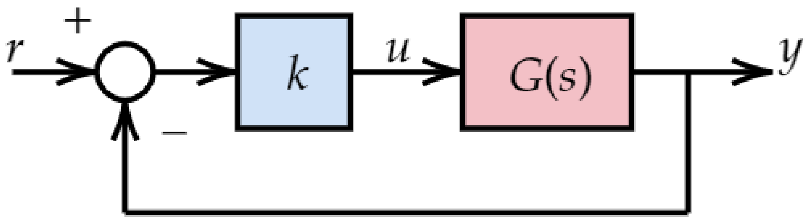




10 min

2. Regras de Evans para o Lugar das Raízes

Lugar das Raízes
Regras de Evans



As Regras de Evans para o Lugar das Raízes

- As **regras práticas de Evans** são extremamente úteis para esboçar o lugar das raízes parametrizado por k de uma equação característica da forma $1 + kG(s) = 0$.

- Lembre que:

  - G deve ser a razão entre dois polinômios mônicos.

  - O ganho k é positivo.

Obs: usaremos frequentemente **noções de "movimento"** (partida, chegada, começo, fim, etc.). Essas ideias são tomadas imaginando que o lugar das raízes é percorrido pelos polos de malha fechada conforme o ganho k aumenta.

[Regra 1] Os n **ramos** do lugar das raízes começam nos polos de G (raízes de D) e m destes ramos terminam nos zeros de G (raízes de N).

Justificativa da Regra 1: Observe primeiramente que

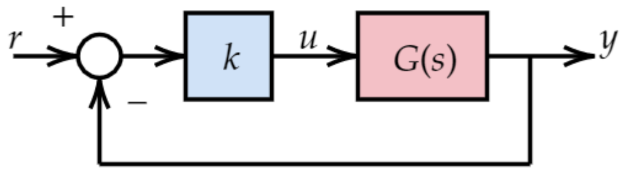
$$1 + kG(s) = 0 \Leftrightarrow D(s) + kN(s) = 0.$$

Assim, fazendo-se $k \to 0^+$, as raízes da equação característica tendem àquelas de $D(s) = 0$. Por outro lado, também podemos reescrever a equação característica como

$$1 + kG(s) = 0 \Leftrightarrow k^{-1}D(s) + N(s) = 0,$$

o que implica que $k \to \infty$ faz com m raízes da equação característica tendam às raízes de $N(s) = 0$.

Lugar das Raízes
Regras de Evans



As Regras de Evans para o Lugar das Raízes

[Regra 2] Se $n > m$, os $n - m$ **ramos** restantes do lugar das raízes tendem, para $k \to \infty$, **assintoticamente** a retas que definem ângulos

$$\theta_\ell = \left(\frac{2\ell - 1}{n - m}\right)\pi, \qquad \ell = 1,2,\cdots,n-m$$

com o eixo horizontal e que passam pela abscissa

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n - m}.$$

Justificativa da Regra 2: Divida $D(s) = \sum_i a_i s^i$ por $N(s) = \sum_i b_i s^i$:

$$\frac{D(s)}{N(s)} = s^{n-m} + (a_{n-1} - b_{m-1})s^{n-m-1} + \cdots$$
$$= s^{n-m} - (n-m)\sigma s^{n-m-1} + \cdots,$$

pois $a_{n-1} = -\sum_i p_i$ e $b_{m-1} = -\sum z_i$. Assim, se $|s| \to \infty$, vale a aproximação

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \approx \frac{1}{(s-\sigma)^{n-m}},$$

o que implica, neste caso limite, que $1 + kG(s) = 0$ admite as soluções

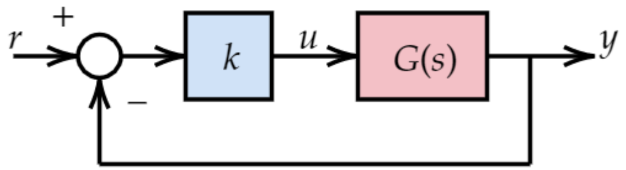
$$s = \sigma + \sqrt[n-m]{k}\,(-1)^{\frac{1}{n-m}}.$$

Como as raízes da unidade indicadas acima são

$$(-1)^{\frac{1}{n-m}} = e^{i\theta_\ell}, \qquad \ell = 1,2,\cdots,n-m,$$

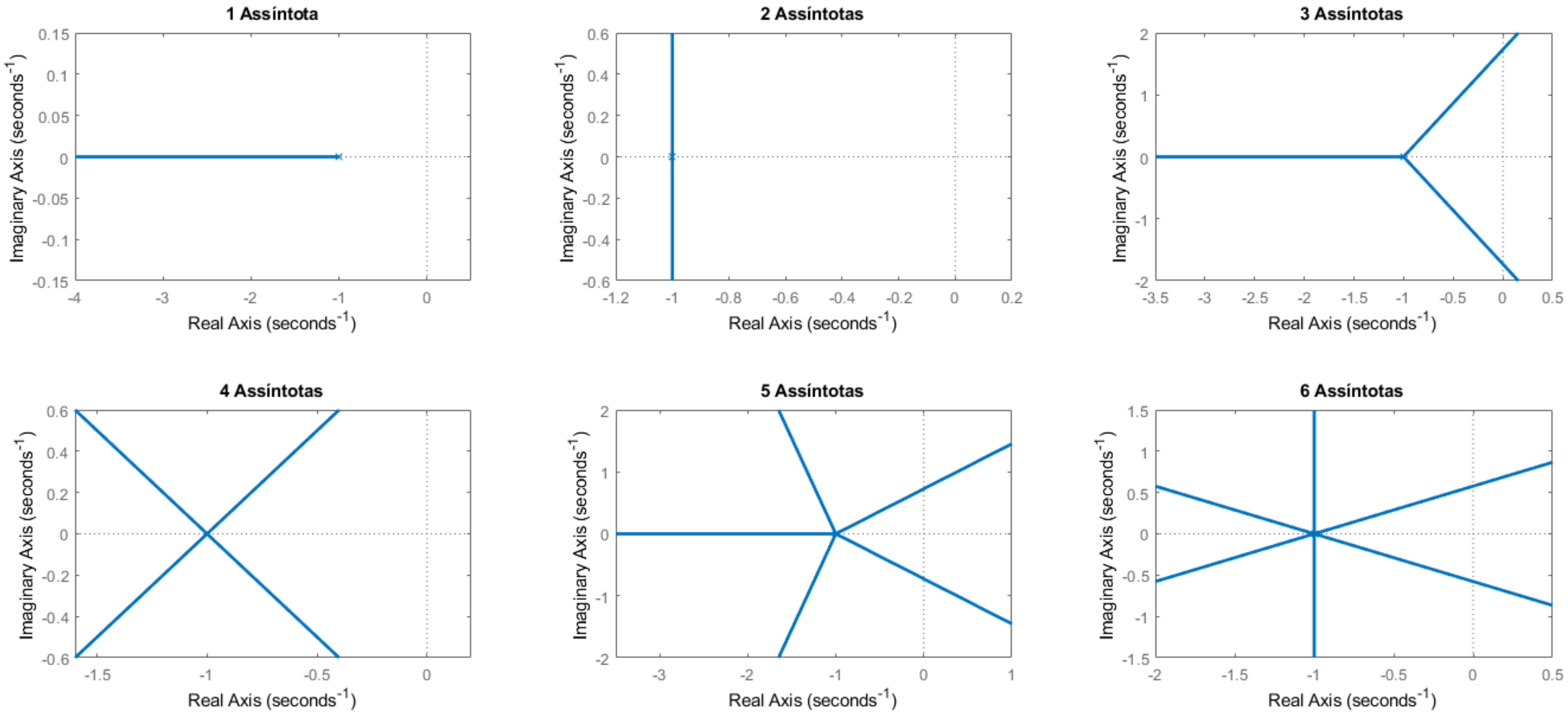
temos que a regra é válida.

Lugar das Raízes
Regras de Evans

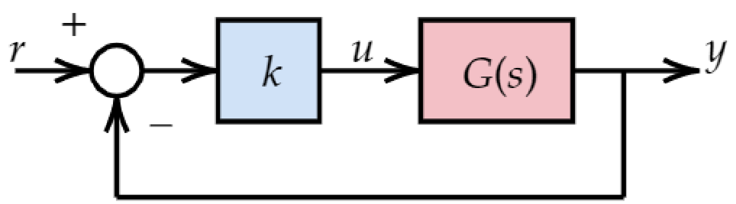


As Regras de Evans para o Lugar das Raízes

Ilustração da Regra 2: representamos abaixo as assíntotas para $\sigma = -1$ e $n - m = 1, 2, \cdots, 6$.

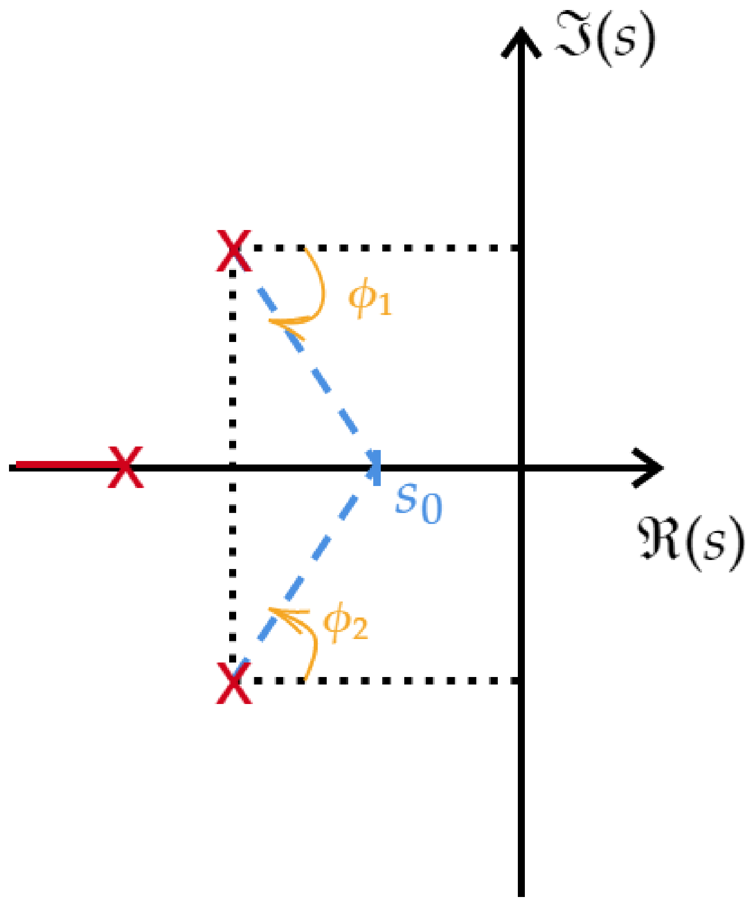


Lugar das Raízes
Regras de Evans



As Regras de Evans para o Lugar das Raízes

[Regra 3] Existe **lugar das raízes no eixo real** à esquerda de um número ímpar de polos e zeros.

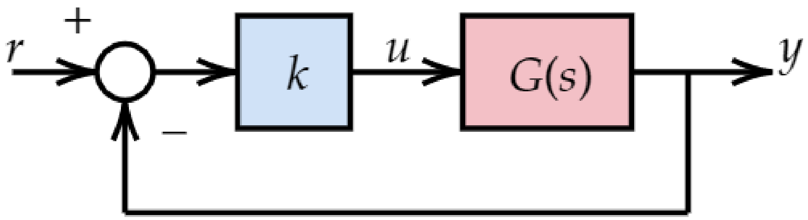


Justificativa da Regra 3: tome um ponto s_0 sobre o eixo real como indicado ao lado. Observe que:

- A **contribuição de ângulo** de um par de polos imaginários é nula. O mesmo vale para um par de zeros.
- A **contribuição de ângulo** de um polo ou de um zero sobre o eixo real é nula para pontos à sua direita e $180°$ para pontos à sua esquerda.

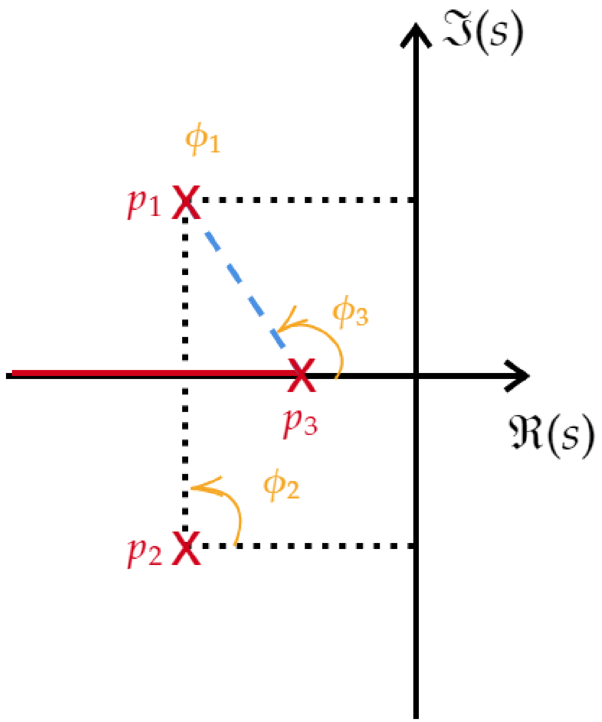
Assim, a condiçao de ângulo é válida para qualquer ponto sobre o eixo real à esquerda de um número ímpar de polos e zeros.

Lugar das Raízes
Regras de Evans



As Regras de Evans para o Lugar das Raízes

[Regra 4] A **condição de ângulo** pode ser usada para determinar **ângulos de partida** em zeros e **ângulos de chegada** em polos.



Justificativa (Ilustração) da Regra 4: Suponha que desejemos determinar o ângulo de saída do polo p_1 no diagrama ao lado.

Para tanto, tomaremos s arbitrariamente próximo de p_1. Assim, $\phi_1 = \arg(s - p_1)$ se torna o ângulo de saída. Ademais, como s está muito próximo de p_1, todos os outros ângulos podem ser calculados com relação a p_1. Desta forma, pela condição de ângulo:

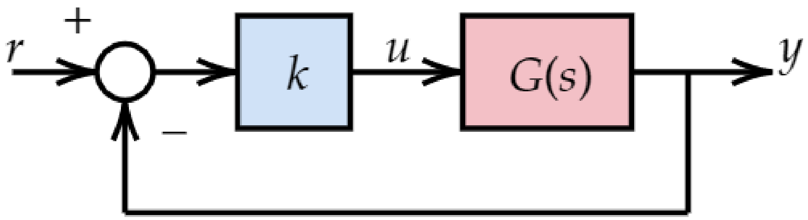
$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 180°$$

Assim, o ângulo de saída no diagrama ao lado é:

$$\phi_1 = 180° - \phi_2 - \phi_3 = 90° - \phi_3.$$

Esse raciocínio é facilmente generalizável para situações mais complexas e para o caso de ângulos de entrada em zeros.

Lugar das Raízes
Regras de Evans



As Regras de Evans para o Lugar das Raízes

[Regra 5] Se, em um ponto s_0 do lugar das raízes, um ou mais ramos se cruzarem (raiz múltipla da equação característica), então

$$D'(s_0)N(s_0) - D(s_0)N'(s_0) = 0.$$

Justificativa da Regra 5: Se s_0 for um encontro de ramos do lugar das raízes, então s_0 é raiz múltipla de

$$D(s) + kN(s) = 0.$$

Assim, além de verificar a equação acima, s_0 também satisfaz

$$D'(s_0) + kN'(s_0) = 0.$$

Portanto, das duas equações, podemos eliminar k e obter a condição da regra 5.

Observações:

1. Note que é mais fácil memorizar a condição presente na regra 5 como $G'(s_0) = 0$.

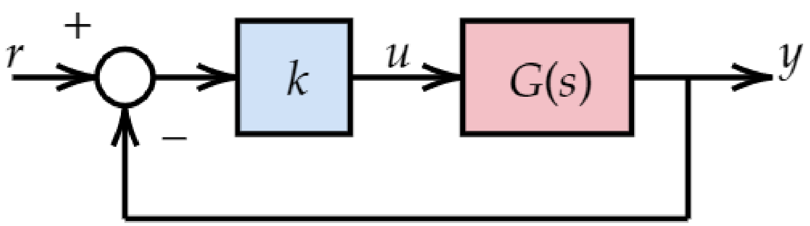
2. Se desejarmos buscar possíveis pontos de encontros de ramos, podemos resolver a equação

$$D'(s)N(s) - D(s)N'(s) = 0,$$

que pode ter soluções que **não** são pontos de encontro de ramos. Assim, todas as soluções devem ser verificadas.

[Regra 6] Possíveis **pontos de cruzamento do lugar das raízes com o eixo imaginário** podem ser determinados por critérios de estabilidade, como a **Tabela de Routh**.

Lugar das Raízes
Regras de Evans



Quadro-Resumo: Princípios e Regras de Evans

- O lugar das raízes tem n **ramos.**
- O lugar das raízes é **simétrico** com relação ao eixo real.
- **Regra 1:** Os n ramos do lugar das raízes começam nos polos de G (raízes de D) e m destes ramos terminam nos zeros de G (raízes de N).
- **Regra 2:** Os $n-m$ ramos restantes vão para assíntotas, que definem ângulos

$$\theta_\ell = \left(\frac{2\ell - 1}{n-m}\right)\pi, \qquad \ell = 1,2,\cdots,n-m$$

com o eixo horizontal e que passam pela abscissa

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}.$$

- **Regra 3:** Existe **lugar das raízes no eixo real** à esquerda de um número ímpar de polos e zeros.
- **Regra 4:** A **condição de ângulo** pode ser usada para determinar **ângulos de partida** em zeros e **ângulos de chegada** em polos.
- **Regra 5:** Se, em um ponto s_0 do lugar das raízes, um ou mais ramos se cruzarem (raiz múltipla da equação característica), então

$$D'(s_0)N(s_0) - D(s_0)N'(s_0) = 0.$$

- **Regra 6:** Possíveis **pontos de cruzamento do lugar das raízes com o eixo imaginário** podem ser determinados por critérios de estabilidade, como a **Tabela de Routh**.

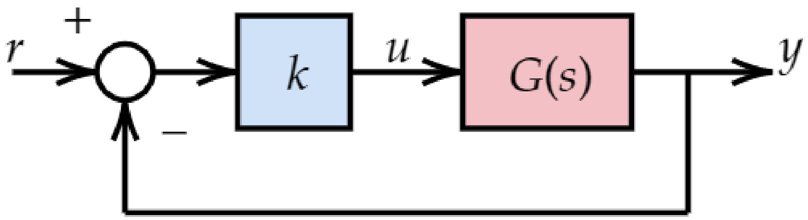
Condição de Módulo:

$$k = \frac{\prod_{i=1}^{n} |s - p_i|}{\prod_{i=1}^{m} |s - z_i|}$$

Condição de Ângulo:

$$\sum_{i=1}^{m} \psi_i - \sum_{i=1}^{n} \phi_i = (2k+1)\cdot 180°, k \in \mathbb{Z}$$

Lugar das Raízes
Regras de Evans



Exemplo 01

Use as regras de Evans para esboçar, com relação a $k > 0$, o lugar das raízes do sistema de controle ao lado com

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

1º Passo: marcar os polos e zeros da malha aberta no diagrama.

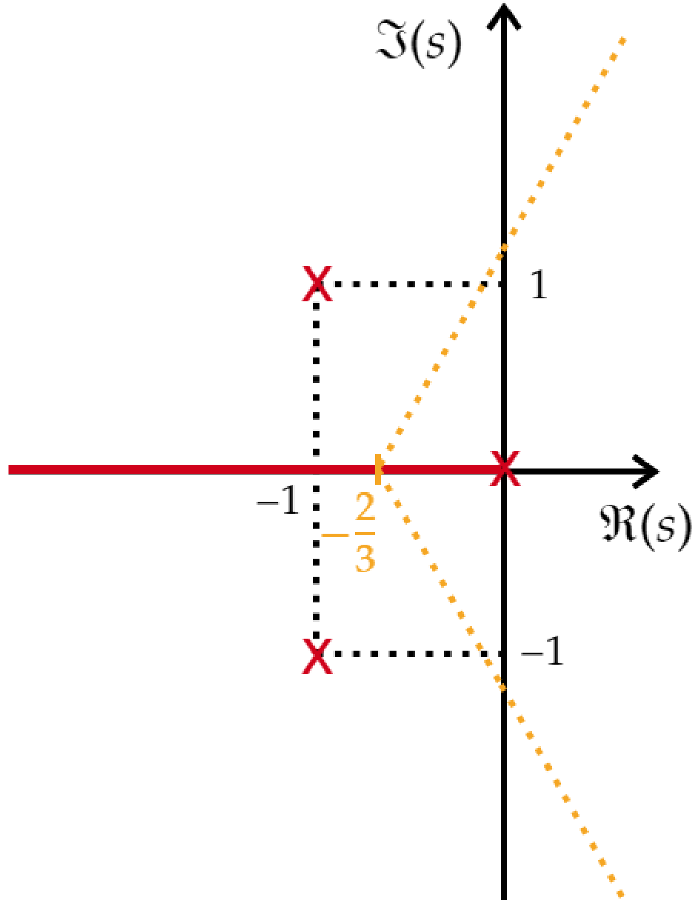
2º Passo: marcar a existência de lugar das raízes no eixo real.

3º Passo: determinar as assíntotas. São **três** assíntotas e

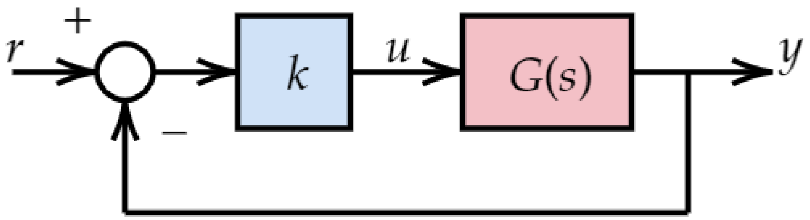
$$\sigma = \frac{0 + 2(-1)}{3} = -\frac{2}{3},$$

$$\theta_1 = 60^\circ, \qquad \theta_2 = 180^\circ, \qquad \theta_3 = -60^\circ$$

Esboço parcial:



Lugar das Raízes
Regras de Evans



Exemplo 01 (cont.)

Use as regras de Evans para esboçar, com relação a $k > 0$, o lugar das raízes do sistema de controle ao lado com

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

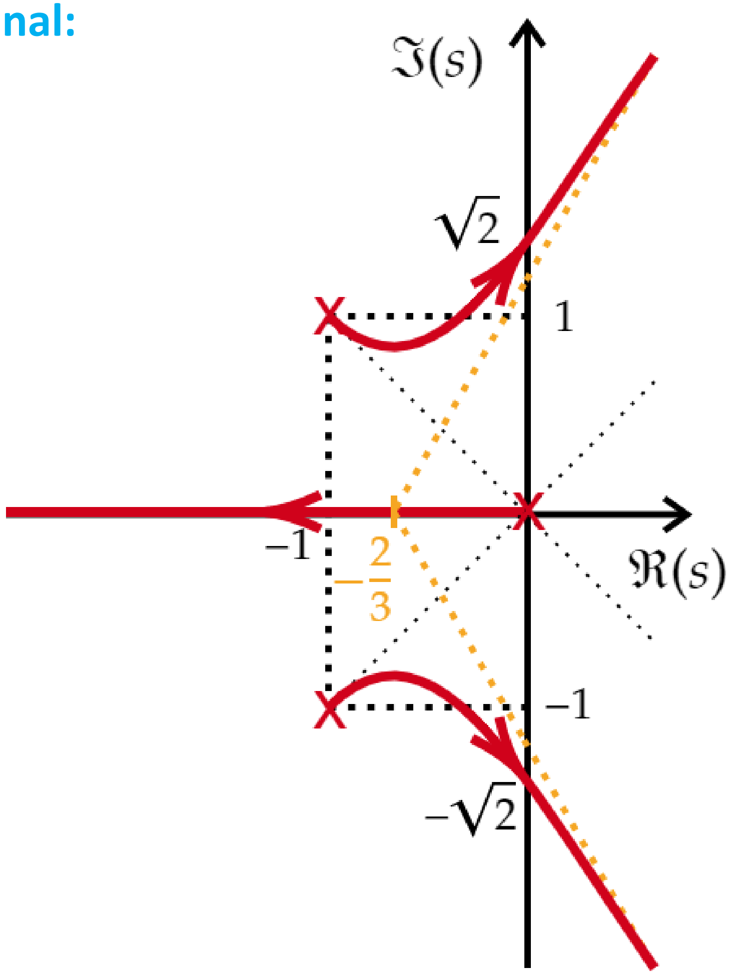
4º Passo: determinar ângulos de saída dos polos. Se ϕ for o ângulo de saída de $-1 \pm i$, a condição de ângulo fornece:

$$\phi + 135° + 90° = 180° \Rightarrow \phi = -45°$$

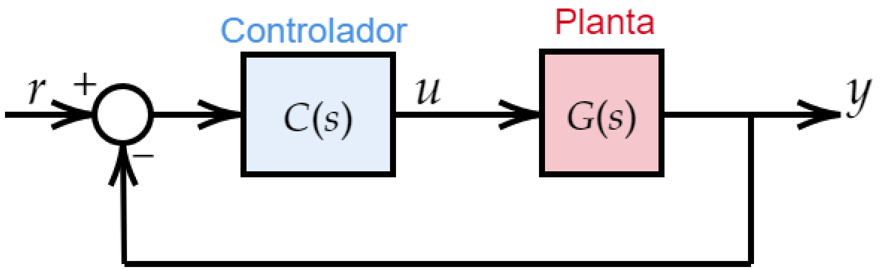
5º Passo: determinar os encontros de ramos. Neste caso, não temos.

6º Passo: cruzamento com o eixo imaginário. Pela Tabela de Routh, o ganho crítico é $k_c = 4$, associado a polos em $\pm i\sqrt{2}$.

Esboço final:



Lugar das Raízes
Regras de Evans



Exemplo 02

Use as regras de Evans para esboçar, com relação a $k > 0$, o lugar das raízes do sistema de controle ao lado com

$$C(s) = k\frac{s+4}{s+8} \quad \text{e} \quad G(s) = \frac{1}{s(s+2)}.$$

Ajuste o ganho do controlador para que os polos dominantes do sistema de malha fechada tenham um fator de amortecimento $\xi = 0.7$

Obs: para que este sistema fique na forma padrão do lugar das raízes, o zero e o polo do controlador são incorporados à planta.

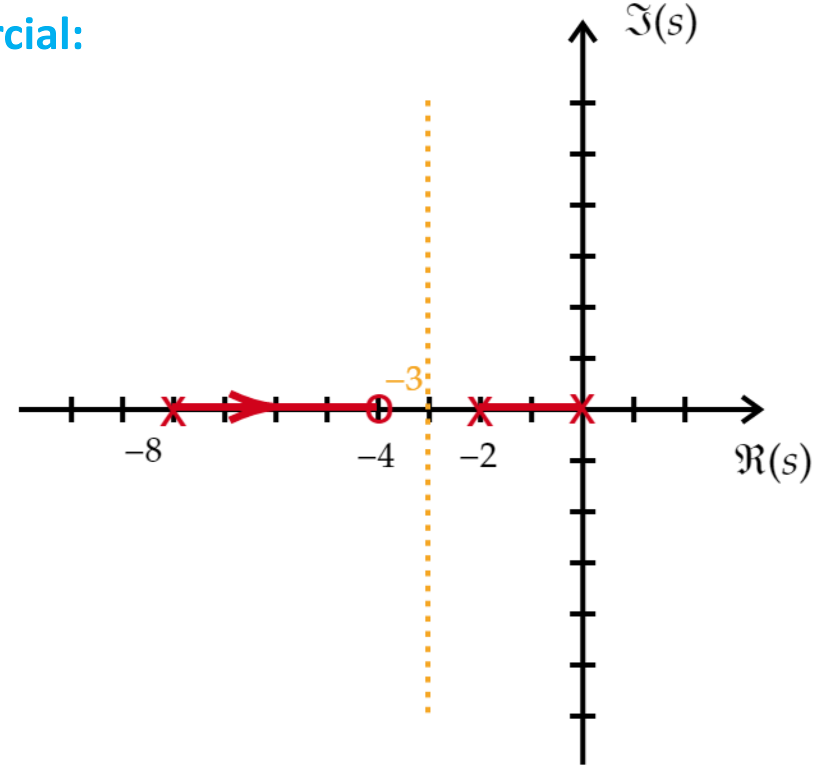
1º Passo: marcar os polos e zeros da malha aberta no diagrama.

2º Passo: marcar a existência de lugar das raízes no eixo real.

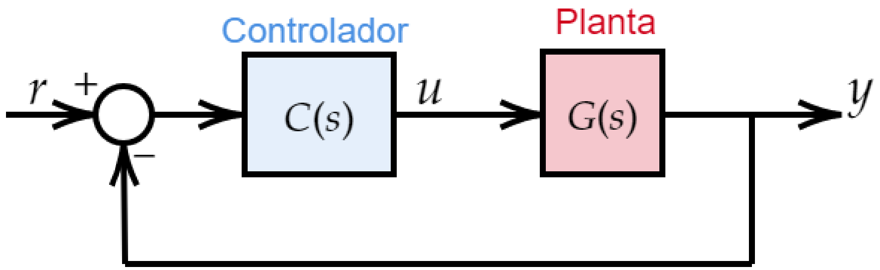
3º Passo: determinar as assíntotas. São **duas** assíntotas e

$$\sigma = \frac{(0-2-8)-(-4)}{2} = -3, \qquad \theta_{1,2} = \pm 90^\circ$$

Esboço parcial:



Lugar das Raízes
Regras de Evans



Exemplo 02 (cont.)

Use as regras de Evans para esboçar, com relação a $k > 0$, o lugar das raízes do sistema de controle ao lado com

$$C(s) = k\frac{s+4}{s+8} \quad \text{e} \quad G(s) = \frac{1}{s(s+2)}.$$

Ajuste o ganho do controlador para que os polos dominantes do sistema de malha fechada tenham um fator de amortecimento $\xi = 0.7$.

4º Passo: neste caso, não precisamos determinar ângulos de saída.

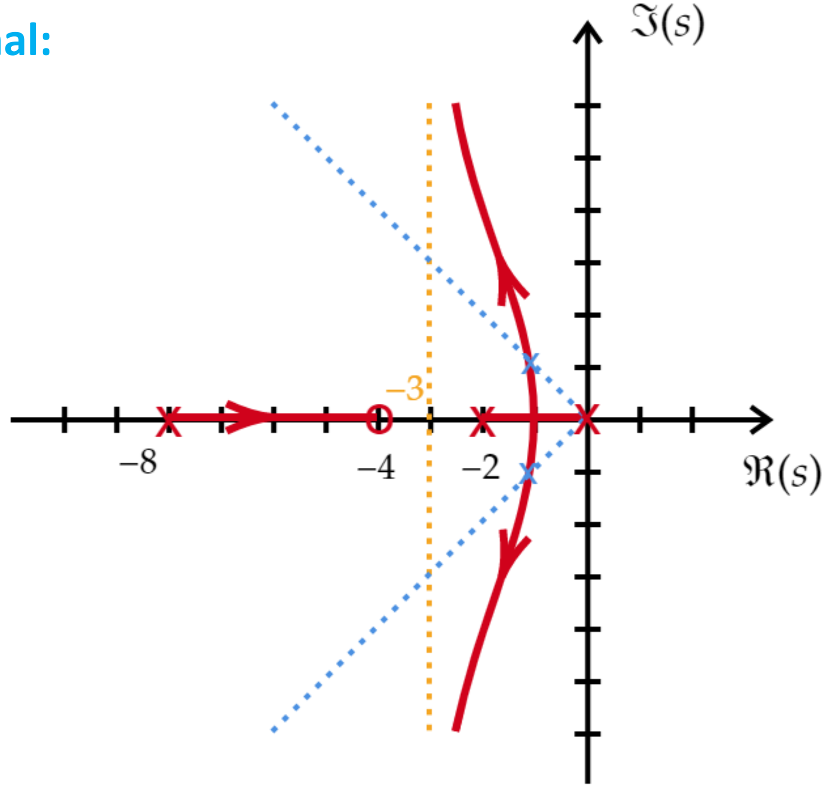
5º Passo: um encontro de ramos acontecerá entre 0 e -2 no eixo real. Este encontro é uma das raízes de

$$D'(s)N(s) - D(s)N'(s) = 0.$$

Adotamos a **aproximação do ponto médio** $s = -1$.

6º Passo: não há cruzamento com o eixo imaginário.

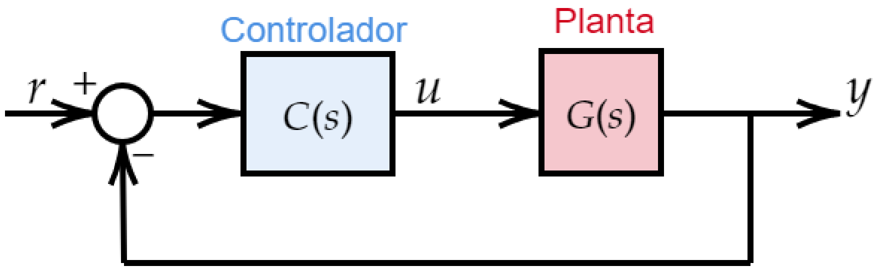
Esboço final:



Projeto de k: para determinar k, marcamos os pontos de interesse ($\xi = 0.7 \Rightarrow$ ângulo de $45°$ com o eixo). Pela condição de modulo, temos que

$$k \approx \frac{\sqrt{2}^2 \times \sqrt{50}}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{5}$$

Lugar das Raízes
Regras de Evans



Exercício em Sala

Use as regras de Evans para esboçar, com relação a $k > 0$, o lugar das raízes do sistema de controle ao lado com

$$C(s) = k\frac{s+10}{s} \quad \text{e} \quad G(s) = \frac{s^2+6s+10}{s^2+5s+6}.$$

Ajuste o ganho do controlador para que o seu sistema em malha fechada tenha um tempo de estabilização de, no máximo, 2s.

20 min

Lugar das Raízes
Regras de Evans

Exemplo 03

Use as regras de Evans para esboçar, com relação a $k > 0$, o lugar das raízes da equação característica

$$s^4 + 8s^3 + 28s^2 + 48s + 32 + 2k = 0.$$

Preparação: Precisamos deixar a equação característica na forma padrão. A equação acima pode ser reescrita como

$$1 + k\frac{2}{s^4 + 8s^3 + 28s^2 + 48s + 32} = 0$$

Como a função "G“ na equação acima não é uma razão de polinômios mônicos, criamos o novo ganho $\mu = 2k$ e esboçamos o lugar das raízes da equação

$$1 + \mu\frac{1}{s^4 + 8s^3 + 28s^2 + 48s + 32} = 0.$$

Preparação (cont.): Precisamos saber quem são os polos de G na equação $1 + \mu G(s) = 0$ ao lado. Para tanto, usamos o **Teorema das Raízes Racionais:**

Teorema. Considere a equação polinomial

$$\boldsymbol{P}:\ a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

com $a_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i$. Se $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ é uma raiz de $\boldsymbol{P}$, então

- p é divisor de a_0;
- q é divisor de a_n.

Assim, como $a_n = 1$, temos que as possíveis raízes racionais do denominador de G estão no conjunto

$$C = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32\}.$$

As raízes positivas podem ser claramente descartadas. Por simples tentativa, temos que -2 é raiz do denominador de G.

Lugar das Raízes
Regras de Evans

Exemplo 03

Use as regras de Evans para esboçar, com relação a $k > 0$, o lugar das raízes da equação característica

$$s^4 + 8s^3 + 28s^2 + 48s + 32 + 2k = 0.$$

Preparação (cont.): Sabendo que -2 é raiz do denominador de G, aplicamos o **dispositivo prático de Briot-Ruffini** para divisão polinomial e reduzimos o grau do denominador de G:

	1	8	28	48	32
-2	1	6	16	16	0

$+$ $\times$ $=$

Tentativa: possível raiz

Quociente

Resto da divisão: se for 0, é raiz.

Preparação (cont.): Assim, pelo dispositivo,

$$s^4 + 8s^3 + 28s^2 + 48s + 32 = (s+2)(s^3 + 6s^2 + 16s + 16)$$

Ainda precisamos encontrar ao menos uma raiz. Repetimos o procedimento (que poderia ser feito diretamente no mesmo dispositivo, adicionando-se uma linha):

	1	8	28	48	32
-2	1	6	16	16	0
-2	1	4	8	0	

Assim, finalizamos a preparação, tendo que esboçar, portanto, o lugar das raízes de

$$1 + \mu \frac{1}{(s+2)^2(s^2 + 4s + 8)} = 0,$$

cujos polos são $-2, -2, -2 \pm 2i$.

Lugar das Raízes
Regras de Evans

Exemplo 03

Use as regras de Evans para esboçar, com relação a $k > 0$, o lugar das raízes da equação característica

$$s^4 + 8s^3 + 28s^2 + 48s + 32 + 2k = 0.$$

Lembrar:

$$1 + \mu \frac{1}{(s+2)^2(s^2+4s+8)} = 0$$

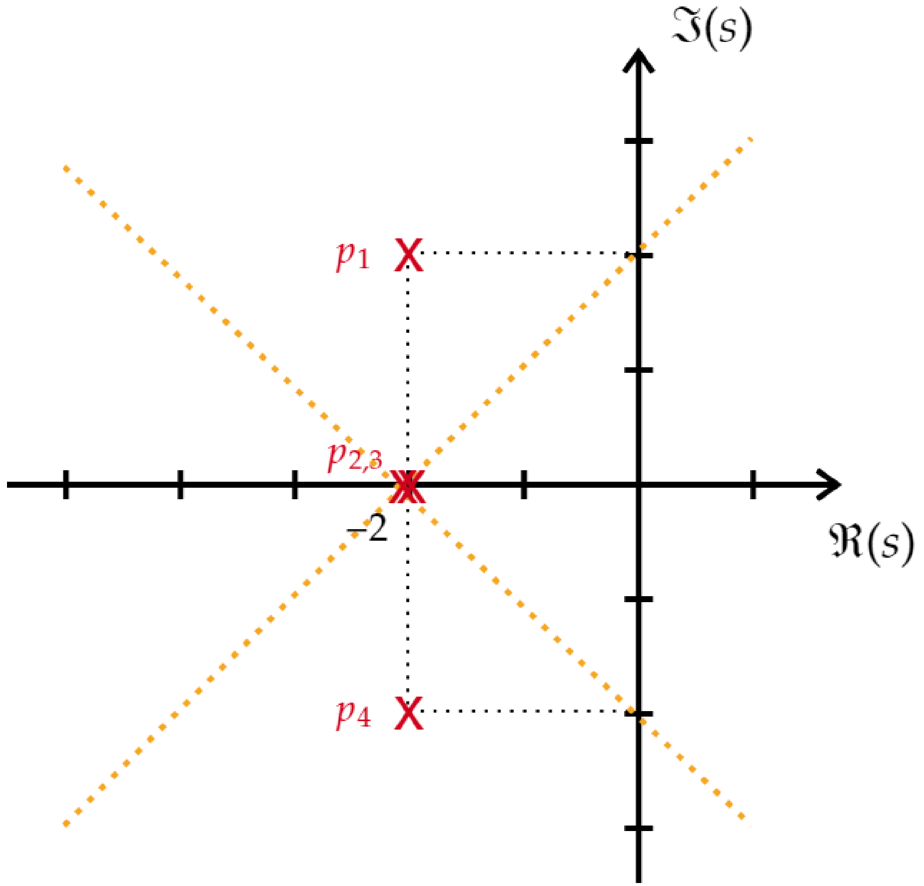
$$\mu = 2k$$

1º Passo: marcar os polos e zeros da malha aberta no diagrama.

2º Passo: marcar a existência de lugar das raízes no eixo real. Neste caso, são apenas os polos em -2 da malha aberta.

3º Passo: determinar as assíntotas. São **quatro** assíntotas e

$$\sigma = \frac{4 \times (-2)}{4} = -2, \qquad \theta_{1,4} = \pm 45°, \theta_{2,3} = \pm 135°$$



Lugar das Raízes
Regras de Evans

Exemplo 03

Use as regras de Evans para esboçar, com relação a $k > 0$, o lugar das raízes da equação característica

$$s^4 + 8s^3 + 28s^2 + 48s + 32 + 2k = 0.$$

Lembrar:

$$1 + \mu \frac{1}{(s+2)^2(s^2+4s+8)} = 0$$

$$\mu = 2k$$

4º Passo: Todos os ângulos de saída são $\pm 90°$. Por exemplo, para os polos sobre o eixo real:

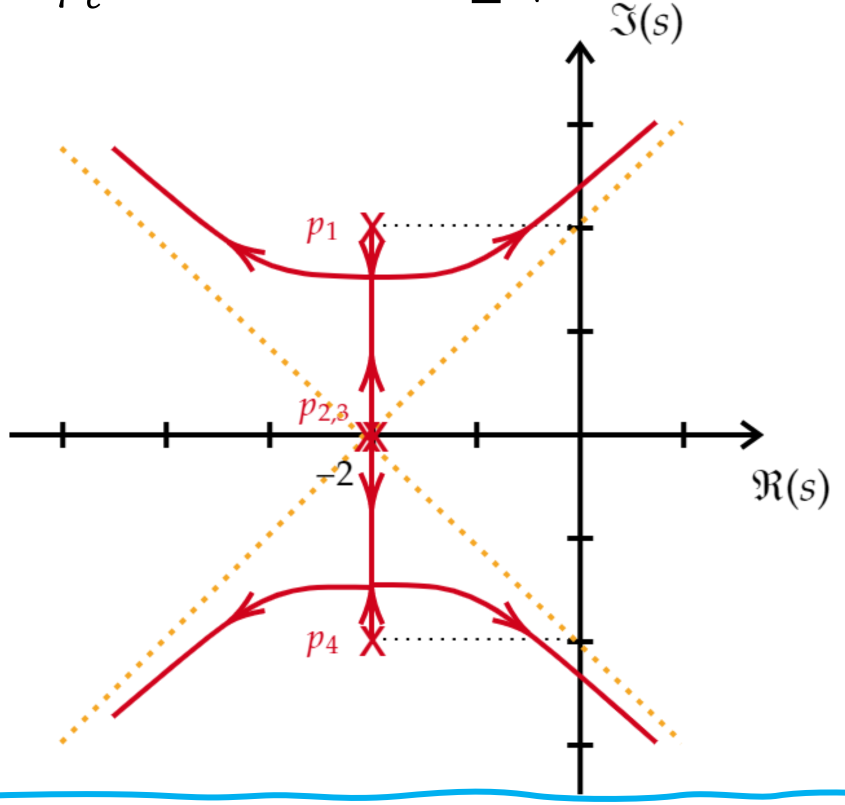
$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = 180°$$
$$-90° + 2\phi_2 + 90° = 180° \Rightarrow \phi_2 = 90°.$$

5º Passo: encontros de ramos ocorrem na reta vertical com parte real -2. Dada a condição

$$D'(s)N(s) - D(s)N'(s) = 0 \Leftrightarrow s^3 + 6s^2 + 14s + 12 = 0,$$

podemos usar o dispositivo de Briot-Ruffini para descobrir que as raízes desta equação são -2 e $-2 \pm i\sqrt{2}$.

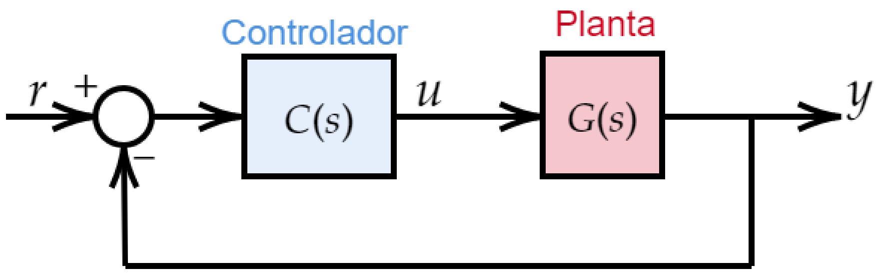
6º Passo: usando a tabela de Routh, podemos determinar o ganho crítico $\mu_c = 100$ e as raízes $\pm i\sqrt{6}$.



Exercício: para que valores de k o sistema tem um tempo de estabilização menor do que $4s$?

3. Compensação Dinâmica: Projeto via Lugar das Raízes

Projeto via Lugar das Raízes



Compensação Dinâmica: Controladores Atraso-Avanço

- Em muitos casos, um simples controlador proporcional é **insuficiente** para assegurar que o processo controlado atinja determinado desempenho. O **lugar das raízes** permite detectar rapidamente estes casos.

- Em casos como esses, devemos projetar um **controlador/compensador dinâmico**, que busque **compensar** a insuficiência do controlador proporcional.

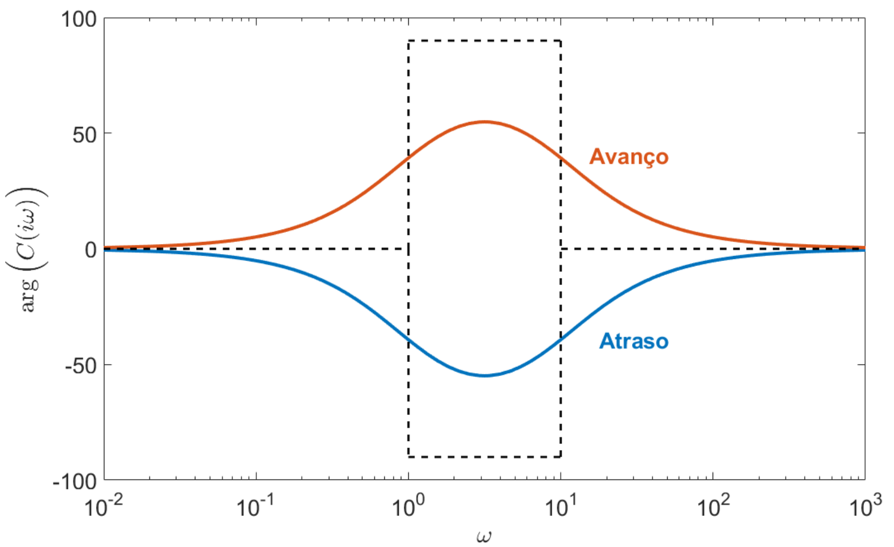
- Nesta seção, veremos técnicas de projeto de controladores da classe **atraso/avanço**, que têm a estrutura

$$\boxed{C(s) = k\frac{s+z}{s+p}}$$

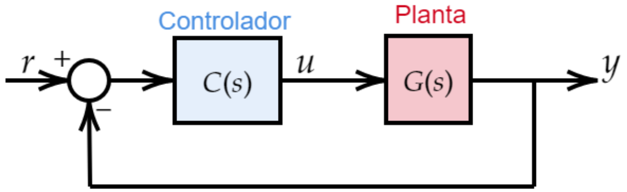
- Assim, em controladores dessa classe, temos que projetar um **ganho** k, um **polo** $-p$ e um **zero** $-z$.

Controlador Avanço: é o controlador da forma ao lado com $z < p$. Neste caso, temos um **avanço de fase** no diagrama de Bode de fase.

Controlador Atraso: é o controlador da forma ao lado com $z > p$. Neste caso, temos um **atraso de fase** no diagrama de Bode de fase.



Projeto via Lugar das Raízes



Compensação Dinâmica: Controladores Atraso-Avanço

- **Compensadores atraso-avanço:** cascata de um compensador atraso com um compensador avanço:

$$\boxed{C(s) = k\frac{s+z}{s+p}\cdot\frac{s+z'}{s+p'}}$$

- Como veremos em detalhes a seguir, controladores do tipo **avanço**, assim como controladores **PD**, tendem a melhorar a **resposta transitória** do sistema em malha fechada.

- Também discutiremos melhor que controladores do tipo **atraso**, assim como controladores **PI**, tendem a melhorar a **resposta em regime permanente** do sistema em malha fechada.

- Compensadores **atraso-avanço** combinam as vantagens teóricas das duas estruturas acima.

Ideia geral do projeto:

1. Um controlador proporcional consegue atingir os critérios de desempenho especificados?

2. Caso a resposta transitória seja insatisfatória, projetamos um controlador do tipo **avanço** da forma

$$C_{\text{lead}}(s) = k\frac{s+z}{s+p}$$

de forma que os critérios sobre o transitório sejam atingidos.

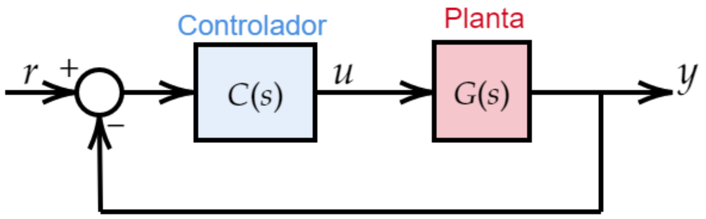
3. Se a resposta em regime permanente for insatisfatória, projetamos um controlador do tipo **atraso** da forma

$$C_{\text{lag}}(s) = \frac{s+z'}{s+p'}$$

a fim de satisfazer os critérios sobre o regime permanente **sem comprometer** o comportamento já obtido para a resposta transitória.

4. O compensador final será: $C(s) = C_{\text{lead}}(s)C_{\text{lag}}(s)$.

Projeto via Lugar das Raízes



Adequação da Resposta Transitória: Comp. Avanço

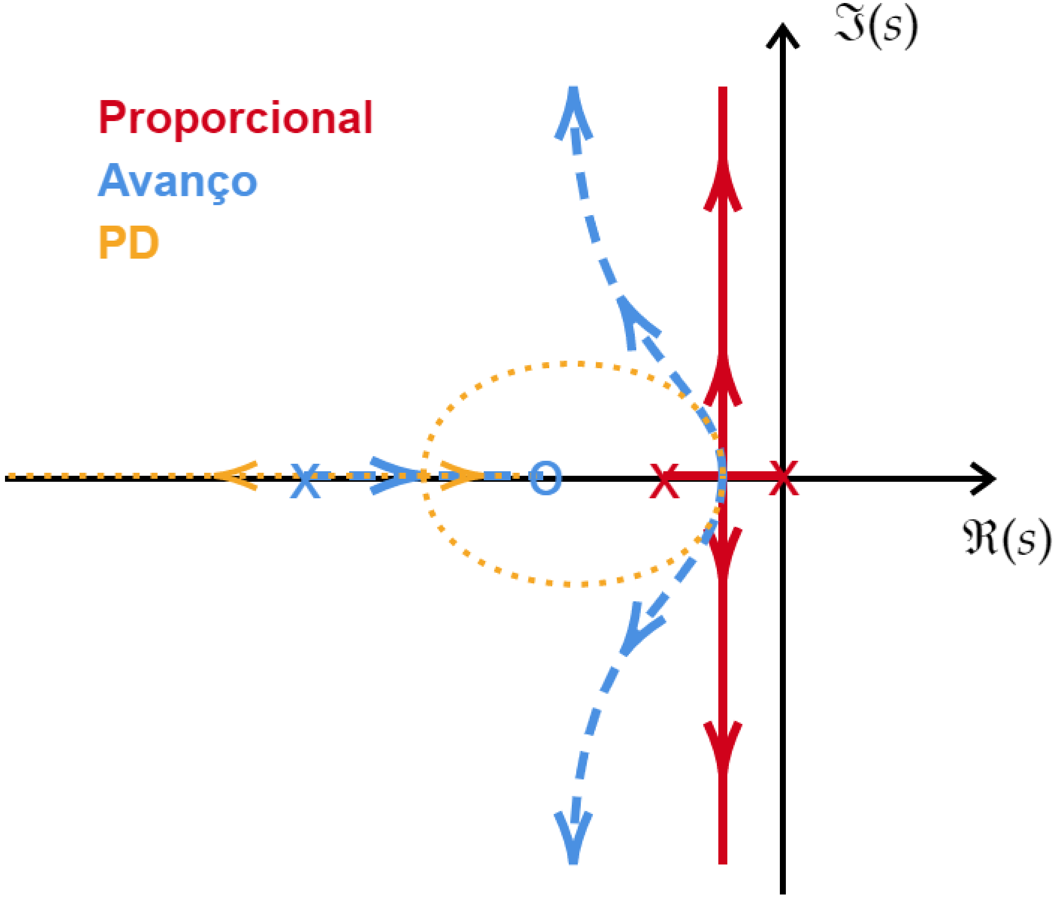
- **Controladores PD melhoram a resposta transitória** do sistema em malha fechada e normalmente são aproximados por **compensadores do tipo avanço**:

$$\boxed{C(s) = k_p + k_d s \approx k_p + \frac{k_d s}{\tau s + 1} = k\frac{s+z}{s+p}}$$

- **Compensadores avanço** têm apenas um zero e um polo. Assim, o número de assíntotas do lugar das raízes permanece o mesmo, mas a abscissa de encontro se torna:

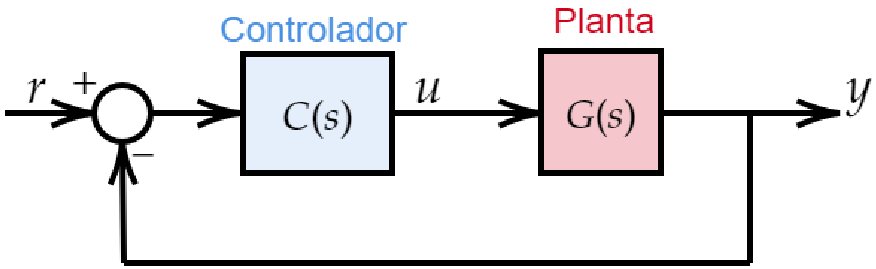
$$\sigma' = \sigma + \frac{z-p}{n-m},$$

sendo σ a abscissa original. Como $z < p$, as assíntotas são **"puxadas para a esquerda"**, o que melhora o transitório.



Observação: usaremos também a condição de ângulo para projetar controladores que façam o lugar das raízes passar por um dado ponto.

Projeto via Lugar das Raízes

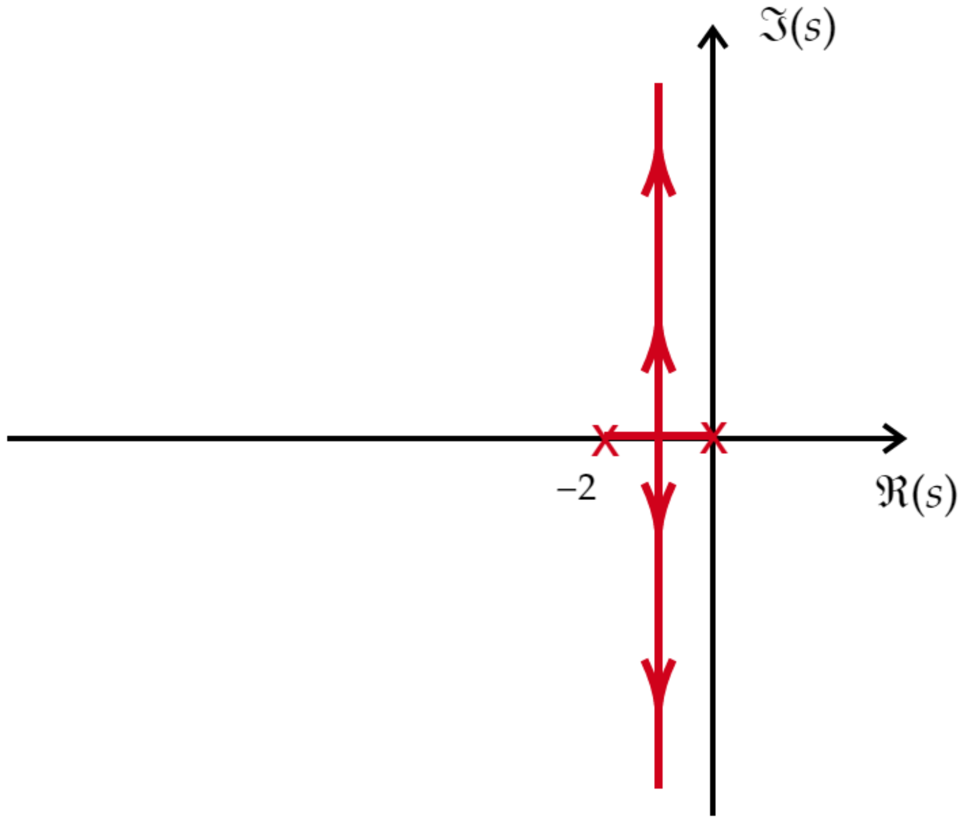


Exemplo

Projete um compensador que assegure tempo de estabilização de 1s e um máximo sobressinal de, no máximo, 15% ao sistema de controle ao lado para

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

Observe que um controlador proporcional não consegue atingir os critérios estabelecidos (ao lado: lugar das raízes de $1 + kG = 0$). ⇒ **compensação dinâmica**.



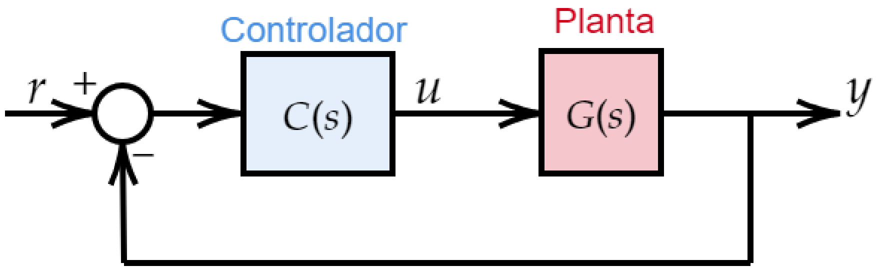
Três possíveis projetos:

1. Controlador PD e projeto via condição de ângulo.

2. Compensador Avanço e projeto via condição de ângulo

3. Compensador Avanço e projeto via abscissa das assíntotas.

Projeto via Lugar das Raízes



Exemplo

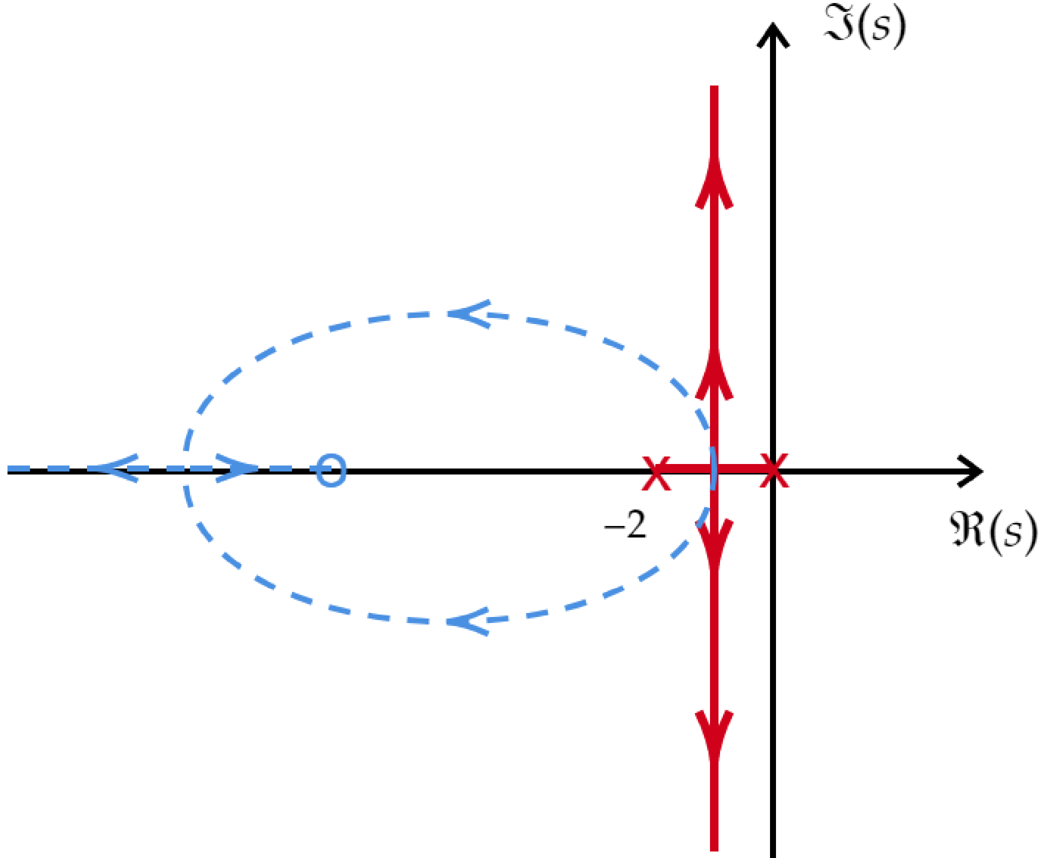
Projete um compensador que assegure tempo de estabilização de 1s e um máximo sobressinal de, no máximo, 15% ao sistema de controle ao lado para

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

Primeiro Projeto: PD com condição de ângulo

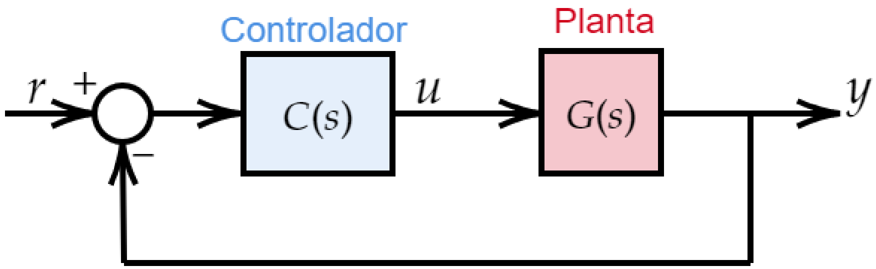
Ideia básica em projeto de PDs: o controlador adiciona um zero ao lugar das raízes.

1º Passo: investigar, por meio de um esboço, as alterações causadas pela adição do zero do PD em uma região conveniente (normalmente à esquerda dos polos de malha aberta). Veja ao lado o esboço.



Observação: neste primeiro esboço, não precisamos nos preocupar muito com escalas, pontos de cruzamento e ângulos de entrada/saída.

Projeto via Lugar das Raízes



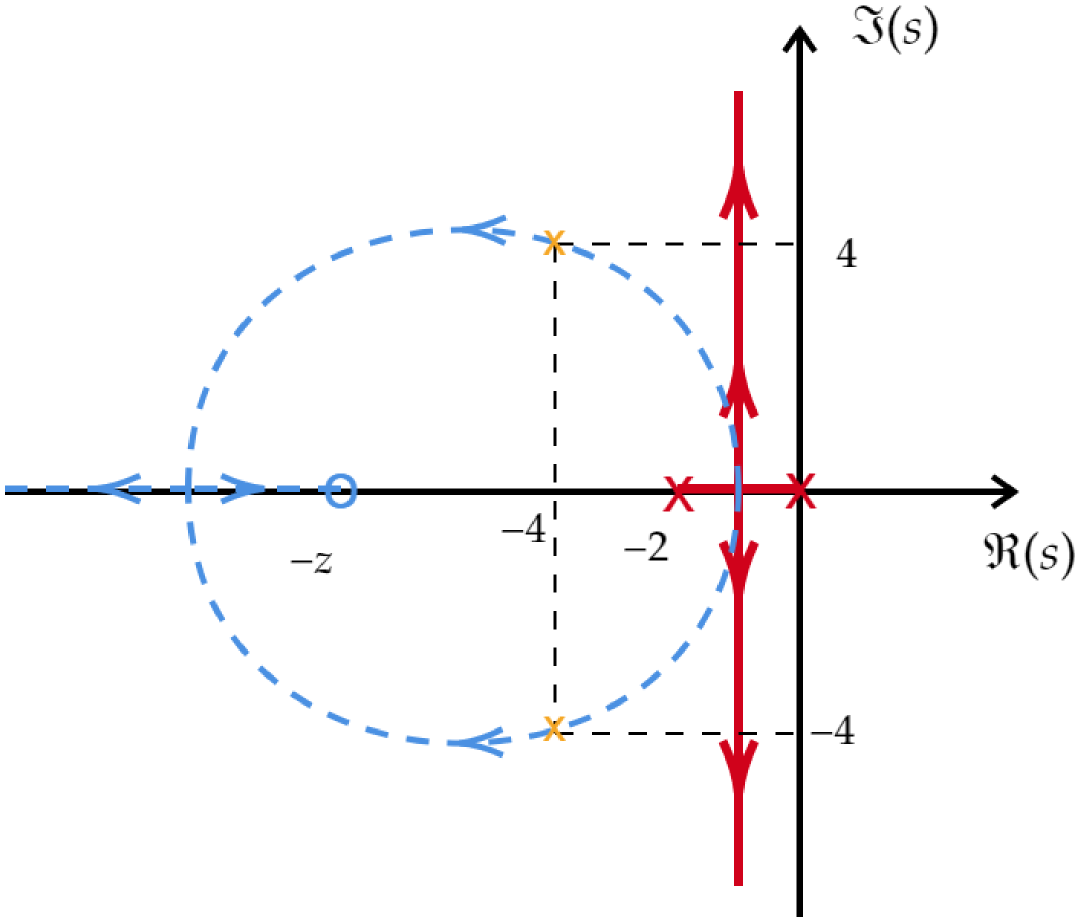
Exemplo

Projete um compensador que assegure tempo de estabilização de 1s e um máximo sobressinal de, no máximo, 15% ao sistema de controle ao lado para

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

Primeiro Projeto: PD com condição de ângulo

2º Passo: com base nos critérios de desempenho e no esboço, determine um objetivo relativo ao lugar das raízes que deve ser atingido pelo seu compensador.

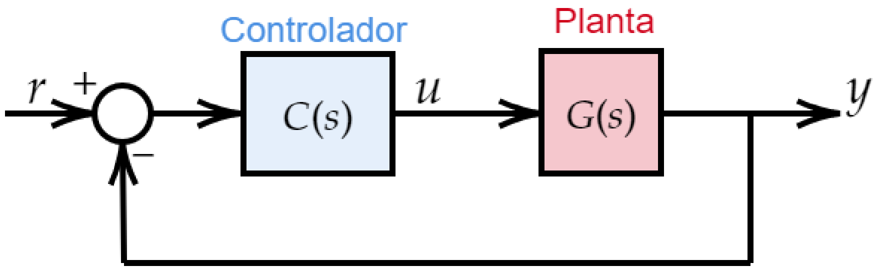


Objetivo: determinar o zero do controlador PD

$$C(s) = k(s+z)$$

Para que o lugar das raízes passe pelos pontos $-4 \pm 4i$. Veja ao lado.

Projeto via Lugar das Raízes

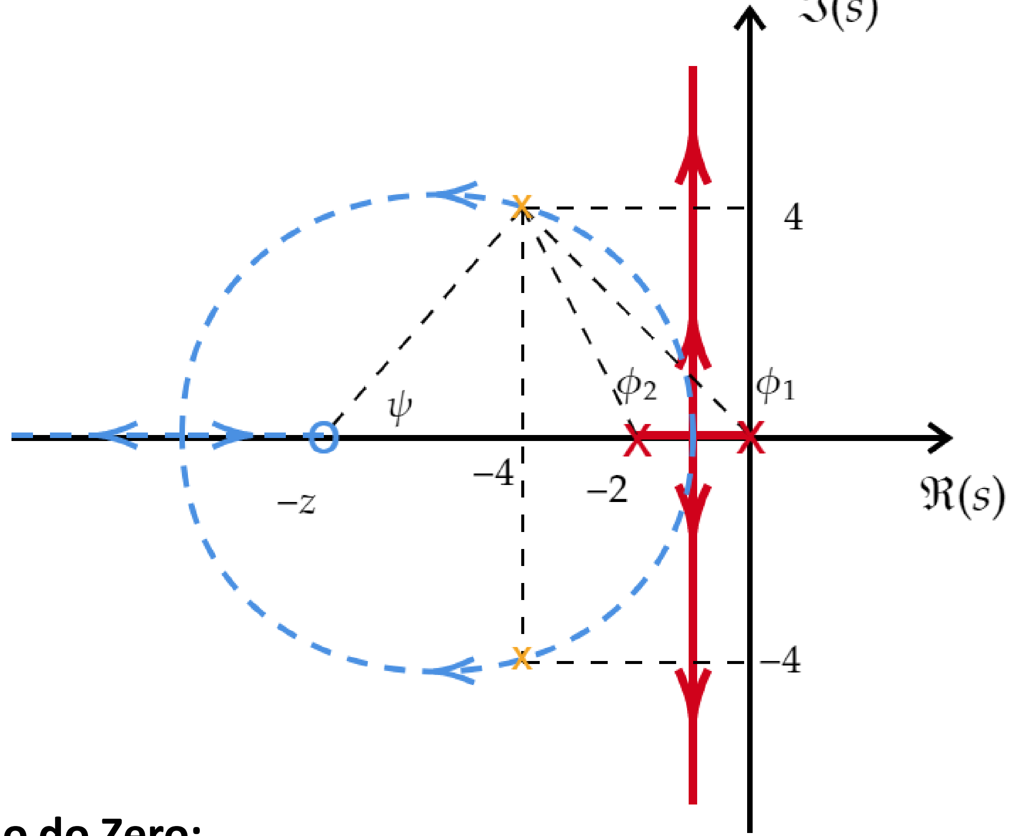


Exemplo

Projete um compensador que assegure tempo de estabilização de 1s e um máximo sobressinal de, no máximo, 15% ao sistema de controle ao lado para

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

Primeiro Projeto: PD com condição de ângulo



3º Passo: dado o objetivo de projeto, use a condição de ângulo para determinar o zero do PD que faz o lugar das raízes passar pelo par de polos desejados.

Pela condição de ângulo:

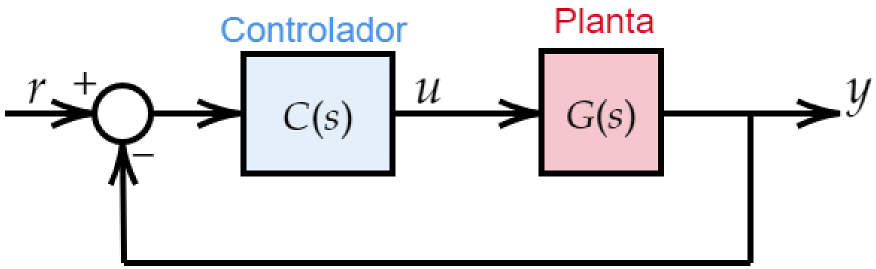
$$\phi_1 + \phi_2 - \psi = 135^\circ + 90^\circ + \mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{2} - \psi = 180^\circ$$

$$\therefore \psi = 45^\circ + \mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{2} \approx 72^\circ$$

Posição do Zero:

$$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{\mathrm{tg}\,45^\circ + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,45^\circ} = 3 = \frac{4}{z-4} \Rightarrow z = \frac{8}{3}$$

Projeto via Lugar das Raízes

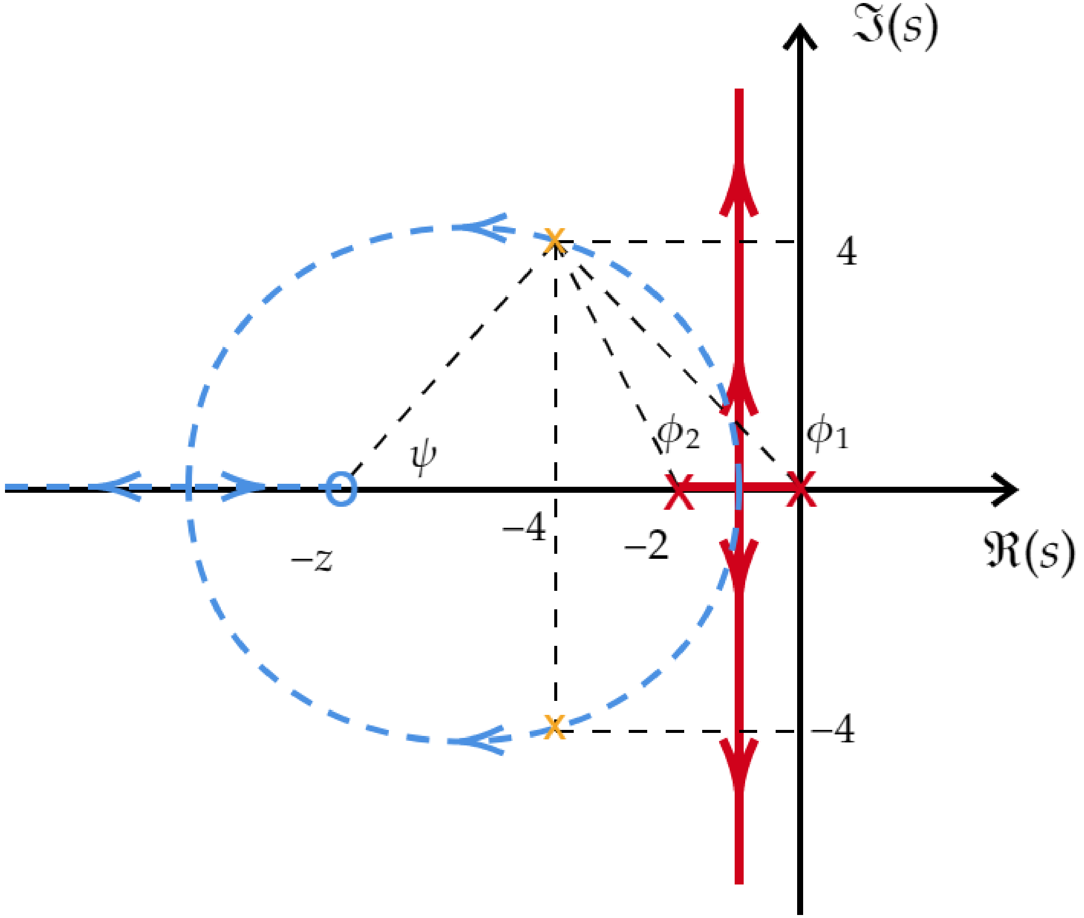


Exemplo

Projete um compensador que assegure tempo de estabilização de 1s e um máximo sobressinal de, no máximo, 15% ao sistema de controle ao lado para

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

Primeiro Projeto: PD com condição de ângulo

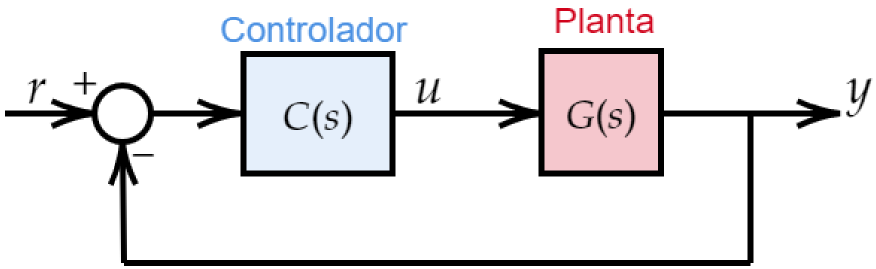


4º Passo: refinar o esboço, incluindo todas as regras, e usar a condição de módulo para determinar o ganho do PD.

Pela condição de módulo:

$$k = \frac{4\sqrt{2} \times 2\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{16}{9} + 16}} = 6$$

Projeto via Lugar das Raízes

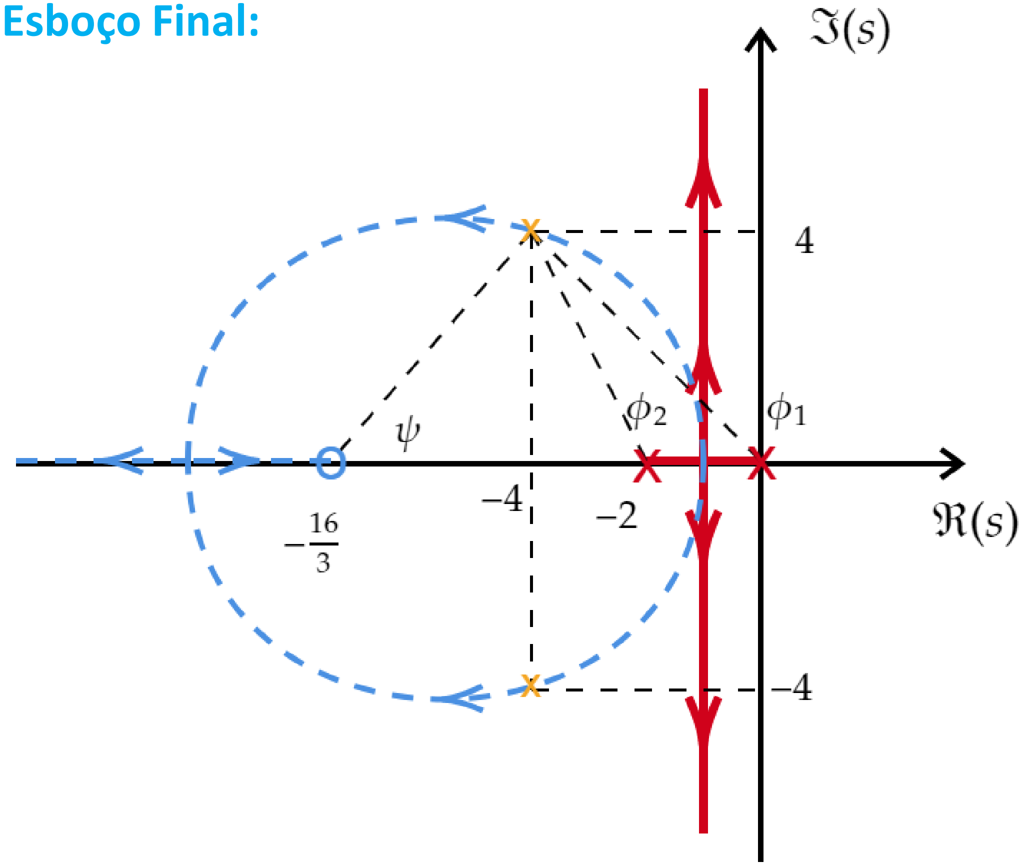


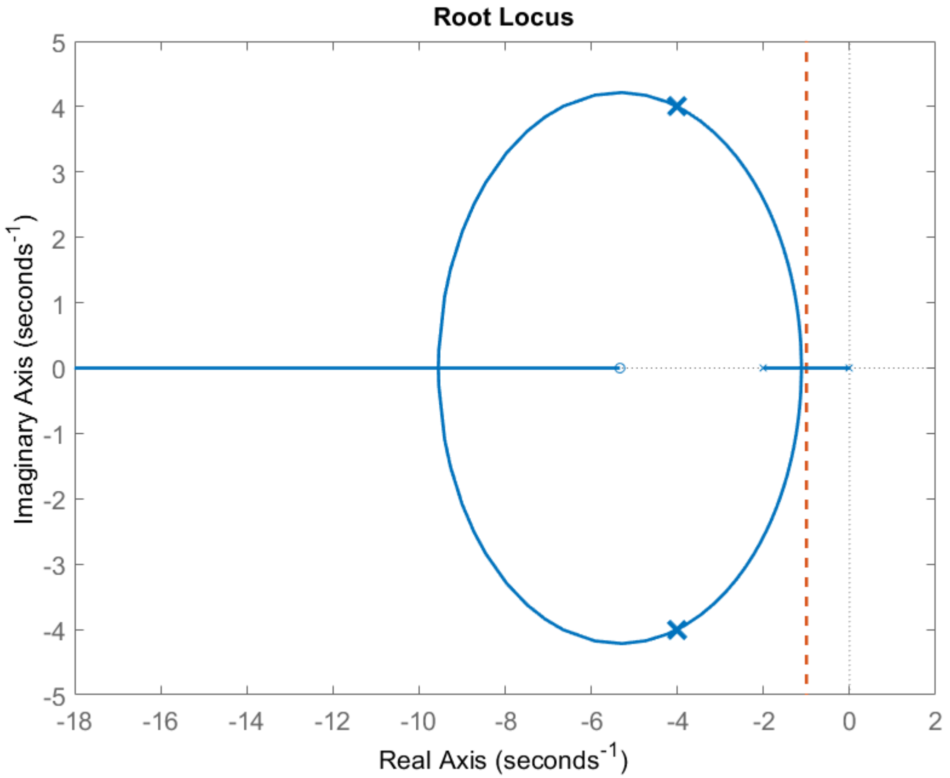
Exemplo

Primeiro Projeto: PD com condição de ângulo

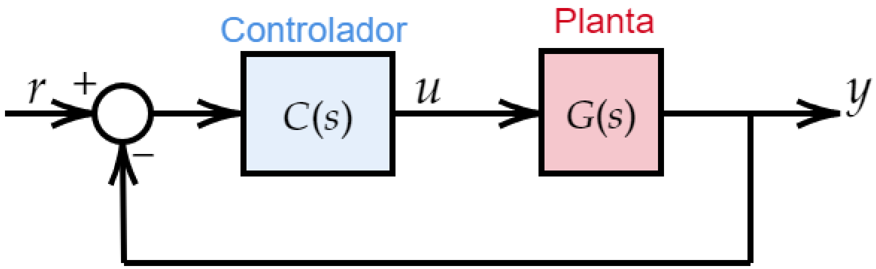
Matlab: lugar das raízes de $1 + k\left(s + \frac{16}{3}\right)G(s) = 0$

Esboço Final:





Projeto via Lugar das Raízes



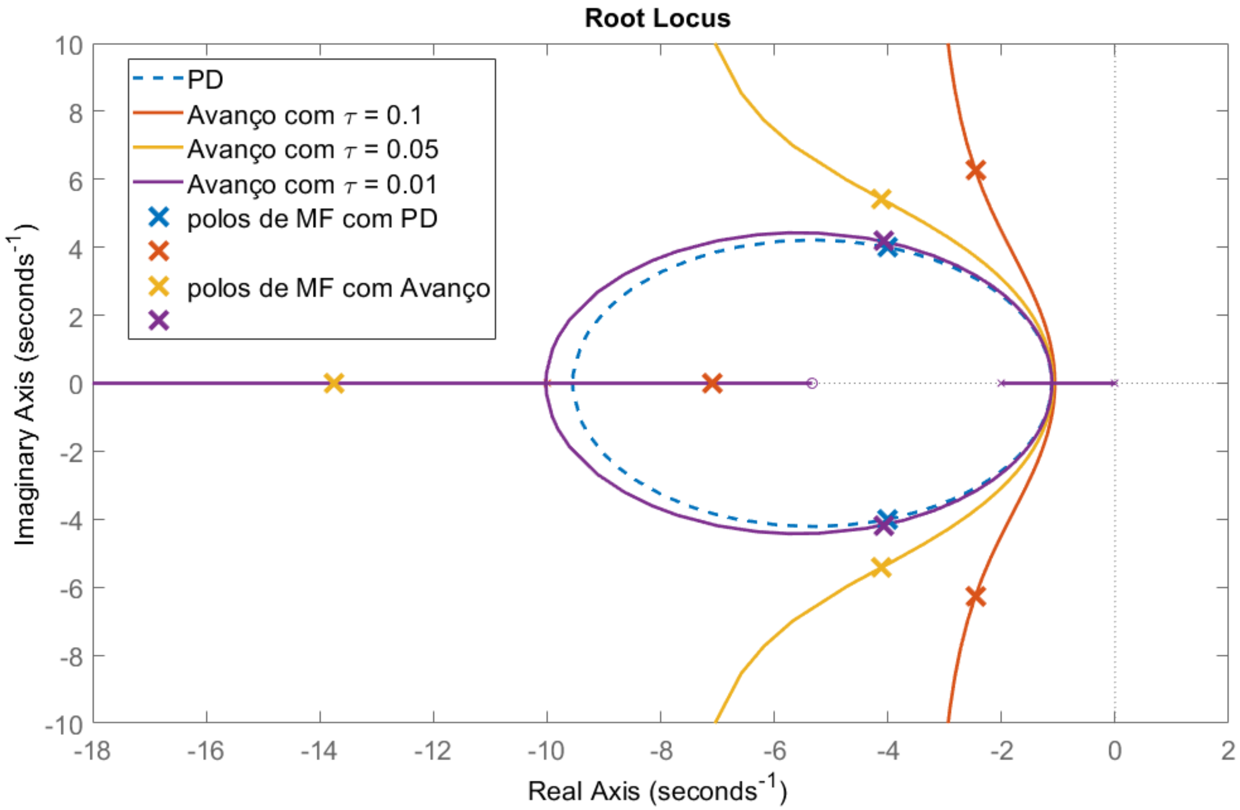
Exemplo

Primeiro Projeto: PD com condição de ângulo

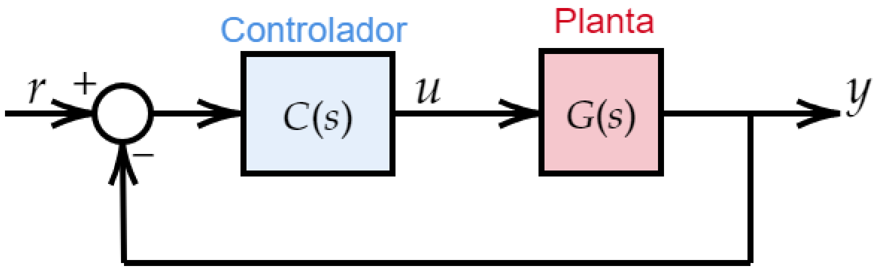
Sobre a implementação: o controlador PD projetado deve ser aproximado por um avanço para ser implementado. Ao lado, mostramos o lugar das raízes de

$$1 + \frac{k\left(s + \frac{16}{3}\right)}{\tau s + 1} G(s) = 0$$

para $\tau \in \{0.1, 0.05, 0.01\}$. Também mostramos a posição dos polos obtida para $k = 6$.



Projeto via Lugar das Raízes



Exemplo

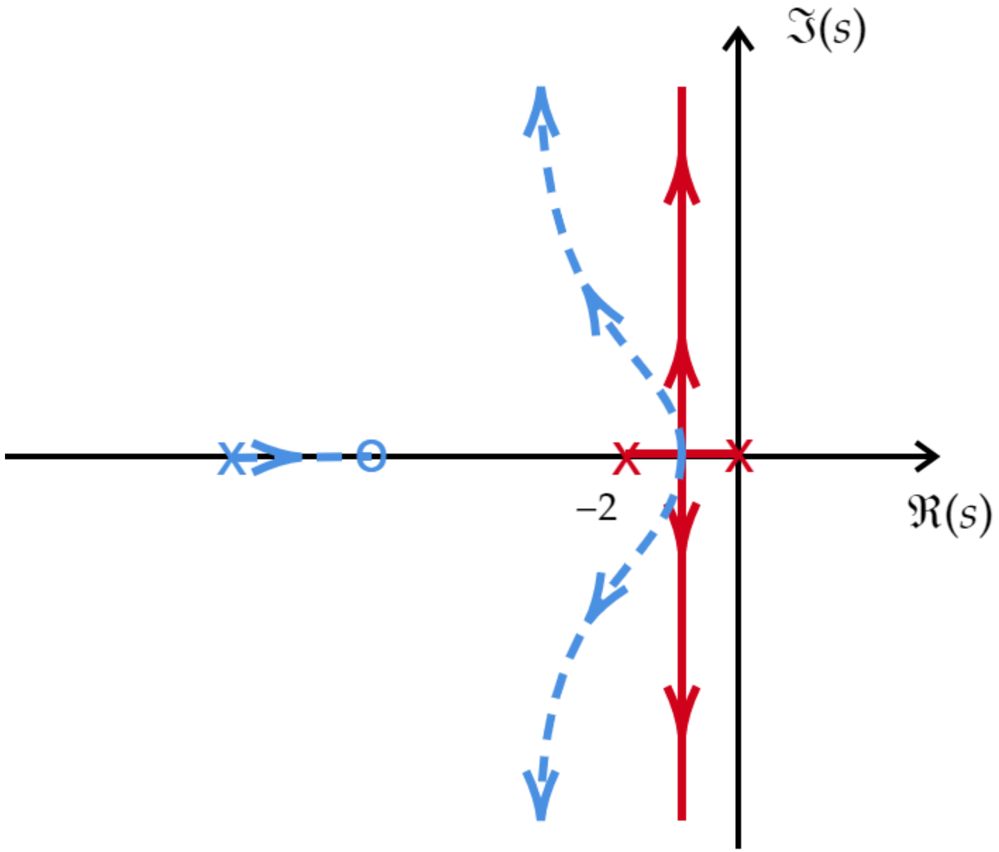
Projete um compensador que assegure tempo de estabilização de 1s e um máximo sobressinal de, no máximo, 15% ao sistema de controle ao lado para

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

Segundo e Terceiro Projetos: Comp. Avanço

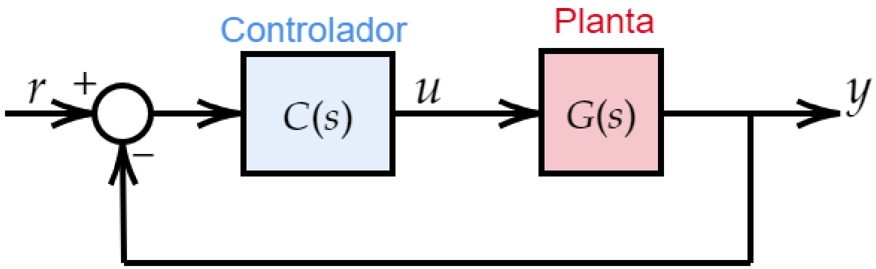
Ideia básica em projeto de Avanço: o controlador adiciona um polo e um zero ao lugar das raízes. Normalmente as condições de projeto vinculam as posições de polo e zero e, desta forma, apenas um deve ser selecionado (normalmente o zero).

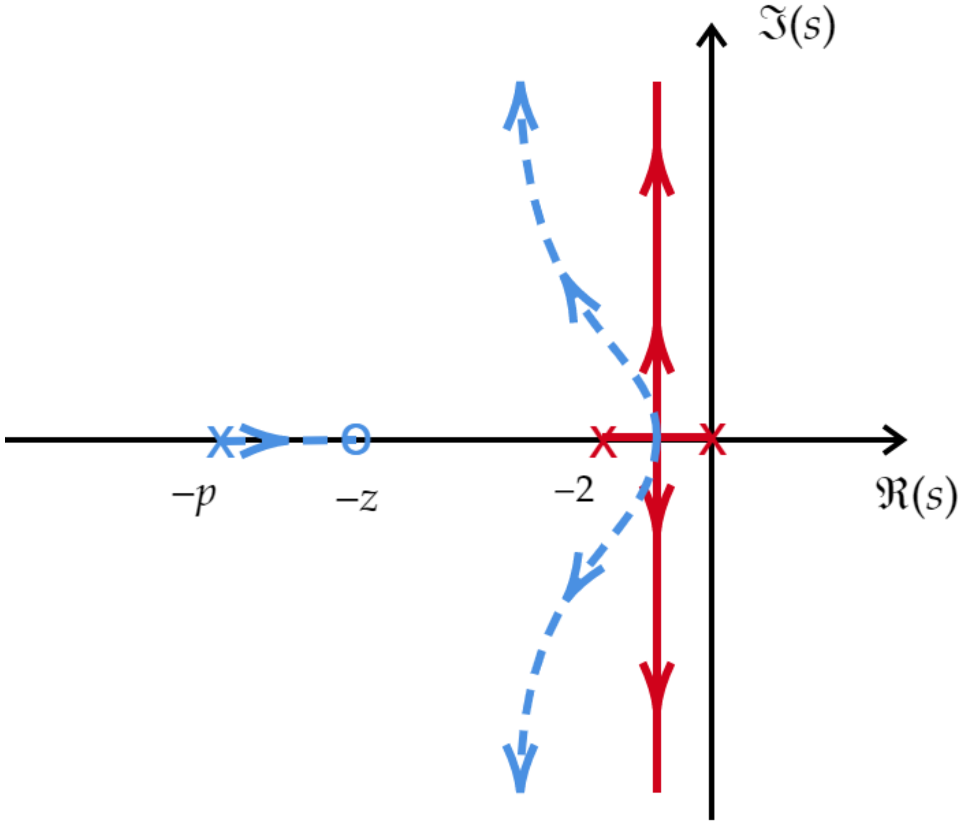
1º Passo: investigar, por meio de um esboço, as alterações causadas pelo avanço, cujo zero é posicionado em uma região conveniente (normalmente à esquerda dos polos de malha aberta). Veja ao lado o esboço.



Observação: novamente, neste primeiro esboço, não precisamos nos preocupar muito com escalas, pontos de cruzamento e ângulos de entrada/saída.

Projeto via Lugar das Raízes





Exemplo

Projete um compensador que assegure tempo de estabilização de 1s e um máximo sobressinal de, no máximo, 15% ao sistema de controle ao lado para

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

Segundo e Terceiro Projetos: Comp. Avanço

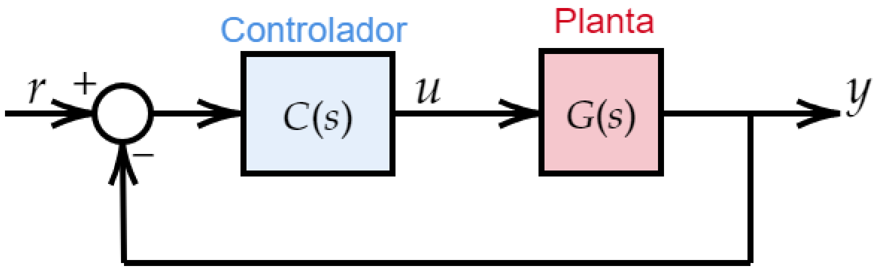
2º Passo: com base nos critérios de desempenho e no esboço, determine um objetivo relativo ao lugar das raízes que deve ser atingido pelo seu compensador avanço

$$C(s) = k\frac{s+z}{s+p}$$

Objetivo 1: determinar o polo e o zero do compensador para que o lugar das raízes passe pelos pontos $-4 \pm 4i$.

Objetivo 2: determinar o polo e o zero do compensador para que as assíntotas do lugar das raízes estejam (muito?) à esquerda de -4. Tomaremos $\sigma' = -6$.

Projeto via Lugar das Raízes



Exemplo

Projete um compensador que assegure tempo de estabilização de 1s e um máximo sobressinal de, no máximo, 15% ao sistema de controle ao lado para

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

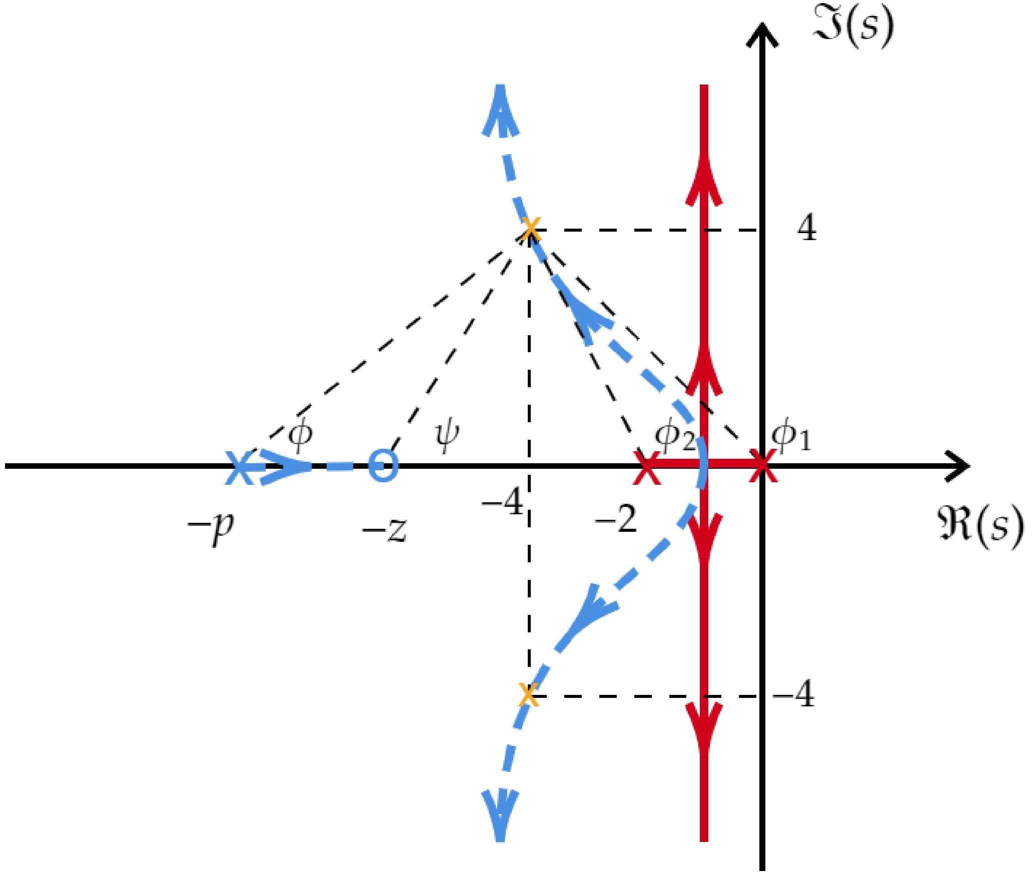
Segundo Projeto: Avanço com condição de ângulo

3º Passo: dado o **objetivo (1)** de projeto, use a condição de ângulo para determinar **ganho de fase** do avanço que faz o lugar das raízes passar pelo par de polos desejados. Veja ao lado.

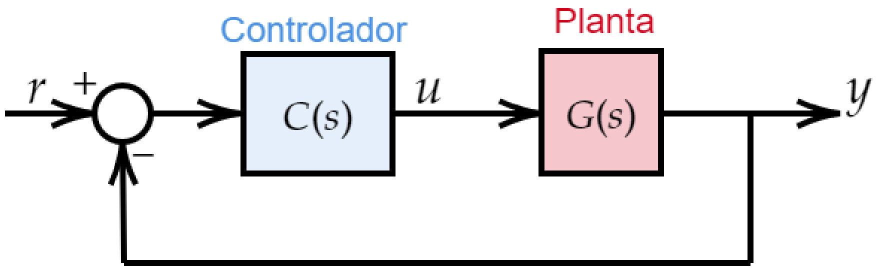
Defina o ganho de fase do avanço: $\alpha = \psi - \phi$

Da condição de ângulo:

$$\phi_1 + \phi_2 - \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 45° + \mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{2} \approx 72°$$



Projeto via Lugar das Raízes

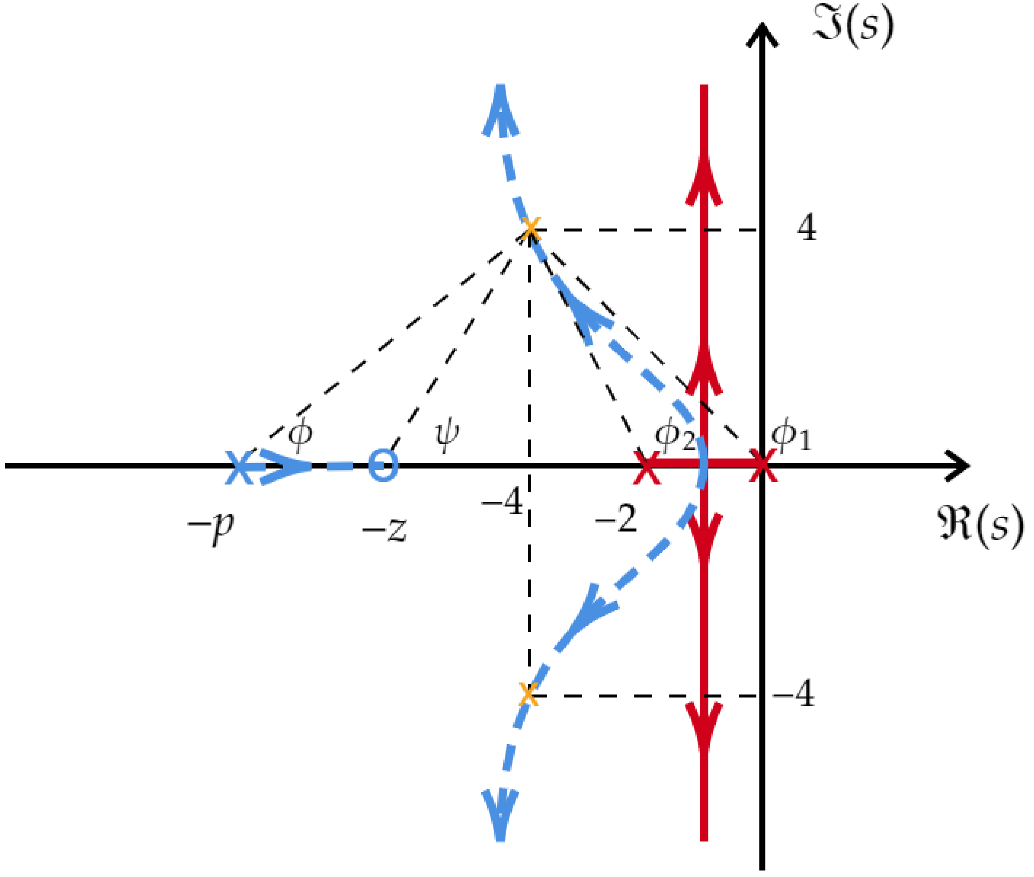


Exemplo

Projete um compensador que assegure tempo de estabilização de 1s e um máximo sobressinal de, no máximo, 15% ao sistema de controle ao lado para

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

Segundo Projeto: Avanço com condição de ângulo



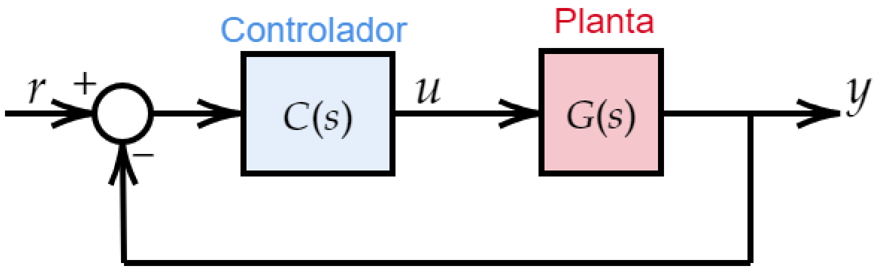
4º Passo: escolha uma posição conveniente para o zero e, com o **ganho de fase**, determine o polo.

Vamos tomar $z = 4$, o que implica que $\psi = 90^\circ$ e, como $\alpha = 45^\circ + \text{tg}^{-1}\frac{1}{2}$, temos que $\phi = 45^\circ - \text{tg}^{-1}\frac{1}{2}$.

Portanto,

$$\text{tg}\,\phi = \text{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{3} = \frac{4}{p-4} \Rightarrow p = 16.$$

Projeto via Lugar das Raízes



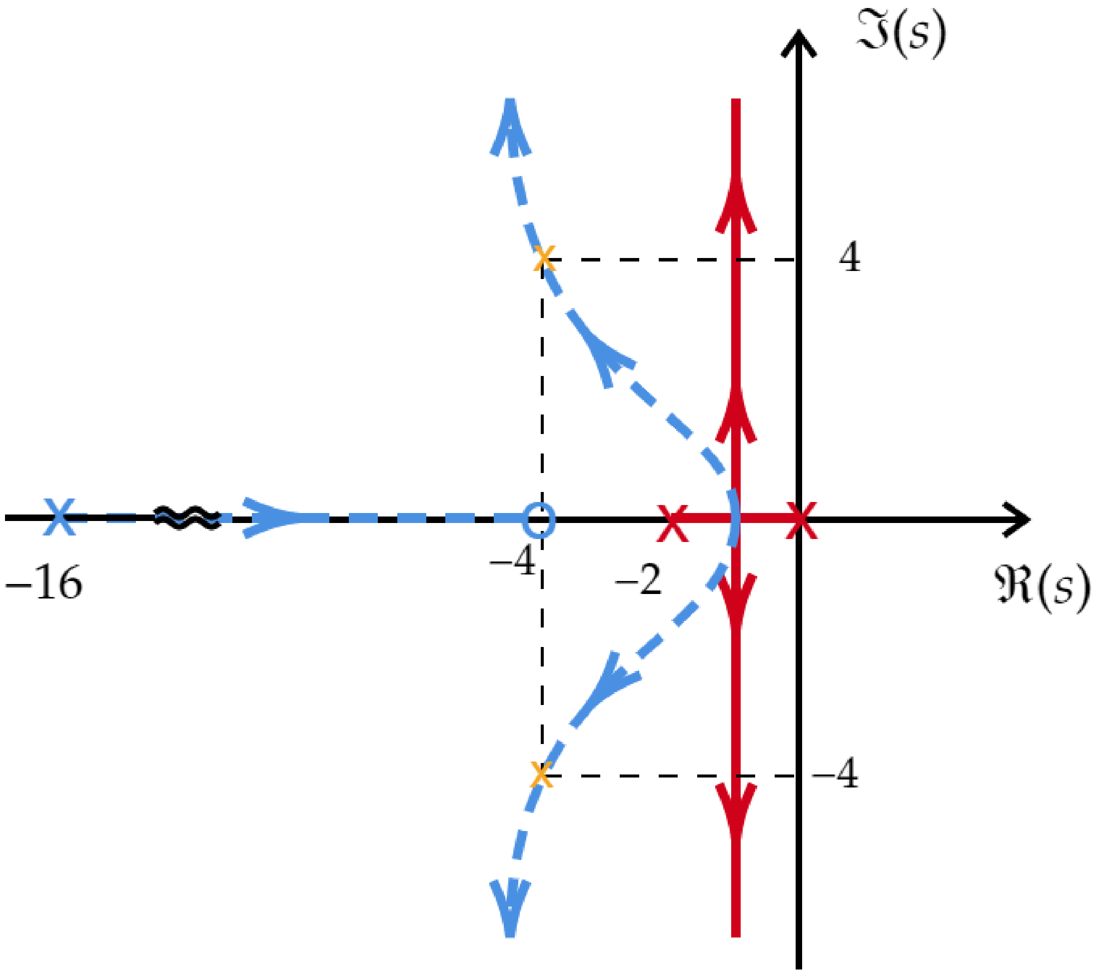
Exemplo

Projete um compensador que assegure tempo de estabilização de 1s e um máximo sobressinal de, no máximo, 15% ao sistema de controle ao lado para

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

Segundo Projeto: Avanço com condição de ângulo

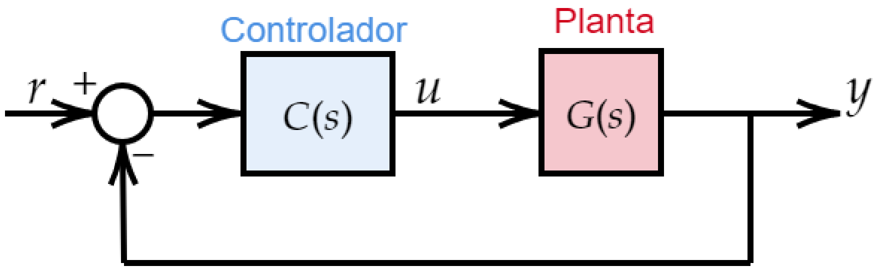
5º Passo: refinar o esboço, incluindo todas as regras, e usar a condição de módulo para determinar o ganho do Avanço.



Pela condição de módulo:

$$k = \frac{4\sqrt{2} \times 2\sqrt{5} \times 4\sqrt{10}}{4} = 80$$

Projeto via Lugar das Raízes

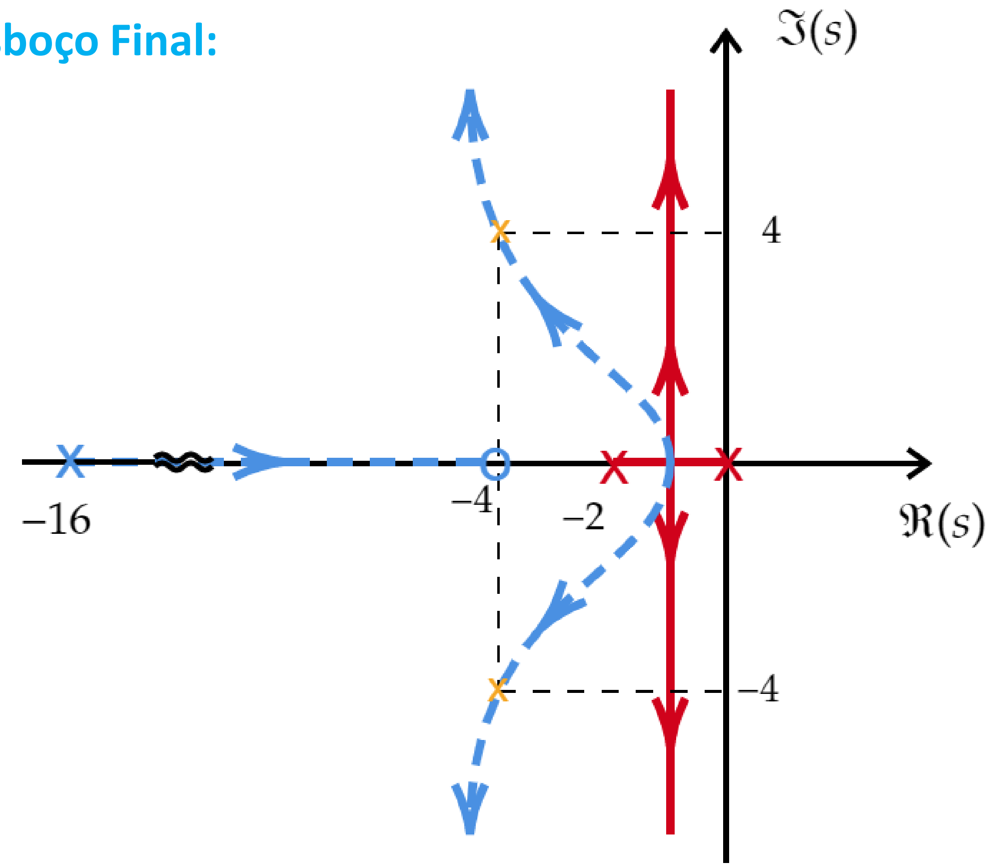


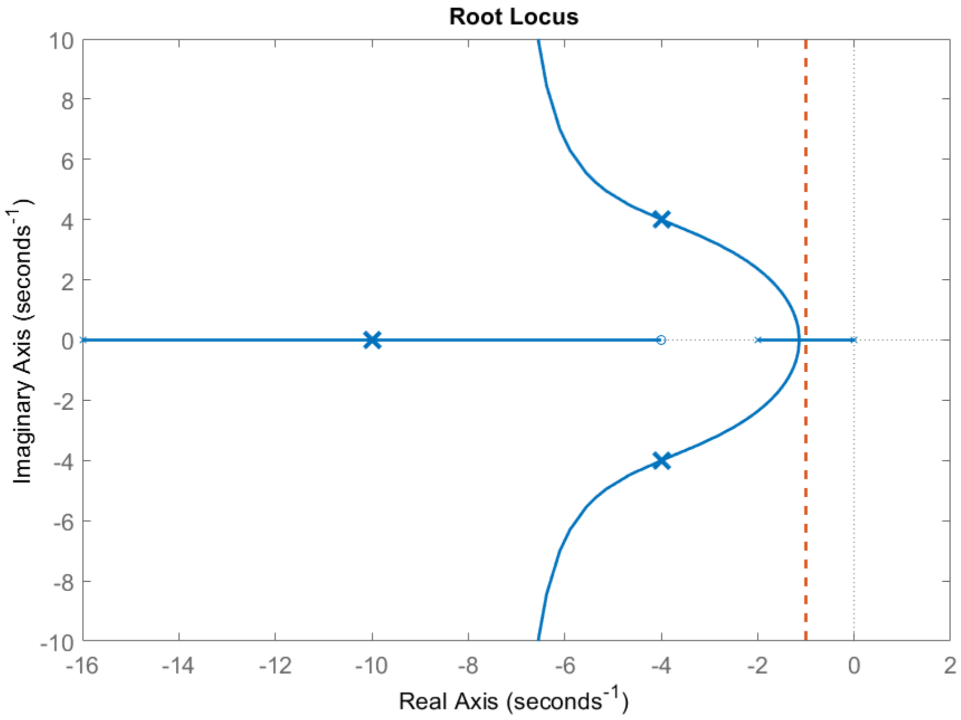
Exemplo

Segundo Projeto: Avanço com condição de ângulo

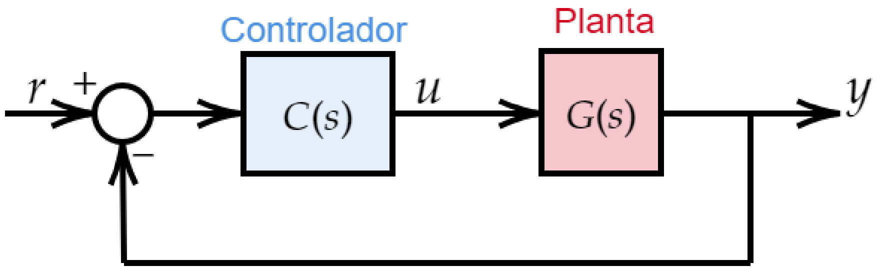
Matlab: lugar das raízes de $1 + k\left(\frac{s+4}{s+16}\right)G(s) = 0$

Esboço Final:





Projeto via Lugar das Raízes

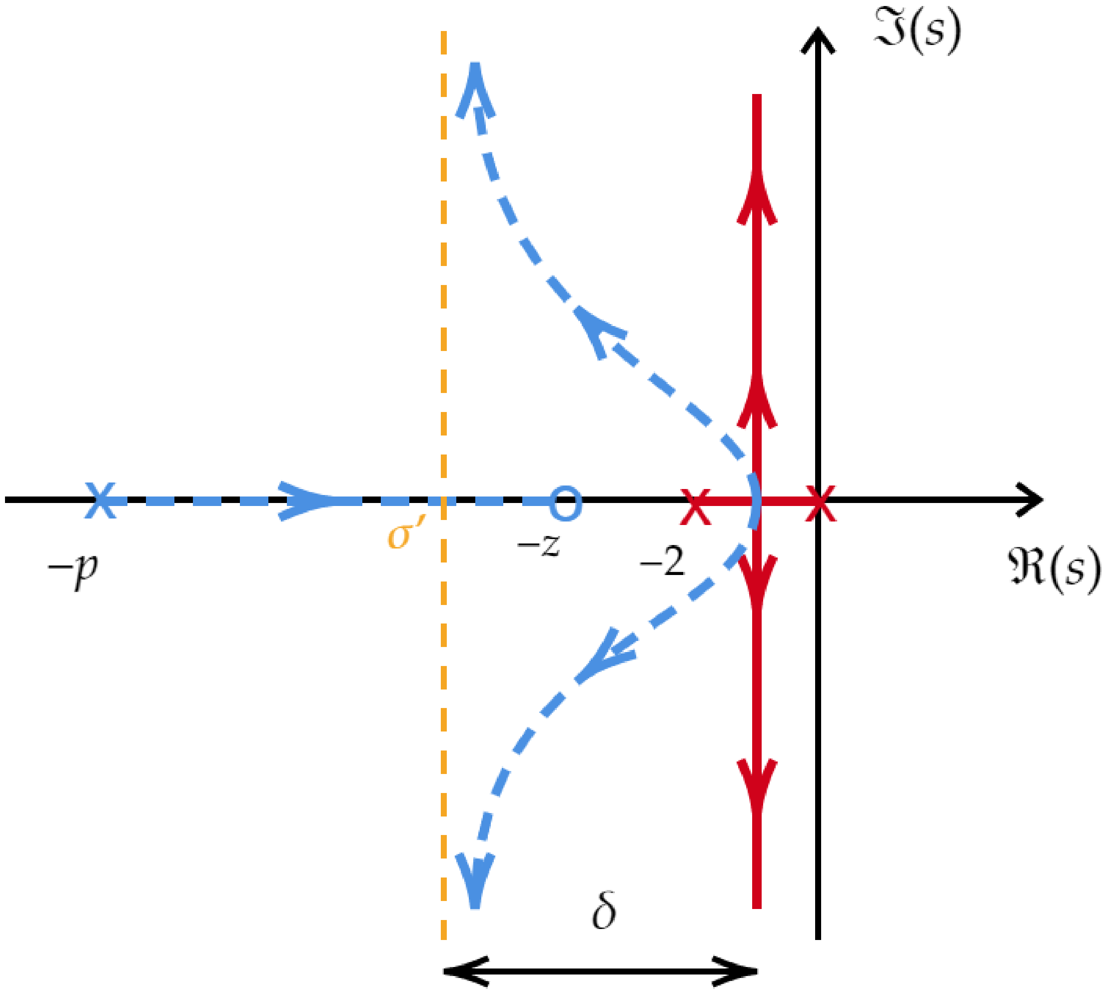


Exemplo

Projete um compensador que assegure tempo de estabilização de 1s e um máximo sobressinal de, no máximo, 15% ao sistema de controle ao lado para

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

Terceiro Projeto: Avanço via assíntotas



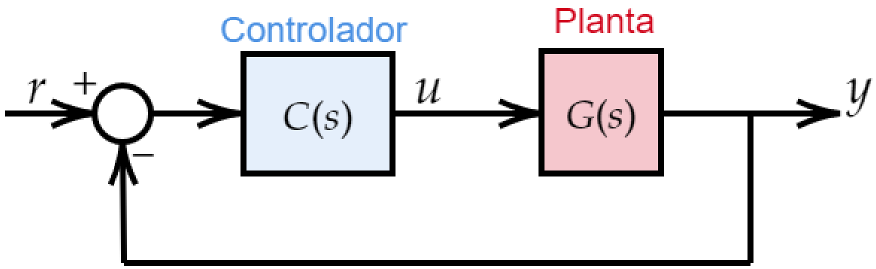
3º Passo: dado o **objetivo (2)** de projeto, use a fórmula da abscissa das assíntotas para determinar o **deslocamento** necessário. Veja ao lado.

Defina o deslocamento das assíntotas: $\delta = \frac{p-z}{n-m}$

Da fórmula das assíntotas:

$$\sigma' = -1 - \delta = -6 \Rightarrow \delta = 5.$$

Projeto via Lugar das Raízes



Exemplo

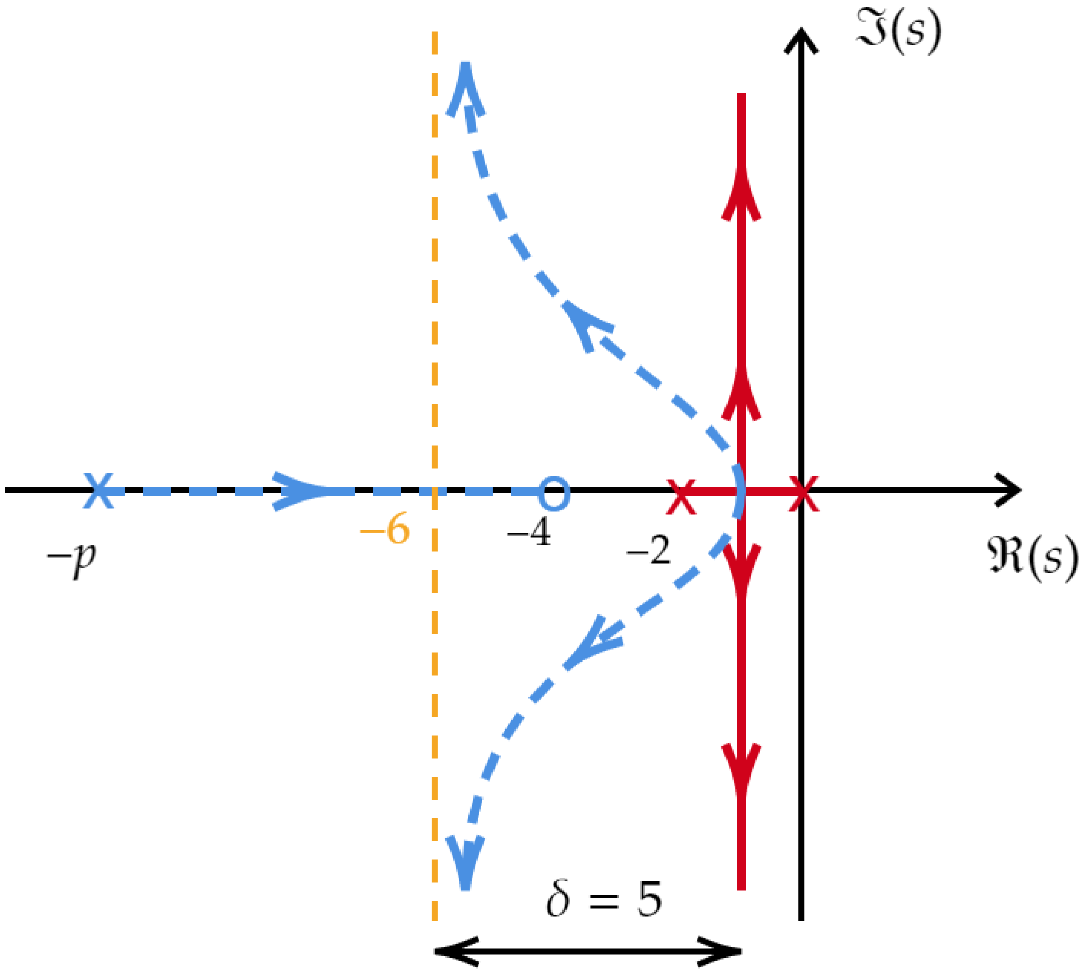
Projete um compensador que assegure tempo de estabilização de 1s e um máximo sobressinal de, no máximo, 15% ao sistema de controle ao lado para

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

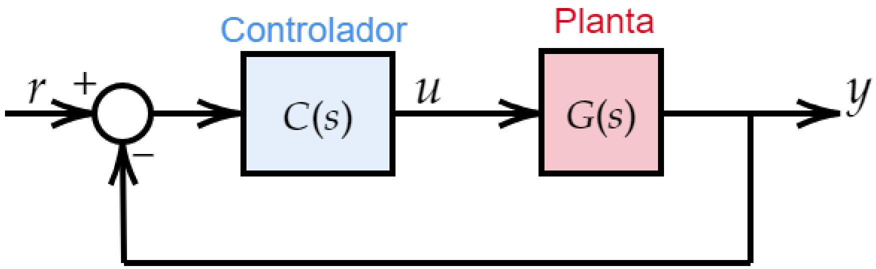
Terceiro Projeto: Avanço via assíntotas

4º Passo: escolha uma posição conveniente para o zero e, com o **deslocamento da assíntota**, determine o polo.
Vamos novamente tomar $z = 4$, o que implica que

$$\delta = \frac{p-z}{2} = 5 \Rightarrow p = 14.$$



Projeto via Lugar das Raízes



Exemplo

Projete um compensador que assegure tempo de estabilização de 1s e um máximo sobressinal de, no máximo, 15% ao sistema de controle ao lado para

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

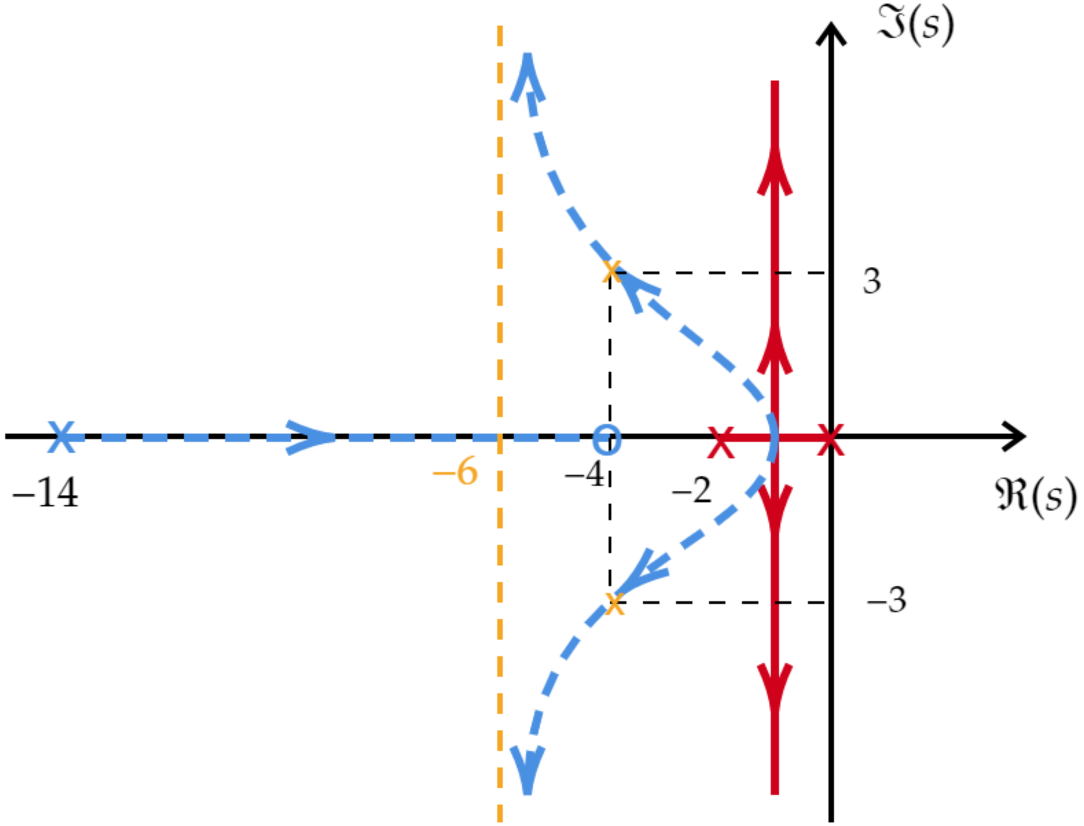
Terceiro Projeto: Avanço via assíntotas

5º Passo: refinar o esboço, incluindo todas as regras, escolher uma posição para os polos de malha fechada e usar a condição de módulo para determinar o ganho do Avanço.

Posição escolhida: polos com parte real -4. No esboço: $-4 \pm 3i$

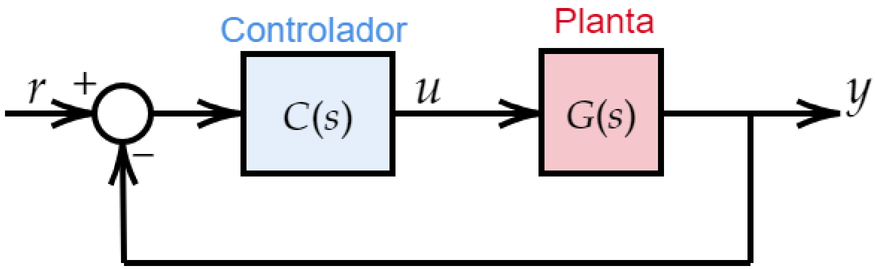
Pela condição de módulo:

$$k = \frac{\sqrt{13} \times 5 \times \sqrt{130}}{4} \approx 50$$



Obs: neste tipo de projeto, imprecisões no esboço levam a erros. Para a implementação final, o ganho teve de ser reajustado para $k = 75$.

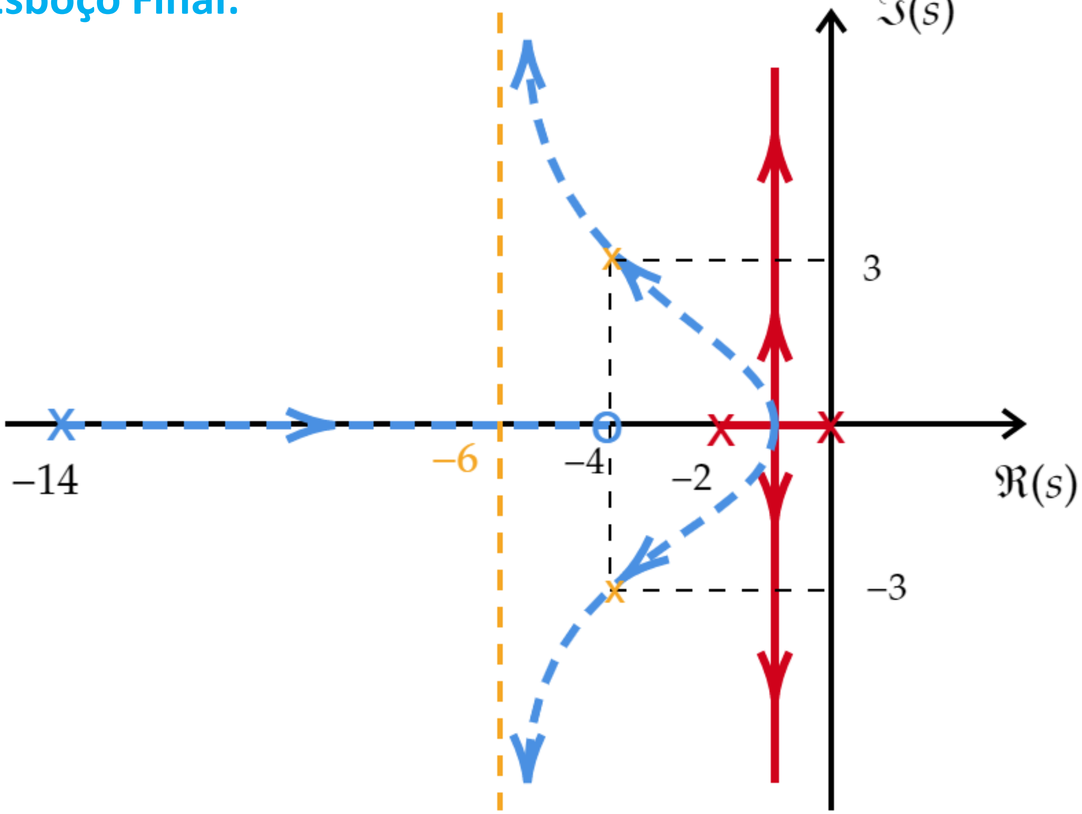
Projeto via Lugar das Raízes



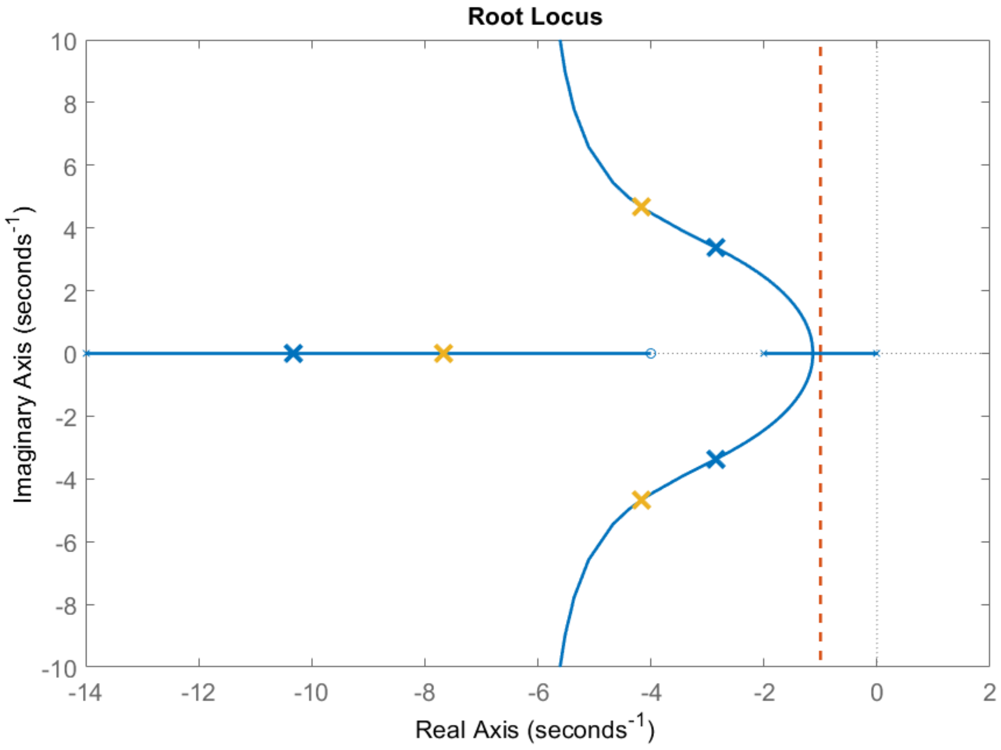
Exemplo

Terceiro Projeto: Avanço via assíntotas

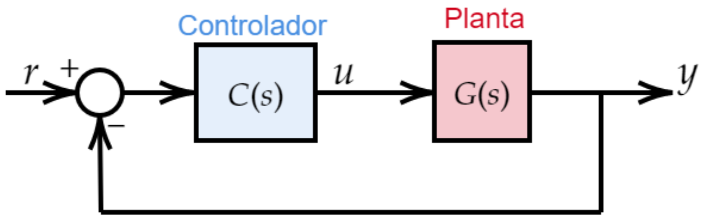
Esboço Final:



Matlab: lugar das raízes de $1 + k\left(\frac{s+4}{s+14}\right)G(s) = 0$



Projeto via Lugar das Raízes



Adequação da Resposta em Regime: Comp. Atraso

- **Controladores PI** e **compensadores do tipo atraso** **melhoram a resposta em regime permanente** do sistema em malha fechada. Lembre que um compensador da forma

$$\boxed{D(s) = k\frac{s+z}{s+p}}$$

é do tipo atraso se $z > p$. Note que, se $p = 0$, temos um controlador PI.

- Nesta seção, vamos supor que um compensador avanço/PD/proporcional já foi projetado e que o sistema em malha fechada **verifica os critérios sobre a resposta transitória**, mas que a sua **resposta em regime é insatisfatória**. Isto quer dizer que as constantes de erro do sistema $(K_p, K_v, \ldots)$ estão aquém do desejado.

- Suponha que o sistema de controle seja do tipo N e que K_N seja a constante de erro de interesse antes do projeto do compensador atraso. Se utilizarmos um compensador atraso da forma

$$\boxed{C_{\text{lag}}(s) = \frac{s+z'}{s+p'}}$$

então a constante de erro obtida por $C(s) = C_{\text{lag}}(s)C_{\text{lead}}(s)$ é dada por

$$K_N' = \lim_{s\to 0} s^N C(s)G(s) = \frac{z'}{p'}K_N.$$

Como $z' > p'$, a adição de um compensador do tipo atraso **diminui erros em regime permanente** para entradas padronizadas, pois aumenta a constante de erro de um fator $\beta = \frac{z'}{p'} > 1$.

Projeto via Lugar das Raízes

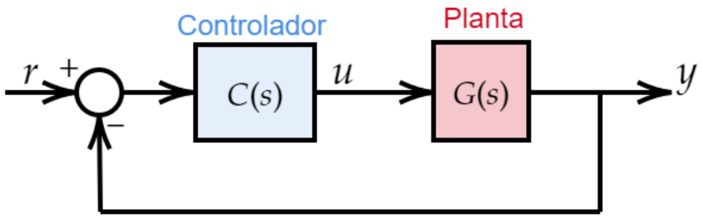
Adequação da Resposta em Regime: Comp. Atraso

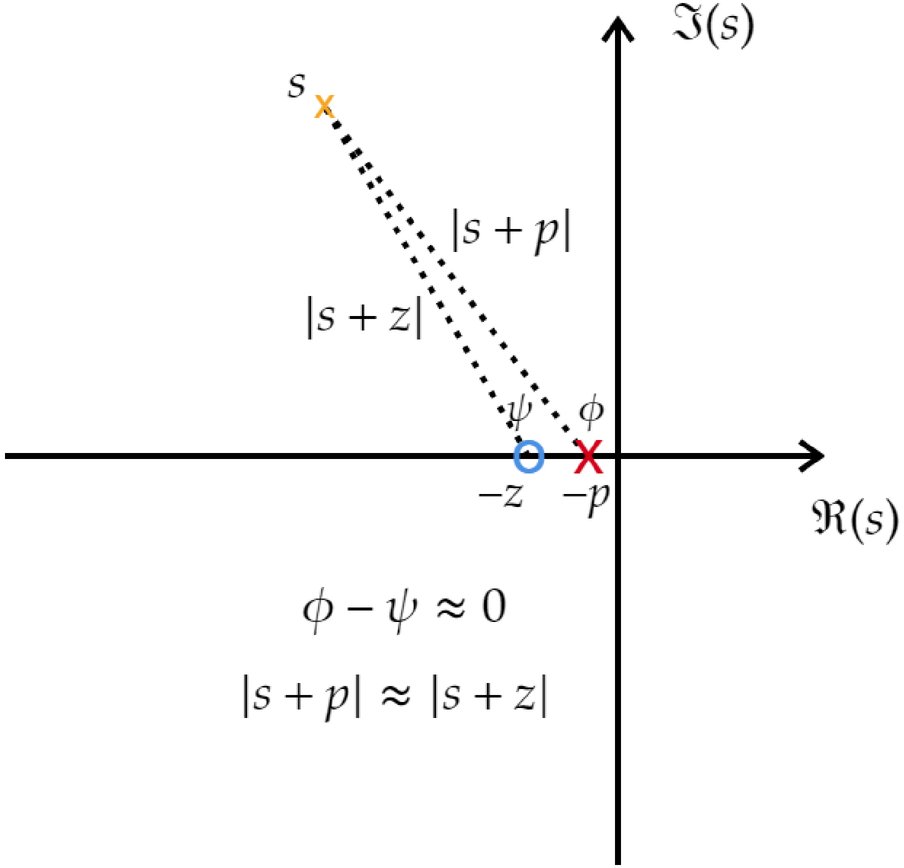
- A questão fundamental neste ponto é a seguinte: como adicionar o compensador atraso em cascata **sem prejudicar** todo o projeto já desenvolvido?
- **Ideia:** se z' e p' forem aproximadamente iguais, então

$$C_{\text{lag}}(s) = \frac{s + z'}{s + p'} \approx 1$$

e, neste caso, o **lugar das raízes permanece praticamente inalterado** pois o polo e o zero de C_{lag} não alteram nem a condição de módulo nem a de ângulo.

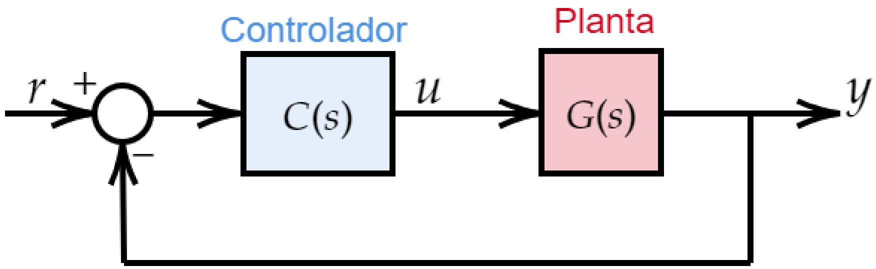
- **Problema:** se o ganho sobre a constante de erro é justamente $\beta = z'/p'$, o projeto pode exigir que β seja grande. Como podemos ter $z' \approx p'$ e $\frac{z'}{p'} \gg 1$?
- **Solução:** tomamos z' e p' **próximos da origem**.





Obs: a adição de polos e zeros próximos à origem podem trazer uma resposta mais lenta do que o esperado. Validação é **essencial** neste projeto!

Projeto via Lugar das Raízes



Exemplo

Projete um compensador que assegure tempo de estabilização de 1s e um máximo sobressinal de, no máximo, 15% ao sistema de controle ao lado para

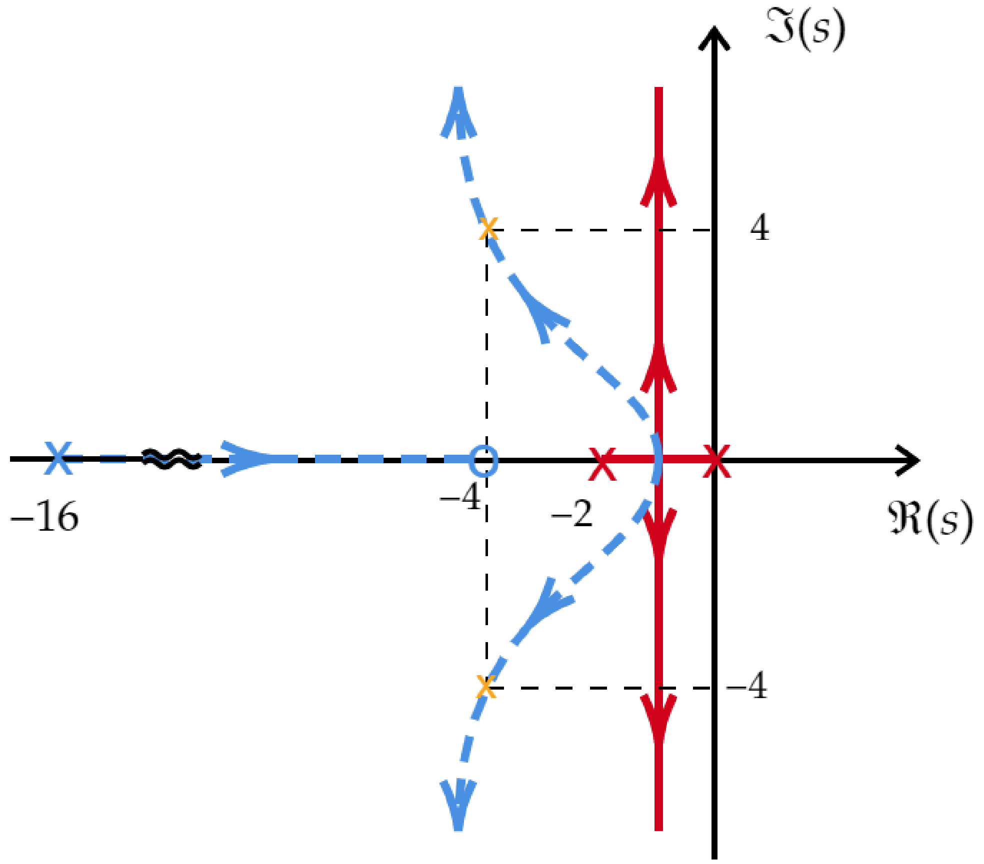
$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

Além disso, o seu controlador deve assegurar um erro em regime de 2% para uma entrada rampa.

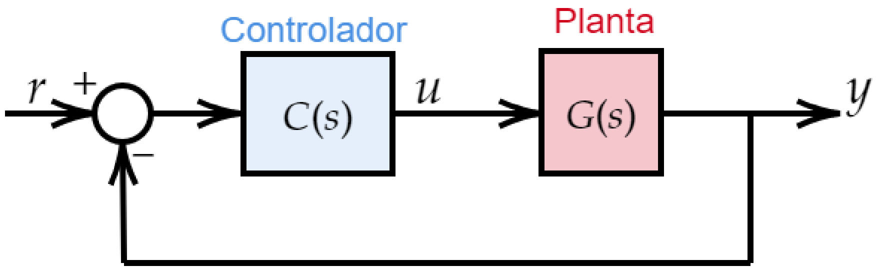
Projeto anterior: aproveitaremos o compensador avanço apresentado como segunda solução do exemplo anterior:

$$C_{\text{lead}}(s) = 80\frac{s+4}{s+16}.$$

Assim, $K_v = C_{\text{lead}}(0)\lim_{s\to 0} sG(s) = 10$. O projeto não satisfaz os critérios sobre a resposta em regime.



Projeto via Lugar das Raízes

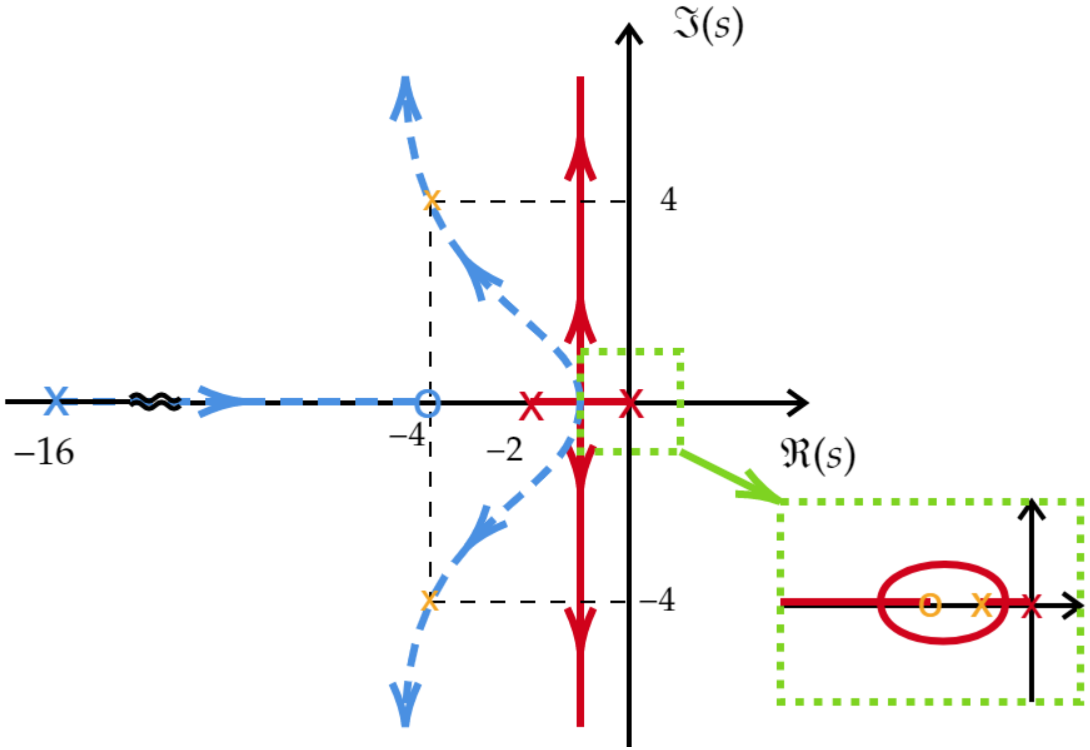


Exemplo

Projete um compensador que assegure tempo de estabilização de 1s e um máximo sobressinal de, no máximo, 15% ao sistema de controle ao lado para

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

Além disso, o seu controlador deve assegurar um erro em regime de 2% para uma entrada rampa.



1º Passo: determinar o ganho β necessário para a constante de erro. Como desejamos $K_v' = 50$, temos que

$$K_v' = \beta K_v \Rightarrow \beta = 5.$$

2º Passo: escolha p' próximo da origem e tome $z' = \beta p'$. Tomando $p' = 0.01$, temos $z' = 0.05$.

Fim de Projeto: o compensador atraso-avanço final é

$$C(s) = C_{\text{lag}}(s) C_{\text{lead}}(s) = 80\,\frac{s+0.05}{s+0.01} \cdot \frac{s+4}{s+16}$$