Tarefa 17

1 $n \in \mathbb{N}$, $0+1+2+\dots+n = n(n+1)/2$

$\boxed{\text{BASE}}$ $P(0)$

$n=0$, $0 = \frac{0(0+1)}{2} \Rightarrow 0=0$ ✓

$\boxed{\text{PASSO}}$ $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$0+1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 0+1+2+3+\dots+n+(n+1) = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{2(n+1)+n(n+1)}{2} = \frac{2n+2+n^2+n}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} =$

$= \frac{(\underbrace{n+1}_{k})(\underbrace{n+1+1}_{k+1})}{2} \Rightarrow \frac{k(k+1)}{2}$ ✓

2 $n \in \mathbb{N}$, $0^2+1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\boxed{\text{BASE}}$ $P(0)$

$n=0$, $\frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6} \Rightarrow 0=0$ ✓

$\boxed{\text{PASSO}}$ $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$0^2+1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Rightarrow 0^2+1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2 =$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{6(n+1)^2+n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= (n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right) = (n+1)\left(\frac{(n+2)(2n+3)}{6}\right)$

$= \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$ ✓

$P(n) \rightarrow P(n+1)$ ✓

(10) $n \in \mathbb{N},\ 64 \mid (9^n - 8n - 1) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\ (64k = 9^n - 8n - 1)$

$\boxed{\text{BASE}}$ $P(0)$

$3.0 = 9^0 - 8.0 - 1 = 0$ ✓

$\boxed{\text{PASSO}}$ $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$64k = 9^n - 8n - 1 \rightarrow 9^n = 64k + 8n + 1$

$9^{(n+1)} - 8(n+1) - 1 = 9^n\, 9^1 - 8n - 8 - 1 = 9^n . 9^1 - 8n - 9$

$(64k + 8n + \cancel{1})\, 9 - 8n - \cancel{9} = 9.64k + 9.8n - 8n$

$= 9.64k + 8n(9-1) = 9\,64k + 64n = 64(9k + n)$

$\Rightarrow$ arbitrário inteiro a, $a = 9k + n \Rightarrow 64a$

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ✓

(11) $n \in \mathbb{N},\ 9 \mid (4^n + 6n - 1) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\ (9k = 4^n + 6n - 1)$

$\boxed{\text{BASE}}$ $P(0)$

$9.0 = 4^0 + 6.0 - 1 \Rightarrow 0 = 0$ ✓

$\boxed{\text{PASSO}}$ $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$9k = 4^n + 6n - 1 \rightarrow 4^n = 9k - 6n + 1$

$4^{(n+1)} + 6(n+1) - 1 = 4^n . 4 + 6n + 6 - 1 = 4^n . 4 + 6n + 5$

$4(9k - 6n + 1) + 6n + 5 = 4.9k - 4.6n + 4.1 + 6n + 5$

$= 4.9k + 3.6n + 9 = 9(4k - 2n + 1) \Rightarrow$ arbitrário inteiro a,

$a = 4k - 2n + 1$ inteiro

$P(n) \rightarrow P(m+1)$

17

(a) $\boxed{\text{BASE}}$ $n \in \mathbb{N}$, $1 \cdot 3^0 + 3 \cdot 3^1 + 5 \cdot 3^2 + \dots + (2n+1)3^n = n3^{n+1}$

$\hookrightarrow$ $0 + (2 \cdot 0 + 1)3^0 = 0 \cdot 3^{0+1}$ $\Rightarrow$ $1 \neq 0$

Caso base não é verdade

(b) Como sobra 1 no caso base, vamos adicionar 1 à fórmula

$n \in \mathbb{N}$, $1 \cdot 3^0 + 3 \cdot 3^1 + 5 \cdot 3^2 + (2n+1)3^n = n3^{n+1} + 1$

$\boxed{\text{BASE}}$ $P(0)$

$1 \cdot 3^0 + (2 \cdot 0 + 1)3^0 = 0 \cdot 3^{0+1} + 1$ $\quad 1 = 1$ ✓

$\boxed{\text{PASSO}}$ $P(n) \rightarrow P(n+1)$ $\qquad$ ✓ AQUI

$1 \cdot 3^0 + 3 \cdot 3^1 + 5 \cdot 3^2 + \dots + \boxed{(2n+1)3^n} + (2(n+1)+1)3^{n+1} = \boxed{n3^{n+1} + 1} +$

$(2(n+1)+1)3^{n+1}$

$= n3^{n+1} + 1 + (2n+2+1)3^{n+1} = n3^{n+1} + 1 + (2n+3)3^{n+1}$

$= 3^{n+1}((2n+3)+n) + 1 = 3^{n+1}(3n+3) + 1 = 3^{n+1+1}(n+1) + 1$

$P(n) \rightarrow P(n+1)$ ✓

18 $a \in \mathbb{R}$ e $a < 0$

$a^{\text{PAR}} > 0$, $a^{\text{ÍMPAR}} < 0$

$\boxed{\text{BASE}}$ $P(0)$ $\qquad a^0 = 1 > 0$ ✓

$\boxed{\text{PASSO}}$ $P(n) \rightarrow P(n+1)$

Caso 1: par $\qquad a^n > 0 \Rightarrow$ verdade $\qquad a^{n+1} = a^n a$

$a < 0$ e $a^n > 0$, portanto (negativo) × (positivo) = (negativo),

logo $a^n a < 0$. Como n é par, $n+1$ é ímpar. Então $P(n+1)$

é verdade para n par

Caso ímpar: $a^n < 0$ é verdade

a^{m+1} = , logo $a^m \cdot a < 0$. Como m é ímpar, $a^m < 0$ e $a < 0$. Como (negativo)·(negativo) = (positivo), $a^m \cdot a > 0$.

Como m é ímpar, m+1 é par. P(m+1) é verdade, já $a^n > 0$ para n par.