UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

EA722: LABORATÓRIO DE PRINCÍPIOS DE CONTROLE E SERVOMECANISMOS

Relatório do Experimento 01: Modelos Dinâmicos e Identificação

Henrique Roberto da Cunha Júnior 174638

Leonardo Rodrigues Marques 178610

William Quintas de Melo 188684

Campinas, SP
2S/2020

Problemas

Problema 1

Item A

A função de transferência é:

$$G_{F\to x}(s) = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \tag{1}$$

O sistema de segunda ordem tem o seguinte formato:

$$G_P(s) = A\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\epsilon\omega_n s + \omega_n^2} \tag{2}$$

Ao multiplicar a função de transferência por K, temos:

$$G_{F\to x}(s) = \frac{1}{K}\frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \tag{3}$$

Comparando as equações $G_{F\to x}(s)$ e $G_p(s)$:

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= \frac{k}{m} \\ A &= \frac{1}{K} \\ \epsilon_n = \frac{b}{2\omega_n m} &= 2\epsilon\sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned} \tag{4}$$

Também temos:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\epsilon^2} \to \omega_d = \sqrt{\frac{(4km - b^2)}{4m^2}} \tag{5}$$

Item B

A partir das fórmulas abaixo, retiradas do livro do Franklin, é possível analisar o comportamento das propriedades à medida que os valores de k, b e m são variados.

$$\textbf{Tempo de Pico} = \frac{\pi}{w_d} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{(4km-b^2)}{4m^2}}} \tag{6}$$

$$\textbf{Valor de Pico} = M_p(t_p) = \exp\left(\frac{-\pi\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\right) \tag{7}$$

$$\textbf{Tempo de Estabilização} = \frac{4}{\epsilon\omega_n} = \frac{2m}{b} \tag{8}$$

$$\textbf{Valor final} = \frac{1}{k} \tag{9}$$

	$\uparrow k$	$\uparrow$ b	$\uparrow m$
Valor final	$\downarrow$	-	-
Tempo de Estabilidade	-	$\downarrow$	$\uparrow$
Valor de Pico	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$
Tempo de Pico	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$

Tabela 1: Análise do sistema baseado em fórmulas.

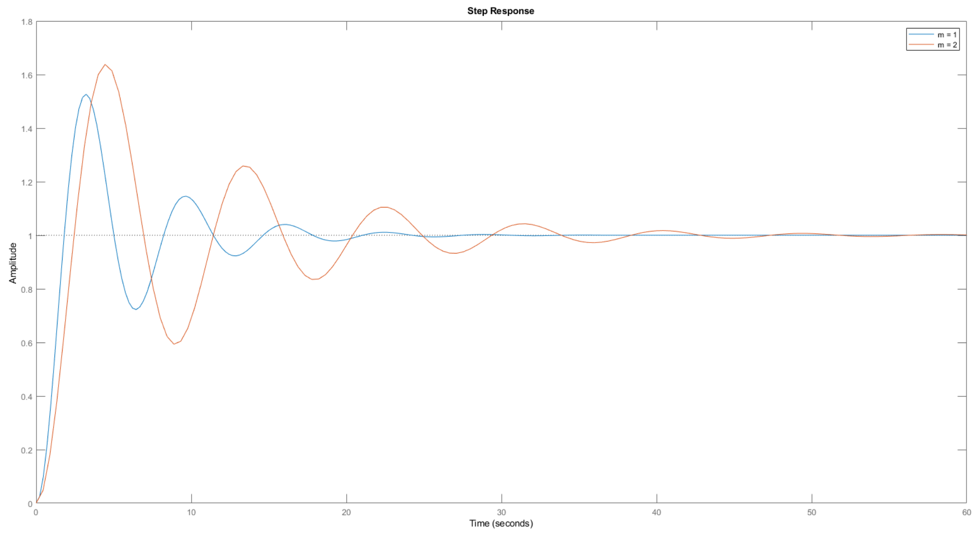

Figura 1: Gráfico para m = 1 e m = 2.

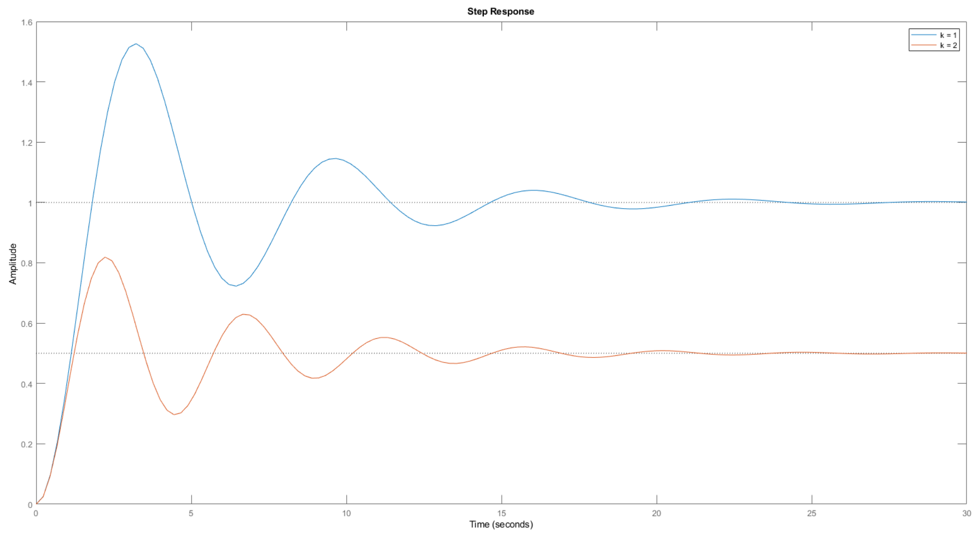

Figura 2: Gráfico para k = 1 e k = 2.

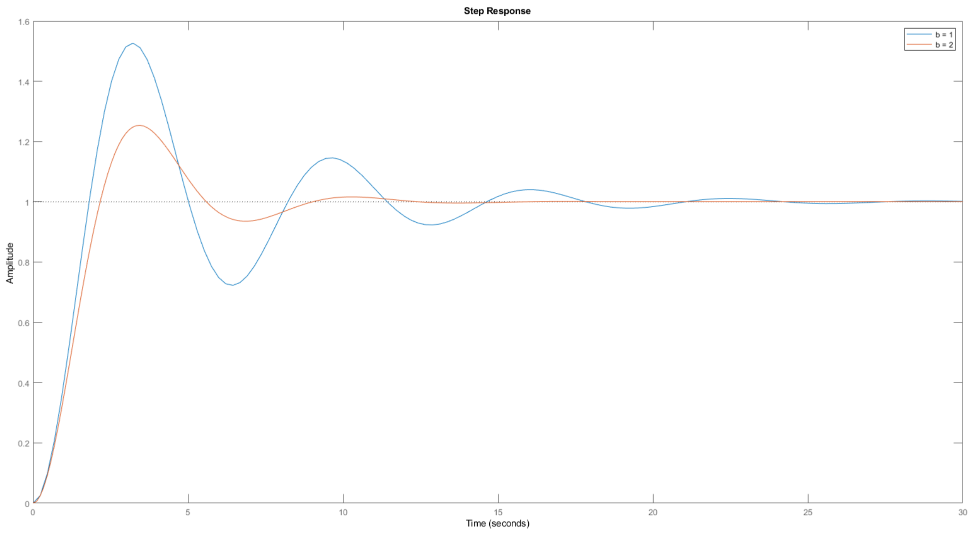

Figura 3: Gráfico para b = 0.4 e b = 0.8.

Com base nos resultados dos gráficos obtivemos a Tabela 2. Com isso, confirmamos o resultado das análises teóricas (Tabela 1).

	$\uparrow k$	$\uparrow$ b	$\uparrow m$
Valor final	$\downarrow$	-	-
Tempo de Estabilidade	-	$\downarrow$	$\uparrow$
Valor de Pico	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$
Tempo de Pico	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$

Tabela 2: Análise do sistema baseado em simulação.

Item C

$$1 = \frac{1}{k} \rightarrow k = 1 \tag{10}$$

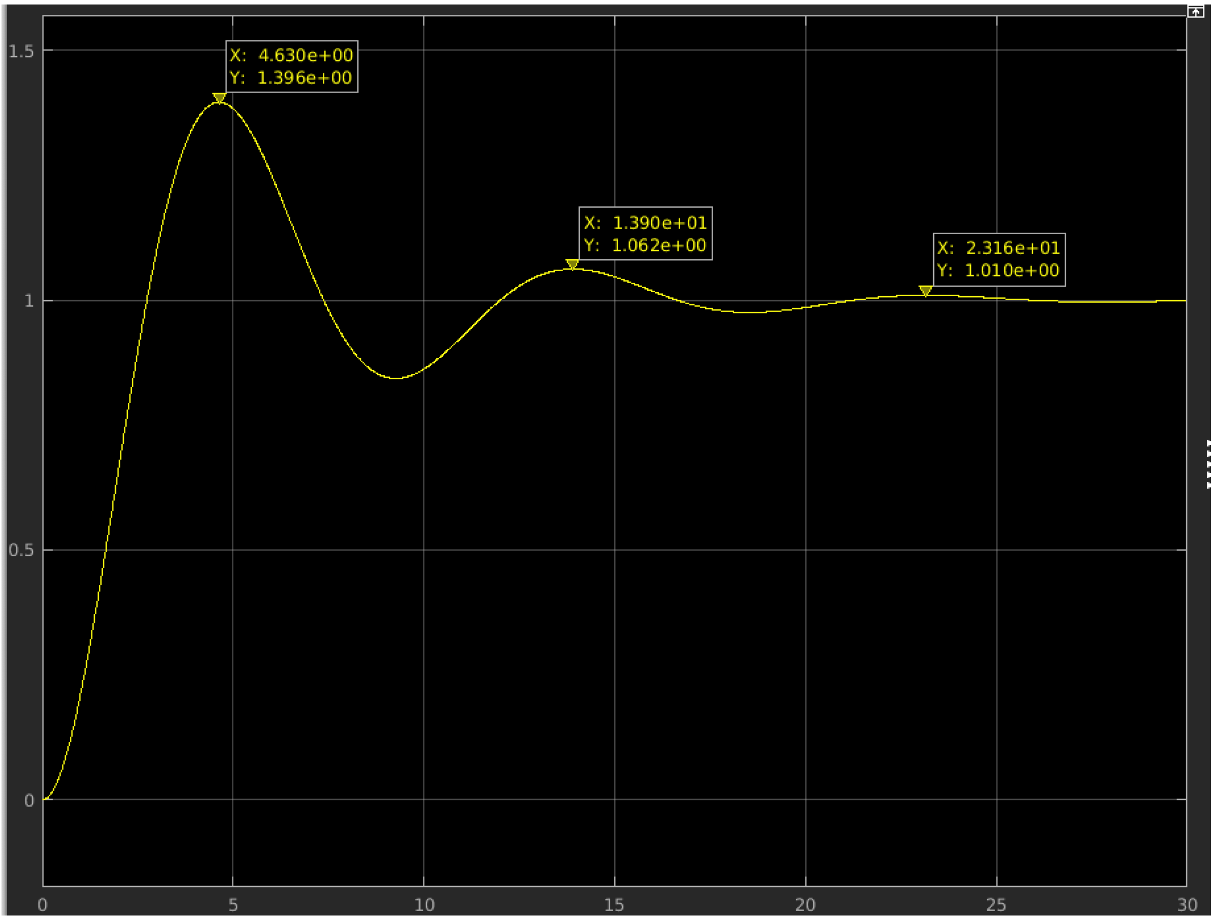

Figura 4: Gráfico da resposta ao degrau da planta.

Além do valor de estabilização, podemos retirar duas informações importantes do gráfico: valor de pico e tempo de pico. Substituindo nas fórmulas **5**, **6** e **7**, obtemos as frequências e ϵ :

$$0,396 = \exp\left(\frac{-\pi\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\right) \rightarrow \epsilon = 0,283\ rad/s \tag{11}$$

$$4,630 = \frac{\pi}{w_d} \rightarrow \omega_d = 0,679\ rad/s \tag{12}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\epsilon^2} \rightarrow w_n = 0,708 rad/s \tag{13}$$

Em mão dessas propriedades, podemos encontrar os valores das constantes b e m:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \rightarrow m = 1,995\ kg \tag{14}$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{(4km - b^2)}{4m^2}} \rightarrow b = 0,800\ \frac{kg \cdot m}{s} \tag{15}$$

Item D

Dada a equação diferencial do sistema massa-mola, as equações de diferenças finitas e a forma padrão desejada:

$$m\ddot{y}(t_k) + b\dot{y}(t_k) + ky(t_k) = f(t_k) \tag{16}$$

$$\dot{y}(t_k) \approx \frac{y(t_{k+1}) - y(t_{k-1})}{2h} \qquad \ddot{y}(t_k) = \frac{y(t_{k+1}) - 2y(t_k) + y(t_{k-1})}{h^2} \tag{17}$$

$$y[k+2] + ay[k+1] + by[k] = cf[k] \tag{18}$$

Substituindo (17) em (16) e ajustando $k = u + 1$, temos:

$$y(t_{u+2}) + \left(\frac{2h^2k - 4m}{2m + hb}\right) y(t_{u+1}) + \left(\frac{2m - hb}{2m + hb}\right) y(t_u) = \left(\frac{2h^2}{2m + hb}\right) f(t_{u+1}) \tag{19}$$

Como a força é constante, $f(t_u) = f(t_{u+1})$, rescrevendo a equação na forma padrão desejada, temos a relação entre os termos A, B, C, m, k, b e h:

$$y[k+2] + \left(\frac{2h^2k - 4m}{2m + hb}\right) y[k+1] + \left(\frac{2m - hb}{2m + hb}\right) y[k] = \left(\frac{2h^2}{2m + hb}\right) f[k] \tag{20}$$

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2h^2k - 4m}{2m + hb}\right) \\ B &= \left(\frac{2m - hb}{2m + hb}\right) \\ C &= \left(\frac{2h^2}{2m + hb}\right) \end{aligned} \tag{21}$$

Item E

Usando a equação (20) resultante do item anterior e as relações (21) podemos reorganizar:

$$Cf[k] - Ay[k+1] - By[k] = y[k+2] \tag{22}$$

Depois de realizado um ensaio de 30 segundos no Simulink e tomadas 100 amostras de entradas e saídas (h = 0,3 segundos) (garantindo que metade delas estivessem com comportamento transitório e a outra metade no comportamento de regime permanente), obteve-se os valores para as constantes A, B e C:

$$\begin{aligned} A &= -1,8447 \\ B &= 0,8869 \\ C &= 0,0422 \end{aligned} \tag{23}$$

Igualando os sistemas de equações (21) e (23), obtemos os valores de m, k e b:

$$\begin{aligned} m &= 2,0121\ kg \\ k &= 1 \\ b &= 0,8040\ \frac{kg \cdot m}{s} \end{aligned} \tag{24}$$

Comparando com os valores obtidos por inspeção, nota-se que k é idêntico, b é 0,05% maior e m é 0,09% maior. Como essas diferenças são muito pequenas pode se assumir que o procedimento por quadrados mínimos usando a equação de diferenças finitas nos fornece resultados confiáveis do sistema massa-mola e muito próximos dos obtidos por inspeção.

Problema 2

Item A

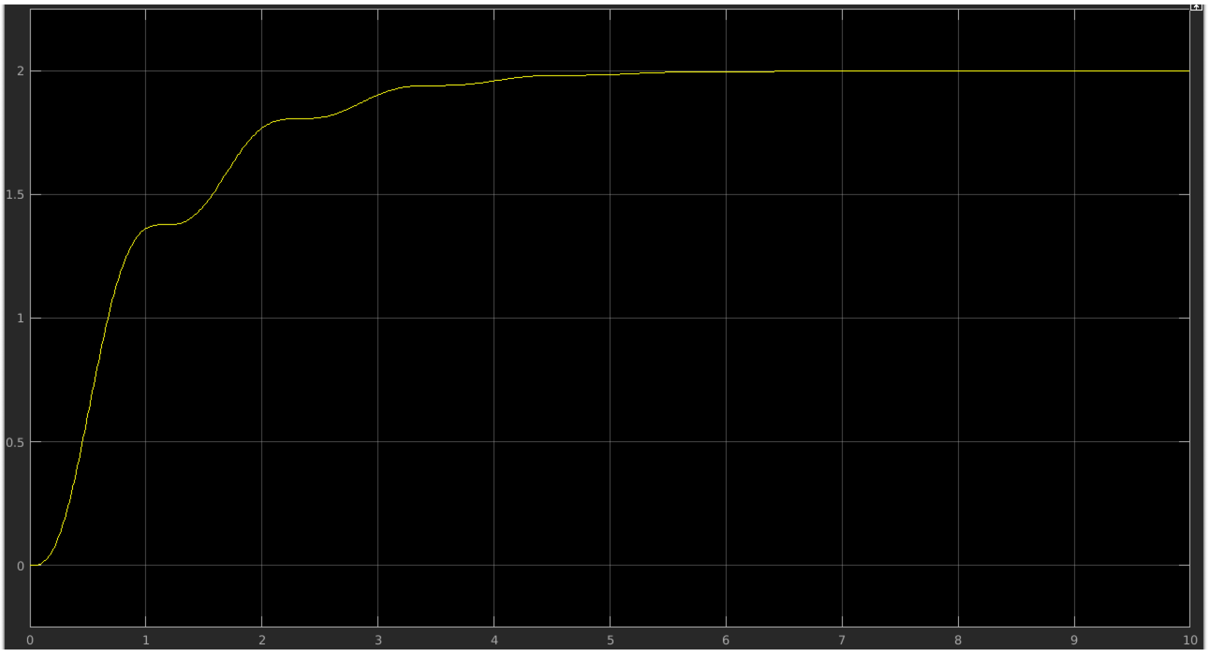

Figura 5: Gráfico da resposta ao degrau do sistema.

O valor de A é dado pelo valor para o qual y converge em regime permanente. Já o valor da constante de tempo τ pode ser obtida a partir do tempo de estabilização. Se o erro (A - y(t)) for de 2% o tempo de estabilização é dado por:

$$t_{\epsilon=2\%} = 4\tau \tag{25}$$

Observando o gráfico, extrai-se:

$$A = 2 t_{\epsilon=2\%} = 4,019\ s \rightarrow \tau = 1,005\ s \tag{26}$$

Então a aproximação pedida fica na forma:

$$G_{ap} = \frac{2}{1,005s + 1} \tag{27}$$

Item B

Partimos a partir da equação diferencial dada e da aproximação para a derivada:

$$\tau\dot{y}(t_k) + y(t_k) = Au(t_k) \tag{28}$$

$$\dot{y}(t_k) \approx \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{h} \tag{29}$$

Pode-se então obter a equação de diferenças finitas:

$$(\frac{\tau}{h} + 1)y[k] - \frac{\tau}{h}y[k-1] = Au[k] \tag{30}$$

Reorganizando da seguinte forma, podemos utilizar o procedimento de mínimos quadrados:

$$\frac{Ah}{\tau + h}u[k] + \frac{\tau}{\tau + h}y[k-1] = y[k] \tag{31}$$

Da forma como solicitada no enunciado, foram utilizadas 100 amostras igualmente espaçadas (h = 0,1s). Obtém-se a partir desse procedimento os seguintes valores:

$$\begin{aligned} A &= 2,0275 \\ \tau &= 1,1484\ s \end{aligned} \tag{32}$$

Então a aproximação pedida fica na forma:

$$G_{ap} = \frac{2,0275}{1,1484s + 1} \tag{33}$$

Item C

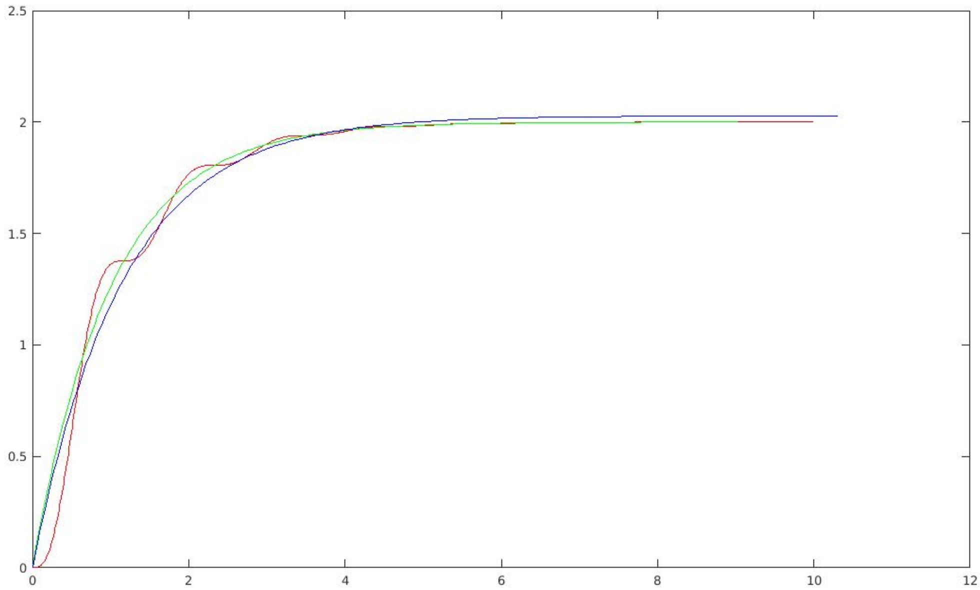

Figura 6: Gráfico com as respostas ao degrau do sistema (em vermelho) e das aproximações (do item A em verde e do item B em azul)

Pela figura 6 se mostra que as aproximações se comportam bem graficamente comparadas ao sistema. Todos os valores em regime permanente são muito próximos e durante o comportamento transitório também são graficamente similares, com erros muito pequenos. Isso nos dá uma segurança e confiabilidade em utilizá-las.

Caso o polo mais lento não for suficientemente dominante, os outros pólos passam a influenciar muito na resposta do sistema ao degrau e as aproximações deixam de ser confiáveis e seguras.