MC358 — **Fundamentos Matemáticos para a Computação**

INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO — UNICAMP

1º SEMESTRE DE 2020

UNICAMP

Segunda Prova em tempos de COVID-19 **Agosto/2020**

Nome Leonardo Rodrigues Marques RA 178610

Questão	1	2	3	4	5	Total
Valor	120	110	150	200	120	700
Nota						

INSTRUÇÕES

1. A prova será disponibilizada na sexta-feira dia 14/08, às 19h, com prazo de 24h. **Não deixe para enviar na última hora para não ter problema de conexão.**
2. Sobre o arquivo que deverá conter a sua solução da prova:
   - Deve ser um único arquivo em formato PDF;
   - Se o seu RA é 123456, deve ser nomeado como **RA123456.pdf**;
   - As questões da prova devem aparecer com a numeração claramente indicada e em ordem crescente;
   - Se uma questão for deixada em branco e o arquivo sendo enviado não é o original da prova, você deve escrever na sua solucão *Questão X: em branco.*
3. Sobre a sua solução:
   - Você está autorizada(o) a consultar o livro, as notas de aula que disponibilizei e os seus exercícios (**apenas aqueles que você mesmo resolveu**).
   - **Não estão autorizadas**: a consulta a soluções e/ou materiais disponíveis na Internet; conversas com qualquer outra pessoa sobre conteúdo, direta ou indiretamente, relacionado com a prova, durante as 24h de disponibilidade da prova.
     - A detecção de qualquer tentativa de fraude acarreta em nota zero na disciplina e leva a sanções previstas no regimento da UNICAMP.
   - A prova deve ser organizada e a solução deve ter nexo. Interpretação do enunciado e da estrutura da solução também é parte da avaliação.
   - A prova deve ser feita à mão, com caneta preta ou lápis pelo menos 2B.
4. A página seguinte contém o **Compromisso de honra**, que você deve assinar e entregar junto com a prova. O preenchimento **é** obrigatório. Provas sem este compromisso preenchido integralmente não serão corrigidas.

Compromisso de honra[1]

Como estudante da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), eu Leonardo Rodrigues Marques, RA 178610 prometo contribuir ativamente para uma comunidade de confiança, auxiliando a universidade a atingir os seus fins, expressos no Título I de seu Regimento Geral. Entendo que a honra é um modo de vida na UNICAMP e que minhas ações impactam a vida de outras pessoas.

Além disso, como estudante matriculado na disciplina MC358 no primeiro semestre de 2020, prometo manter os mais altos padrões de honestidade e integridade nas atividades desta disciplina.

Em particular, declaro, por minha honra, que não dei nem recebi ajuda não autorizada para resolver esta prova.

Leonardo Rodrigues Marques.

Assinatura

[1]Baseado em versões disponíveis em algumas universidades do exterior.

1. **(120 pontos)** Seja A um conjunto e $f : A \longrightarrow A$, tal que $f(f(x)) = x$ para todo $x \in A$. Considere a relação R, em A, definida da seguinte forma:

$$R = \{(x, y) \in A : y = x \text{ ou } y = f(x)\}.$$

Mostre que R é uma relação de equivalência, provando que R é reflexiva, simétrica e transitiva.

→ Reflexiva : xRx

Suponha $x \in A$ com x arbitrário. Considere a relação R em A e como $x = x$, então vale a relação xRx em A, o que prova a reflexividade.

→ Simetria : $\forall x \in A \, \forall y \in A (xRy \to yRx)$.

Suponha $(x, y) \in A \times A$ com x, y arbitrários. Considere uma relação xRy em A. No primeiro caso, como $y = x$, vale então a relação yRx. No segundo caso, $y = f(x)$ e sabendo que $x = f(f(x))$, $f(y) = f(f(x))$, portanto $f(y) = x$, o que valida a relação yRx. Enfim, a partir desses casos, é possível afirmar que é simétrica

→ Transitividade : $\forall x \in A \, \forall y \in A \, \forall z \in A (xRy \land yRz \to xRz)$.

Suponha $(x, y) \in A \times A$ e $(y, z) \in A \times A$. Seja R, uma relação em A e y, x, z arbitrários. No primeiro caso, $x = y$ (xRy) e $y = z$ (yRz). Portanto pela transitividade, $x = z$ e conclui-se que xRz
No segundo caso, considere que $f(x) = y$ (xRy) e $y = z$ (yRz), portanto pela suposição, $f(x) = z$, que é uma relação xRz.
No terceiro caso, $x = y$ (xRy) e $z = f(y)$ (yRz) e portanto pela suposição $z = f(x)$ e conclui-se que xRz.
No quarto caso, considere $y = f(x)$ (xRy) e $z = f(y)$ (yRx). Como $f(f(x)) = x$ e considerando $y = f(x)$, portanto $f(y) = ff(x))$. ~~Como~~ ⇒ $f(y) = x$. Como $z = f(y)$ e $f(y) = x$, $z = x$, então vale a relação xRz.

Dessa forma, os casos comprovam a transitividade da relação de equivalência

2. (*110* **pontos**) Faça o que se pede em cada um dos itens.

(i) Para cada uma das cinco funções abaixo, assinale a opção correta. Apenas para as negativas, exiba, no campo **Justificativa**, um certificado, sucinto e definitivo, do fato.

(a) $f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{a, b\}$ em que $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = a$.

É injetora? SIM ~~NÃO~~

Justificativa: $f(1) = f(3)$. elementos distintos no Dom
→ elementos distintos no Im.

É sobrejetora? ~~SIM~~ NÃO

Justificativa:

(b) $f : \{a, b, c, d, e\} \longrightarrow \{a, b, c, d, e\}$ em que $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = d$, $f(d) = e$, e $f(e) = a$.

É injetora? ~~SIM~~ NÃO

Justificativa:

É sobrejetora? ~~SIM~~ NÃO

Justificativa:

(c) $f : \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ em que $f(a, b) = a + b$.

É injetora? SIM ~~NÃO~~

Justificativa: $f(1,2) = f(2,1)$ elementos distintos no Dom
→ elementos distintos no Im.

É sobrejetora? ~~SIM~~ NÃO

Justificativa:

(d) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ em que $f(n) = n + 1$.

É injetora? SIM NÃO

Justificativa:

É sobrejetora? SIM NÃO

Justificativa: $f(n) = 0$, deve haver um elemento na Im para cada elemento no Dom.

(e) $f : \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\} \longrightarrow \{1,2,3\}$ em que $f(A) = |A|$.

É injetora? SIM NÃO

Justificativa:

É sobrejetora? SIM NÃO

Justificativa:

(ii) Determine as relações inversas das funções do item anterior e quais delas são funções. Para cada item, a primeira caixa deve conter a palavra FUNÇÃO se for função e RELAÇÃO, caso contrário. No caso em que não são funções, exiba um certificado, sucinto e definitivo, deste fato no espaço indicado.

(a) f^{-1} é relação

de $\{a, b\}$ em $\{1, 2, 3\}$

tal que

$f^{-1}(a) = 1$, $f^{-1}(b) = 2$, $f^{-1}(c) = 3$

Certificado.

Não pode haver um elemento do domínio relacionado com dois elementos da imagem. $f^{-1}(a) = 1$
$f^{-1}(a) = 3$

(b) f^{-1} é função

de {a, b, c, d, e} em {a, b, c, d, e}

tal que

$f^{-1}(b) = a$, $f^{-1}(c) = b$, $f^{-1}(d) = c$ $f^{-1}(e) = d$ $f^{-1}(a) = e$

Certificado.

(c) f^{-1} é relação

de {1, 2, 3, 4} em {(1,1) (1,2) (2,1) (2,2)}

tal que

$f^{-1}(2) = (1,1)$ $f^{-1}(3) = (2,1)$

$f^{-1}(3) = (1,2)$ $f^{-1}(4) = (2,2)$

Certificado.

não pode haver um elemento do domínio relacionado com dois elementos da imagem $f^{-1}(3) = \{(1,2), (2,1)\}$.

(d) f^{-1} é relação

de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$.

tal que

$f^{-1}(n) = n - 1$

Certificado.

Não é sobrejetora, portanto não é função

(e) f^{-1} é função

de {1, 2, 3, 4} em {{1}, {1, 2}, {1, 2, 3, 4}}

tal que

$f^{-1}(1) = \{1\}$ $f^{-1}(2) = \{1, 2\}$ $f^{-1}(3) = \{1, 2, 3\}$.

Certificado.

3. (*150* **pontos**) Considere a sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definida da seguinte forma:

$$a_n = \begin{cases} 3 & \text{se } n = 1; \\ 2a_{n-1} & \text{se } n \neq 1 \text{ e ímpar;} \\ 4a_{n-1} & \text{se } n \text{ par.} \end{cases}$$

A demonstração a seguir deveria ser uma prova, pelo método da **indução forte**, de que $a_n \leq 3^n$, para todo $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Preencha adequadamente os espaços em branco para que a demonstração fique completa. *Atenção:* para esta e próximas questões, nenhuma caixa deve ficar vazia, ser adicionada ou conter mais do que uma frase.

Demonstração.

Seja $\boxed{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$.

Suponha que $\boxed{a_m \leq 3^m.}$.

Caso 1. Suponha $n = 1$.

Por definição, $a_n = \boxed{3}$.

Ademais, $\boxed{3 \leq 3^m \Rightarrow n=1 \Rightarrow 3 \leq 3}$,

e o resultado segue para $n = 1$.

Caso 2. Suponha $\boxed{m = 2k \text{, tal que } k \geq 1 \text{ e } k \text{ inteiro}}$.

Por definição, $a_n = \boxed{4A_{n-1}}$.

Por hipótese de indução, $\boxed{A_{n-1} \leq 3^{m-1}}$.

Logo, $\boxed{A_{n-1} \leq 3^{n-1} \to 4A_{n-1} \leq 3.3^{m-1} \to A_n \leq 3^m}$,

e o resultado segue neste caso.

Caso 3. Suponha $\boxed{m = 2k+1 \text{, tal que } k \geq 1 \text{ e } k \text{ inteiro}}$

Por definição, $a_n = \boxed{2A_{n-1}}$ $4A_{n-2}$

Ainda por definição, ~~[illegible]~~ A_{n-1}", pois $\boxed{\text{N ẃ impar fegndr N - 1}}$ ser par.

Por hipótese de indução, $\boxed{A_{n-2} \leq 3^{m-2}.}$.

Logo, $\boxed{A_{m-2} \leq 3^{m-2} \to 8A_{m-2} \leq 9.3^{m-2} \to 24A_{n-2} \leq 3.3.3^{m-2}} \to A_n \leq 3^m.$

e o resultado segue neste caso.

Como em todos os casos mostramos que $\boxed{A_n \leq 3^m}$, concluímos que $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}(a_n \leq 3^n)$. □

4. **(*200* pontos)** O ano é 3300033dC. Um ano que ficará marcado na História. Os conselheiros universais, sábios matemáticos, conseguiram descobrir como fazer viagens intergaláticas. Embora a comunicação intergalática seja possível desde 330033dC, as viagens ainda não o eram. Em 33033dC, já havia sido descoberta uma forma de viajar dentro de uma mesma galáxia, mas entre as galáxias havia um desafio a mais.

Em uma mesma galáxia, as viagens tornaram-se possíveis por meio dos *túneis dinâmicos*, que permitem que o tempo seja manipulado e as viagens ocorram de forma viável. Entretanto, aplicar a mesma ideia entre galáxias não funciona porque o tempo não pode ser manipulado, gerando situações em que os viajantes ficam presos a um laço infinito de tempo. Há uma barreira física para o uso dos túneis dinâmicos.

Finalmente, os conselheiros universais conseguiram elaborar um modelo matemático que resolveu este problema. Foram idealizados os *túneis estacionários*. Assim, para as viagens dentro da galáxia serão usados os túneis dinâmicos e, entre galáxias, os túneis estacionários. Em cada cada galáxia, haverá um, e exatamente um, porto intergalático, que é o porto que se conecta aos túneis estacionários. Nestes túneis, não há possibilidade de que os viajantes fiquem presos no tempo, desde que alguns *cuidados fundamentais* sejam tomados na sua construção.

(i) Não pode haver um conjunto de portos ligados de maneira a formar um círculo (chamamos esta configuração de *lapso temporal*). Isto é, por exemplo, dadas três galáxias, Via Leite (VL), Via Água (VA) e Via Suco (VS), não pode haver um túnel entre VL e VA, entre VA e VS e, ainda, entre VL e VS. Um desses três túneis não pode ser construído. Isto é, a rede de portos não pode possuir lapsos temporais. Se possuir, colocará em risco todos os viajantes.

(ii) Todo o universo deverá estar ligado. Ou seja, para quaisquer dois portos intergaláticos, p e q, existe uma sequência de portos intergaláticos que permite a viagem entre p e q.

Uma propriedade importante, implicada por estas exigências, é que se ζ é o número de galáxias do universo, em que $\zeta > 1$, sempre haverá pelo menos dois portos intergaláticos com exatamente um túnel. Chamamos esta propriedade de *Propriedade Extrema*.

Todo o universo está feliz e os preparativos para a construção dos túneis, em andamento. Hoje é um dia importante. O Conselho Financeiro e o Conselho de Engenharia irão se reunir para fazer uma estimativa de gastos para a construção dos túneis.

O presidente do Conselho Financeiro foi informado de que exatamente $\zeta - 1$ túneis precisam ser construídos. Entretanto, com receio de que o Conselho de Engenharia não aceitasse apenas esta resposta, ele pediu aos conselheiros universais que elaborassem uma prova formal de que este é o número correto de túneis a serem construídos. Desta forma, usando os conhecimentos milenares do Princípio da Indução Matemática, em sua versão fraca, os conselheiros enviaram uma demonstração para o presidente do Conselho Financeiro.

No caminho da reunião com o Conselho de Engenharia, um acidente no seu dispositivo deixou alguns trechos da demonstração ilegíveis. Muito preocupado, o presidente pediu a você, representante dos conselheiros universais, que o acompanhava em direção à reunião, que complete a demonstração, preenchendo os trechos ilegíveis, representados a seguir por espaços em branco.

Demonstração. Dado um universo $\mathscr{U}$, denotamos $\mathscr{P}$ o conjunto de todos os portos das galáxias de $\mathscr{U}$. A demonstração é por indução matemática em $|\mathscr{P}|$.

Base. Suponha que |P|=2. Seja $\mathscr{R}$ o conjunto de túneis construídos para $\mathscr{P}$, respeitando-se os cuidados fundamentais. Pela Propriedade Extrema: pelo menos dois por com exatamente um túnel. Como, neste caso, |P|=2, concluímos que |R|=1, o que corresponde a |P|-1 túneis, e o resultado segue para a base.

Passo. Suponha |P|≥2 e, como hipótese de indução, que para todo conjunto $\mathscr{P}$ de portos intergaláticos, seja necessário construir |P|-1 túneis estacionários. Considere $\mathscr{U}$ com um conjunto $\mathscr{P}'$ de portos estacionários em que |P'|=|P|+1. Seja $\mathscr{R}'$ uma rede de túneis estacionários para $\mathscr{P}'$ que respeita os cuidados fundamentais. Como |P'|=|P|+1, temos que |R'|≥1. Logo, pela Propriedade Extrema, pelo menos dois ports e exatamente um túnel. Seja p um deles e t o seu túnel estacionário. Então, R' é uma rede de túneis estacionários para P'. Além disso:

(i) P' não possui lapsos temporais. Se P' possuísse um lapso temporal, tal lapso temopral deveria existir em P porque P' é obtida pela Propriedade Extrema. Entretanto, P' foi construída respeitando-se os cuidados fundamentais.

(ii) R' liga todos os portos intergaláticos de P', pois o único porto intergalático de P' foi p, o qual tinha apenas o seu túnel estacionário t construído nele. Isto implica que, para quaisquer portos $p_1, p_2 \in \mathscr{P}'$, t1,t2 ∈ R', a sequência de túneis que liga p_1 a p_2 é t1 e t2. Logo, esta sequência existe em R'.

Desta forma, concluímos que os túneis de R', que ligam os portos de P', respeitam os cuidados fundamentais. Além disso, |G| = |R|+1 = $|\mathscr{P}|$. Assim, pela hipótese de indução, |R|+1 = |P'|+2. Isto significa que 3 = |R|+1 = $|\mathscr{P}|$, que é exatamente 2, completando a demonstração. □

5. **(*120* pontos)** Complete a demonstração da igualdade abaixo.

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i} = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a}, \text{ para } a \neq b \text{ e } a, b \in \mathbb{R}$$

$$S_n = \frac{b-a}{b-a} \sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i}$$

$$= \frac{1}{b-a} \left(\sum_{i=0}^{n} a^i b^{n+1-i} - \sum_{i=0}^{n} a^{i+1} b^{n-i} \right).$$

Fazendo $j = i-1$ no primeiro somatório,

$$S_n = \frac{1}{b-a} \left(\sum_{j=-1}^{n-1} a^{j+1} b^{n-j} - \sum_{i=0}^{n} a^{i+1} b^{n-1} \right).$$

Fazendo $i = j$ no primeiro somatório,

$$S_n = \frac{1}{b-a} \left(\sum_{i=-1}^{n-1} a^{i+1} b^{n-i} - \sum_{i=0}^{n} a^{i+1} b^{n-1} \right).$$

Extraindo o primeiro termo do primeiro somatório,

$$S_n = \frac{1}{b-a} \left(a^0 b^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} a^{i+1} b^{n-j} - \sum_{i=0}^{n} a^{i+1} b^{n-1} \right).$$

Extraindo o segundo termo do segundo somatório,

$$S_n = \frac{1}{b-a} \left(a^0 b^{n+1} + (-a^{n+1} b^0) + \sum_{i=0}^{n-1} a^{i+1} b^{n-i} - \sum_{i=0}^{n-1} a^{i+1} b^{n-i} \right).$$

Por união dos somatórios,

$$S_n = \frac{1}{b-a} \left(b^{n+1} - a^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \left((a^{i+1} \cancel{b^{n-i}}) - (a^{i+1} \cancel{b^{n-i}}) \right) \right)$$

$$= \frac{1}{b-a} \left(b^{n+1} - a^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} (0) \right)$$

$$= \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a}.$$