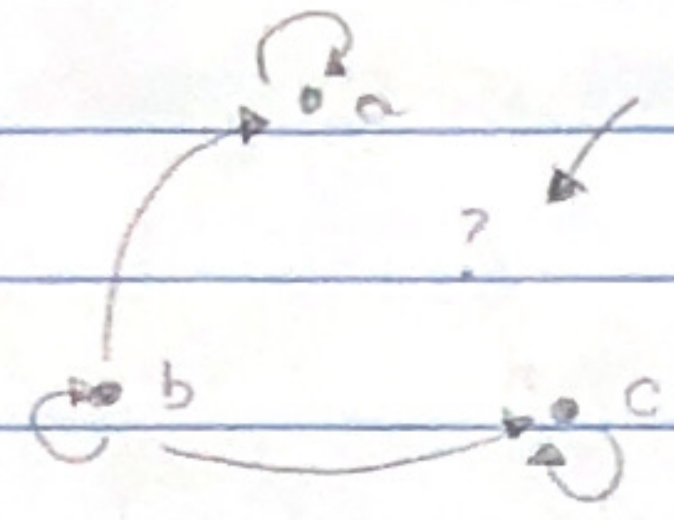
Tarefa 12

1 ordem parcial ⇒ transitiva, reflexiva e anti-simétrica.

a A relação é transitiva, reflexiva e anti-simétrica.



não é ordem total

b A relação é reflexiva, não é antissimétrica, é transitiva

$\forall x \in A((x,x) \in R)$ — $\forall x \in A \forall y \in A(xRy \to yRx)$

$x \leq x$ (reflexiva) — $x = 2 \quad y = 3$

V — $2 \leq 3$ ✗ — não é ordem parcial.

$3 \leq 2$

$\forall x \in A \forall y \in A \forall z \in A((xRy \wedge yRz \to xRz))$

$x = 2 \quad y = 3 \quad z = 4$

$2 \leq 3$ V $\quad 3 \leq 4$ V $\quad 2 \leq 4$ V é transitiva

c A relação é reflexiva, não é anti-simétrica, é transitiva

$\forall x \in A((x,x) \in R)$ — não é uma ordem parcial

$x = 2 \quad 2 = 2$ V

3 a) 2 é o elemento minimal, menor elemento e greatest lower bound.

{3,4} são maximais, não há o maior e nem least upper bound.

b) 1 é o elemento minimal, menor elemento e greatest lower bound.

Não há elemento maximal, nem o maior, e o least upper bound é 2.

c) $\emptyset$ é elemento minimal, menor e greatest lower bound.
$\{x \in P(N) \mid x$ contém 5 elementos$\}$ são maximais
Não há maior, nem least upper bound.

6)

a) $\Rightarrow$ deve-se provar que as expressões sejam transitiva, reflexiva e anti-simétrica

• transitiva: $\forall x \in A\ \forall y \in A\ \forall z \in A\ (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$

$(a,b) \in R_1 \cap R_2 \wedge (b,c) \in R_1 \cap R_2 \rightarrow (a,c) \in R_1 \cap R_2$
$(a,b) \in R_1 \wedge (b,c) \in R_1 \rightarrow (a,c) \in R_1$ (já é reflexiva)
$(a,b) \in R_2 \wedge (b,c) \in R_2 \rightarrow (a,c) \in R_2$ (já é reflexiva)
$\rightarrow (a,c) \in R_1 \cap R_2$, portanto é transitiva.

• reflexiva: a é elemento arbitrário, $a \in A$, portanto $(a,a) \in R_1$, já que R_1 é reflexiva. Também $(a,a) \in R_2$, já que é reflexiva. Logo, $R_1 \cap R_2$ é reflexiva.

• anti-simétrica: (a,b) arbitrário
$(a,b) \in R_1 \cap R_2 \wedge (b,a) \in R_1 \cap R_2$
$(a,b) \in R_1 \wedge (b,a) \in R_1$. R_1 é anti-simétrica, $a = b$
mesmo para R_2.
Portanto é simétrica. $R_1 \cap R_2$ é ordem parcial.

b) $A = \{a,b,c\}$ $R_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c)(a,b)\}$
$R_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c)(b,c)\}$
$R_1 \cup R_2 = \{(a,a)(b,b),(c,c),(a,b),(b,c)\}$

tilibra

(11) Os elementos minimais são os elementos x primos pertencentes a B.

(14)

(a) Considere que b seja o menor elemento

$\forall x \in B (xRb)$

$\forall x \in R ((x,b) \in R))$

$\forall x \in R ((b,x) \in R^{-1}))$

$\forall x \in R (bR^{-1}x)$

x é o menor elemento de R^{-1} de B

(b) Considere que b é o elemento maximal de R

$\neg \exists x \in B (bRx \wedge b \neq x)$

$\neg \exists x \in B (xR^{-1}b \wedge b \neq x)$

x é o elemento maximal de R^{-1} de B.

(15)

(a) Considere b é o menor elemento de R_1. Então $(b,x) \in R_1$, e como $R_1 \subseteq R_2$, logo $(b,x) \in R_2$. Dessa forma, provamos que b é também menor elemento de R_2

(b) Considere b é o minimal de B. Então seja a um elemento arbitrário, tal que $a \neq b$. Como $(a,b) \notin R_2$, também não pertence a R_1. Então não existe elemento em B tal que $(xRb \wedge x \neq b)$. Logo b é minimal de R_1 de B

(19) (a) Não está correto. bRx não é verdade pro todo conjunto assim como xRb

(b) Não está correto

$A = \{(a, b, c)\}$; $B = \{a, b, c\}$; $R = \{(a,a)\ (b,b)\ (c,c)\ (b,c)\ (a,b)\}$

b não é nem maior nem menor

(20)

(a) Considere b o menor elemento de B. e $\forall x \in B(bRx)$
Os elementos inferiores de B são $\forall x \in B(xRb)$ Como $B \subseteq A$,
e $\forall x \in A(xRb)$, b é o maior limite inferior de B

(b) Considere b o maior elemento de B e $\forall x \in B(xRb)$ Os
elementos inferiores de B são $\forall x \in B(xRb)$ Como $B \subseteq A$,
e $\forall x \in A(bxR)$, b é o menor limite superior.