Tarefa (15)

x_1) (a)

one-to-one

Suponha $x_1, x_2 \in A$, tal que $f(x_1) = f(x_2)$.

- $\frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1}$

- $(x_1+1)(x_2-1) = (x_2+1)(x_1-1)$
- $x_1x_2 - x_1 + x_2 - 1 = x_1x_2 - x_2 + x_1 - 1$
- $-x_1 + x_2 = -x_2 + x_1$
- $2x_2 = 2x_1 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad f(x_1) = f(x_2)$

Como x_1, x_2 são arbitrários, f é one-to-one.

onto

Suponha $y \in A$ é arbitrário tal que $f(x) = y$

$y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow y(x-1) = x+1 \Rightarrow yx - y = x+1 \Rightarrow yx - x = y+1$

$\Rightarrow x(y-1) = y+1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{y-1}$

Como $y \in A$ e $x = \frac{y+1}{y-1}$, logo $x \in A$, y é arbitrário, segue que para todo $y \in A$, existe um $x = \frac{y+1}{y-1}$ tal que $f(x) = y$. Logo f é onto.

(b)

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}$$

$$f \circ f(x) = \frac{\frac{x+1+(x-1)}{x-1}}{\frac{x+1-(x-1)}{x-1}} = \frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2}{x-1}} = \frac{2x}{x-1} \times \frac{x-1}{2}$$

$f \circ f(x) = x$ logo $f \circ f = 1_A$

x2)

(a) $f(2) = \{ y \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < y < \sqrt{2} \}$

(b) $f(-1) = f(-2) = \emptyset$, logo f não é one-to-one

Para qualquer conjunto de $y = \{ q \in R \}$, se $x = 1 +$ (maior elemento de $y)^2$, logo $(x, y) \in f$, portanto f é onto.

x3)

(a) $f(\{\{1,2\},\{3,4\}\}) = \{1,2,3,4\}$

(b) não é one-to-one desde que $f(\{\{1,2\},\{3,4\}\}) = f(\{\{1,2,3\},\{2,4,3\}\})$

logo, é onto

x4)

(a) Suponho $g \circ f$ $A \to C$ é onto. Suponho $c \in C$ é arbitrario. Como $g \circ f$ é onto, deve existir algum elemento a tal que $a = g \circ f(c)$ $g(f(a)) = c$. Como c

é arbitrário, para cada elemento de $c \in C$, existe um elemento $b = f(a)$ tal que $g(b) = c$. Logo g é onto.

(b) Suponha $g \circ f\ A \to C$ é um-para-um. Suponha que $a_1, a_2 \in A$, tal que $f(a_1) = f(a_2)$. Desde de que g é uma função, segue $g(f(x_1)) = g(f_2(x_2))$. Segue que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. Desde $g \circ f$ é um-para-um, segue que $x_1 = x_2$. Logo $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. Como x_1, x_2 são arbitrários, f é um-para-um.

x5)

(a) Desde de que g não é um-para-um, suponha $b_1, b_2 \in B$ tal que $g(b_1) = g(b_2)$. Como f é onto, segue existe algum $a_1, a_2 \in A$ tal que $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$. Como tem-se $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, logo f não é um-para-um.

(b) Desde de que f não é onto, suponha $b \in B$ tal que $\forall a \in A (f(a) \neq b)$. Desde de que g é uma função de B para C, segue que para algum $c \in C$, $c = g(b)$. Prova-se por contradição. Suponha que $g \circ f$ é onto. Logo, existe algum $a \in A$, $g \circ f(a) = c$. Então $g(f(a)) = c$. Desde $g(b) = c$ e g é um-para-um, segue $f(a) = b$. Mas isso contradiz que $\forall a \in A (f(a) \neq b)$. Logo $g \circ f$ não é onto.

(4) (a) Suponha que R é reflexiva e f é onto. Suponha que x é arbitrário em B. Desde de que f é uma função onto em $A \to B$, existe um elemento $u \in A$ tal que $f(u) = x$. Desde de que R é reflexiva e $u \in A$, segue que $(u, u) \in R$

Então $f(v) = x \wedge f(v) = x \wedge (v,v) \in R$. Então $(x,x) \in S$.
Dado de que x é arbitrário, segue que S é reflexiva.

(b) Suponha R é transitiva e f é um-para-um. Suponha $(x,y) \in S$ e $(y,z) \in S$. Então $(v,v_1) \in R$ e $(v_2,w) \in R$ tal que $f(v) = x$ e $f(v_1) = y$ e $f(v_2) = y$ e $f(w) = z$.
Dado f é um-para-um, segue que $v_1 = v_2$, ou seja, $v = v_1 = v_2$. Então $(v,v) \in R$ e $(v,w) \in R$, segue que $(x,z) \in S$, logo S é transitiva.