Tarefa (10)

(7) O inimigo do seu inimigo é seu amigo.

- p = você
- q = inimigo
- t = inimigo do seu inimigo
- seu inimigo $\rightarrow$ p odeia q $\rightarrow$ $(p,q) \in E_1$
- inimigo do seu inimigo $\rightarrow$ q odeia t $\rightarrow$ $(q,t) \in E_2$
- seu melhor amigo $\rightarrow$ p gosta t $\rightarrow$ $(p,t) \in F_2$
- $(p,q) \in E_1$ e $(q,t) \in E_2$ $\rightarrow$ $E_1 \circ E_2$
- $(p,t) \in F_2$ $\rightarrow$ (p,t) arbitrário $\rightarrow$ $E_1 \circ E_2 \subseteq F$

(8)

(a) (1) $R = \{(a,b) \in A \times B \mid \dots\}$
(2) $S = \{(b,c) \in B \times C \mid \dots\}$

- $a \in Dom(S \circ R)$
- De (1), $(a,b) \in R \Rightarrow a \in Dom(R)$, $b \in Im(R)$
- $a \in Dom(S \circ R)$ e $a \in Dom(R)$
- Portanto $Dom(S \circ R) \subseteq Dom(R)$

(b) • Usando (1), $b \in Ran(R)$ b, a arbitrário
- Usando (2), $b \in Dom(S)$
- Logo, $Ran(R) \subseteq Dom(S)$
- Agora, $(a,c) \in S \circ R$, então $a \in Dom(S \circ R)$.
- $a \in Dom(R)$, de (1)
- Logo $Dom(R) \subseteq Dom(S \circ R)$
- De (a), conclui-se que $Dom(R) = Dom(S \circ R)$

(c) (1) $R = \{(a,b) \in A \times B \mid \dots\}$
(1) (2) $S = \{(b,c) \in B \times C \mid \dots\}$

c arbitrário

- c pertence a $S \circ R$
- logo existe $(a,c) \in S \circ R$.
- logo deve haver (1) $(a,b) \in R$ e (2) $(b,c) \in S$
- Então $c \in Im(S)$
- Enfim, $Im(S \circ R) \subseteq Im(S)$

(2) $Im(S \circ R) = Im(S)$

- c pertence a $Im(S)$ c arbitrário
- Portanto, deve existir $(b,c) \in S$ e $(a,b) \in R$
- Como temos R, S, $(a,c) \in S \circ R$.
- Logo $c \in Im(S \circ R)$
- $c \in Im(S)$, $c \in Im(S \circ R) \Rightarrow Im(S) \subseteq Im(S \circ R)$
- $Im(S) \subseteq Im(S \circ R)$ e $Im(S \circ R) \subseteq Im(S)$, logo
  $Im(S) = Im(S \circ R)$

(9) $R = \{(a,b) \in A \times B \mid \dots\}$

(a)

- Considere $(a,b) \in R$.
- Então $a \in Dom(R)$ e $b \in Im(R)$ (V)
- Então $(a,b) \in Dom(R) \times Im(R)$
- Como $(a,b) \in R$ e $(a,b) \in Dom \times Im$,
- Logo $R \subseteq Dom(R) \times Im(R)$

(b) (a,b) arbitrário. $(a,b) \in R$, $(b,a) \in R^{-1}$ } $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.
$R \subseteq S$, logo $(a,b) \in S$, então $(b,a) \in S^{-1}$

(V)

/ /

c)

$(a,b) \in (R \cup S)^{-1}$

$(b,a) \in (R \cup S)$ ✓

$((b,a) \in R) \vee ((b,a) \in S)$

$((a,b) \in R^{-1}) \cup ((a,b) \in S^{-1})$

$(a,b) \in R^{-1} \cup S^{-1}$

10) $S \circ R = \emptyset$ sse $Im(R) \cap Dom(S) = \emptyset$

contra-positiva

$\leftarrow$ $S \circ R \neq \emptyset$ implica que $(a,c) \in S \circ R$. Logo (1), $b \in Im(R)$ e (2), $b \in Dom(S)$. Então $b \in Im(R) \cap Dom(R)$, logo $Im(R) \cap Dom(S) \neq \emptyset$.
Pelo contra-positiva, $Im(R) \cap Dom(R) = \emptyset$, logo $S \circ R = \emptyset$.

$\rightarrow$ $Im(R) \cap Dom(S) \neq \emptyset$ implica que $b \in Im(R)$ e $b \in Dom(S)$. Como existe $Im(R)$, existe um elemento $a \in Dom(R)$, portanto $(a,b) \in R$. Analogamente para S, existe $(b,c) \in S$. Portanto, existe $(a,c) \in S \circ R$. $S \circ R \neq \emptyset$.
Pelo contrapositiva, se $S \circ R = \emptyset$, $Im(R) \cap Dom(S) = \emptyset$.