Tarefa 08

Dados	Objetivo
	$\forall x\, (x \neq 0, x \neq 1 \rightarrow \exists!\, y\, (y/x = y - x))$
	$\rightarrow$ x arbitrário
$x \in \mathbb{R}$	$\exists!\, y\, (y/x = y - x)$
$x \neq 0$	
$x \neq 1$	
$x \in \mathbb{R}$	$\underbrace{\exists y\, (y/x = y - x)}_{\text{EXISTÊNCIA}} \wedge \underbrace{\forall z.\, (z/x = z - x \rightarrow z = y)}_{\text{UNICIDADE}}$
$x \neq 0$	
$x \neq 1$	

$\Rightarrow$ caçar y

$$\frac{y}{x} = y - x \qquad y = yx - x^2 \qquad y - yx = x^2 \qquad y(-1 + x) = x^2$$

$$y = \frac{x^2}{(-1 + x)} \qquad x \neq 1$$

Dados	Objetivo
$x \in \mathbb{R}$	$\forall z\, (\frac{z}{x} = z - x \rightarrow z = y)$
$x \neq 0$	$\rightarrow$ z arbitrário
$x \neq 1$	
$y = \frac{x^2}{(-1+x)}$	
$x \in \mathbb{R}$	$(z/x = z - x) \rightarrow (z = y)$
$x \neq 0 \quad x \neq 1$	
$y = x^2 / (-1 + x)$	
$z \in \mathbb{R}$	

$x \in \mathbb{R}$ | $(z = y)$

$x \neq 0 \quad x \neq 1$

$y = x^2/(-1+x)$

$z/x = z - x$.

$z = \dfrac{x^2}{(-1+x)}$ $\qquad \dfrac{z}{y} = \dfrac{x^2/(-1+x)}{x^2/(-1+x)}$ $\qquad \dfrac{z}{y} = 1$ $\qquad x = y$.

Seja um x arbitrário. Suponha $x \neq 0$ e $x \neq 1$.

Existência Seja $y = \dfrac{x^2}{(-1+x)}$. Então:

$$\frac{y}{x} = \left(\frac{x^2}{-1+x}\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x-1}$$

$$y - x = \frac{x^2}{(-1+x)} - x = \frac{x^2}{(-1+x)} - \frac{x(-1+x)}{(-1+x)} = \frac{\cancel{x^2} + x - \cancel{x^2}}{(-1+x)}$$

$$\frac{x}{(-1+x)}$$

UNICIDADE. Seja z um real arbitrário. Suponha que $\dfrac{z}{x} = z - x$. Então:

$z = \dfrac{x^2}{-1+x} = y$. Logo $y = z$, ou seja, $\forall z \left(\dfrac{z}{x} = z - x \rightarrow y = z\right)$

04

Dados	Objetivo
	$\forall z \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists! y (zy = z/x))$
$z \in \mathbb{R}$	$\exists! y (zy = z/x)$
$x \in \mathbb{R}$	
$x \neq 0$	
$x \in \mathbb{R}$	$\exists y \left[\underbrace{\left(zy = \frac{z}{x} \right)}_{\text{EXISTÊNCIA}} \land \underbrace{\forall w \left(zw = \frac{z}{x} \rightarrow w = y \right)}_{\text{UNIDADE}} \right]$
$z \in \mathbb{R}$	
$x \neq 0$	

$\Rightarrow$ caçar o y: $y = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

$x \in \mathbb{R}$	$\forall w \left(zw = \frac{z}{x} \rightarrow w = y \right)$
$z \in \mathbb{R}$	
$x \neq 0$	
$y = 1/x$	
$x \in \mathbb{R}$	$w = y$
$z \in \mathbb{R}$	
$x \neq 0$	
$y = 1/x$	
$zw = \frac{z}{x}$	

$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$ $\quad zw = \frac{z}{x} \Rightarrow zw = \frac{z}{\frac{1}{y}} = zy$

$y = w$

Seja x e z arbitrários. Suponha $x \neq 0$

Existência Seja $y = \frac{1}{x}$. Então

$y = \frac{1}{x}$ existe $y * z = \frac{1}{x} * z$ $yz = \frac{z}{x}$.

$z \in \mathbb{R}$.

Logo $\exists y \left(yz = \frac{z}{x} \right)$

UNIDADE Seja w um real arbitrário. Suponha que

$zw = \frac{z}{x}$. $\Rightarrow$ $x = \frac{z}{zw}$.

$y = \frac{1}{x}$ $y = \frac{zw}{z}$ $y = w$.

Logo, $y = z$, ou seja, $\forall w \left(zw = \frac{z}{x} \rightarrow z = w \right)$

(5)

Dados	Objetivo
(a)	$U! F \subseteq \cup F$
	$\forall x (x \in U! F \rightarrow x \in \cup F)$
$x \in U$	$x \in U! F \rightarrow x \in \cup F$
$x \in U$ (arbitrário)	$x \in \cup F$
$x \in U! F$	
$x \in U$	$\exists B (B \in \cup F \wedge x \in B)$
$\exists! A (A \in \cup F \wedge x \in A)$	
$x \in U$ $P(A)$	$\exists B (B \in \cup F \wedge x \in B)$
$\exists! A \, P(A)$	
$x \in U$ $P(A)$	$\exists B (B \in \cup F \wedge x \in B)$
$\exists A P(A) \wedge \forall C \forall D (P(C) \wedge P(D)$	
$\rightarrow C = D)$	
$x \in U$ $P(A)$	$\exists B \underbrace{(B \in \cup F \wedge x \in B)}_{P(B)}$
$A = A_0$	
$\exists A (P(A) \wedge \forall C \forall D (P(C) \wedge P(D) \rightarrow$	
$C = D$	

tilibra

$A_U \in F \land x \in A_U$	$\exists B\, P(B)$
$x \in U$	↳ $B = A_U$
$A = A_U$	
$\forall C \forall D\, (P(C) \land P(D) \to C = D)$	

Seja x arbitrário. Como x pertence a $\cup! F$, pode-se dizer que x pertence a um conjunto único A, que por sua vez pertence a F, segue $P(A)$. Ao instanciar $A = A_U$, é $P(A_U)$ ainda. Como x é genérico, logo $x \in \cup F$. Portanto, $\cup! F \subseteq \cup F$.

(b) Dados	Objetivo
	$\cup! F = \cup F \to \forall A \in F\ \forall B \in F\, (A \neq B \to A \cap B \neq \emptyset)$
$\cup! F = \cup F$	$\forall A \in F\ \forall B \in F\, (A \neq B \to A \cap B \neq \emptyset)$
$\cup! F = \cup F$ $A \in F$ $B \in F$	$A \neq B \to A \cap B = \emptyset$
$\cup! F = \cup F$ $A \in F$ $B \in F$	$A \cap B \neq \emptyset \to A = B$
	?

(8) (a) Dados	Objetivo G
	$\exists! B\, (\forall A \forall C\, (C \cap A = C \cap B))$
	$\underbrace{\exists B\, G(B)}_{\text{Existência}} \land \underbrace{\forall D \forall E\, (G(D) \land G(E) \to D = E)}_{\text{Unicidade}}$

→ Existência

	$\exists B\ P(B)$
	$\exists B(\forall A \forall B\ (C\setminus A = C\cap B)$
$A, B, C \subset P(U)$	$C\setminus A = C\cap B$
$\forall x(x \in C\cap B)$	$C\setminus A$
$B = U\setminus A$	

$\leftrightarrow\ x \in (C\cap B)$

$\leftrightarrow\ x \in C \wedge x \in B$

$\leftrightarrow\ x \in C \wedge x \in U/A$

$\leftrightarrow\ x \in C \wedge (x \in U \wedge x \notin A)$

$\leftrightarrow\ x \in C \wedge x \notin A \wedge x \in U \quad \to C \subseteq U.$

$\leftrightarrow\ x \in (C\setminus A) \wedge x \in U$

Seja x arbitrário, $C\cap B = C\setminus A$.

→ Unicidade

	$\forall D \forall E\ (G(D) \wedge G(E) \to D = E)$
$D, E \subset P(U)$	$G(D) \wedge G(E) \to D = E.$
$D, E \subset P(U)$	$D = E$
$G(D) \wedge G(E)$	
$D, E \subset P(U)$	$D = E$
$G(D)$	
$G(E)$	
$D, E \subset P(U)$	$D = E$
$G(D) = \forall A \forall C\ (C\setminus A = C\cap D)$	
$G(E)\ \forall A \forall C\ (C\setminus A = C\cap E)$	
$C = U$	
$U\setminus A = U\cap D = D$	
$U\setminus A = U\cap E = E$	
$E = D$	

→ Existencial

Seja x arbitrário. Considere que $B = U \setminus A$. Considere que x pertence a intersecção $C \cap B$, logo $x \in C \wedge x \in B$. Como $B = U \setminus A$, x pertence a U e não pertence A. Fazendo a comutação e unindo os termos, $x \in C \wedge x \notin A$, $x \in C \setminus A$. Com isso, prova-se $C \setminus A = C \cap B$.

→ Unicidade

Considere C, um conjunto igual a U. Aplica-se a regra G para os conjuntos D e E. Temos que $U \setminus A = U \cap D$ e $U \setminus A = U \cap E$, portanto $U \setminus A = D$ e $U \setminus A = E$. Como os termos da direita são iguais, $E = D$. Portanto, prova-se que $E = D$.

(b)

Dados	Objetivo
	$\exists! B(\forall A \forall C(C \cap A = C \setminus B))$
	$\underbrace{\exists B\, G(B)}_{\text{EXISTÊNCIA}} \wedge \underbrace{\forall D \forall E(G(D) \wedge G(E) \to D = E)}_{\text{UNICIDADE}}$

→ Existencial

Dados	Objetivo
	$\exists B(\forall A \forall C(C \cap A = C \setminus B))$
$A, C \subset P(U)$ $B = U / A$	$C \cap B = C \setminus A$
$A, C \subset P(U)$ $B = U / A$	$C \cap A$

$C \setminus B$

$\leftrightarrow \forall x(x \in C \wedge x \notin B) \leftrightarrow x \in C \wedge \neg(x \in U \setminus A)$

$\leftrightarrow x \in C \wedge x \notin U \vee x \in A$

tilibra

$\Leftrightarrow x \in C \wedge x \in A$

$\Leftrightarrow x \in C \wedge A$

$\rightarrow$ Existencial

Seja x arbitrário. Considere que $B \supseteq U \setminus A$. Considere que x pertence a $C \setminus B$, fazendo as transformações prova-se que $C \setminus B = C \wedge A$.

(10) Existem 2 casos

$A = \emptyset$ $\quad F \Rightarrow$ não contém conjunto

$\bigcup F = \emptyset \Rightarrow A \in F \rightarrow$ falso

então $\bigcup F \supseteq A \rightarrow A \in F$ é falso

A contém mais de um elemento.

$x \in A \rightarrow F_1 = \{A_1, A_2\} \rightarrow A_1 = \{x\} \rightarrow A_2 = A \setminus A_1$

$\rightarrow A = A_1 \cup A_2 \rightarrow \bigcup F = A \rightarrow A \notin F$ ou $\bigcup F = A \rightarrow A \in F$ é falso

Combinando ambos os casos 1 e 2, A tem apenas um elemento