Leonardo Rodrigues Marques RA: 178610

Leonardo Rodrigues Marques

→ Corrigir a questão 2.

A proposição que você deseja desprovar é: para todo k>=1, g(n) pertence a o(n^k) implica que **existe** \epsilon > 0, t.q. g(n) pertence a O(n^(k-\epsilon)). Ou seja, você quer explicitar k >= 1 t.q. **para todo \epsilon** > 0 g(n) não pertence a O(n^(k-\epsilon)), portanto, você **não pode** definir g(n) em função de \epsilon.

(1)

(a) $k \geq 1$

1a) 1,0 Queremos provar que a seguinte a afirmação é falsa

$g(n) \in o(n^k) \rightarrow g(n) \in O(n^{k-\varepsilon})$ para algum $\varepsilon > 0$.

Seja $\begin{cases} A = g(n) \in o(n^k) \\ B = g(n) \in O(n^{k-\varepsilon}) \end{cases}$

Supondo A verdadeiro: $\lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{n^k} = 0$ por definição

Supomos $g(n) = n^{k-\alpha}$ onde $0 < \alpha < \varepsilon$,

vamos mostrar que $g(n) \in o(n^k)$:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{n^k} \rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{n^{k-\alpha}}{n^k} \rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{n^k}{n^k} \cdot \frac{1}{n^\alpha} \rightarrow$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$$

logo $g(n) \in O(n^{k-\varepsilon})$, então:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^{k-\alpha}}{n^{k-\varepsilon}} < \infty \rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{n^k \, n^\varepsilon}{n^k \, n^\alpha} < \infty \rightarrow \lim_{n \to \infty} n^{\varepsilon - \alpha} < \infty$$

tilibra

porém $0 < \alpha < \mathcal{E}$ logo $\lim_{n \to \infty} n^{\mathcal{E}-\alpha} = \infty$ ← contradição

Supondo A verdadeiro chegamos a uma contradição em B, logo $A \to B$ é falso.

(b) Queremos provar que:

1b) 2,5

$g(n) \in \underset{\text{grande}}{O}(n^{k-\varepsilon}) \to g(n) \in o(n^k)$ $k>1, \mathcal{E}>0$
g(n) positiva e crescente.

Seja $A = g(n) \in O(n^{k-\mathcal{E}})$
$B = g(n) \in o(n^k)$
$A \to B$

Para por contradição, vamos assumir A e $\neg B$ verdadeiros
$g(n) \in O(n^{k-\mathcal{E}})$ e $g(n) \notin o(n^k)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{n^{k-\mathcal{E}}} < \infty$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{n^k} \neq 0$ como g(n) positivo e crescente.

$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{n^k/n^{\mathcal{E}}} < \infty$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{n^k} > 0$ (1) n^k positiva e crescente.

$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{n^k} n^{\mathcal{E}} < \infty \to \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{n^k} \lim_{n\to\infty} n^{\mathcal{E}}$ (2) porém:

$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{n^k} > 0$ (1) e $\lim_{n\to\infty} n^{\mathcal{E}} = \infty$ para $\mathcal{E} > 0$, logo

$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{n^k} \cdot \lim_{n\to\infty} n^{\mathcal{E}} = \infty$

contradição (2) e (3), logo $(A) \to (B)$

tilibra

2 2) 4,0

A relação de recorrência é

$T(1) = 1$

$T(n) = T(n-1) + 2n - 1 \quad n \geq 2$

Usando o processo de iteração, obtemos:

$$T(n) = T(n-1) + 2n - 1$$
$$T(n-1) = T(n-2) + 2(n-1) - 1$$
$$T(n-2) = T(n-3) + 2(n-2) - 1$$
$$T(n-3) = T(n-4) + 2(n-3) - 1$$
$$T(n-4) = T(n-5) + 2(n-4) - 1$$
$$\vdots$$
$$T(2) = T(1) + 2 \cdot 2 - 1$$

Somando os termos, é possível obter o seguinte resultado.

$$T(n) = T(1) + \underbrace{2n + 2(n-1) + 2(n-2) + 2(n-3) + 2(n-4) \cdots + 2 \cdot 2}_{\text{Termo}} - (n-1)$$

Isolando-se o 2 do termo recorrente:

$$T(n) = T(1) + 2\left[\underbrace{n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + (n-4) \cdots + 2}_{\text{termo}}\right] - (n-1)$$

Observando o termo recorrente, é possível ~~de~~ constatar que existe uma somatório com $a_2 = 2$ e $a_n = n$ e $r = 1$ (P.A.)

$$T(n) = T(1) + 2 \sum_{i=2}^{n} a_i - (n-1) \; *$$

Essa somatório pode ser escrito da seguinte forma:

$$\sum_{i=2}^{n} a_k = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

Substituindo em $*$:

$$T(n) = T(1) + 2\frac{(n-1).(n+2)}{2} - (n-1)$$

$$T(n) = 1 + (n-1)(n+2) - n + 1 = \cancel{1} + n^2 + \cancel{2n} - \cancel{n} - \cancel{2} - \cancel{n} + \cancel{1} = n^2$$

Portanto, a formula fechada para a recorrência é $T(n) = n^2$.

Vamos mostrar que $T(n) \in O(n^2)$, logo existem constantes $c \in \mathbb{N}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q: $T(n) \leq cn^2$ $\forall n \geq 2$.

Indução em n.

Base: $T(1) \leq c \cdot 1^2$. Hipótese: $T(n) \leq cn^2$.

$1 \leq c \cdot 1$

$1 \leq c$

Você mostrou apenas que T(n) pertence a O(n^2) (limitante superior), quando na verdade deveria mostrar que T(n) = n^2.

Passo: $T(n+1) \leq c(n+1)^2 \rightarrow$ queremos provar.

sei: $T(n+1) = T(n) + 2n - 1 \rightarrow T(n+1) \leq T(n) + 2n + 1$.

pela hipótese: $T(n) \leq cn^2$, logo $T(n+1) \leq cn^2 + 2n + 1$

se $cn^2 + 2n + 1 \leq c(n+1)^2 \rightarrow T(n+1) \leq c(n+1)^2$.

assim temos:

$cn^2 + 2n + 1 \leq c(n^2 + 2n + 1)$ $\qquad \frac{2n+1}{2n+1} \leq c$

$\cancel{cn^2} + 2n + 1 \leq \cancel{cn^2} + c(2n+1)$

$\boxed{1 \leq c} \rightarrow$ Com isso, provamos que $T(n) \leq cn^2$ para $c \geq 1$.

3) Não corrigido.

3

Em primeiro lugar, vamos calcular os tempos de execução do algoritmo A usando o teorema master.

A: $T_A(n) = 8T_A(n/2) + n^2$ com $a = 8$, $b = 2$ e $k = 1$.
Pela definição do teorema, se $a > b^k$, então $T(n) \in \Theta(\cancel{n \log}\ n^{\log_b a})$. Para a relação A, tem-se $8 > 2^1$, portanto, podemos afirmar que $T_A(n) \in \Theta(n^{\log_2 8})$, ou seja, $T_A(n) \in \Theta(n^3)$.

B: $T_B(n) = \alpha T_B(n/3) + n^2$ com $a = \alpha$, $b = 3$ e $k = 1$.
Nesse caso, usaremos a mesma classe Θ com $a > b^k$, portanto $T_B \in \Theta \cancel{n \log} (n^{\log_3 \alpha})$

Como queremos encontrar $T_B \in o(T_A(n))$ e por definição da classe o, $0 \leq f_n < c\,g(n)$, então $0 \leq n^{\cancel{\log}\ \log_3 \alpha} <$ $\cancel{n \log}\ n^{\log_2 8}$.
Resolvendo a desigualdade $\log_3 \alpha < \log_2 8$, temos que $\alpha < 27$. O maior inteiro que satisfaz a condição é 26.