Tarefa (19)

(5) supõe-se que $R \neq 1$ um valor arbitrário real

BASE

$n=0$, tem-se $\sum_{i=0}^{n} R^i = R^0 = 1 = \frac{R^{0+1}-1}{R-1}$

PASSO

supõe-se que o teorema esteja correto pro n $\sum_{i=0}^{n} R^i = \frac{R^{n+1}-1}{R-1}$

$\Rightarrow \sum_{0}^{n+1} R^i = \sum_{i=0}^{n} R^i + R^{n+1}$

$= \frac{R^{n+1}-1}{R-1} + R^{n+1} = \frac{(R^{n+1}-1)+R^{n+1}(R-1)}{R-1}$

$= \frac{R^{n+1}-1+R^{n+2}-R^{n+1}}{R-1} = \frac{R^{n+2}-1}{R-1} = \frac{R^{n+1+1}-1}{R-1}$

(6)

BASE

$n=1$, tem-se $\sum_{0}^{n} 1/i^2 = \frac{1}{1} = 1$

PASSO

considere que o teorema está correto pro n. Então $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2$

agora pro $n+1$, tem-se

$\Rightarrow \sum_{i}^{n+1} 1/i^2 = \sum 1/i^2 + \frac{1}{(n+1)^2}$

$\leq 2 - 1/n + 1/(n+1)^2 \leq 2 - 1/n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{(n+1)^2 - n}{n(n+1)^2}$

$= 2 - \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} \leq 2 - \frac{n^2+n}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{1}{n+1}$

(4)

$\boxed{\text{BASE}}$

$m=2$, tem-se $mH_m - m = 2(1/1 + 1/2) - 2 = 3 - 2 = 1 = H_1 = \sum_{1}^{m-1} H_k$

$\boxed{\text{PASSO}}$

supõe que o teorema é verdade para n: $\sum_{1}^{m-1} H_k = nH_n - n$

agora para $n+1$, tem-se $\sum_{k=1}^{n+1} H_k = \sum_{k=1}^{n} H_k$.

$= \sum_{k=1}^{m-1} H_k + H_m$

$= mH_m - m + H_m$

$= (m+1) H_m - m$

$= ((m+1) \cdot \sum_{0}^{m} 1/i) - m = ((m+1) \cdot \sum_{0}^{m} 1/i) + 1 - 1 + m$

$= ((m+1) \cdot \sum_{1}^{m} \frac{1}{i}) + 1 - 1 - m + 2$

$= (m+1) \cdot \sum_{0}^{m+1} \frac{1}{i}) - 1 - m$

$= (n+1) (\sum_{i=0}^{m+1} 1/i) - 1 - m$

$= (n+1) \cdot (\sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{i}) - (m+1)$

$= (m+1) H_{m+1} - (n+1)$

Como $P(m)$ é verdade, logo $P(n+1)$ também é.

(16) Alguns valores.

m	a_m
0	$2 = 2^{2^0}$
1	$4 = 2^{2^1}$
2	$16 = 2^{2^2}$
3	$32 = 2^{2^3}$
4	$65536 = 2^{2^4}$
5	$4294\,4967296 = 2^{2^5}$

logo aparenta $a_n = 2^{2^n}$

$\boxed{\text{caso base}}$

pela tabela

$\boxed{\text{PASSO}}$

teorema correto para m: $a_m = 2^{2^m}$

$a_{n+1} = (a_n)^2$

$= (2^{2^m})^2 = (2^{2 \cdot 2^m}) = (2^{2^{m+1}})$

$P(m)$ é verdade, $P(n+1)$ também.

(19)

(a) $x=1$, $y=1$, logo tem-se $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k$

$\Rightarrow 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

(b) $x=1$, $y=-1$ tem-se $(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1) \binom{n}{k} = 0$

(20) $0 < a_n < 1/2$

a_n^2 é verdade, a_{n+1} é também positivo

BASE

$n=1$, $a_1 = a_0^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Claramente $0 < a_1 < 1/2$

PASSO

Suponha-se que o teorema esteja correto para n

$a_{n+1} = a_n^2 + 1/4 < (1/2)^2 + 1/4 = 1/4 + 1/4 = 1/2$

$0 < a_{n+1} < 1/2$. Ou então também digo $0 < a_{n+1} < 1$