Tarefa 18

4

$\boxed{\text{BASE}}$

$B \subseteq A$, tal que existe apenas um elemento x. Como R é reflexiva, $(x,x) \in R$, então $(x,x) \in R \circ R$. Como x é o único elemento de B, segue que $\forall y \in B((x,y)$ em $R \circ R)$.

$\boxed{\text{PASSO}}$

Suponha que $B \subseteq A$, tal que B contém $\boxed{n}$ elementos. Agora considere $B \subseteq A$, tal que B contém $\boxed{n+1}$ elementos. Suponha que $b \in B$ e $B' = B \setminus \{b\}$ B' possui n elementos, então existe algum $x \in B'$ tal que $\forall y \in B'((x,y) \in R \circ R)$.

→ caso 1: $(x,b) \in R \circ R$

$\forall y \in B((x,y) \in R \circ R)$ é verdade. Então como existe $x \in B$, tal que $\forall y \in B((x,y) \in R \circ R)$

→ caso 2: $(x,b) \notin R \circ R$

Suponha $y \in B$. Agora $y = b$ ou $y \neq b$, desde que R é reflexiva $(b,y) = (b,b) \in R \circ R$

→ caso 3:

$y \neq b$, então $y \in B'$. Logo $(x,y) \in R \circ R$. Existe algum elemento z tal que $(x,z) \in R$ e $(z,y) \in R$. Como temos que $\forall x \in A$ $\forall y \in B(x R y \vee y R x)$, segue que $z R b$ ou $b R z$. Suponha $(z,b) \in R$. Desde de que $(x,z) \in R$ e $(z,b) \in R$, segue $(x,b) \in R \circ R$. Entretanto $(x,b) \notin R \circ R$. Logo a afirmação $(z,b) \in R$ é errado. Assim, como $(b,z) \in R$ e $(z,y) \in R$, segue que $(b,y) \in R \circ R$.

Dado que y é arbitrário, segue que $\forall y \in B\,((x,y) \in R \circ R)$.
Dos dois casos, existe algum elemento $p \in B$ tal que $\forall y \in B\,((p,y) \in R \circ R)$

(6) $A = B =$ conjunto de competidores

A relação R é $\{(x,y) \in A \times A \mid x$ ganha de y ou $x = y\}$. Podemos observar que $\forall x \in A\ \forall y \in B\,(xRy \vee yRx)$. Logo aplica-se a parte a.
Logo existe um competidor dito x tal que $\forall x \in B\,((b,x) \in R \circ R)$

(5)

$\boxed{\text{BASE}}$ $P(n)$ é verdade

Para $n = 1$, tem-se $F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$. Também $F_1 = F_0 + 2 = (2^{2^0} + 1) + 2 = 3 + 2 = 5$. $P(1)$ é verdade ✓

$\boxed{\text{PASSO}}$ $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$F_n = (F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \ldots F_{n-1}) + 2$ é verdade

$F_n - 2 = (F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \ldots F_{n-1})$

$F_{n+1} = 2^{2^{n+1}} + 1$

$F_{n+1} = 2^{2 \cdot 2^n} + 1$

$F_{n+1} = 2^{2^n} \cdot 2^{2^n} + 1$

Como $F_n - 1 = 2^{2^n}$

$F_{n+1} = (F_n - 1)(F_n - 1) + 1$

$F_{n+1} = F_n^2 - 2F_n + 1 + 1$

$F_{n+1} = (F_n - 2)F_n + 2$

$F_{n+1} = (F_0 F_1 F_2 \ldots F_{n-1})F_n + 2$ Logo $P(n+1)$ é verdade

8

a) $(a-b)^2 \geq 0$ é verdade sempre

$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$a^2 + b^2 - 2ab + 4ab \geq 4ab$

$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$

$(a+b)^2 \geq ab$

$\frac{(a+b)}{2} \geq \sqrt{ab}$ é verdade também.

b) $n = 1 \Rightarrow \left(\frac{a_1 + a_2}{2^1}\right) = \sqrt{a_1 a_2}$ é verdade como visto no

$\boxed{\text{BASE}}$

parti um

$\boxed{\text{PASSO}}$

$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2^n}}{2^n} > \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_{2^n}}$

... ?

6

$\boxed{\text{BASE}}$ $P(n) \Rightarrow n = 1$

$|a_1| \leq |a_1|$ ✓

$\boxed{\text{PASSO}}$ $P(n) \rightarrow P(n+1)$

$|a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}| \Rightarrow$ pela desigualdade triangular

$|a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}| \leq |a_1 + a_2 + \dots + a_n| + |a_{n+1}|$

$\rightarrow |a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}| \leq |a_1 + a_2 + \dots a_{n-1}| + |a_n| + |a_{n+1}|$

e sucessivamente pela indução até a base ✓

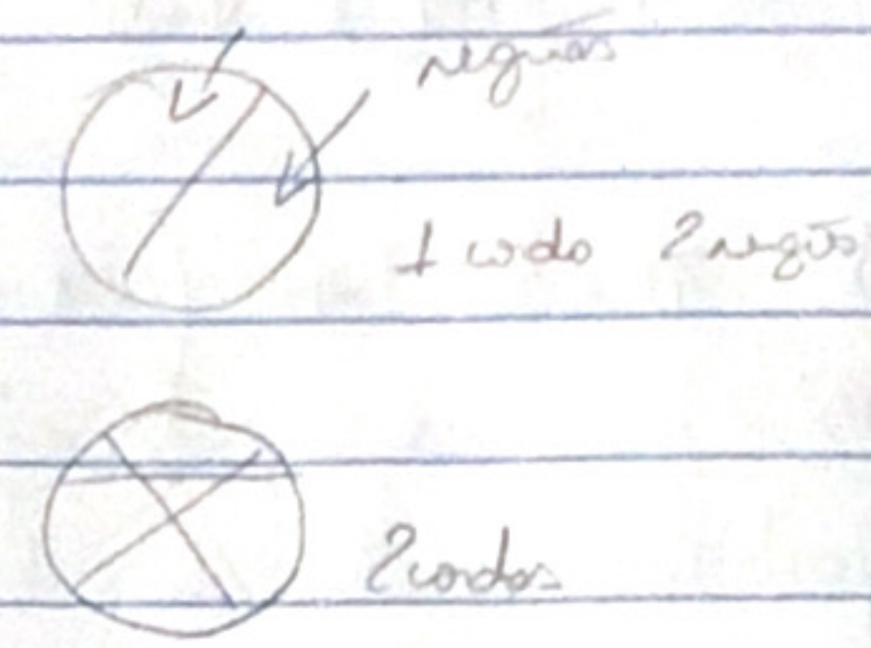
9 ?

13

$\boxed{\text{BASE}}$ $P(n) \Rightarrow n = 1$

número total de acordes no círculo $= 2 = (1^2 + 1 + 2)/2$.

$\boxed{\text{PASSO}}$ $P(n) \to P(n+1)$ V



n acordes $= (n^2 + n + 2)/2$

$n+1$ acordes

$(n^2 + n + 2)/2$ é verdade

$(n^2 + n + 2)/2 + (n+1) = (n^2 + 3n + 4)/2 = ((n+1)^2 + (n+1) + 2)/2$

$P(n)$ é verdade $P(n+1)$ também é.

15 O erro está em deduzir que todo número natural é um elemento de A. n foi escolhido como pertencente a N e A, o que não é válido para todo n. $n+1$ considerado pertence tanto a N como para A.

16 No passo, foi considerado para $n \geq 1$. A próxima iteração seria $n+1$, que no caso é 2. Entretanto, é considerado $n+1 \geq 3$, o que não convém ao passo $p(n) \to p(n+1)$, o que está errado.