MC358 — Fundamentos Matemáticos para a Computação
INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO — UNICAMP
1º SEMESTRE DE 2020

UNICAMP

Primeira Prova em tempos de COVID-19

Julho/2020

Nome Leonardo Rodrigues Marques

RA 178610

Questão	1	2	3	4	5	6	Total
Valor	80	130	120	100	120	150	700
Nota							

INSTRUÇÕES

1. A prova será disponibilizada na sexta-feria dia 10/07, às 19h, com prazo de 24h. **Não deixe para enviar na última hora para não ter problema de conexão.**
2. Você está autorizada(o) a consultar o livro, as notas de aula que disponibilizei e os seus exercícios (**apenas aqueles que você mesmo resolveu**).
   - **Não estão autorizadas**: a consulta a soluções e/ou materiais disponíveis na Internet; conversas com qualquer outra pessoa sobre conteúdo, direta ou indiretamente, relacionado com a prova, durante as 24h de disponibilidade da prova.
   - A detecção de qualquer tentativa de fraude acarreta em nota zero na disciplina e leva à sanções previstas no regimento da UNICAMP.
3. A prova deve ser organizada e formal. Estes critérios fazem parte da avaliação.
   - Saltos de argumento sempre são penalizados; faça sua solução passo a passo.
   - A prova deve ser feita à mão, com caneta preta ou lápis pelo menos 2B.
4. A página seguinte contém o **Compromisso de honra**, que você deve assinar e entregar junto com a prova. O preenchimento **é** obrigatório. Provas sem este compromisso preenchido não serão corrigidas.
5. A última página contém uma avaliação da sua percepção sobre a dificuldade da prova e o tempo que gastou efetivamente resolvendo as questões. O preenchimento **não é** obrigatório.
6. Normalmente, insiro uma tirinha na primeira página das minhas provas. Como este é um documento digital, insiro um link para uma tirinha mais longa do Bill Watterson, autor do Calvin e Haroldo. `https://www.ic.unicamp.br/~campos/tirinhawatterson.jpg`.

Compromisso de honra[1]

Como estudante da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), eu Leonardo Rodrigues Marques, RA 178610 prometo contribuir ativamente para uma comunidade de confiança, auxiliando a universidade a atingir os seus fins, expressos no Título I de seu Regimento Geral. Entendo que a honra é um modo de vida na UNICAMP e que minhas ações impactam a vida de outras pessoas.

Além disso, como estudante matriculado na disciplina MC358 no primeiro semestre de 2020, prometo manter os mais altos padrões de honestidade e integridade nas atividades desta disciplina.

Em particular, declaro, por minha honra, que não dei nem recebi ajuda não autorizada para resolver esta prova.

Leonardo Rodrigues Marques

Assinatura

[1]Baseado em versões disponíveis em algumas universidades do exterior.

1. ***80* pontos)** Complete os espaços em branco para que a demonstração abaixo prove a identidade de conjuntos $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$.

Demonstração.

Seja x um elemento arbitrário. Suponha que $A \cup (B \setminus C)$.

Então, $x \in A \cup (B \setminus C)$ é

$\equiv$ $\boxed{x \in A \lor x \in B \setminus C}$ (pela $\boxed{\text{definicão de união de conjuntos}}$)

$\equiv$ $x \in A \boxed{\lor (x \in B \land x \notin C)}$ (pela $\boxed{\text{definicão de diferença de conjuntos}}$)

$\equiv$ $\boxed{(x \in A \lor x \in B) \land (x \in A \lor x \notin C)}$ (pela $\boxed{\text{lei distributiva}}$)

$\equiv$ $(x \in A \cup B) \land \boxed{(x \in A \lor x \notin C)}$ (pela definição da união de conjuntos)

$\equiv$ $(x \in A \cup B) \land \boxed{\neg\neg(x \in A \lor x \notin C)}$ (pela $\boxed{\text{dupla negação}}$)

$\equiv$ $(x \in A \cup B) \land \boxed{\neg(x \notin A \land x \in C)}$ (pela propriedade DeMorgan)

$\equiv$ $(x \in A \cup B) \land \boxed{\neg(x \in C \setminus A)}$ (pela $\boxed{\text{definicão de diferença de conjuntos}}$)

$\equiv$ $(x \in A \cup B) \land \boxed{x \notin C \setminus A}$ (pela $\boxed{\text{lei da negação}}$)

$\equiv$ $x \in (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$ (pela definição da diferença de conjuntos).

Como x é um elemento arbitrário, o resultado segue. $\square$

2. **(130 pontos)** Sejam $I = \{1,3\}$, $J = \{4,6\}$ e $A_{i,j} = \{i, i+j, j-i+1\}$.

(i) Seja $B_j = \cup_{i\in I} A_{i,j}$, $j \in J$. Determine B_j para todo $j \in J$ e $\cap_{j\in J} B_j$.

(ii) Seja $C_i = \cap_{j\in J} A_{i,j}$, $i \in I$. Determine C_i para todo $i \in I$ e $\cup_{i\in I} C_i$.

(iii) Analise a forma lógica de $x \in \cap_{j\in J} B_j$ e $x \in \cup_{i\in I} C_i$. São equivalentes?

(iv) Fui uma vez visitar a Ilha da Fantasia. Ilha maravilhosa, com casinhas de tijolos coloridos, iluminadas por um sol brilhante, que refletia o verde maravilhoso da vegetação nativa. Lembro-me muito de uma rua de tijolos amarelos que me levou a uma casinha muito singela, que parecia feita de doces. Na casinha, tinha uma placa que dizia assim:

Ateliê de Senza Ponendum
Sou um alfaiate muito habilidoso e faço roupas para quem não faz suas próprias roupas e apenas para estas pessoas.

Aquela plaquinha me incomodou, mas eu não consegui entender porque. Consegue me explicar a minha confusão?

2

i $B_j \Rightarrow B_4 \cap B_6$

$(A_{1,4} \cup A_{3,4}) \cap (A_{1,6} \cup A_{3,6}) \Rightarrow$

$\{1,2,3,4,5,7\} \cap \{1,3,4,6,7,9\}$

$\{1,3,4,7\}$

$A_{1,4} = \{1,5,4\}$
$A_{3,4} = \{3,7,2\}$ $\cup \Rightarrow \{1,2,3,4,5,7\}$

$A_{1,6} = \{1,7,6\}$
$A_{3,6} = \{3,9,4\}$ $\cup \Rightarrow \{1,3,4,6,7,9\}$

ii $C_i \Rightarrow C_1 \cup C_3$

$(A_{1,4} \cap A_{1,6}) \cup (A_{3,4} \cap A_{3,6}) \Rightarrow$

$\{1\} \cup \{3\} = \{1,3\}$

$A_{1,4} = \{1,5,4\}$
$A_{1,6} = \{1,7,6\}$ $\cap \Rightarrow \{1\}$

$A_{3,4} = \{3,7,2\}$
$A_{3,6} = \{3,9,4\}$ $\cap \Rightarrow \{3\}$

iii Não são equivalentes, pois a ordem das expressões altera o resultado.

iv a placa gerou confusão, pois não está claro se ele é uma ~~pessoa~~ alfaiate habilidoso apenas para as pessoas que não fazem suas próprias roupas ou se ele apenas faz roupas para um grupo específico de pessoas. (as que não fazem suas próprias roupas).

3. ***120* pontos)** Complete os espaços em branco abaixo para que seja um rascunho da demonstração do seguinte problema: suponha que A, B, C sejam conjuntos tais que $B \setminus C$ e A sejam disjuntos; suponha, ainda, que $z \in B$; prove que se $z \in A$, então $z \in C$.

Dados	Objetivo
A, B, C conjuntos	$z \in A \to z \in C$
$\boxed{B \setminus C} \cap \boxed{A = \emptyset}$	
$z \in B$	
A, B, C conjuntos	$z \in C$
$\neg \exists x\,(x \in B \setminus C \wedge A)$	
$z \in B$	
$z \in A$	
A, B, C conjuntos	$z \in C$
$\forall x(\boxed{x \notin B \setminus C \vee x \notin A})$ →	instanciação universal
	em $x = z$
$z \in B$	
$z \in A$	
A, B, C conjuntos	$z \in C$
$\forall x\,(x \notin B \setminus C \vee x \notin A)$	
$z \in B$	
$z \in A$	
$\boxed{z \in B \setminus C} \longrightarrow \boxed{z \notin A}$	
A, B, C conjuntos	Contradição
$\forall x\,(x \notin B \setminus C \vee x \quad x \notin A)$	
$z \in B$ —	$\longrightarrow$ $z \in B \setminus C$
$z \in A$	
$z \in B \setminus C \to z \notin A$	
$z \notin C$ —	$\longrightarrow$
A, B, C conjuntos	Contradição
$\forall x\,(x \notin B \setminus C \vee x \notin A)$	
$z \in A$	
$z \in B \setminus C \to z \notin A$ —	→ modus ponnens → $z \notin A$
$z \in B \setminus C$ —	
A, B, C conjuntos	Contradição
$\forall x\,(x \notin B \setminus C \vee x \notin A)$	
$z \in A$ —	$\longrightarrow$ Contradição!
$z \in B \setminus C$	
$z \in B \setminus C \to z \notin A$	
$z \notin A$ —	$\longrightarrow$

4. **(*100* pontos)** O rascunho abaixo demonstra a seguinte afirmação: se $A \subseteq C$ e $A \nsubseteq B$, então $C \nsubseteq B$.

Dados	Objetivo
A, B, C conjuntos	$((A \subseteq C) \wedge (A \nsubseteq B)) \rightarrow C \nsubseteq B$
A, B, C conjuntos $A \subseteq C$ $A \nsubseteq B$	$C \nsubseteq B$
A, B, C conjuntos $\forall x(x \in A \rightarrow x \in C)$ $A \nsubseteq B$	$C \nsubseteq B$
A, B, C conjuntos $\forall x(x \in A \rightarrow x \in C)$ $\neg\forall z(z \in A \rightarrow z \in B)$	$C \nsubseteq B$
A, B, C conjuntos $\forall x(x \in A \rightarrow x \in C)$ $\exists z(z \in A \wedge z \notin B)$ ———	$C \nsubseteq B$ ——> $\boxed{\text{Instanciação existencial em } z = y}$
A, B, C conjuntos $\forall x(x \in A \rightarrow x \in C)$ ——— $y \in A$ $y \notin B$	$C \nsubseteq B$ ——> $\boxed{\text{Instanciação universal em } x = y}$
A, B, C conjuntos $\forall x(x \in A \rightarrow x \in C)$ $y \in A$ $y \notin B$ $y \in A \rightarrow y \in C$	$C \nsubseteq B$
A, B, C conjuntos $\forall x(x \in A \rightarrow x \in C)$ $y \in A$ ——— $y \notin B$ $y \in A \rightarrow y \in C$ ———	$C \nsubseteq B$ ———> por modus ponnens $y \in C$ ↑ →
A, B, C conjuntos $\forall x(x \in A \rightarrow x \in C)$ $y \in A$ $y \notin B$ ——— $y \in A \rightarrow y \in C$ $y \in C$ ———	$\exists w(w \in C \wedge w \notin B)$ ———> $w = y$ ↑ →

Escreva a forma final (formal e sem saltos) para que ela **reflita completamente** o rascunho acima.

Considere A, B, C conjuntos. Queremos provar $((A \subset C) \wedge (A \nsubseteq B)) \rightarrow C \nsubseteq B$.
Suponha $A \subseteq C$ e que $A \nsubseteq B$. Para um x arbitrário, $A \subseteq C$ nos mostra que para qualquer x, x pertence a A implica x pertence a C. $(\forall x(x \in A \rightarrow x \in C))$ ① Para um z arbitrário, $A \nsubseteq B$ nos mostra que não há z pertence a A, que implica pertinência em B. $(\neg\forall z(z \in A \rightarrow z \in B))$ ②
Usando equivalência de quantificadores, podemos reescrever ②. como existe z arbitrário, tal que z pertence a A e não pertence a B. $(\exists z(z \in A \wedge z \notin B))$ ③ Em ③, usando da instanciação existencial

em. $z=y$, obtemos $y \in A$ e $y \notin B$. Em ①, usando da instanciação universal em $x=y$, obtemos o condicional y pertence a A implica que y pertence a C ($y \in A \to y \in C$)④. Por modus ponens, usando ④ e o fato de y pertence a A ($y \in A$), obtemos que $y \in C$. Para $C \not\subseteq B$, considere w arbitrário, o que nos mostra que existe w tal que w pertence a C e não pertence a B. Como y e w são arbitrários ($w=y$), provamos que $(A \subseteq C) \wedge (A \not\subseteq B) \to C \not\subseteq B$.

5. **(120 pontos)** Suponha que $\{A_i | i \in I\}$ e $\{B_i | i \in I\}$ sejam famílias indexadas. Para cada $(i, j) \in I \times I$, seja $C_{i,j} = A_i \times B_j$. Seja $P = I \times I$. Prove que $\cup_{p\in P} C_p = (\cup_{i\in I} A_i) \times (\cup_{i\in I} B_i)$.

Queremos provar $\cup_{p\in P} C_p = (\cup_{i\in I} A_i) \times (\cup_{i\in I} B_I)$, portanto devemos verificar $\cup_{p\in P} C_p \subseteq (\cup_{i\in I} A_i) \times (\cup_{i\in I} B_i)$ e $(\cup_{i\in I} A_i) \times (\cup_{i\in I} B_i) \subseteq \cup_{p\in P} C_p$.

$\rightarrow$ Considere um par g arbitrário $\in C_S$ (conjunto C_S que contém g), portanto $(a,b) \in C_S$ e como $C_S = A_S \times B_S$, obtemos que $a \in A_S$ e $b \in A_S$.
Se $a \in A_S$, ele pertence a união dos conjuntos. Logo, $a \in \cup_{i\in I} A_i$.
Se $b \in A_S$, ele pertence a união dos conjuntos. Logo, $b \in \cup_{i\in I} B_i$.
Portanto temos $g = (a,b) \in (\cup_{i\in I} A_i) \times (\cup_{i\in I} B_i)$ e como $g = (a,b)$ é arbitrário, provamos que $\cup_{p\in P} C_p \subseteq (\cup_{i\in I} A_i) \times (\cup_{i\in I} B_i)$.

$\leftarrow$ Considere um par $j^{(a,b)}$ arbitrário que pertence a $(\cup_{i\in I} A_i) \times (\cup_{i\in I} B_I)$. Note que $C_{ij} = A_i \times B_j$ por definição. Como $(i,j) \in I \times I$ e $P = I \times I$, podemos afirmar que $j(a,b) \in \cup_{p\in P} C_p$. Como $j(a,b)$ é arbitrário, provamos que $(\cup_{i\in I} A_i) \times (\cup_{i\in I} B_i) \subseteq \cup_{p\in P} C_p$. $\hookrightarrow$ Dessas duas formas, provamos que $\cup_{p\in P} C_p = (\cup_{i\in I} A_i) \times (\cup_{i\in I} B_I)$.

6. **(150 pontos)** Seja R uma ordem parcial em A, $B_1 \subseteq A$, $B_2 \subseteq A$. Faça o que se pede em cada um dos itens abaixo.

(i) Suponha que $\forall x \in B_1 \exists y \in B_2 (xRy)$ e $\forall x \in B_2 \exists y \in B_1 (xRy)$. Prove que se B_1 e B_2 são disjuntos, então nenhum dos dois tem elementos maximais.

(ii) Suponha que x_1 seja o supremo de B_1 e x_2 o supremo de B_2. Prove que se $B_1 \subseteq B_2$, então $x_1 R x_2$.

(ii) Se x_1 é o supremo de B_1 e x_2 é supremo de B_2 e que B_1 está contido em B_2, portanto temos que x_2 é limite superior de B_1. Como x_1 é L.U.B. (least upper bound) (limite menor superior), x_1 deve ser menor dos outros limites como mostra a definição. Portanto $x_1 R x_2$.

Análise da percepção da dificuldade e do tempo gasto para solucionar a prova

Questão 1

Tempo que levei para responder: 20 min

Minha percepção sobre a dificuldade: ☒ Fácil; ☐ Média; ☐ Difícil.

Questão 2

Tempo que levei para responder: 20 min

Minha percepção sobre a dificuldade: ☒ Fácil; ☐ Média; ☐ Difícil.

Questão 3

Tempo que levei para responder: 40 min

Minha percepção sobre a dificuldade: ☐ Fácil; ☒ Média; ☐ Difícil.

Questão 4

Tempo que levei para responder: 30 min

Minha percepção sobre a dificuldade: ☐ Fácil; ☒ Média; ☐ Difícil.

Questão 5

Tempo que levei para responder: 35 min

Minha percepção sobre a dificuldade: ☐ Fácil; ☒ Média; ☐ Difícil.

Questão 6

Tempo que levei para responder: 20 min + x min

Minha percepção sobre a dificuldade: ☐ Fácil; ☐ Média; ☒ Difícil.

Comentários adicionais

Não fiz as listas 4.3 em diante, o que prejudicou a resolver a questão 6.