Tarefa (14)

(6) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2}$ $\quad g(x) = 2x-1$

$f(g(x)) \Rightarrow \dfrac{1}{(2x-1)^2+2} = \dfrac{1}{(4x^2-4x+1)+2} = \dfrac{1}{4x^2-4x+3}$

$g(f(x)) = 2 \cdot \dfrac{1}{x^2+2} - 1 = \dfrac{\cancel{2} - x^2 - \cancel{2}}{x^2+2} = \dfrac{-x^2}{x^2+2}$

(8) Usando os conceitos de unicidade e existência do capítulo 4.

|Existência|

→ Suponha que i_A seja reflexiva, transitiva e simétrica, então podemos dizer que i_A é uma relação de equivalência. Logo, para cada $a \in A$, há um valor único em A tal que $(a,a) \in i_A$

|Unicidade|

- Suponha que existe uma função B, que seja uma relação de equivalência.
- Suponha que $(a,b) \in B$
- Usando o conceito de simetria, $(a,b) \in B \wedge (b,a) \in B$
- Usando o conceito de transitividade, $(a,a) \in B$
- Considerando que $(a,b) \in B \wedge (a,a) \in B$, B é uma função $a = b$.
- Desde de que (a,b) são arbitrários, logo $B = i_A$.

tilibra

12 a

- Considere $A = \{4, 7, 8\}$
- Considere $B = \{5, 9, 3, 2\}$
- Considere $f = \{(4,5), (7,9), (8,3)\}$
- Dado que R é reflexiva $\wedge \in A$, $R = \{(4,4), (7,7), (8,8), (11,11)\}$
- Logo, $(2,2) \notin S$, pois não há um elemento $a \in A$, tal que $f(a) = 2$.
- Portanto, é falsa

b

- Considere R é simétrica
- Considere que existe $u \in A$, tal que $f(u) = x$ e existe $v \in A$ tal que $f(v) = y$. Logo $(u,v) \in R$.
- Como R é simétrica $((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R)$, $(v,u) \in R$.
- Considere que $x = f(u)$ e $y = f(v)$, logo $(y,x) \in S$.
- Então S é simétrica e é verdadeira.

c $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{a, b, c, d\}$

$f = \{(1,a) (2,b) (3,c) (4,d)\}$

$R = \{(1,2) (3,4)\}$.

- Considere R transitiva. Como $(a,b) \in S$, já que $(1,2) \in R$. Entretanto $(a,d) \notin S$, já que $(1,4) \notin R$. Logo, é falsa.

tilibra

13

a

- Considere R reflexiva
- Suponha $f \in F$
- Suponha $x \in A$
- Como f é uma função, $f(x) \in B$ será um valor único.
- Dado de que $f(x) \in B$, e R é reflexiva, segue que $(f(x), f(x)) \in R$
- Como x é arbitrário, $\forall x \in A((f(x), f(x)) \in R)$. Então $(f,f) \in S$
- Logo S é reflexiva, a afirmação é verdadeira

b

- Considere R simétrica
- Suponha $(f, g) \in F$.
- Como $\forall x \in A((g(x), f(x)) \in R)$. Então $(g, f) \in S$
- Logo R é simétrica e a afirmação é verdadeira.

c

- Suponha R transitiva
- Suponha $(f, g) \in F$ e $(g, h) \in F$
- Considere $\forall x \in A((f(x), g(x)) \in R)$ e $\forall x \in A((g(x), h(x)) \in R)$.
- Como R é transitiva, segue $\forall x \in A((f(x), h(x)) \in R)$
- Logo $(f, h) \in S$. S é transitiva, e a afirmação é verdadeira

(17)

(a)

- Suponha $x \in A$
- $g: A \to B$, $g(x) = g(x)$
- Como $(x,x) \in R$, R é reflexa

reflexa

- Suponha $(x,y) \in R$
- Como $g(x) = g(y)$, então, $g(y) = g(x)$, logo $(y,x) \in R$
- Logo R é simétrico

simétrica

- Suponha $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$
- Como $g(x) = g(y) = g(z)$, logo $g(x) = g(z)$, segue $(x,z) \in R$
- Então R é transitiva.

transitiva

(b)

- Suponha R é uma relação de equivalência em A.
- Suponha $g: A \to A/R$ e $g(x) = [x]_R$.

$(\to)$ Suponha $(x,y) \in R$. Desde R é uma relação de equivalência, segue $[x]_R = [y]_R$. Então $g(x) = g(y)$. Logo
$R \subseteq \{(x,y) \in A \times A \mid g(x) = g(y)\}$.

$(\leftarrow)$ Suponha $(x,y) \in \{(x,y) \in A \times A \mid g(x) = g(y)\}$. Desde $g(x) = [x]_R = [y]_R$. Então $(x,y) \in R$. Então $\{(x,y) \in A \times A \mid g(x) = g(y)\} \subseteq R$

Das duas direções, tem-se $R = \{(x,y) \in A \times A \mid g(x) = g(y)\}$.