Preuves en Déduction Naturelle pour le système de Spinoza

D'après la formalisation de Jarrett

28 février 2025

1 Introduction

Ce document présente les preuves en déduction naturelle (système DN) pour les propositions principales de l'*Éthique* de Spinoza, d'après la formalisation de Charles Jarrett présentée dans *The Logical Structure of Spinoza's Ethics, Part I.*

2 Notation et symboles

2.1 Lexique

2.1.1 Opérateurs modaux

- $L(p)$: Nécessité logique - p est logiquement nécessaire
- $M(p)$: Possibilité - p est possible
- $N(p)$: Nécessité naturelle - p est naturellement nécessaire

2.2 Règles modales

- **R1** : $\forall P(L(P) \to N(P))$
  La nécessité logique implique la nécessité naturelle
- **R2** : $\forall P(N(P) \to P)$
  Axiome T pour la nécessité naturelle
- **R3** : $\forall P \forall Q(L(P \to Q) \to (L(P) \to L(Q)))$
  Axiome K pour la nécessité logique
- **R4** : $\forall P(M(P) \to L(M(P)))$
  Axiome S5 - possibilité et nécessité
- **R5** : $\forall P(P \to L(P))$
  Règle de nécessitation
- **R6** : $\forall P \forall Q(N(P \to Q) \to (N(P) \to N(Q)))$
  Axiome de distributivité pour la nécessité naturelle

2.2.1 Prédicats unaires

- $A_1(x)$: x est un attribut
- $B_1(x)$: x est libre
- $D_1(x)$: x est une instance de désir
- $E_1(x)$: x est éternel
- $F_1(x)$: x est fini
- $G_1(x)$: x est un dieu

— $J_1(x)$: x est une instance d'amour
— $K_1(x)$: x est une idée
— $M_1(x)$: x est un mode
— $N_1(x)$: x est nécessaire
— $S_1(x)$: x est une substance
— $T_1(x)$: x est vrai
— $U_1(x)$: x est un intellect
— $W_1(x)$: x est une volonté

2.2.2 Prédicats binaires

— $A_2(x, y)$: x est un attribut de y
— $C_2(x, y)$: x est conçu à travers y
— $I_2(x, y)$: x est en y
— $K_2(x, y)$: x est cause de y
— $L_2(x, y)$: x limite y
— $M_2(x, y)$: x est un mode de y
— $O_2(x, y)$: x est un objet de y
— $P_2(x, y)$: x est la puissance de y
— $R_2(x, y)$: x a plus de réalité que y
— $V_2(x, y)$: x a plus d'attributs que y

2.2.3 Prédicats ternaires

— $C_3(x, y, z)$: x est commun à y et à z
— $D_3(x, y, z)$: x est divisible entre y et z

2.3 Définitions

— **D1** : $K_2(x, x) \wedge \neg\exists y(y \neq x \wedge K_2(y, x)) \leftrightarrow L(\exists y(y = x))$
Causa sui - ce dont l'essence implique l'existence

— **D2** : $F_1(x) \leftrightarrow \exists y(y \neq x \wedge L_2(y, x) \wedge \forall z(A_2(z, x) \leftrightarrow A_2(z, y)))$
Une chose est finie quand elle peut être limitée par une autre de même nature

— **D3** : $S_1(y) \leftrightarrow (I_2(y, y) \wedge C_2(y, y))$
Une substance est ce qui est en soi et est conçu par soi

— **D4a** : $A_1(x) \leftrightarrow \exists y(S_1(y) \wedge I_2(x, y) \wedge C_2(x, y) \wedge I_2(y, x) \wedge C_2(y, x))$
Un attribut est ce que l'intellect perçoit de la substance comme constituant son essence

— **D4b** : $A_2(x, y) \leftrightarrow (A_1(x) \wedge C_2(y, x))$
x est un attribut de y

— **D5a** : $M_2(x, y) \leftrightarrow (x \neq y \wedge I_2(x, y) \wedge C_2(x, y))$
Un mode est ce qui est dans autre chose et est conçu par elle

— **D5b** : $M_1(x) \leftrightarrow \exists y(S_1(y) \wedge M_2(x, y))$
x est un mode

— **D6** : $G_1(x) \leftrightarrow (S_1(x) \wedge \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y, x)))$
Dieu est une substance constituée d'une infinité d'attributs

— **D7a** : $B_1(x) \leftrightarrow (K_2(x,x) \wedge \neg\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x)))$
Une chose est libre quand elle n'est cause que d'elle-même

— **D7b** : $N_1(x) \leftrightarrow \exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x))$
Une chose est nécessaire quand elle est déterminée par autre chose

— **D8** : $E_1(x) \leftrightarrow L(\exists v(v = x))$
L'éternité est l'existence même en tant que nécessaire

2.4 Axiomes

— **A1** : $\forall x(I_2(x,x) \vee \exists y(y \neq x \wedge I_2(x,y)))$
Tout ce qui est, est soit en soi, soit en autre chose

— **A2** : $\forall x((\neg\exists y(y \neq x \wedge C_2(x,y))) \leftrightarrow C_2(x,x))$
Ce qui ne peut être conçu par un autre doit être conçu par soi

— **A3** : $\forall x\forall y(K_2(y,x) \rightarrow N((\exists v(v = y)) \leftrightarrow \exists v(v = x)))$
D'une cause déterminée suit nécessairement un effet

— **A4** : $\forall x\forall y(K_2(x,y) \leftrightarrow C_2(y,x))$
La connaissance de l'effet dépend de la connaissance de la cause

— **A5** : $\forall x\forall y((\neg\exists z(C_3(z,x,y))) \leftrightarrow (\neg C_2(x,y) \wedge \neg C_2(y,x)))$
Les choses qui n'ont rien en commun ne peuvent être conçues l'une par l'autre

— **A6** : $\forall x(K_1(x) \rightarrow (T_1(x) \leftrightarrow \exists y(O_2(y,x) \wedge K_2(x,y))))$
L'idée vraie doit s'accorder avec son objet

— **A7** : $\forall x(M(\neg\exists y(y = x)) \leftrightarrow \neg L(\exists y(y = x)))$
Si une chose peut être conçue comme non existante, son essence n'implique pas l'existence

— **A8** : $\forall x\forall y(I_2(x,y) \rightarrow C_2(x,y))$
Si x est en y alors x est conçu par y

— **A9** : $\forall x(\exists y(A_2(y,x)))$
Toute chose a un attribut

— **A10** : $\forall x\forall y\forall z(D_3(x,y,z) \rightarrow M(\neg\exists w(w = x)))$
Si x est divisible en y et z alors il est possible que x n'existe pas

— **A11** : $\forall x\forall y(S_1(x) \wedge L_2(y,x) \rightarrow S_1(y))$
Si x est une substance et y limite x alors y est une substance

— **A12** : $\forall x((\exists y(M_2(x,y))) \rightarrow M_1(x))$
Si x est un mode de quelque chose alors x est un mode

— **A13** : $M(\exists x(G_1(x)))$
Il est possible qu'un Dieu existe

— **A14** : $\forall x(N(\exists y(y = x)) \leftrightarrow \neg F_1(x))$
x existe nécessairement si et seulement si x n'est pas fini

3 Preuves en déduction naturelle

3.1 Proposition 1 (P1)

Si x est un mode de y et y est une substance, alors x est en y et y est en soi.

$$\forall x\forall y(M_2(x,y) \wedge S_1(y) \rightarrow I_2(x,y) \wedge I_2(y,y))$$

1	$\quad M_2(x,y) \wedge S_1(y)$	
2	$\quad M_2(x,y)$	$\wedge$E, 1
3	$\quad S_1(y)$	$\wedge$E, 1
4	$\quad S_1(y) \leftrightarrow (I_2(y,y) \wedge C_2(y,y))$	D3
5	$\quad I_2(y,y) \wedge C_2(y,y)$	$\Rightarrow$E, 3, 4
6	$\quad I_2(y,y)$	$\wedge$E, 5
7	$\quad M_2(x,y) \leftrightarrow (x \neq y \wedge I_2(x,y) \wedge C_2(x,y))$	D5a
8	$\quad x \neq y \wedge I_2(x,y) \wedge C_2(x,y)$	$\Rightarrow$E, 2, 7
9	$\quad I_2(x,y)$	$\wedge$E, 8
10	$\quad I_2(x,y) \wedge I_2(y,y)$	$\wedge$I, 9, 6
11	$M_2(x,y) \wedge S_1(y) \rightarrow I_2(x,y) \wedge I_2(y,y)$	$\Rightarrow$I, 1–10
12	$\forall y(M_2(x,y) \wedge S_1(y) \rightarrow I_2(x,y) \wedge I_2(y,y))$	$\forall$I, 11
13	$\forall x \forall y(M_2(x,y) \wedge S_1(y) \rightarrow I_2(x,y) \wedge I_2(y,y))$	$\forall$I, 12

3.2 Proposition 2 (P2)

Deux substances ayant des attributs différents n'ont rien en commun entre elles.

$$\forall x \forall y(S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y \rightarrow \neg \exists z(C_3(z,x,y)))$$

1	$S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y$	
2	$S_1(x)$	$\wedge$E, 1
3	$S_1(y)$	$\wedge$E, 1
4	$x \neq y$	$\wedge$E, 1
5	$S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x,x) \wedge C_2(x,x))$	D3
6	$I_2(x,x) \wedge C_2(x,x)$	$\Rightarrow$E, 2, 5
7	$C_2(x,x)$	$\wedge$E, 6
8	$S_1(y) \leftrightarrow (I_2(y,y) \wedge C_2(y,y))$	D3
9	$I_2(y,y) \wedge C_2(y,y)$	$\Rightarrow$E, 3, 8
10	$C_2(y,y)$	$\wedge$E, 9
11	$(\neg\exists z(z \neq x \wedge C_2(x,z))) \leftrightarrow C_2(x,x)$	A2
12	$C_2(x,x) \to \neg\exists z(z \neq x \wedge C_2(x,z))$	$\wedge$E, 11
13	$\neg\exists z(z \neq x \wedge C_2(x,z))$	$\Rightarrow$E, 7, 12
14	$\neg(y \neq x \wedge C_2(x,y))$	$\forall$E, 13
15	$y \neq x \to \neg C_2(x,y)$	$\Rightarrow$E, 14
16	$x \neq y \to y \neq x$	Logique
17	$x \neq y$	$\wedge$E, 1
18	$y \neq x$	$\Rightarrow$E, 17, 16
19	$\neg C_2(x,y)$	$\Rightarrow$E, 18, 15
20	$(\neg\exists z(z \neq y \wedge C_2(y,z))) \leftrightarrow C_2(y,y)$	A2
21	$C_2(y,y) \to \neg\exists z(z \neq y \wedge C_2(y,z))$	$\wedge$E, 20
22	$\neg\exists z(z \neq y \wedge C_2(y,z))$	$\Rightarrow$E, 10, 21
23	$\neg(x \neq y \wedge C_2(y,x))$	$\forall$E, 22
24	$x \neq y \to \neg C_2(y,x)$	$\Rightarrow$E, 23
25	$\neg C_2(y,x)$	$\Rightarrow$E, 4, 24
26	$(\neg\exists z(C_3(z,x,y))) \leftrightarrow (\neg C_2(x,y) \wedge \neg C_2(y,x))$	A5
27	$(\neg C_2(x,y) \wedge \neg C_2(y,x)) \to \neg\exists z(C_3(z,x,y))$	$\wedge$E, 26
28	$\neg C_2(x,y) \wedge \neg C_2(y,x)$	$\wedge$I, 19, 25
29	$\neg\exists z(C_3(z,x,y))$	$\Rightarrow$E, 28, 27
30	$S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y \to \neg\exists z(C_3(z,x,y))$	$\Rightarrow$I, 1–29
31	$\forall y(S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y \to \neg\exists z(C_3(z,x,y)))$	$\forall$I, 30
32	$\forall x\forall y(S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y \to \neg\exists z(C_3(z,x,y)))$	$\forall$I, 31