Preuves en Déduction Naturelle pour le système de Spinoza

D'après la formalisation de Jarrett

28 février 2025

1 Introduction

Ce document présente les preuves en déduction naturelle (système DN) pour les propositions principales de l'*Éthique* de Spinoza, d'après la formalisation de Charles Jarrett présentée dans *The Logical Structure of Spinoza's Ethics, Part I.*

2 Notation et symboles

2.1 Lexique

2.1.1 Opérateurs modaux

— $L(p)$: Nécessité logique - p est logiquement nécessaire

— $M(p)$: Possibilité - p est possible

— $N(p)$: Nécessité naturelle - p est naturellement nécessaire

2.2 Règles modales

— **R1** : $\forall P(L(P) \to N(P))$
La nécessité logique implique la nécessité naturelle

— **R2** : $\forall P(N(P) \to P)$
Axiome T pour la nécessité naturelle

— **R3** : $\forall P \forall Q(L(P \to Q) \to (L(P) \to L(Q)))$
Axiome K pour la nécessité logique

— **R4** : $\forall P(M(P) \to L(M(P)))$
Axiome S5 - possibilité et nécessité

— **R5** : $\forall P(P \to L(P))$
Règle de nécessitation

— **R6** : $\forall P \forall Q(N(P \to Q) \to (N(P) \to N(Q)))$
Axiome de distributivité pour la nécessité naturelle

2.2.1 Prédicats unaires

— $A_1(x)$: x est un attribut

— $B_1(x)$: x est libre

— $D_1(x)$: x est une instance de désir

— $E_1(x)$: x est éternel

— $F_1(x)$: x est fini

— $G_1(x)$: x est un dieu

— $J_1(x)$: x est une instance d'amour

— $K_1(x)$: x est une idée

— $M_1(x)$: x est un mode

— $N_1(x)$: x est nécessaire

— $S_1(x)$: x est une substance

— $T_1(x)$: x est vrai

— $U_1(x)$: x est un intellect

— $W_1(x)$: x est une volonté

2.2.2 Prédicats binaires

— $A_2(x, y)$: x est un attribut de y

— $C_2(x, y)$: x est conçu à travers y

— $I_2(x, y)$: x est en y

— $K_2(x, y)$: x est cause de y

— $L_2(x, y)$: x limite y

— $M_2(x, y)$: x est un mode de y

— $O_2(x, y)$: x est un objet de y

— $P_2(x, y)$: x est la puissance de y

— $R_2(x, y)$: x a plus de réalité que y

— $V_2(x, y)$: x a plus d'attributs que y

2.2.3 Prédicats ternaires

— $C_3(x, y, z)$: x est commun à y et à z

— $D_3(x, y, z)$: x est divisible entre y et z

2.3 Définitions

— **D1** : $K_2(x, x) \wedge \neg\exists y(y \neq x \wedge K_2(y, x)) \leftrightarrow L(\exists y(y = x))$
Causa sui - ce dont l'essence implique l'existence

— **D2** : $F_1(x) \leftrightarrow \exists y(y \neq x \wedge L_2(y, x) \wedge \forall z(A_2(z, x) \leftrightarrow A_2(z, y)))$
Une chose est finie quand elle peut être limitée par une autre de même nature

— **D3** : $S_1(y) \leftrightarrow (I_2(y, y) \wedge C_2(y, y))$
Une substance est ce qui est en soi et est conçu par soi

— **D4a** : $A_1(x) \leftrightarrow \exists y(S_1(y) \wedge I_2(x, y) \wedge C_2(x, y) \wedge I_2(y, x) \wedge C_2(y, x))$
Un attribut est ce que l'intellect perçoit de la substance comme constituant son essence

— **D4b** : $A_2(x, y) \leftrightarrow (A_1(x) \wedge C_2(y, x))$
x est un attribut de y

— **D5a** : $M_2(x, y) \leftrightarrow (x \neq y \wedge I_2(x, y) \wedge C_2(x, y))$
Un mode est ce qui est dans autre chose et est conçu par elle

— **D5b** : $M_1(x) \leftrightarrow \exists y(S_1(y) \wedge M_2(x, y))$
x est un mode

— **D6** : $G_1(x) \leftrightarrow (S_1(x) \wedge \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y, x)))$
Dieu est une substance constituée d'une infinité d'attributs

- **D7a** : $B_1(x) \leftrightarrow (K_2(x,x) \wedge \neg\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x)))$
  Une chose est libre quand elle n'est cause que d'elle-même
- **D7b** : $N_1(x) \leftrightarrow \exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x))$
  Une chose est nécessaire quand elle est déterminée par autre chose
- **D8** : $E_1(x) \leftrightarrow L(\exists v(v = x))$
  L'éternité est l'existence même en tant que nécessaire

2.4 Axiomes

- **A1** : $\forall x(I_2(x,x) \vee \exists y(y \neq x \wedge I_2(x,y)))$
  Tout ce qui est, est soit en soi, soit en autre chose
- **A2** : $\forall x((\neg\exists y(y \neq x \wedge C_2(x,y))) \leftrightarrow C_2(x,x))$
  Ce qui ne peut être conçu par un autre doit être conçu par soi
- **A3** : $\forall x \forall y(K_2(y,x) \rightarrow N((\exists v(v = y)) \leftrightarrow \exists v(v = x)))$
  D'une cause déterminée suit nécessairement un effet
- **A4** : $\forall x \forall y(K_2(x,y) \leftrightarrow C_2(y,x))$
  La connaissance de l'effet dépend de la connaissance de la cause
- **A5** : $\forall x \forall y((\neg\exists z(C_3(z,x,y))) \leftrightarrow (\neg C_2(x,y) \wedge \neg C_2(y,x)))$
  Les choses qui n'ont rien en commun ne peuvent être conçues l'une par l'autre
- **A6** : $\forall x(K_1(x) \rightarrow (T_1(x) \leftrightarrow \exists y(O_2(y,x) \wedge K_2(x,y))))$
  L'idée vraie doit s'accorder avec son objet
- **A7** : $\forall x(M(\neg\exists y(y = x)) \leftrightarrow \neg L(\exists y(y = x)))$
  Si une chose peut être conçue comme non existante, son essence n'implique pas l'existence
- **A8** : $\forall x \forall y(I_2(x,y) \rightarrow C_2(x,y))$
  Si x est en y alors x est conçu par y
- **A9** : $\forall x(\exists y(A_2(y,x)))$
  Toute chose a un attribut
- **A10** : $\forall x \forall y \forall z(D_3(x,y,z) \rightarrow M(\neg\exists w(w = x)))$
  Si x est divisible en y et z alors il est possible que x n'existe pas
- **A11** : $\forall x \forall y(S_1(x) \wedge L_2(y,x) \rightarrow S_1(y))$
  Si x est une substance et y limite x alors y est une substance
- **A12** : $\forall x((\exists y(M_2(x,y))) \rightarrow M_1(x))$
  Si x est un mode de quelque chose alors x est un mode
- **A13** : $M(\exists x(G_1(x)))$
  Il est possible qu'un Dieu existe
- **A14** : $\forall x(N(\exists y(y = x)) \leftrightarrow \neg F_1(x))$
  x existe nécessairement si et seulement si x n'est pas fini

3 Preuves en déduction naturelle

3.1 Proposition 1 (P1)

Si x est un mode de y et y est une substance, alors x est en y et y est en soi.

$$\forall x \forall y(M_2(x,y) \wedge S_1(y) \rightarrow I_2(x,y) \wedge I_2(y,y))$$

1	$M_2(x, y) \wedge S_1(y)$	
2	$M_2(x, y)$	$\wedge$E, 1
3	$S_1(y)$	$\wedge$E, 1
4	$S_1(y) \leftrightarrow (I_2(y, y) \wedge C_2(y, y))$	D3
5	$I_2(y, y) \wedge C_2(y, y)$	$\Rightarrow$E, 3, 4
6	$I_2(y, y)$	$\wedge$E, 5
7	$M_2(x, y) \leftrightarrow (x \neq y \wedge I_2(x, y) \wedge C_2(x, y))$	D5a
8	$x \neq y \wedge I_2(x, y) \wedge C_2(x, y)$	$\Rightarrow$E, 2, 7
9	$I_2(x, y)$	$\wedge$E, 8
10	$I_2(x, y) \wedge I_2(y, y)$	$\wedge$I, 9, 6