

Preuves en déduction naturelle du livre I de l'*Ethique* de Spinoza

Luc POMMERET
D'après la traduction de Jarrett

28 février 2025

Table des matières

1	Introduction	2
2	Notation et symboles	2
2.1	Lexique	2
2.1.1	Opérateurs modaux	2
2.2	Règles modales	2
2.2.1	Prédicats unaires	2
2.2.2	Prédicats binaires	2
2.2.3	Prédicats ternaires	3
2.3	Définitions	3
2.4	Axiomes	3
3	Preuves en déduction naturelle	4
3.1	Proposition 1 (P1)	4
3.2	Proposition 2 (P2)	5
3.3	Proposition 3 (P3)	6
3.4	Lemmes intermédiaires	7
3.4.1	Lemme DP1	7
3.4.2	Lemme DP4	7
3.4.3	Lemme DP5	8
3.4.4	Lemme DP6	9
3.4.5	Lemme DP7	10
3.5	Théorème DPI	11
3.6	Théorème DPII	12
3.7	Théorème DPIII	13
3.8	Proposition 4 (P4)	14
3.9	Proposition 5 (P5)	15
3.10	Proposition 6 (P6)	16
3.11	Corollaire de la Proposition 6 (P6c)	17
3.12	Proposition 7 (P7)	18
3.13	Proposition 8 (P8)	19
3.14	Proposition 9 (P9)	20
3.15	Proposition 10 (P10)	20
3.16	Proposition 11 (P11)	21
3.17	Proposition 12 (P12)	22
3.18	Proposition 13 (P13)	22
3.19	Proposition 14 (P14)	23
3.20	Proposition 14-A (P14-A)	24
3.21	Proposition 15 (P15)	25
3.22	Proposition 16 (P16)	26
3.23	Proposition 17 (P17)	27
3.24	Corollaire 2 de la Proposition 17 (P17c2)	28
3.25	Proposition 18 (P18)	29
3.26	Proposition 19 (P19)	30
3.27	Proposition 20 (P20)	31
3.28	Proposition 21 (P21)	32
3.29	Proposition 22 (P22)	33
3.30	Proposition 23 (P23)	34

1 Introduction

Ce document présente les preuves en déduction naturelle (système DN) pour les propositions principales de l'*Éthique* de Spinoza, d'après la formalisation de Charles Jarrett présentée dans *The Logical Structure of Spinoza's Ethics, Part I*.

2 Notation et symboles

2.1 Lexique

2.1.1 Opérateurs modaux

- $L(p)$: Nécessité logique - p est logiquement nécessaire
- $M(p)$: Possibilité - p est possible
- $N(p)$: Nécessité naturelle - p est naturellement nécessaire

2.2 Règles modales

- **R1** : $\forall P(L(P) \rightarrow N(P))$
La nécessité logique implique la nécessité naturelle
- **R2** : $\forall P(N(P) \rightarrow P)$
Axiome T pour la nécessité naturelle
- **R3** : $\forall P\forall Q(L(P \rightarrow Q) \rightarrow (L(P) \rightarrow L(Q)))$
Axiome K pour la nécessité logique
- **R4** : $\forall P(M(P) \rightarrow L(M(P)))$
Axiome S5 - possibilité et nécessité
- **R5** : $\forall P(P \rightarrow L(P))$
Règle de nécessitation
- **R6** : $\forall P\forall Q(N(P \rightarrow Q) \rightarrow (N(P) \rightarrow N(Q)))$
Axiome de distributivité pour la nécessité naturelle

2.2.1 Prédicats unaires

- $A_1(x)$: x est un attribut
- $B_1(x)$: x est libre
- $D_1(x)$: x est une instance de désir
- $E_1(x)$: x est éternel
- $F_1(x)$: x est fini
- $G_1(x)$: x est un dieu
- $J_1(x)$: x est une instance d'amour
- $K_1(x)$: x est une idée
- $M_1(x)$: x est un mode
- $N_1(x)$: x est nécessaire
- $S_1(x)$: x est une substance
- $T_1(x)$: x est vrai
- $U_1(x)$: x est un intellect
- $W_1(x)$: x est une volonté

2.2.2 Prédicats binaires

- $A_2(x, y)$: x est un attribut de y
- $C_2(x, y)$: x est conçu à travers y
- $I_2(x, y)$: x est en y
- $K_2(x, y)$: x est cause de y
- $L_2(x, y)$: x limite y
- $M_2(x, y)$: x est un mode de y
- $O_2(x, y)$: x est un objet de y
- $P_2(x, y)$: x est la puissance de y
- $R_2(x, y)$: x a plus de réalité que y
- $V_2(x, y)$: x a plus d'attributs que y

2.2.3 Prédicats ternaires

- $C_3(x, y, z) : x$ est commun à y et à z
- $D_3(x, y, z) : x$ est divisible entre y et z

2.3 Définitions

- **D1** : $K_2(x, x) \wedge \neg \exists y(y \neq x \wedge K_2(y, x)) \leftrightarrow L(\exists y(y = x))$
Causa sui - ce dont l'essence implique l'existence
- **D2** : $F_1(x) \leftrightarrow \exists y(y \neq x \wedge L_2(y, x) \wedge \forall z(A_2(z, x) \leftrightarrow A_2(z, y)))$
Une chose est finie quand elle peut être limitée par une autre de même nature
- **D3** : $S_1(y) \leftrightarrow (I_2(y, y) \wedge C_2(y, y))$
Une substance est ce qui est en soi et est conçu par soi
- **D4a** : $A_1(x) \leftrightarrow \exists y(S_1(y) \wedge I_2(x, y) \wedge C_2(x, y) \wedge I_2(y, x) \wedge C_2(y, x))$
Un attribut est ce que l'intellect perçoit de la substance comme constituant son essence
- **D4b** : $A_2(x, y) \leftrightarrow (A_1(x) \wedge C_2(y, x))$
 x est un attribut de y
- **D5a** : $M_2(x, y) \leftrightarrow (x \neq y \wedge I_2(x, y) \wedge C_2(x, y))$
Un mode est ce qui est dans autre chose et est conçu par elle
- **D5b** : $M_1(x) \leftrightarrow \exists y(S_1(y) \wedge M_2(x, y))$
 x est un mode
- **D6** : $G_1(x) \leftrightarrow (S_1(x) \wedge \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y, x)))$
Dieu est une substance constituée d'une infinité d'attributs
- **D7a** : $B_1(x) \leftrightarrow (K_2(x, x) \wedge \neg \exists y(y \neq x \wedge K_2(y, x)))$
Une chose est libre quand elle n'est cause que d'elle-même
- **D7b** : $N_1(x) \leftrightarrow \exists y(y \neq x \wedge K_2(y, x))$
Une chose est nécessaire quand elle est déterminée par autre chose
- **D8** : $E_1(x) \leftrightarrow L(\exists v(v = x))$
L'éternité est l'existence même en tant que nécessaire

2.4 Axiomes

- **A1** : $\forall x(I_2(x, x) \vee \exists y(y \neq x \wedge I_2(x, y)))$
Tout ce qui est, est soit en soi, soit en autre chose
- **A2** : $\forall x((\neg \exists y(y \neq x \wedge C_2(x, y))) \leftrightarrow C_2(x, x))$
Ce qui ne peut être conçu par un autre doit être conçu par soi
- **A3** : $\forall x \forall y(K_2(y, x) \rightarrow N((\exists v(v = y)) \leftrightarrow \exists v(v = x)))$
D'une cause déterminée suit nécessairement un effet
- **A4** : $\forall x \forall y(K_2(x, y) \leftrightarrow C_2(y, x))$
La connaissance de l'effet dépend de la connaissance de la cause
- **A5** : $\forall x \forall y((\neg \exists z(C_3(z, x, y))) \leftrightarrow (\neg C_2(x, y) \wedge \neg C_2(y, x)))$
Les choses qui n'ont rien en commun ne peuvent être conçues l'une par l'autre
- **A6** : $\forall x(K_1(x) \rightarrow (T_1(x) \leftrightarrow \exists y(O_2(y, x) \wedge K_2(x, y))))$
L'idée vraie doit s'accorder avec son objet
- **A7** : $\forall x(M(\neg \exists y(y = x)) \leftrightarrow \neg L(\exists y(y = x)))$
Si une chose peut être conçue comme non existante, son essence n'implique pas l'existence
- **A8** : $\forall x \forall y(I_2(x, y) \rightarrow C_2(x, y))$
Si x est en y alors x est conçu par y
- **A9** : $\forall x(\exists y(A_2(y, x)))$
Toute chose a un attribut
- **A10** : $\forall x \forall y \forall z(D_3(x, y, z) \rightarrow M(\neg \exists w(w = x)))$
Si x est divisible en y et z alors il est possible que x n'existe pas
- **A11** : $\forall x \forall y(S_1(x) \wedge L_2(y, x) \rightarrow S_1(y))$
Si x est une substance et y limite x alors y est une substance
- **A12** : $\forall x((\exists y(M_2(x, y))) \rightarrow M_1(x))$
Si x est un mode de quelque chose alors x est un mode
- **A13** : $M(\exists x(G_1(x)))$
Il est possible qu'un Dieu existe
- **A14** : $\forall x(N(\exists y(y = x)) \leftrightarrow \neg F_1(x))$
 x existe nécessairement si et seulement si x n'est pas fini

3 Preuves en déduction naturelle

3.1 Proposition 1 (P1)

Si x est un mode de y et y est une substance, alors x est en y et y est en soi.

$$\forall x \forall y (M_2(x, y) \wedge S_1(y) \rightarrow I_2(x, y) \wedge I_2(y, y))$$

1	$M_2(x, y) \wedge S_1(y)$	
2	$M_2(x, y)$	$\wedge E, 1$
3	$S_1(y)$	$\wedge E, 1$
4	$S_1(y) \leftrightarrow (I_2(y, y) \wedge C_2(y, y))$	D3
5	$I_2(y, y) \wedge C_2(y, y)$	$\Rightarrow E, 3, 4$
6	$I_2(y, y)$	$\wedge E, 5$
7	$M_2(x, y) \leftrightarrow (x \neq y \wedge I_2(x, y) \wedge C_2(x, y))$	D5a
8	$x \neq y \wedge I_2(x, y) \wedge C_2(x, y)$	$\Rightarrow E, 2, 7$
9	$I_2(x, y)$	$\wedge E, 8$
10	$I_2(x, y) \wedge I_2(y, y)$	$\wedge I, 9, 6$
11	$M_2(x, y) \wedge S_1(y) \rightarrow I_2(x, y) \wedge I_2(y, y)$	$\Rightarrow I, 1-10$
12	$\forall y (M_2(x, y) \wedge S_1(y) \rightarrow I_2(x, y) \wedge I_2(y, y))$	$\forall I, 11$
13	$\forall x \forall y (M_2(x, y) \wedge S_1(y) \rightarrow I_2(x, y) \wedge I_2(y, y))$	$\forall I, 12$

3.2 Proposition 2 (P2)

Deux substances ayant des attributs différents n'ont rien en commun entre elles.

$$\forall x \forall y (S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y \rightarrow \neg \exists z (C_3(z, x, y)))$$

1	$S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y$	
2	$S_1(x)$	$\wedge E, 1$
3	$S_1(y)$	$\wedge E, 1$
4	$x \neq y$	$\wedge E, 1$
5	$S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x, x) \wedge C_2(x, x))$	D3
6	$I_2(x, x) \wedge C_2(x, x)$	$\Rightarrow E, 2, 5$
7	$C_2(x, x)$	$\wedge E, 6$
8	$S_1(y) \leftrightarrow (I_2(y, y) \wedge C_2(y, y))$	D3
9	$I_2(y, y) \wedge C_2(y, y)$	$\Rightarrow E, 3, 8$
10	$C_2(y, y)$	$\wedge E, 9$
11	$(\neg \exists z (z \neq x \wedge C_2(x, z))) \leftrightarrow C_2(x, x)$	A2
12	$C_2(x, x) \rightarrow \neg \exists z (z \neq x \wedge C_2(x, z))$	$\wedge E, 11$
13	$\neg \exists z (z \neq x \wedge C_2(x, z))$	$\Rightarrow E, 7, 12$
14	$\neg (y \neq x \wedge C_2(x, y))$	$\forall E, 13$
15	$y \neq x \rightarrow \neg C_2(x, y)$	$\Rightarrow E, 14$
16	$x \neq y \rightarrow y \neq x$	Logique
17	$x \neq y$	$\wedge E, 1$
18	$y \neq x$	$\Rightarrow E, 17, 16$
19	$\neg C_2(x, y)$	$\Rightarrow E, 18, 15$
20	$(\neg \exists z (z \neq y \wedge C_2(y, z))) \leftrightarrow C_2(y, y)$	A2
21	$C_2(y, y) \rightarrow \neg \exists z (z \neq y \wedge C_2(y, z))$	$\wedge E, 20$
22	$\neg \exists z (z \neq y \wedge C_2(y, z))$	$\Rightarrow E, 10, 21$
23	$\neg (x \neq y \wedge C_2(y, x))$	$\forall E, 22$
24	$x \neq y \rightarrow \neg C_2(y, x)$	$\Rightarrow E, 23$
25	$\neg C_2(y, x)$	$\Rightarrow E, 4, 24$
26	$(\neg \exists z (C_3(z, x, y))) \leftrightarrow (\neg C_2(x, y) \wedge \neg C_2(y, x))$	A5
27	$(\neg C_2(x, y) \wedge \neg C_2(y, x)) \rightarrow \neg \exists z (C_3(z, x, y))$	$\wedge E, 26$
28	$\neg C_2(x, y) \wedge \neg C_2(y, x)$	$\wedge I, 19, 25$
29	$\neg \exists z (C_3(z, x, y))$	$\Rightarrow E, 28, 27$
30	$S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y \rightarrow \neg \exists z (C_3(z, x, y))$	$\Rightarrow I, 1-29$
31	$\forall y (S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y \rightarrow \neg \exists z (C_3(z, x, y)))$	$\forall I, 30$
32	$\forall x \forall y (S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y \rightarrow \neg \exists z (C_3(z, x, y)))$	$\forall I, 31$

3.3 Proposition 3 (P3)

Des choses qui n'ont rien en commun entre elles ne peuvent être cause l'une de l'autre.

$$\forall x \forall y (\neg \exists z (C_3(z, x, y)) \rightarrow \neg K_2(x, y) \wedge \neg K_2(y, x))$$

1	$\neg \exists z (C_3(z, x, y))$	
2	$(\neg \exists z (C_3(z, x, y))) \leftrightarrow (\neg C_2(x, y) \wedge \neg C_2(y, x))$	A5
3	$\neg C_2(x, y) \wedge \neg C_2(y, x)$	\Rightarrow E, 1, 2
4	$\neg C_2(x, y)$	\wedge E, 3
5	$\neg C_2(y, x)$	\wedge E, 3
6	$\forall a \forall b (K_2(a, b) \leftrightarrow C_2(b, a))$	A4
7	$K_2(x, y) \leftrightarrow C_2(y, x)$	\forall E, 6
8	$K_2(y, x) \leftrightarrow C_2(x, y)$	\forall E, 6
9	$K_2(x, y)$	
10	$C_2(y, x)$	\Rightarrow E, 9, 7
11	$\neg C_2(y, x)$	R, 5
12	$C_2(y, x) \wedge \neg C_2(y, x)$	\wedge I, 10, 11
13	\perp	\perp E, 12
14	$\neg K_2(x, y)$	\neg I, 9–13
15	$K_2(y, x)$	
16	$C_2(x, y)$	\Rightarrow E, 15, 8
17	$\neg C_2(x, y)$	R, 4
18	$C_2(x, y) \wedge \neg C_2(x, y)$	\wedge I, 16, 17
19	\perp	\perp E, 18
20	$\neg K_2(y, x)$	\neg I, 15–19
21	$\neg K_2(x, y) \wedge \neg K_2(y, x)$	\wedge I, 14, 20
22	$\neg \exists z (C_3(z, x, y)) \rightarrow \neg K_2(x, y) \wedge \neg K_2(y, x)$	\Rightarrow I, 1–21
23	$\forall y (\neg \exists z (C_3(z, x, y)) \rightarrow \neg K_2(x, y) \wedge \neg K_2(y, x))$	\forall I, 22
24	$\forall x \forall y (\neg \exists z (C_3(z, x, y)) \rightarrow \neg K_2(x, y) \wedge \neg K_2(y, x))$	\forall I, 23

3.4 Lemmes intermédiaires

3.4.1 Lemme DP1

x est une substance si et seulement si x est en soi.

$$\forall x(S_1(x) \leftrightarrow I_2(x, x))$$

1		$S_1(x)$	
2		$S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x, x) \wedge C_2(x, x))$	D3
3		$I_2(x, x) \wedge C_2(x, x)$	$\Rightarrow E, 1, 2$
4		$I_2(x, x)$	$\wedge E, 3$
5		$S_1(x) \rightarrow I_2(x, x)$	$\Rightarrow I, 1-4$
6		$I_2(x, x)$	
7		$I_2(x, x) \rightarrow C_2(x, x)$	A8
8		$C_2(x, x)$	$\Rightarrow E, 6, 7$
9		$I_2(x, x) \wedge C_2(x, x)$	$\wedge I, 6, 8$
10		$S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x, x) \wedge C_2(x, x))$	D3
11		$S_1(x)$	$\Rightarrow E, 9, 10$
12		$I_2(x, x) \rightarrow S_1(x)$	$\Rightarrow I, 6-11$
13		$S_1(x) \leftrightarrow I_2(x, x)$	$\Rightarrow I, 5, 12$
14		$\forall x(S_1(x) \leftrightarrow I_2(x, x))$	$\forall I, 13$

3.4.2 Lemme DP4

Une substance est sa propre cause.

$$\forall x(S_1(x) \rightarrow K_2(x, x))$$

1		$S_1(x)$	
2		$S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x, x) \wedge C_2(x, x))$	D3
3		$I_2(x, x) \wedge C_2(x, x)$	$\Rightarrow E, 1, 2$
4		$C_2(x, x)$	$\wedge E, 3$
5		$\forall a \forall b (K_2(a, b) \leftrightarrow C_2(b, a))$	A4
6		$K_2(x, x) \leftrightarrow C_2(x, x)$	$\forall E, 5$
7		$K_2(x, x)$	$\Rightarrow E, 4, 6$
8		$S_1(x) \rightarrow K_2(x, x)$	$\Rightarrow I, 1-7$
9		$\forall x(S_1(x) \rightarrow K_2(x, x))$	$\forall I, 8$

3.4.3 Lemme DP5

Toute chose est soit une substance soit un mode.

$$\forall x(S_1(x) \vee M_1(x))$$

1	$\forall x(I_2(x, x) \vee \exists y(y \neq x \wedge I_2(x, y)))$	A1
2	$I_2(x, x) \vee \exists y(y \neq x \wedge I_2(x, y))$	$\forall E, 1$
3	$I_2(x, x)$	
4	$S_1(x) \leftrightarrow I_2(x, x)$	DP1
5	$S_1(x)$	$\Rightarrow E, 3, 4$
6	$S_1(x) \vee M_1(x)$	$\vee I, 5$
7	$\exists y(y \neq x \wedge I_2(x, y))$	
8	$y \neq x \wedge I_2(x, y)$	
9	$y \neq x$	$\wedge E, 8$
10	$I_2(x, y)$	$\wedge E, 8$
11	$I_2(x, y) \rightarrow C_2(x, y)$	A8
12	$C_2(x, y)$	$\Rightarrow E, 10, 11$
13	$y \neq x \wedge I_2(x, y) \wedge C_2(x, y)$	$\wedge I, 9, 10, 12$
14	$M_2(x, y) \leftrightarrow (x \neq y \wedge I_2(x, y) \wedge C_2(x, y))$	D5a
15	$x \neq y \leftrightarrow y \neq x$	Logique
16	$x \neq y$	$\Rightarrow E, 9, 15$
17	$x \neq y \wedge I_2(x, y) \wedge C_2(x, y)$	$\wedge I, 16, 10, 12$
18	$M_2(x, y)$	$\Rightarrow E, 17, 14$
19	$(\exists y(M_2(x, y))) \rightarrow M_1(x)$	A12
20	$\exists y(M_2(x, y))$	$\exists I, 18$
21	$M_1(x)$	$\Rightarrow E, 20, 19$
22	$S_1(x) \vee M_1(x)$	$\vee I, 21$
23	$S_1(x) \vee M_1(x)$	$\exists E, 7, 8-22$
24	$S_1(x) \vee M_1(x)$	$\vee E, 2, 3-6, 7-23$
25	$\forall x(S_1(x) \vee M_1(x))$	$\forall I, 24$

3.4.4 Lemme DP6

Une substance et un mode ne peuvent jamais être la même chose.

$$\forall x(\neg(S_1(x) \wedge M_1(x)))$$

1	$S_1(x) \wedge M_1(x)$	
2	$S_1(x)$	$\wedge E, 1$
3	$M_1(x)$	$\wedge E, 1$
4	$M_1(x) \leftrightarrow \exists y(S_1(y) \wedge M_2(x, y))$	D5b
5	$\exists y(S_1(y) \wedge M_2(x, y))$	$\Rightarrow E, 3, 4$
6	$S_1(y) \wedge M_2(x, y)$	
7	$M_2(x, y)$	$\wedge E, 6$
8	$M_2(x, y) \leftrightarrow (x \neq y \wedge I_2(x, y) \wedge C_2(x, y))$	D5a
9	$x \neq y \wedge I_2(x, y) \wedge C_2(x, y)$	$\Rightarrow E, 7, 8$
10	$x \neq y$	$\wedge E, 9$
11	$C_2(x, y)$	$\wedge E, 9$
12	$S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x, x) \wedge C_2(x, x))$	D3
13	$I_2(x, x) \wedge C_2(x, x)$	$\Rightarrow E, 2, 12$
14	$C_2(x, x)$	$\wedge E, 13$
15	$(\neg \exists z(z \neq x \wedge C_2(x, z))) \leftrightarrow C_2(x, x)$	A2
16	$C_2(x, x) \rightarrow \neg \exists z(z \neq x \wedge C_2(x, z))$	$\wedge E, 15$
17	$\neg \exists z(z \neq x \wedge C_2(x, z))$	$\Rightarrow E, 14, 16$
18	$\neg(y \neq x \wedge C_2(x, y))$	$\forall E, 17$
19	$y \neq x \leftrightarrow x \neq y$	Logique
20	$y \neq x$	$\Rightarrow E, 10, 19$
21	$y \neq x \wedge C_2(x, y)$	$\wedge I, 20, 11$
22	$\neg(y \neq x \wedge C_2(x, y)) \wedge (y \neq x \wedge C_2(x, y))$	$\wedge I, 18, 21$
23	\perp	$\perp E, 22$
24	\perp	$\exists E, 5, 6-23$
25	$\neg(S_1(x) \wedge M_1(x))$	$\neg I, 1-24$
26	$\forall x(\neg(S_1(x) \wedge M_1(x)))$	$\forall I, 25$

3.4.5 Lemme DP7

Si x est un attribut de y et y est une substance, alors $x = y$.

$$\forall x \forall y (A_2(x, y) \wedge S_1(y) \rightarrow x = y)$$

1	$A_2(x, y) \wedge S_1(y)$	
2	$A_2(x, y)$	$\wedge E, 1$
3	$S_1(y)$	$\wedge E, 1$
4	$A_2(x, y) \leftrightarrow (A_1(x) \wedge C_2(y, x))$	D4b
5	$A_1(x) \wedge C_2(y, x)$	$\Rightarrow E, 2, 4$
6	$C_2(y, x)$	$\wedge E, 5$
7	$S_1(y) \leftrightarrow (I_2(y, y) \wedge C_2(y, y))$	D3
8	$I_2(y, y) \wedge C_2(y, y)$	$\Rightarrow E, 3, 7$
9	$C_2(y, y)$	$\wedge E, 8$
10	$(\neg \exists z (z \neq y \wedge C_2(y, z))) \leftrightarrow C_2(y, y)$	A2
11	$C_2(y, y) \rightarrow \neg \exists z (z \neq y \wedge C_2(y, z))$	$\wedge E, 10$
12	$\neg \exists z (z \neq y \wedge C_2(y, z))$	$\Rightarrow E, 9, 11$
13	$\neg (x \neq y \wedge C_2(y, x))$	$\forall E, 12$
14	$x \neq y \rightarrow \neg C_2(y, x)$	$\Rightarrow E, 13$
15	$C_2(y, x) \rightarrow \neg (x \neq y)$	Contraposée
16	$C_2(y, x)$	R, 6
17	$\neg (x \neq y)$	$\Rightarrow E, 16, 15$
18	$x = y$	$\neg E, 17$
19	$A_2(x, y) \wedge S_1(y) \rightarrow x = y$	$\Rightarrow I, 1-18$
20	$\forall y (A_2(x, y) \wedge S_1(y) \rightarrow x = y)$	$\forall I, 19$
21	$\forall x \forall y (A_2(x, y) \wedge S_1(y) \rightarrow x = y)$	$\forall I, 20$

3.5 Théorème DPI

Tout est soit une substance, soit un mode, mais pas les deux.

$$\forall x((S_1(x) \wedge \neg M_1(x)) \vee (\neg S_1(x) \wedge M_1(x)))$$

1	$\forall x(S_1(x) \vee M_1(x))$	DP5
2	$S_1(x) \vee M_1(x)$	$\forall E, 1$
3	$\forall x(\neg(S_1(x) \wedge M_1(x)))$	DP6
4	$\neg(S_1(x) \wedge M_1(x))$	$\forall E, 3$
5	$S_1(x)$	
6	$M_1(x)$	
7	$S_1(x) \wedge M_1(x)$	$\wedge I, 5, 6$
8	$\neg(S_1(x) \wedge M_1(x))$	R, 4
9	$(S_1(x) \wedge M_1(x)) \wedge \neg(S_1(x) \wedge M_1(x))$	$\wedge I, 7, 8$
10	\perp	$\perp E, 9$
11	$\neg M_1(x)$	$\neg I, 6-10$
12	$S_1(x) \wedge \neg M_1(x)$	$\wedge I, 5, 11$
13	$(S_1(x) \wedge \neg M_1(x)) \vee (\neg S_1(x) \wedge M_1(x))$	$\vee I, 12$
14	$M_1(x)$	
15	$S_1(x)$	
16	$S_1(x) \wedge M_1(x)$	$\wedge I, 15, 14$
17	$\neg(S_1(x) \wedge M_1(x))$	R, 4
18	$(S_1(x) \wedge M_1(x)) \wedge \neg(S_1(x) \wedge M_1(x))$	$\wedge I, 16, 17$
19	\perp	$\perp E, 18$
20	$\neg S_1(x)$	$\neg I, 15-19$
21	$\neg S_1(x) \wedge M_1(x)$	$\wedge I, 20, 14$
22	$(S_1(x) \wedge \neg M_1(x)) \vee (\neg S_1(x) \wedge M_1(x))$	$\vee I, 21$
23	$(S_1(x) \wedge \neg M_1(x)) \vee (\neg S_1(x) \wedge M_1(x))$	$\vee E, 2, 5-13, 14-22$
24	$\forall x((S_1(x) \wedge \neg M_1(x)) \vee (\neg S_1(x) \wedge M_1(x)))$	$\forall I, 23$

3.6 Théorème DPII

Une substance est ses propres attributs.

$$\forall x(S_1(x) \rightarrow A_2(x, x))$$

1	$S_1(x)$	
2	$A_2(x, y) \leftrightarrow (A_1(x) \wedge C_2(y, x))$	D4b
3	$S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x, x) \wedge C_2(x, x))$	D3
4	$I_2(x, x) \wedge C_2(x, x)$	\Rightarrow E, 1, 3
5	$C_2(x, x)$	\wedge E, 4
6	$A_1(x) \wedge C_2(x, x)$	
7	$A_2(x, x)$	\Rightarrow E, 6, 2
8	$A_1(x) \wedge C_2(x, x) \rightarrow A_2(x, x)$	\Rightarrow I, 6–7
9	$A_1(x) \leftrightarrow \exists y(S_1(y) \wedge I_2(x, y) \wedge C_2(x, y) \wedge I_2(y, x) \wedge C_2(y, x))$	D4a
10	$\exists y(S_1(y) \wedge I_2(x, y) \wedge C_2(x, y) \wedge I_2(y, x) \wedge C_2(y, x)) \rightarrow A_1(x)$	\wedge E, 9
11	$S_1(x) \wedge I_2(x, x) \wedge C_2(x, x) \wedge I_2(x, x) \wedge C_2(x, x)$	\wedge I, 1, 4, 4
12	$\exists y(S_1(y) \wedge I_2(x, y) \wedge C_2(x, y) \wedge I_2(y, x) \wedge C_2(y, x))$	\exists I, 11
13	$A_1(x)$	\Rightarrow E, 12, 10
14	$A_1(x) \wedge C_2(x, x)$	\wedge I, 13, 5
15	$A_2(x, x)$	\Rightarrow E, 14, 8
16	$S_1(x) \rightarrow A_2(x, x)$	\Rightarrow I, 1–15
17	$\forall x(S_1(x) \rightarrow A_2(x, x))$	\forall I, 16

3.7 Théorème DPIII

Quelque chose est une substance si et seulement si elle est causa sui.

$$\forall x(S_1(x) \leftrightarrow K_2(x, x))$$

1	$S_1(x)$	
2	$\forall y(S_1(y) \rightarrow K_2(y, y))$	DP4
3	$S_1(x) \rightarrow K_2(x, x)$	$\forall E$, 2
4	$K_2(x, x)$	$\Rightarrow E$, 1, 3
5	$S_1(x) \rightarrow K_2(x, x)$	$\Rightarrow I$, 1–4
6	$K_2(x, x)$	
7	$\forall a \forall b(K_2(a, b) \leftrightarrow C_2(b, a))$	A4
8	$K_2(x, x) \leftrightarrow C_2(x, x)$	$\forall E$, 7
9	$C_2(x, x)$	$\Rightarrow E$, 6, 8
10	$\forall y(I_2(y, y) \vee \exists z(z \neq y \wedge I_2(y, z)))$	A1
11	$I_2(x, x) \vee \exists z(z \neq x \wedge I_2(x, z))$	$\forall E$, 10
12	$I_2(x, x)$	
13	$I_2(x, x) \wedge C_2(x, x)$	$\wedge I$, 12, 9
14	$S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x, x) \wedge C_2(x, x))$	D3
15	$S_1(x)$	$\Rightarrow E$, 13, 14
16	$\exists z(z \neq x \wedge I_2(x, z))$	
17	$z \neq x \wedge I_2(x, z)$	
18	$I_2(x, z)$	$\wedge E$, 17
19	$\forall a \forall b(I_2(a, b) \rightarrow C_2(a, b))$	A8
20	$I_2(x, z) \rightarrow C_2(x, z)$	$\forall E$, 19
21	$C_2(x, z)$	$\Rightarrow E$, 18, 20
22	$z \neq x$	$\wedge E$, 17
23	$z \neq x \wedge C_2(x, z)$	$\wedge I$, 22, 21
24	$\exists y(y \neq x \wedge C_2(x, y))$	$\exists I$, 23
25	$(\neg \exists y(y \neq x \wedge C_2(x, y))) \leftrightarrow C_2(x, x)$	A2
26	$C_2(x, x) \rightarrow \neg \exists y(y \neq x \wedge C_2(x, y))$	$\wedge E$, 25
27	$\neg \exists y(y \neq x \wedge C_2(x, y))$	$\Rightarrow E$, 9, 26
28	$\exists y(y \neq x \wedge C_2(x, y)) \wedge \neg \exists y(y \neq x \wedge C_2(x, y))$	$\wedge I$, 24, 27
29	\perp	$\perp E$, 28
30	\perp	$\exists E$, 16, 17–29
31	$\neg \exists z(z \neq x \wedge I_2(x, z))$	$\neg I$, 16–30
32	$S_1(x)$	$\forall E$, 11, 12–15, 16–31
33	$K_2(x, x) \rightarrow S_1(x)$	$\Rightarrow I$, 6–32
34	$S_1(x) \leftrightarrow K_2(x, x)$	$\Rightarrow I$, 5, 33
35	$\forall x(S_1(x) \leftrightarrow K_2(x, x))$	$\forall I$, 34

3.8 Proposition 4 (P4)

Deux ou plusieurs choses distinctes ne peuvent se distinguer que par la diversité des attributs de leurs substances, ou par la diversité des affections de ces mêmes substances.

$$\forall x \forall y (x \neq y \rightarrow \exists z \exists z' ((A_2(z, x) \wedge A_2(z', y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z, x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z', y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y))))$$

1	$x \neq y$	
2	$\forall a ((S_1(a) \wedge \neg M_1(a)) \vee (\neg S_1(a) \wedge M_1(a)))$	DPI
3	$(S_1(x) \wedge \neg M_1(x)) \vee (\neg S_1(x) \wedge M_1(x))$	$\forall E, 2$
4	$S_1(x) \wedge \neg M_1(x)$	
5	$S_1(x)$	$\wedge E, 4$
6	$(S_1(y) \wedge \neg M_1(y)) \vee (\neg S_1(y) \wedge M_1(y))$	$\forall E, 2$
7	$S_1(y) \wedge \neg M_1(y)$	
8	$S_1(y)$	$\wedge E, 7$
9	$\forall a (S_1(a) \rightarrow A_2(a, a))$	DPII
10	$S_1(x) \rightarrow A_2(x, x)$	$\forall E, 9$
11	$A_2(x, x)$	$\Rightarrow E, 5, 10$
12	$S_1(y) \rightarrow A_2(y, y)$	$\forall E, 9$
13	$A_2(y, y)$	$\Rightarrow E, 8, 12$
14	$A_2(x, x) \wedge A_2(y, y) \wedge x \neq y$	$\wedge I, 11, 13, 1$
15	$\exists z \exists z' (A_2(z, x) \wedge A_2(z', y) \wedge z \neq z')$	$\exists I, 14$
16	$\exists z \exists z' ((A_2(z, x) \wedge A_2(z', y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z, x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z', y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))$	$\vee I, 15$
17	$\neg S_1(y) \wedge M_1(y)$	
18	$M_1(y)$	$\wedge E, 17$
19	$A_2(x, x)$	$\Rightarrow E, 5, 10$
20	$A_2(x, x) \wedge x = x \wedge M_1(y)$	$\wedge I, 19, ??, 18$
21	$\exists z \exists z' (A_2(z, x) \wedge z = x \wedge M_1(y))$	$\exists I, 20$
22	$\exists z \exists z' ((A_2(z, x) \wedge A_2(z', y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z, x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z', y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))$	$\vee I, 21$
23	$\exists z \exists z' ((A_2(z, x) \wedge A_2(z', y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z, x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z', y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))$	$\forall E, 6, 7-16, 17-22$
24	$\neg S_1(x) \wedge M_1(x)$	
25	$M_1(x)$	$\wedge E, 24$
26	$(S_1(y) \wedge \neg M_1(y)) \vee (\neg S_1(y) \wedge M_1(y))$	$\forall E, 2$
27	$S_1(y) \wedge \neg M_1(y)$	
28	$S_1(y)$	$\wedge E, 27$
29	$S_1(y) \rightarrow A_2(y, y)$	$\forall E, 9$
30	$A_2(y, y)$	$\Rightarrow E, 28, 29$
31	$A_2(y, y) \wedge y = y \wedge M_1(x)$	$\wedge I, 30, ??, 25$
32	$\exists z \exists z' (A_2(z', y) \wedge z' = y \wedge M_1(x))$	$\exists I, 31$
33	$\exists z \exists z' ((A_2(z, x) \wedge A_2(z', y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z, x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z', y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))$	$\vee I, 32$
34	$\neg S_1(y) \wedge M_1(y)$	
35	$M_1(y)$	$\wedge E, 34$
36	$M_1(x) \wedge M_1(y)$	$\wedge I, 25, 35$
37	$\exists z \exists z' (M_1(x) \wedge M_1(y))$	$\exists I, 36$
38	$\exists z \exists z' ((A_2(z, x) \wedge A_2(z', y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z, x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z', y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))$	$\vee I, 37$
39	$\exists z \exists z' ((A_2(z, x) \wedge A_2(z', y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z, x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z', y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))$	$\forall E, 26, 27-33, 34-38$
40	$\exists z \exists z' ((A_2(z, x) \wedge A_2(z', y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z, x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z', y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))$	$\forall E, 3, 4-23, 24-39$
41	$x \neq y \rightarrow \exists z \exists z' ((A_2(z, x) \wedge A_2(z', y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z, x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z', y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))$	$\Rightarrow I, 1-40$
42	$\forall y (x \neq y \rightarrow \exists z \exists z' ((A_2(z, x) \wedge A_2(z', y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z, x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z', y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y))))$	$\forall I, 41$
43	$\forall x \forall y (x \neq y \rightarrow \exists z \exists z' ((A_2(z, x) \wedge A_2(z', y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z, x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z', y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y))))$	$\forall I, 42$

3.9 Proposition 5 (P5)

Il ne peut y avoir, dans la nature des choses, deux ou plusieurs substances de même nature, ou, en d'autres termes, de même attribut.

$$\forall x \forall y (S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y \rightarrow \neg \exists z (A_2(z, x) \wedge A_2(z, y)))$$

1	$S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y$	
2	$S_1(x)$	$\wedge E, 1$
3	$S_1(y)$	$\wedge E, 1$
4	$x \neq y$	$\wedge E, 1$
5	$\exists z (A_2(z, x) \wedge A_2(z, y))$	
6	$A_2(z, x) \wedge A_2(z, y)$	
7	$A_2(z, x)$	$\wedge E, 6$
8	$A_2(z, y)$	$\wedge E, 6$
9	$\forall a \forall b (A_2(a, b) \wedge S_1(b) \rightarrow a = b)$	DP7
10	$A_2(z, x) \wedge S_1(x) \rightarrow z = x$	$\forall E, 9$
11	$A_2(z, x) \wedge S_1(x)$	$\wedge I, 7, 2$
12	$z = x$	$\Rightarrow E, 11, 10$
13	$A_2(z, y) \wedge S_1(y) \rightarrow z = y$	$\forall E, 9$
14	$A_2(z, y) \wedge S_1(y)$	$\wedge I, 8, 3$
15	$z = y$	$\Rightarrow E, 14, 13$
16	$z = x \wedge z = y$	$\wedge I, 12, 15$
17	$x = z$	12
18	$x = y$	17, 15
19	$x \neq y$	R, 4
20	$x = y \wedge x \neq y$	$\wedge I, 18, 19$
21	\perp	$\perp E, 20$
22	\perp	$\exists E, 5, 6-21$
23	$\neg \exists z (A_2(z, x) \wedge A_2(z, y))$	$\neg I, 5-22$
24	$S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y \rightarrow \neg \exists z (A_2(z, x) \wedge A_2(z, y))$	$\Rightarrow I, 1-23$
25	$\forall y (S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y \rightarrow \neg \exists z (A_2(z, x) \wedge A_2(z, y)))$	$\forall I, 24$
26	$\forall x \forall y (S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y \rightarrow \neg \exists z (A_2(z, x) \wedge A_2(z, y)))$	$\forall I, 25$

3.10 Proposition 6 (P6)

Une substance ne peut être produite par une autre substance.

$$\forall x \forall y (S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y \rightarrow \neg(K_2(x, y) \wedge \neg K_2(y, x)))$$

1	$S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y$	
2	$S_1(x)$	$\wedge E, 1$
3	$S_1(y)$	$\wedge E, 1$
4	$x \neq y$	$\wedge E, 1$
5	$\forall a \forall b (S_1(a) \wedge S_1(b) \wedge a \neq b \rightarrow \neg \exists z (C_3(z, a, b)))$	P2
6	$S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y \rightarrow \neg \exists z (C_3(z, x, y))$	$\forall E, 5$
7	$\neg \exists z (C_3(z, x, y))$	$\Rightarrow E, 1, 6$
8	$\forall a \forall b (\neg \exists z (C_3(z, a, b)) \rightarrow \neg K_2(a, b) \wedge \neg K_2(b, a))$	P3
9	$\neg \exists z (C_3(z, x, y)) \rightarrow \neg K_2(x, y) \wedge \neg K_2(y, x)$	$\forall E, 8$
10	$\neg K_2(x, y) \wedge \neg K_2(y, x)$	$\Rightarrow E, 7, 9$
11	$\neg K_2(x, y)$	$\wedge E, 10$
12	$K_2(x, y) \wedge \neg K_2(y, x)$	
13	$K_2(x, y)$	$\wedge E, 12$
14	$\neg K_2(x, y)$	R, 11
15	$K_2(x, y) \wedge \neg K_2(x, y)$	$\wedge I, 13, 14$
16	\perp	$\perp E, 15$
17	$\neg(K_2(x, y) \wedge \neg K_2(y, x))$	$\neg I, 12-16$
18	$S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y \rightarrow \neg(K_2(x, y) \wedge \neg K_2(y, x))$	$\Rightarrow I, 1-17$
19	$\forall y (S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y \rightarrow \neg(K_2(x, y) \wedge \neg K_2(y, x)))$	$\forall I, 18$
20	$\forall x \forall y (S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y \rightarrow \neg(K_2(x, y) \wedge \neg K_2(y, x)))$	$\forall I, 19$

3.11 Corollaire de la Proposition 6 (P6c)

Une substance ne peut être produite par autre chose.

$$\forall x(S_1(x) \rightarrow \neg(\exists y(y \neq x \wedge K_2(y, x))))$$

1	$S_1(x)$	
2	$S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x, x) \wedge C_2(x, x))$	D3
3	$I_2(x, x) \wedge C_2(x, x)$	$\Rightarrow E, 1, 2$
4	$C_2(x, x)$	$\wedge E, 3$
5	$(\neg \exists z(z \neq x \wedge C_2(x, z))) \leftrightarrow C_2(x, x)$	A2
6	$C_2(x, x) \rightarrow \neg \exists z(z \neq x \wedge C_2(x, z))$	$\wedge E, 5$
7	$\neg \exists z(z \neq x \wedge C_2(x, z))$	$\Rightarrow E, 4, 6$
8	$\exists y(y \neq x \wedge K_2(y, x))$	
9	$y \neq x \wedge K_2(y, x)$	
10	$y \neq x$	$\wedge E, 9$
11	$K_2(y, x)$	$\wedge E, 9$
12	$\forall a \forall b(K_2(a, b) \leftrightarrow C_2(b, a))$	A4
13	$K_2(y, x) \leftrightarrow C_2(x, y)$	$\forall E, 12$
14	$C_2(x, y)$	$\Rightarrow E, 11, 13$
15	$y \neq x \wedge C_2(x, y)$	$\wedge I, 10, 14$
16	$\exists z(z \neq x \wedge C_2(x, z))$	$\exists I, 15$
17	$\neg \exists z(z \neq x \wedge C_2(x, z))$	R, 7
18	$\exists z(z \neq x \wedge C_2(x, z)) \wedge \neg \exists z(z \neq x \wedge C_2(x, z))$	$\wedge I, 16, 17$
19	\perp	$\perp E, 18$
20	\perp	$\exists E, 8, 9-19$
21	$\neg \exists y(y \neq x \wedge K_2(y, x))$	$\neg I, 8-20$
22	$S_1(x) \rightarrow \neg(\exists y(y \neq x \wedge K_2(y, x)))$	$\Rightarrow I, 1-21$
23	$\forall x(S_1(x) \rightarrow \neg(\exists y(y \neq x \wedge K_2(y, x))))$	$\forall I, 22$

3.12 Proposition 7 (P7)

Il appartient à la nature de la substance d'exister.

$$\forall x(S_1(x) \rightarrow L(\exists y(y = x)))$$

1	$S_1(x)$	
2	$S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x, x) \wedge C_2(x, x))$	D3
3	$I_2(x, x) \wedge C_2(x, x)$	$\Rightarrow E, 1, 2$
4	$C_2(x, x)$	$\wedge E, 3$
5	$\forall a \forall b (K_2(a, b) \leftrightarrow C_2(b, a))$	A4
6	$K_2(x, x) \leftrightarrow C_2(x, x)$	$\forall E, 5$
7	$K_2(x, x)$	$\Rightarrow E, 4, 6$
8	$\forall a (S_1(a) \rightarrow \neg(\exists b (b \neq a \wedge K_2(b, a))))$	P6c
9	$S_1(x) \rightarrow \neg(\exists y (y \neq x \wedge K_2(y, x)))$	$\forall E, 8$
10	$\neg(\exists y (y \neq x \wedge K_2(y, x)))$	$\Rightarrow E, 1, 9$
11	$K_2(x, x) \wedge \neg \exists y (y \neq x \wedge K_2(y, x))$	$\wedge I, 7, 10$
12	$K_2(x, x) \wedge \neg \exists y (y \neq x \wedge K_2(y, x)) \leftrightarrow L(\exists y (y = x))$	D1
13	$L(\exists y (y = x))$	$\Rightarrow E, 11, 12$
14	$S_1(x) \rightarrow L(\exists y (y = x))$	$\Rightarrow I, 1-13$
15	$\forall x (S_1(x) \rightarrow L(\exists y (y = x)))$	$\forall I, 14$

3.13 Proposition 8 (P8)

Toute substance est nécessairement infinie.

$$\forall x(S_1(x) \rightarrow \neg F_1(x))$$

1		$S_1(x)$	
2		$F_1(x)$	
3		$F_1(x) \leftrightarrow \exists y(y \neq x \wedge L_2(y, x) \wedge \forall z(A_2(z, x) \leftrightarrow A_2(z, y)))$	D2
4		$\exists y(y \neq x \wedge L_2(y, x) \wedge \forall z(A_2(z, x) \leftrightarrow A_2(z, y)))$	\Rightarrow E, 2, 3
5		$y \neq x \wedge L_2(y, x) \wedge \forall z(A_2(z, x) \leftrightarrow A_2(z, y))$	
6		$y \neq x$	\wedge E, 5
7		$L_2(y, x)$	\wedge E, 5
8		$\forall z(A_2(z, x) \leftrightarrow A_2(z, y))$	\wedge E, 5
9		$\forall a \forall b(S_1(a) \wedge L_2(b, a) \rightarrow S_1(b))$	A11
10		$S_1(x) \wedge L_2(y, x) \rightarrow S_1(y)$	\forall E, 9
11		$S_1(x) \wedge L_2(y, x)$	\wedge I, 1, 7
12		$S_1(y)$	\Rightarrow E, 11, 10
13		$\forall a(\exists b(A_2(b, a)))$	A9
14		$\exists b(A_2(b, x))$	\forall E, 13
15		$A_2(z, x)$	
16		$A_2(z, x) \leftrightarrow A_2(z, y)$	\forall E, 8
17		$A_2(z, y)$	\Rightarrow E, 15, 16
18		$A_2(z, x) \wedge A_2(z, y)$	\wedge I, 15, 17
19		$\exists z(A_2(z, x) \wedge A_2(z, y))$	\exists I, 18
20		$\forall a \forall b(S_1(a) \wedge S_1(b) \wedge a \neq b \rightarrow \neg \exists z(A_2(z, a) \wedge A_2(z, b)))$	P5
21		$S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y \rightarrow \neg \exists z(A_2(z, x) \wedge A_2(z, y))$	\forall E, 20
22		$S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y$	\wedge I, 1, 12, 6
23		$\neg \exists z(A_2(z, x) \wedge A_2(z, y))$	\Rightarrow E, 22, 21
24		$\exists z(A_2(z, x) \wedge A_2(z, y)) \wedge \neg \exists z(A_2(z, x) \wedge A_2(z, y))$	\wedge I, 19, 23
25		\perp	\perp E, 24
26		\perp	\exists E, 14, 15–25
27		\perp	\exists E, 4, 5–26
28		$\neg F_1(x)$	\neg I, 2–27
29		$S_1(x) \rightarrow \neg F_1(x)$	\Rightarrow I, 1–28
30		$\forall x(S_1(x) \rightarrow \neg F_1(x))$	\forall I, 29

3.14 Proposition 9 (P9)

Suivant qu'une chose a plus de réalité ou d'être, un plus grand nombre d'attributs lui appartient.

$$\forall x \forall y ((S_1(x) \wedge S_1(y)) \rightarrow (R_2(x, y) \leftrightarrow V_2(x, y)))$$

1		$S_1(x) \wedge S_1(y)$	
2		$\forall a \forall b ((S_1(a) \wedge S_1(b)) \rightarrow (R_2(a, b) \leftrightarrow V_2(a, b)))$	A18
3		$(S_1(x) \wedge S_1(y)) \rightarrow (R_2(x, y) \leftrightarrow V_2(x, y))$	$\forall E, 2$
4		$R_2(x, y) \leftrightarrow V_2(x, y)$	$\Rightarrow E, 1, 3$
5		$(S_1(x) \wedge S_1(y)) \rightarrow (R_2(x, y) \leftrightarrow V_2(x, y))$	$\Rightarrow I, 1-4$
6		$\forall y ((S_1(x) \wedge S_1(y)) \rightarrow (R_2(x, y) \leftrightarrow V_2(x, y)))$	$\forall I, 5$
7		$\forall x \forall y ((S_1(x) \wedge S_1(y)) \rightarrow (R_2(x, y) \leftrightarrow V_2(x, y)))$	$\forall I, 6$

3.15 Proposition 10 (P10)

Tout attribut d'une substance doit être conçu par soi.

$$\forall x (A_1(x) \rightarrow C_2(x, x))$$

1		$A_1(x)$	
2		$A_1(x) \leftrightarrow \exists y (S_1(y) \wedge I_2(x, y) \wedge C_2(x, y) \wedge I_2(y, x) \wedge C_2(y, x))$	D4a
3		$\exists y (S_1(y) \wedge I_2(x, y) \wedge C_2(x, y) \wedge I_2(y, x) \wedge C_2(y, x))$	$\Rightarrow E, 1, 2$
4		$S_1(y) \wedge I_2(x, y) \wedge C_2(x, y) \wedge I_2(y, x) \wedge C_2(y, x)$	
5		$S_1(y)$	$\wedge E, 4$
6		$C_2(y, x)$	$\wedge E, 4$
7		$S_1(y) \leftrightarrow (I_2(y, y) \wedge C_2(y, y))$	D3
8		$I_2(y, y) \wedge C_2(y, y)$	$\Rightarrow E, 5, 7$
9		$C_2(y, y)$	$\wedge E, 8$
10		$(\neg \exists z (z \neq y \wedge C_2(y, z))) \leftrightarrow C_2(y, y)$	A2
11		$C_2(y, y) \rightarrow \neg \exists z (z \neq y \wedge C_2(y, z))$	$\wedge E, 10$
12		$\neg \exists z (z \neq y \wedge C_2(y, z))$	$\Rightarrow E, 9, 11$
13		$x \neq y$	
14		$x \neq y \wedge C_2(y, x)$	$\wedge I, 13, 6$
15		$\exists z (z \neq y \wedge C_2(y, z))$	$\exists I, 14$
16		$\neg \exists z (z \neq y \wedge C_2(y, z))$	R, 12
17		$\exists z (z \neq y \wedge C_2(y, z)) \wedge \neg \exists z (z \neq y \wedge C_2(y, z))$	$\wedge I, 15, 16$
18		\perp	$\perp E, 17$
19		$\neg(x \neq y)$	$\neg I, 13-18$
20		$x = y$	$\neg E, 19$
21		$C_2(y, y)$	R, 9
22		$C_2(x, x)$	20, 21
23		$C_2(x, x)$	$\exists E, 3, 4-22$
24		$A_1(x) \rightarrow C_2(x, x)$	$\Rightarrow I, 1-23$
25		$\forall x (A_1(x) \rightarrow C_2(x, x))$	$\forall I, 24$

3.16 Proposition 11 (P11)

Dieu, c'est-à-dire une substance constituée par une infinité d'attributs dont chacun exprime une essence éternelle et infinie, existe nécessairement.

$$L(\exists x(G_1(x)))$$

1	$M(\exists x(G_1(x)))$	A13
2	$\exists x(G_1(x))$	
3	$G_1(g)$	
4	$G_1(x) \leftrightarrow (S_1(x) \wedge \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y, x)))$	D6
5	$S_1(g) \wedge \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y, g))$	\Rightarrow E, 3, 4
6	$S_1(g)$	\wedge E, 5
7	$\forall x(S_1(x) \rightarrow L(\exists y(y = x)))$	P7
8	$S_1(g) \rightarrow L(\exists y(y = g))$	\forall E, 7
9	$L(\exists y(y = g))$	\Rightarrow E, 6, 8
10	$\exists y(y = g)$	
11	$y = g$	
12	$G_1(g)$	R, 3
13	$G_1(y)$	11,12
14	$\exists x(G_1(x))$	\exists I, 13
15	$\exists x(G_1(x))$	\exists E, 10, 11–14
16	$(\exists y(y = g)) \rightarrow (\exists x(G_1(x)))$	\Rightarrow I, 10–15
17	$L((\exists y(y = g)) \rightarrow (\exists x(G_1(x))))$	R5, 16
18	$L(\exists y(y = g)) \rightarrow L(\exists x(G_1(x)))$	R3, 17
19	$L(\exists x(G_1(x)))$	\Rightarrow E, 9, 18
20	$L(\exists x(G_1(x)))$	\exists E, 2, 3–19
21	$(\exists x(G_1(x))) \rightarrow L(\exists x(G_1(x)))$	\Rightarrow I, 2–20
22	$L((\exists x(G_1(x))) \rightarrow L(\exists x(G_1(x))))$	R5, 21
23	$M(\exists x(G_1(x))) \wedge L((\exists x(G_1(x))) \rightarrow L(\exists x(G_1(x))))$	\wedge I, 1, 22
24	$L(\exists x(G_1(x)))$	S5, 23

3.17 Proposition 12 (P12)

On ne peut concevoir selon sa véritable nature aucun attribut de la substance duquel il résulte que la substance soit divisible.

$$\forall x(S_1(x) \rightarrow \neg \exists y \exists z(D_3(x, y, z)))$$

1	<u>$S_1(x)$</u>	
2	<u>$\exists y \exists z(D_3(x, y, z))$</u>	
3	<u>$D_3(x, y, z)$</u>	
4	$\forall a \forall b \forall c(D_3(a, b, c) \rightarrow M(\neg \exists w(w = a)))$	A10
5	$D_3(x, y, z) \rightarrow M(\neg \exists w(w = x))$	$\forall E, 4$
6	$M(\neg \exists w(w = x))$	$\Rightarrow E, 3, 5$
7	$\forall a(S_1(a) \rightarrow L(\exists w(w = a)))$	P7
8	$S_1(x) \rightarrow L(\exists w(w = x))$	$\forall E, 7$
9	$L(\exists w(w = x))$	$\Rightarrow E, 1, 8$
10	$\forall a(M(\neg \exists w(w = a)) \leftrightarrow \neg L(\exists w(w = a)))$	A7
11	$M(\neg \exists w(w = x)) \leftrightarrow \neg L(\exists w(w = x))$	$\forall E, 10$
12	$M(\neg \exists w(w = x)) \rightarrow \neg L(\exists w(w = x))$	$\wedge E, 11$
13	$\neg L(\exists w(w = x))$	$\Rightarrow E, 6, 12$
14	$L(\exists w(w = x)) \wedge \neg L(\exists w(w = x))$	$\wedge I, 9, 13$
15	\perp	$\perp E, 14$
16	\perp	$\exists E, 2, 3-15$
17	$\neg \exists y \exists z(D_3(x, y, z))$	$\neg I, 2-16$
18	$S_1(x) \rightarrow \neg \exists y \exists z(D_3(x, y, z))$	$\Rightarrow I, 1-17$
19	$\forall x(S_1(x) \rightarrow \neg \exists y \exists z(D_3(x, y, z)))$	$\forall I, 18$

3.18 Proposition 13 (P13)

La substance absolument infinie est indivisible.

$$\forall x(S_1(x) \wedge (\forall w(A_1(w) \rightarrow A_2(w, x))) \rightarrow \neg \exists y \exists z(D_3(x, y, z)))$$

1		<u>$S_1(x) \wedge (\forall w(A_1(w) \rightarrow A_2(w, x)))$</u>	
2		$S_1(x)$	$\wedge E, 1$
3		$\forall a(S_1(a) \rightarrow \neg \exists y \exists z(D_3(a, y, z)))$	P12
4		$S_1(x) \rightarrow \neg \exists y \exists z(D_3(x, y, z))$	$\forall E, 3$
5		$\neg \exists y \exists z(D_3(x, y, z))$	$\Rightarrow E, 2, 4$
6		$S_1(x) \wedge (\forall w(A_1(w) \rightarrow A_2(w, x))) \rightarrow \neg \exists y \exists z(D_3(x, y, z))$	$\Rightarrow I, 1-5$
7		$\forall x(S_1(x) \wedge (\forall w(A_1(w) \rightarrow A_2(w, x))) \rightarrow \neg \exists y \exists z(D_3(x, y, z)))$	$\forall I, 6$

3.19 Proposition 14 (P14)

Il ne peut exister et on ne peut concevoir aucune autre substance que Dieu.

$$\exists x(G_1(x) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = x))$$

1	$L(\exists x(G_1(x)))$	P11
2	$L(p) \rightarrow p$	R2
3	$\exists x(G_1(x))$	\Rightarrow E, 1, 2
4	$G_1(g)$	
5	$G_1(x) \leftrightarrow (S_1(x) \wedge \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y, x)))$	D6
6	$S_1(g) \wedge \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y, g))$	\Rightarrow E, 4, 5
7	$S_1(g)$	\wedge E, 6
8	$\forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y, g))$	\wedge E, 6
9	$S_1(s)$	
10	$\forall x(\exists y(A_2(y, x)))$	A9
11	$\exists y(A_2(y, s))$	\forall E, 10
12	$A_2(a, s)$	
13	$A_2(a, s) \leftrightarrow (A_1(a) \wedge C_2(s, a))$	D4b
14	$A_1(a) \wedge C_2(s, a)$	\Rightarrow E, 12, 13
15	$A_1(a)$	\wedge E, 14
16	$A_1(a) \rightarrow A_2(a, g)$	\forall E, 8
17	$A_2(a, g)$	\Rightarrow E, 15, 16
18	$A_2(a, g) \wedge A_2(a, s)$	\wedge I, 17, 12
19	$\exists z(A_2(z, g) \wedge A_2(z, s))$	\exists I, 18
20	$g \neq s$	
21	$S_1(g) \wedge S_1(s) \wedge g \neq s$	\wedge I, 7, 9, 20
22	$\forall x \forall y (S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y \rightarrow \neg \exists z (A_2(z, x) \wedge A_2(z, y)))$	P5
23	$S_1(g) \wedge S_1(s) \wedge g \neq s \rightarrow \neg \exists z (A_2(z, g) \wedge A_2(z, s))$	\forall E, 22
24	$\neg \exists z (A_2(z, g) \wedge A_2(z, s))$	\Rightarrow E, 21, 23
25	$\exists z (A_2(z, g) \wedge A_2(z, s))$	R, 19
26	$\neg \exists z (A_2(z, g) \wedge A_2(z, s)) \wedge \exists z (A_2(z, g) \wedge A_2(z, s))$	\wedge I, 24, 25
27	\perp	\perp E, 26
28	$\neg(g \neq s)$	\neg I, 20–27
29	$g = s$	\neg E, 28
30	$g = s$	\exists E, 11, 12–29
31	$S_1(s) \rightarrow g = s$	\Rightarrow I, 9–30
32	$\forall y(S_1(y) \rightarrow y = g)$	\forall I, 31
33	$G_1(g) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = g)$	\wedge I, 4, 32
34	$\exists x(G_1(x) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = x))$	\exists I, 33
35	$\exists x(G_1(x) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = x))$	\exists E, 3, 4–34

3.20 Proposition 14-A (P14-A)

Version alternative de P14 : Il existe exactement un Dieu.

$$\exists x \forall y (G_1(y) \leftrightarrow y = x)$$

1	$\exists x (G_1(x) \wedge \forall y (S_1(y) \rightarrow y = x))$	P14
2	$G_1(g) \wedge \forall y (S_1(y) \rightarrow y = g)$	
3	$G_1(g)$	$\wedge E, 2$
4	$\forall y (S_1(y) \rightarrow y = g)$	$\wedge E, 2$
5	$G_1(x) \leftrightarrow (S_1(x) \wedge \forall z (A_1(z) \rightarrow A_2(z, x)))$	D6
6	$G_1(y)$	
7	$S_1(y) \wedge \forall z (A_1(z) \rightarrow A_2(z, y))$	$\Rightarrow E, 6, 5$
8	$S_1(y)$	$\wedge E, 7$
9	$S_1(y) \rightarrow y = g$	$\forall E, 4$
10	$y = g$	$\Rightarrow E, 8, 9$
11	$G_1(y) \rightarrow y = g$	$\Rightarrow I, 6-10$
12	$y = g$	
13	$G_1(g)$	R, 3
14	$G_1(y)$	12,13
15	$y = g \rightarrow G_1(y)$	$\Rightarrow I, 12-14$
16	$G_1(y) \leftrightarrow y = g$	$\Rightarrow I, 11, 15$
17	$\forall y (G_1(y) \leftrightarrow y = g)$	$\forall I, 16$
18	$\exists x \forall y (G_1(y) \leftrightarrow y = x)$	$\exists I, 17$
19	$\exists x \forall y (G_1(y) \leftrightarrow y = x)$	$\exists E, 1, 2-18$

3.21 Proposition 15 (P15)

Tout ce qui existe est en Dieu et rien ne peut être ni être conçu sans Dieu.

$$\forall x \exists g (G_1(g) \wedge I_2(x, g) \wedge C_2(x, g))$$

1	$\exists g (G_1(g) \wedge \forall y (S_1(y) \rightarrow y = g))$	P14
2	$G_1(g) \wedge \forall y (S_1(y) \rightarrow y = g)$	
3	$G_1(g)$	$\wedge E, 2$
4	$\forall y (S_1(y) \rightarrow y = g)$	$\wedge E, 2$
5	$\forall x (S_1(x) \vee M_1(x))$	DP5
6	$S_1(x) \vee M_1(x)$	$\vee E, 5$
7	$S_1(x)$	
8	$S_1(x) \rightarrow x = g$	$\vee E, 4$
9	$x = g$	$\Rightarrow E, 7, 8$
10	$S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x, x) \wedge C_2(x, x))$	D3
11	$I_2(x, x) \wedge C_2(x, x)$	$\Rightarrow E, 7, 10$
12	$I_2(x, x)$	$\wedge E, 11$
13	$C_2(x, x)$	$\wedge E, 11$
14	$I_2(x, g)$	9,12
15	$C_2(x, g)$	9,13
16	$I_2(x, g) \wedge C_2(x, g)$	$\wedge I, 14, 15$
17	$G_1(g) \wedge I_2(x, g) \wedge C_2(x, g)$	$\wedge I, 3, 16$
18	$\exists g (G_1(g) \wedge I_2(x, g) \wedge C_2(x, g))$	$\exists I, 17$
19	$M_1(x)$	
20	$M_1(x) \leftrightarrow \exists y (S_1(y) \wedge M_2(x, y))$	D5b
21	$\exists y (S_1(y) \wedge M_2(x, y))$	$\Rightarrow E, 19, 20$
22	$S_1(y) \wedge M_2(x, y)$	
23	$S_1(y)$	$\wedge E, 22$
24	$M_2(x, y)$	$\wedge E, 22$
25	$S_1(y) \rightarrow y = g$	$\vee E, 4$
26	$y = g$	$\Rightarrow E, 23, 25$
27	$M_2(x, g)$	24,26
28	$M_2(x, y) \leftrightarrow (x \neq y \wedge I_2(x, y) \wedge C_2(x, y))$	D5a
29	$x \neq g \wedge I_2(x, g) \wedge C_2(x, g)$	$\Rightarrow E, 27, 28$
30	$I_2(x, g) \wedge C_2(x, g)$	$\wedge E, 29$
31	$G_1(g) \wedge I_2(x, g) \wedge C_2(x, g)$	$\wedge I, 3, 30$
32	$\exists g (G_1(g) \wedge I_2(x, g) \wedge C_2(x, g))$	$\exists I, 31$
33	$\exists g (G_1(g) \wedge I_2(x, g) \wedge C_2(x, g))$	$\exists E, 21, 22-32$
34	$\exists g (G_1(g) \wedge I_2(x, g) \wedge C_2(x, g))$	$\vee E, 6, 7-18, 19-33$
35	$\exists g (G_1(g) \wedge I_2(x, g) \wedge C_2(x, g))$	$\exists E, 1, 2-34$
36	$\forall x \exists g (G_1(g) \wedge I_2(x, g) \wedge C_2(x, g))$	$\forall I, 35$

3.22 Proposition 16 (P16)

Dieu est cause de toutes choses.

$$\forall x \exists g (G_1(g) \wedge K_2(g, x))$$

1	$\forall x \exists g (G_1(g) \wedge I_2(x, g) \wedge C_2(x, g))$	P15
2	$\exists g (G_1(g) \wedge I_2(x, g) \wedge C_2(x, g))$	$\forall E, 1$
3	$G_1(g) \wedge I_2(x, g) \wedge C_2(x, g)$	
4	$G_1(g)$	$\wedge E, 3$
5	$C_2(x, g)$	$\wedge E, 3$
6	$\forall a \forall b (K_2(a, b) \leftrightarrow C_2(b, a))$	A4
7	$K_2(g, x) \leftrightarrow C_2(x, g)$	$\forall E, 6$
8	$K_2(g, x)$	$\Rightarrow E, 5, 7$
9	$G_1(g) \wedge K_2(g, x)$	$\wedge I, 4, 8$
10	$\exists g (G_1(g) \wedge K_2(g, x))$	$\exists I, 9$
11	$\exists g (G_1(g) \wedge K_2(g, x))$	$\exists E, 2, 3-10$
12	$\forall x \exists g (G_1(g) \wedge K_2(g, x))$	$\forall I, 11$

3.23 Proposition 17 (P17)

Dieu agit par les seules lois de sa nature et sans y être contraint par personne.

$$\exists g(G_1(g) \wedge \neg(\exists x(\neg I_2(x, g) \wedge K_2(x, g))) \wedge \forall x(K_2(g, x)))$$

1	$\exists x(G_1(x) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = x))$	P14
2	$G_1(g) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = g)$	
3	$G_1(g)$	$\wedge E, 2$
4	$\forall y(S_1(y) \rightarrow y = g)$	$\wedge E, 2$
5	$G_1(g) \leftrightarrow (S_1(g) \wedge \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y, g)))$	D6
6	$S_1(g) \wedge \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y, g))$	$\Rightarrow E, 3, 5$
7	$S_1(g)$	$\wedge E, 6$
8	$\exists x(\neg I_2(x, g) \wedge K_2(x, g))$	
9	$\neg I_2(e, g) \wedge K_2(e, g)$	
10	$\neg I_2(e, g)$	$\wedge E, 9$
11	$K_2(e, g)$	$\wedge E, 9$
12	$\forall x(S_1(x) \rightarrow \neg(\exists y(y \neq x \wedge K_2(y, x))))$	P6c
13	$S_1(g) \rightarrow \neg(\exists y(y \neq g \wedge K_2(y, g)))$	$\forall E, 12$
14	$\neg(\exists y(y \neq g \wedge K_2(y, g)))$	$\Rightarrow E, 7, 13$
15	$\neg(e \neq g \wedge K_2(e, g))$	$\forall E, 14$
16	$e = g \vee \neg K_2(e, g)$	De Morgan, 15
17	$e = g$	
18	$S_1(g) \leftrightarrow (I_2(g, g) \wedge C_2(g, g))$	D3
19	$I_2(g, g) \wedge C_2(g, g)$	$\Rightarrow E, 7, 18$
20	$I_2(g, g)$	$\wedge E, 19$
21	$I_2(e, g)$	17, 20
22	$\neg I_2(e, g)$	R, 10
23	$I_2(e, g) \wedge \neg I_2(e, g)$	$\wedge I, 21, 22$
24	\perp	$\perp E, 23$
25	$\neg K_2(e, g)$	
26	$K_2(e, g)$	R, 11
27	$K_2(e, g) \wedge \neg K_2(e, g)$	$\wedge I, 26, 25$
28	\perp	$\perp E, 27$
29	\perp	$\vee E, 16, 17-24, 25-28$
30	\perp	$\exists E, 8, 9-29$
31	$\neg \exists x(\neg I_2(x, g) \wedge K_2(x, g))$	$\neg I, 8-30$
32	$\forall x \exists h(G_1(h) \wedge K_2(h, x))$	P16
33	$\exists h(G_1(h) \wedge K_2(h, x))$	$\forall E, 32$
34	$G_1(h) \wedge K_2(h, x)$	
35	$G_1(h)$	$\wedge E, 34$
36	$\exists z \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	P14-A
37	$\forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	
38	$G_1(g) \leftrightarrow g = z$	$\forall E, 37$
39	$G_1(h) \leftrightarrow h = z$	$\forall E, 37$
40	$g = z$	$\Rightarrow E, 3, 38$
41	$h = z$	$\Rightarrow E, 35, 39$
42	$h = g$	40, 41
43	$K_2(h, x)$	$\wedge E, 34$
44	$K_2(g, x)$	42, 43
45	$K_2(g, x)$	$\exists E, 36, 37-44$
46	$K_2(g, x)$	$\exists E, 33, 34-45$
47	$\forall x(K_2(g, x))$	$\forall I, 46$
48	$G_1(g) \wedge \neg(\exists x(\neg I_2(x, g) \wedge K_2(x, g))) \wedge \forall x(K_2(g, x))$	$\wedge I, 3, 31, 47$
49	$\exists g(G_1(g) \wedge \neg(\exists x(\neg I_2(x, g) \wedge K_2(x, g))) \wedge \forall x(K_2(g, x)))$	$\exists I, 48$
50	$\exists g(G_1(g) \wedge \neg(\exists x(\neg I_2(x, g) \wedge K_2(x, g))) \wedge \forall x(K_2(g, x)))$	$\exists E, 1, 2-49$

3.24 Corollaire 2 de la Proposition 17 (P17c2)

Dieu seul est cause libre.

$$\exists g(G_1(g) \wedge B_1(g) \wedge \forall x(B_1(x) \rightarrow x = g))$$

1	$\exists g(G_1(g) \wedge \neg(\exists x(\neg I_2(x, g) \wedge K_2(x, g))) \wedge \forall x(K_2(g, x)))$	P17
2	$G_1(g) \wedge \neg(\exists x(\neg I_2(x, g) \wedge K_2(x, g))) \wedge \forall x(K_2(g, x))$	
3	$G_1(g)$	$\wedge E, 2$
4	$\neg(\exists x(\neg I_2(x, g) \wedge K_2(x, g)))$	$\wedge E, 2$
5	$G_1(g) \leftrightarrow (S_1(g) \wedge \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y, g)))$	D6
6	$S_1(g) \wedge \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y, g))$	$\Rightarrow E, 3, 5$
7	$S_1(g)$	$\wedge E, 6$
8	$\forall x(S_1(x) \leftrightarrow K_2(x, x))$	DPIII
9	$S_1(g) \leftrightarrow K_2(g, g)$	$\forall E, 8$
10	$K_2(g, g)$	$\Rightarrow E, 7, 9$
11	$\forall x(S_1(x) \rightarrow \neg(\exists y(y \neq x \wedge K_2(y, x))))$	P6c
12	$S_1(g) \rightarrow \neg(\exists y(y \neq g \wedge K_2(y, g)))$	$\forall E, 11$
13	$\neg(\exists y(y \neq g \wedge K_2(y, g)))$	$\Rightarrow E, 7, 12$
14	$K_2(g, g) \wedge \neg \exists y(y \neq g \wedge K_2(y, g))$	$\wedge I, 10, 13$
15	$B_1(x) \leftrightarrow (K_2(x, x) \wedge \neg \exists y(y \neq x \wedge K_2(y, x)))$	D7a
16	$K_2(g, g) \wedge \neg \exists y(y \neq g \wedge K_2(y, g)) \leftrightarrow B_1(g)$	$\forall E, 15$
17	$B_1(g)$	$\Rightarrow E, 14, 16$
18	$B_1(x)$	
19	$B_1(x) \leftrightarrow (K_2(x, x) \wedge \neg \exists y(y \neq x \wedge K_2(y, x)))$	D7a
20	$K_2(x, x) \wedge \neg \exists y(y \neq x \wedge K_2(y, x))$	$\Rightarrow E, 18, 19$
21	$K_2(x, x)$	$\wedge E, 20$
22	$\forall z(S_1(z) \leftrightarrow K_2(z, z))$	DPIII
23	$K_2(x, x) \leftrightarrow S_1(x)$	$\forall E, 22$
24	$S_1(x)$	$\Rightarrow E, 21, 23$
25	$\exists z(G_1(z) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = z))$	P14
26	$G_1(h) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = h)$	
27	$\forall y(S_1(y) \rightarrow y = h)$	$\wedge E, 26$
28	$S_1(x) \rightarrow x = h$	$\forall E, 27$
29	$x = h$	$\Rightarrow E, 24, 28$
30	$G_1(h)$	$\wedge E, 26$
31	$\exists z \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	P14-A
32	$\forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	
33	$G_1(g) \leftrightarrow g = z$	$\forall E, 32$
34	$G_1(h) \leftrightarrow h = z$	$\forall E, 32$
35	$g = z$	$\Rightarrow E, 3, 33$
36	$h = z$	$\Rightarrow E, 30, 34$
37	$h = g$	35,36
38	$x = h$	R, 29
39	$x = g$	38,37
40	$x = g$	$\exists E, 31, 32-39$
41	$x = g$	$\exists E, 25, 26-40$
42	$B_1(x) \rightarrow x = g$	$\Rightarrow I, 18-41$
43	$\forall x(B_1(x) \rightarrow x = g)$	$\forall I, 42$
44	$G_1(g) \wedge B_1(g) \wedge \forall x(B_1(x) \rightarrow x = g)$	$\wedge I, 3, 17, 43$
45	$\exists g(G_1(g) \wedge B_1(g) \wedge \forall x(B_1(x) \rightarrow x = g))$	$\exists I, 44$
46	$\exists g(G_1(g) \wedge B_1(g) \wedge \forall x(B_1(x) \rightarrow x = g))$	$\exists E, 1, 2-45$

3.25 Proposition 18 (P18)

Dieu est cause immanente, et non transitive, de toutes choses.

$$\exists g(G_1(g) \wedge \forall x(I_2(x, g) \leftrightarrow K_2(g, x)))$$

1	$\exists x(G_1(x) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = x))$	P14
2	$G_1(g) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = g)$	
3	$G_1(g)$	$\wedge E, 2$
4	$\forall x \exists h(G_1(h) \wedge I_2(x, h) \wedge C_2(x, h))$	P15
5	$\forall x \exists h(G_1(h) \wedge K_2(h, x))$	P16
6	$I_2(x, g)$	
7	$\forall a \forall b(I_2(a, b) \rightarrow C_2(a, b))$	A8
8	$I_2(x, g) \rightarrow C_2(x, g)$	$\forall E, 7$
9	$C_2(x, g)$	$\Rightarrow E, 6, 8$
10	$\forall a \forall b(K_2(a, b) \leftrightarrow C_2(b, a))$	A4
11	$K_2(g, x) \leftrightarrow C_2(x, g)$	$\forall E, 10$
12	$K_2(g, x)$	$\Rightarrow E, 9, 11$
13	$I_2(x, g) \rightarrow K_2(g, x)$	$\Rightarrow I, 6-12$
14	$K_2(g, x)$	
15	$\exists h(G_1(h) \wedge I_2(x, h) \wedge C_2(x, h))$	$\forall E, 4$
16	$G_1(h) \wedge I_2(x, h) \wedge C_2(x, h)$	
17	$G_1(h)$	$\wedge E, 16$
18	$I_2(x, h)$	$\wedge E, 16$
19	$\exists z \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	P14-A
20	$\forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	
21	$G_1(g) \leftrightarrow g = z$	$\forall E, 20$
22	$G_1(h) \leftrightarrow h = z$	$\forall E, 20$
23	$g = z$	$\Rightarrow E, 3, 21$
24	$h = z$	$\Rightarrow E, 17, 22$
25	$h = g$	23,24
26	$I_2(x, h)$	R, 18
27	$I_2(x, g)$	25,26
28	$I_2(x, g)$	$\exists E, 19, 20-27$
29	$I_2(x, g)$	$\exists E, 15, 16-28$
30	$K_2(g, x) \rightarrow I_2(x, g)$	$\Rightarrow I, 14-29$
31	$I_2(x, g) \leftrightarrow K_2(g, x)$	$\Rightarrow I, 13, 30$
32	$\forall x(I_2(x, g) \leftrightarrow K_2(g, x))$	$\forall I, 31$
33	$G_1(g) \wedge \forall x(I_2(x, g) \leftrightarrow K_2(g, x))$	$\wedge I, 3, 32$
34	$\exists g(G_1(g) \wedge \forall x(I_2(x, g) \leftrightarrow K_2(g, x)))$	$\exists I, 33$
35	$\exists g(G_1(g) \wedge \forall x(I_2(x, g) \leftrightarrow K_2(g, x)))$	$\exists E, 1, 2-34$

3.26 Proposition 19 (P19)

Dieu et tous ses attributs sont éternels.

$$\exists g(G_1(g) \wedge E_1(g) \wedge \forall x(A_2(x, g) \rightarrow E_1(x)))$$

1	$\exists x(G_1(x) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = x))$	P14
2	$G_1(g) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = g)$	
3	$G_1(g)$	$\wedge E, 2$
4	$G_1(g) \leftrightarrow (S_1(g) \wedge \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y, g)))$	D6
5	$S_1(g) \wedge \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y, g))$	$\Rightarrow E, 3, 4$
6	$S_1(g)$	$\wedge E, 5$
7	$\forall x(S_1(x) \rightarrow L(\exists y(y = x)))$	P7
8	$S_1(g) \rightarrow L(\exists y(y = g))$	$\forall E, 7$
9	$L(\exists y(y = g))$	$\Rightarrow E, 6, 8$
10	$E_1(x) \leftrightarrow L(\exists v(v = x))$	D8
11	$L(\exists y(y = g)) \leftrightarrow E_1(g)$	$\forall E, 10$
12	$E_1(g)$	$\Rightarrow E, 9, 11$
13	$A_2(x, g)$	
14	$A_2(x, y) \leftrightarrow (A_1(x) \wedge C_2(y, x))$	D4b
15	$A_1(x) \wedge C_2(g, x)$	$\Rightarrow E, 13, 14$
16	$A_1(x)$	$\wedge E, 15$
17	$\forall z(A_1(z) \rightarrow C_2(z, z))$	P10
18	$A_1(x) \rightarrow C_2(x, x)$	$\forall E, 17$
19	$C_2(x, x)$	$\Rightarrow E, 16, 18$
20	$\forall a \forall b(A_2(a, b) \wedge S_1(b) \rightarrow a = b)$	DP7
21	$A_2(x, g) \wedge S_1(g) \rightarrow x = g$	$\forall E, 20$
22	$A_2(x, g) \wedge S_1(g)$	$\wedge I, 13, 6$
23	$x = g$	$\Rightarrow E, 22, 21$
24	$E_1(g)$	R, 12
25	$E_1(x)$	23, 24
26	$A_2(x, g) \rightarrow E_1(x)$	$\Rightarrow I, 13-25$
27	$\forall x(A_2(x, g) \rightarrow E_1(x))$	$\forall I, 26$
28	$G_1(g) \wedge E_1(g) \wedge \forall x(A_2(x, g) \rightarrow E_1(x))$	$\wedge I, 3, 12, 27$
29	$\exists g(G_1(g) \wedge E_1(g) \wedge \forall x(A_2(x, g) \rightarrow E_1(x)))$	$\exists I, 28$
30	$\exists g(G_1(g) \wedge E_1(g) \wedge \forall x(A_2(x, g) \rightarrow E_1(x)))$	$\exists E, 1, 2-29$

3.27 Proposition 20 (P20)

L'existence et l'essence de Dieu sont une seule et même chose.

$$\exists g(G_1(g) \wedge \forall x(A_2(x, g) \rightarrow x = g))$$

1	$\exists x(G_1(x) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = x))$	P14
2	$G_1(g) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = g)$	
3	$G_1(g)$	$\wedge E, 2$
4	$G_1(g) \leftrightarrow (S_1(g) \wedge \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y, g)))$	D6
5	$S_1(g) \wedge \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y, g))$	$\Rightarrow E, 3, 4$
6	$S_1(g)$	$\wedge E, 5$
7	$A_2(x, g)$	
8	$\forall a \forall b(A_2(a, b) \wedge S_1(b) \rightarrow a = b)$	DP7
9	$A_2(x, g) \wedge S_1(g) \rightarrow x = g$	$\forall E, 8$
10	$A_2(x, g) \wedge S_1(g)$	$\wedge I, 7, 6$
11	$x = g$	$\Rightarrow E, 10, 9$
12	$A_2(x, g) \rightarrow x = g$	$\Rightarrow I, 7-11$
13	$\forall x(A_2(x, g) \rightarrow x = g)$	$\forall I, 12$
14	$G_1(g) \wedge \forall x(A_2(x, g) \rightarrow x = g)$	$\wedge I, 3, 13$
15	$\exists g(G_1(g) \wedge \forall x(A_2(x, g) \rightarrow x = g))$	$\exists I, 14$
16	$\exists g(G_1(g) \wedge \forall x(A_2(x, g) \rightarrow x = g))$	$\exists E, 1, 2-15$

3.28 Proposition 21 (P21)

Tout ce qui suit de l'essence absolue d'un attribut de Dieu existe nécessairement et infiniment.

$$\forall x((\exists g \exists y(G_1(g) \wedge A_2(y, g) \wedge x \neq g \wedge K_2(y, x) \wedge \neg(\exists z(z \neq y \wedge K_2(z, x)))))) \rightarrow (N(\exists v(v = x)) \wedge \neg F_1(x)))$$

1	$\exists g \exists y(G_1(g) \wedge A_2(y, g) \wedge x \neq g \wedge K_2(y, x) \wedge \neg(\exists z(z \neq y \wedge K_2(z, x))))$	
2	$G_1(g) \wedge A_2(y, g) \wedge x \neq g \wedge K_2(y, x) \wedge \neg(\exists z(z \neq y \wedge K_2(z, x)))$	
3	$G_1(g)$	$\wedge E, 2$
4	$A_2(y, g)$	$\wedge E, 2$
5	$K_2(y, x)$	$\wedge E, 2$
6	$G_1(g) \leftrightarrow (S_1(g) \wedge \forall w(A_1(w) \rightarrow A_2(w, g)))$	D6
7	$S_1(g) \wedge \forall w(A_1(w) \rightarrow A_2(w, g))$	$\Rightarrow E, 3, 6$
8	$S_1(g)$	$\wedge E, 7$
9	$\forall a \forall b(A_2(a, b) \wedge S_1(b) \rightarrow a = b)$	DP7
10	$A_2(y, g) \wedge S_1(g) \rightarrow y = g$	$\forall E, 9$
11	$A_2(y, g) \wedge S_1(g)$	$\wedge I, 4, 8$
12	$y = g$	$\Rightarrow E, 11, 10$
13	$K_2(g, x)$	12,5
14	$\exists g(G_1(g) \wedge E_1(g) \wedge \forall z(A_2(z, g) \rightarrow E_1(z)))$	P19
15	$G_1(h) \wedge E_1(h) \wedge \forall z(A_2(z, h) \rightarrow E_1(z))$	
16	$G_1(h)$	$\wedge E, 15$
17	$E_1(h)$	$\wedge E, 15$
18	$\exists z \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	P14-A
19	$\forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	
20	$G_1(g) \leftrightarrow g = z$	$\forall E, 19$
21	$G_1(h) \leftrightarrow h = z$	$\forall E, 19$
22	$g = z$	$\Rightarrow E, 3, 20$
23	$h = z$	$\Rightarrow E, 16, 21$
24	$g = h$	22,23
25	$E_1(h)$	R, 17
26	$E_1(g)$	24,25
27	$E_1(g)$	$\exists E, 18, 19-26$
28	$E_1(g)$	$\exists E, 14, 15-27$
29	$E_1(x) \leftrightarrow L(\exists v(v = x))$	D8
30	$E_1(g) \leftrightarrow L(\exists v(v = g))$	$\forall E, 29$
31	$L(\exists v(v = g))$	$\Rightarrow E, 28, 30$
32	$\forall p(L(p) \rightarrow N(p))$	R1
33	$L(\exists v(v = g)) \rightarrow N(\exists v(v = g))$	$\forall E, 32$
34	$N(\exists v(v = g))$	$\Rightarrow E, 31, 33$
35	$\forall a \forall b(K_2(a, b) \rightarrow N((\exists v(v = a)) \leftrightarrow \exists v(v = b)))$	A3
36	$K_2(g, x) \rightarrow N((\exists v(v = g)) \leftrightarrow \exists v(v = x))$	$\forall E, 35$
37	$N((\exists v(v = g)) \leftrightarrow \exists v(v = x))$	$\Rightarrow E, 13, 36$
38	$N((\exists v(v = g)) \rightarrow (\exists v(v = x)))$	R7, 37
39	$\forall p \forall q(N(p \rightarrow q) \rightarrow (N(p) \rightarrow N(q)))$	R6
40	$N((\exists v(v = g)) \rightarrow (\exists v(v = x))) \rightarrow (N(\exists v(v = g)) \rightarrow N(\exists v(v = x)))$	$\forall E, 39$
41	$N(\exists v(v = g)) \rightarrow N(\exists v(v = x))$	$\Rightarrow E, 38, 40$
42	$N(\exists v(v = x))$	$\Rightarrow E, 34, 41$
43	$\forall a(N(\exists y(y = a)) \leftrightarrow \neg F_1(a))$	A14
44	$N(\exists y(y = x)) \leftrightarrow \neg F_1(x)$	$\forall E, 43$
45	$N(\exists y(y = x)) \rightarrow \neg F_1(x)$	$\wedge E, 44$
46	$\neg F_1(x)$	$\Rightarrow E, 42, 45$
47	$N(\exists v(v = x)) \wedge \neg F_1(x)$	$\wedge I, 42, 46$
48	$N(\exists v(v = x)) \wedge \neg F_1(x)$	$\exists E, 1, 2-47$
49	$(\exists g \exists y(G_1(g) \wedge A_2(y, g) \wedge x \neq g \wedge K_2(y, x) \wedge \neg(\exists z(z \neq y \wedge K_2(z, x)))))) \rightarrow (N(\exists v(v = x)) \wedge \neg F_1(x))$	$\Rightarrow I, 1-48$
50	$\forall x((\exists g \exists y(G_1(g) \wedge A_2(y, g) \wedge x \neq g \wedge K_2(y, x) \wedge \neg(\exists z(z \neq y \wedge K_2(z, x)))))) \rightarrow (N(\exists v(v = x)) \wedge \neg F_1(x)))$	$\forall I, 49$

3.29 Proposition 22 (P22)

Tout ce qui suit d'un attribut de Dieu en tant que modifié est éternel et infini.

$$\forall x((\exists g \exists y \exists y'(G_1(g) \wedge A_2(y, g) \wedge M_1(y') \wedge \neg F_1(y') \wedge N(\exists v(v = y')) \wedge K_2(y, x) \wedge K_2(y', x) \wedge \neg(\exists z(z \neq y \wedge z \neq y' \wedge K_2(z, x)))))) \rightarrow (N(\exists v(v = x)) \wedge \neg F_1(x)))$$

1	$\exists g \exists y \exists y'(G_1(g) \wedge A_2(y, g) \wedge M_1(y') \wedge \neg F_1(y') \wedge N(\exists v(v = y')) \wedge K_2(y, x) \wedge K_2(y', x) \wedge \neg(\exists z(z \neq y \wedge z \neq y' \wedge K_2(z, x))))$	
2	$G_1(g) \wedge A_2(y, g) \wedge M_1(y') \wedge \neg F_1(y') \wedge N(\exists v(v = y')) \wedge K_2(y, x) \wedge K_2(y', x) \wedge \neg(\exists z(z \neq y \wedge z \neq y' \wedge K_2(z, x)))$	
3	$G_1(g)$	$\wedge E, 2$
4	$A_2(y, g)$	$\wedge E, 2$
5	$M_1(y')$	$\wedge E, 2$
6	$\neg F_1(y')$	$\wedge E, 2$
7	$N(\exists v(v = y'))$	$\wedge E, 2$
8	$K_2(y, x)$	$\wedge E, 2$
9	$K_2(y', x)$	$\wedge E, 2$
10	$G_1(g) \leftrightarrow (S_1(g) \wedge \forall w(A_1(w) \rightarrow A_2(w, g)))$	D6
11	$S_1(g) \wedge \forall w(A_1(w) \rightarrow A_2(w, g))$	$\Rightarrow E, 3, 10$
12	$S_1(g)$	$\wedge E, 11$
13	$\forall a \forall b(A_2(a, b) \wedge S_1(b) \rightarrow a = b)$	DP7
14	$A_2(y, g) \wedge S_1(g) \rightarrow y = g$	$\forall E, 13$
15	$A_2(y, g) \wedge S_1(g)$	$\wedge I, 4, 12$
16	$y = g$	$\Rightarrow E, 15, 14$
17	$K_2(g, x)$	16,8
18	$\forall a \forall b(K_2(a, b) \rightarrow N((\exists v(v = a)) \leftrightarrow \exists v(v = b)))$	A3
19	$K_2(y', x) \rightarrow N((\exists v(v = y')) \leftrightarrow \exists v(v = x))$	$\forall E, 18$
20	$N((\exists v(v = y')) \leftrightarrow \exists v(v = x))$	$\Rightarrow E, 9, 19$
21	$N((\exists v(v = y')) \rightarrow (\exists v(v = x)))$	R7, 20
22	$\forall p \forall q(N(p \rightarrow q) \rightarrow (N(p) \rightarrow N(q)))$	R6
23	$N((\exists v(v = y')) \rightarrow (\exists v(v = x))) \rightarrow (N(\exists v(v = y')) \rightarrow N(\exists v(v = x)))$	$\forall E, 22$
24	$N(\exists v(v = y')) \rightarrow N(\exists v(v = x))$	$\Rightarrow E, 21, 23$
25	$N(\exists v(v = x))$	$\Rightarrow E, 7, 24$
26	$\forall a(N(\exists y(y = a)) \leftrightarrow \neg F_1(a))$	A14
27	$N(\exists y(y = x)) \leftrightarrow \neg F_1(x)$	$\forall E, 26$
28	$N(\exists y(y = x)) \rightarrow \neg F_1(x)$	$\wedge E, 27$
29	$\neg F_1(x)$	$\Rightarrow E, 25, 28$
30	$N(\exists v(v = x)) \wedge \neg F_1(x)$	$\wedge I, 25, 29$
31	$N(\exists v(v = x)) \wedge \neg F_1(x)$	$\exists E, 1, 2-30$
32	$(\exists g \exists y \exists y'(G_1(g) \wedge A_2(y, g) \wedge M_1(y') \wedge \neg F_1(y') \wedge N(\exists v(v = y')) \wedge K_2(y, x) \wedge K_2(y', x) \wedge \neg(\exists z(z \neq y \wedge z \neq y' \wedge K_2(z, x)))))) \rightarrow (N(\exists v(v = x)) \wedge \neg F_1(x))$	$\Rightarrow I, 1-31$
33	$\forall x((\exists g \exists y \exists y'(G_1(g) \wedge A_2(y, g) \wedge M_1(y') \wedge \neg F_1(y') \wedge N(\exists v(v = y')) \wedge K_2(y, x) \wedge K_2(y', x) \wedge \neg(\exists z(z \neq y \wedge z \neq y' \wedge K_2(z, x)))))) \rightarrow (N(\exists v(v = x)) \wedge \neg F_1(x)))$	$\forall I, 32$

3.30 Proposition 23 (P23)

Tout mode qui existe nécessairement et infiniment découle d'un attribut de Dieu.

$$\forall x(N(\exists v(v = x)) \rightarrow \exists g \exists y(G_1(g) \wedge A_2(y, g) \wedge N((\exists v(v = y)) \rightarrow (\exists v(v = x)))))$$

1	$N(\exists v(v = x))$	
2	$\exists g(G_1(g) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = g))$	P14
3	$G_1(g) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = g)$	
4	$G_1(g)$	$\wedge E, 3$
5	$\forall x(\exists y(A_2(y, x)))$	A9
6	$\exists y(A_2(y, g))$	$\forall E, 5$
7	$A_2(y, g)$	
8	$G_1(g) \leftrightarrow (S_1(g) \wedge \forall w(A_1(w) \rightarrow A_2(w, g)))$	D6
9	$S_1(g) \wedge \forall w(A_1(w) \rightarrow A_2(w, g))$	$\Rightarrow E, 4, 8$
10	$S_1(g)$	$\wedge E, 9$
11	$\forall a \forall b(A_2(a, b) \wedge S_1(b) \rightarrow a = b)$	DP7
12	$A_2(y, g) \wedge S_1(g) \rightarrow y = g$	$\forall E, 11$
13	$A_2(y, g) \wedge S_1(g)$	$\wedge I, 7, 10$
14	$y = g$	$\Rightarrow E, 13, 12$
15	$\forall z \exists h(G_1(h) \wedge I_2(z, h) \wedge C_2(z, h))$	P15
16	$\exists h(G_1(h) \wedge I_2(x, h) \wedge C_2(x, h))$	$\forall E, 15$
17	$G_1(h) \wedge I_2(x, h) \wedge C_2(x, h)$	
18	$G_1(h)$	$\wedge E, 17$
19	$I_2(x, h)$	$\wedge E, 17$
20	$C_2(x, h)$	$\wedge E, 17$
21	$\exists z \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	P14-A
22	$\forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	
23	$G_1(g) \leftrightarrow g = z$	$\forall E, 22$
24	$G_1(h) \leftrightarrow h = z$	$\forall E, 22$
25	$g = z$	$\Rightarrow E, 4, 23$
26	$h = z$	$\Rightarrow E, 18, 24$
27	$h = g$	25,26
28	$C_2(x, h)$	R, 20
29	$C_2(x, g)$	27,28
30	$C_2(x, g)$	$\exists E, 21, 22-29$
31	$\forall a \forall b(K_2(a, b) \leftrightarrow C_2(b, a))$	A4
32	$K_2(g, x) \leftrightarrow C_2(x, g)$	$\forall E, 31$
33	$K_2(g, x)$	$\Rightarrow E, 30, 32$
34	$K_2(y, x)$	14,33
35	$\forall a \forall b(K_2(a, b) \rightarrow N((\exists v(v = a)) \leftrightarrow \exists v(v = b)))$	A3
36	$K_2(y, x) \rightarrow N((\exists v(v = y)) \leftrightarrow \exists v(v = x))$	$\forall E, 35$
37	$N((\exists v(v = y)) \leftrightarrow \exists v(v = x))$	$\Rightarrow E, 34, 36$
38	$N((\exists v(v = y)) \rightarrow (\exists v(v = x)))$	R7, 37
39	$G_1(g) \wedge A_2(y, g) \wedge N((\exists v(v = y)) \rightarrow (\exists v(v = x)))$	$\wedge I, 4, 7, 38$
40	$\exists g \exists y(G_1(g) \wedge A_2(y, g) \wedge N((\exists v(v = y)) \rightarrow (\exists v(v = x))))$	$\exists I, 39$
41	$\exists g \exists y(G_1(g) \wedge A_2(y, g) \wedge N((\exists v(v = y)) \rightarrow (\exists v(v = x))))$	$\exists E, 6, 7-40$
42	$\exists g \exists y(G_1(g) \wedge A_2(y, g) \wedge N((\exists v(v = y)) \rightarrow (\exists v(v = x))))$	$\exists E, 2, 3-41$
43	$N(\exists v(v = x)) \rightarrow \exists g \exists y(G_1(g) \wedge A_2(y, g) \wedge N((\exists v(v = y)) \rightarrow (\exists v(v = x))))$	$\Rightarrow I, 1-42$
44	$\forall x(N(\exists v(v = x)) \rightarrow \exists g \exists y(G_1(g) \wedge A_2(y, g) \wedge N((\exists v(v = y)) \rightarrow (\exists v(v = x)))))$	$\forall I, 43$