Preuves en Déduction Naturelle pour le système de Spinoza

D'après la formalisation de Jarrett

28 février 2025

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Notation et symboles **2**
2.1 Lexique . . . 2
2.1.1 Opérateurs modaux . . . 2
2.2 Règles modales . . . 2
2.2.1 Prédicats unaires . . . 2
2.2.2 Prédicats binaires . . . 2
2.2.3 Prédicats ternaires . . . 3
2.3 Définitions . . . 3
2.4 Axiomes . . . 3

3 Preuves en déduction naturelle **4**
3.1 Proposition 1 (P1) . . . 4
3.2 Proposition 2 (P2) . . . 5
3.3 Proposition 3 (P3) . . . 6
3.4 Lemmes intermédiaires . . . 7
3.4.1 Lemme DP1 . . . 7
3.4.2 Lemme DP4 . . . 7
3.4.3 Lemme DP5 . . . 8
3.4.4 Lemme DP6 . . . 9
3.4.5 Lemme DP7 . . . 10
3.5 Théorème DPI . . . 11
3.6 Théorème DPII . . . 12
3.7 Théorème DPIII . . . 13
3.8 Proposition 4 (P4) . . . 14
3.9 Proposition 5 (P5) . . . 15
3.10 Proposition 6 (P6) . . . 16
3.11 Corollaire de la Proposition 6 (P6c) . . . 17
3.12 Proposition 7 (P7) . . . 18
3.13 Proposition 8 (P8) . . . 19
3.14 Proposition 9 (P9) . . . 20
3.15 Proposition 10 (P10) . . . 20
3.16 Proposition 11 (P11) . . . 21
3.17 Proposition 12 (P12) . . . 22
3.18 Proposition 13 (P13) . . . 22
3.19 Proposition 14 (P14) . . . 23
3.20 Proposition 14-A (P14-A) . . . 24
3.21 Proposition 15 (P15) . . . 25
3.22 Proposition 16 (P16) . . . 26
3.23 Proposition 17 (P17) . . . 27
3.24 Corollaire 2 de la Proposition 17 (P17c2) . . . 28
3.25 Proposition 18 (P18) . . . 29
3.26 Proposition 19 (P19) . . . 30
3.27 Proposition 20 (P20) . . . 31
3.28 Proposition 21 (P21) . . . 32
3.29 Proposition 22 (P22) . . . 34
3.30 Proposition 23 (P23) . . . 35

1 Introduction

Ce document présente les preuves en déduction naturelle (système DN) pour les propositions principales de l'*Éthique* de Spinoza, d'après la formalisation de Charles Jarrett présentée dans *The Logical Structure of Spinoza's Ethics, Part I.*

2 Notation et symboles

2.1 Lexique

2.1.1 Opérateurs modaux

- $L(p)$: Nécessité logique - p est logiquement nécessaire
- $M(p)$: Possibilité - p est possible
- $N(p)$: Nécessité naturelle - p est naturellement nécessaire

2.2 Règles modales

- **R1** : $\forall P(L(P) \rightarrow N(P))$
  La nécessité logique implique la nécessité naturelle
- **R2** : $\forall P(N(P) \rightarrow P)$
  Axiome T pour la nécessité naturelle
- **R3** : $\forall P \forall Q(L(P \rightarrow Q) \rightarrow (L(P) \rightarrow L(Q)))$
  Axiome K pour la nécessité logique
- **R4** : $\forall P(M(P) \rightarrow L(M(P)))$
  Axiome S5 - possibilité et nécessité
- **R5** : $\forall P(P \rightarrow L(P))$
  Règle de nécessitation
- **R6** : $\forall P \forall Q(N(P \rightarrow Q) \rightarrow (N(P) \rightarrow N(Q)))$
  Axiome de distributivité pour la nécessité naturelle

2.2.1 Prédicats unaires

- $A_1(x)$: x est un attribut
- $B_1(x)$: x est libre
- $D_1(x)$: x est une instance de désir
- $E_1(x)$: x est éternel
- $F_1(x)$: x est fini
- $G_1(x)$: x est un dieu
- $J_1(x)$: x est une instance d'amour
- $K_1(x)$: x est une idée
- $M_1(x)$: x est un mode
- $N_1(x)$: x est nécessaire
- $S_1(x)$: x est une substance
- $T_1(x)$: x est vrai
- $U_1(x)$: x est un intellect
- $W_1(x)$: x est une volonté

2.2.2 Prédicats binaires

- $A_2(x, y)$: x est un attribut de y
- $C_2(x, y)$: x est conçu à travers y
- $I_2(x, y)$: x est en y
- $K_2(x, y)$: x est cause de y
- $L_2(x, y)$: x limite y
- $M_2(x, y)$: x est un mode de y
- $O_2(x, y)$: x est un objet de y
- $P_2(x, y)$: x est la puissance de y
- $R_2(x, y)$: x a plus de réalité que y
- $V_2(x, y)$: x a plus d'attributs que y

2.2.3 Prédicats ternaires

- $C_3(x, y, z)$: x est commun à y et à z
- $D_3(x, y, z)$: x est divisible entre y et z

2.3 Définitions

- **D1** : $K_2(x, x) \wedge \neg\exists y(y \neq x \wedge K_2(y, x)) \leftrightarrow L(\exists y(y = x))$
  Causa sui - ce dont l'essence implique l'existence
- **D2** : $F_1(x) \leftrightarrow \exists y(y \neq x \wedge L_2(y, x) \wedge \forall z(A_2(z, x) \leftrightarrow A_2(z, y)))$
  Une chose est finie quand elle peut être limitée par une autre de même nature
- **D3** : $S_1(y) \leftrightarrow (I_2(y, y) \wedge C_2(y, y))$
  Une substance est ce qui est en soi et est conçu par soi
- **D4a** : $A_1(x) \leftrightarrow \exists y(S_1(y) \wedge I_2(x, y) \wedge C_2(x, y) \wedge I_2(y, x) \wedge C_2(y, x))$
  Un attribut est ce que l'intellect perçoit de la substance comme constituant son essence
- **D4b** : $A_2(x, y) \leftrightarrow (A_1(x) \wedge C_2(y, x))$
  x est un attribut de y
- **D5a** : $M_2(x, y) \leftrightarrow (x \neq y \wedge I_2(x, y) \wedge C_2(x, y))$
  Un mode est ce qui est dans autre chose et est conçu par elle
- **D5b** : $M_1(x) \leftrightarrow \exists y(S_1(y) \wedge M_2(x, y))$
  x est un mode
- **D6** : $G_1(x) \leftrightarrow (S_1(x) \wedge \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y, x)))$
  Dieu est une substance constituée d'une infinité d'attributs
- **D7a** : $B_1(x) \leftrightarrow (K_2(x, x) \wedge \neg\exists y(y \neq x \wedge K_2(y, x)))$
  Une chose est libre quand elle n'est cause que d'elle-même
- **D7b** : $N_1(x) \leftrightarrow \exists y(y \neq x \wedge K_2(y, x))$
  Une chose est nécessaire quand elle est déterminée par autre chose
- **D8** : $E_1(x) \leftrightarrow L(\exists v(v = x))$
  L'éternité est l'existence même en tant que nécessaire

2.4 Axiomes

- **A1** : $\forall x(I_2(x, x) \vee \exists y(y \neq x \wedge I_2(x, y)))$
  Tout ce qui est, est soit en soi, soit en autre chose
- **A2** : $\forall x((\neg\exists y(y \neq x \wedge C_2(x, y))) \leftrightarrow C_2(x, x))$
  Ce qui ne peut être conçu par un autre doit être conçu par soi
- **A3** : $\forall x \forall y(K_2(y, x) \rightarrow N((\exists v(v = y)) \leftrightarrow \exists v(v = x)))$
  D'une cause déterminée suit nécessairement un effet
- **A4** : $\forall x \forall y(K_2(x, y) \leftrightarrow C_2(y, x))$
  La connaissance de l'effet dépend de la connaissance de la cause
- **A5** : $\forall x \forall y((\neg\exists z(C_3(z, x, y))) \leftrightarrow (\neg C_2(x, y) \wedge \neg C_2(y, x)))$
  Les choses qui n'ont rien en commun ne peuvent être conçues l'une par l'autre
- **A6** : $\forall x(K_1(x) \rightarrow (T_1(x) \leftrightarrow \exists y(O_2(y, x) \wedge K_2(x, y))))$
  L'idée vraie doit s'accorder avec son objet
- **A7** : $\forall x(M(\neg\exists y(y = x)) \leftrightarrow \neg L(\exists y(y = x)))$
  Si une chose peut être conçue comme non existante, son essence n'implique pas l'existence
- **A8** : $\forall x \forall y(I_2(x, y) \rightarrow C_2(x, y))$
  Si x est en y alors x est conçu par y
- **A9** : $\forall x(\exists y(A_2(y, x)))$
  Toute chose a un attribut
- **A10** : $\forall x \forall y \forall z(D_3(x, y, z) \rightarrow M(\neg\exists w(w = x)))$
  Si x est divisible en y et z alors il est possible que x n'existe pas
- **A11** : $\forall x \forall y(S_1(x) \wedge L_2(y, x) \rightarrow S_1(y))$
  Si x est une substance et y limite x alors y est une substance
- **A12** : $\forall x((\exists y(M_2(x, y))) \rightarrow M_1(x))$
  Si x est un mode de quelque chose alors x est un mode
- **A13** : $M(\exists x(G_1(x)))$
  Il est possible qu'un Dieu existe
- **A14** : $\forall x(N(\exists y(y = x)) \leftrightarrow \neg F_1(x))$
  x existe nécessairement si et seulement si x n'est pas fini

3 Preuves en déduction naturelle

3.1 Proposition 1 (P1)

Si x est un mode de y et y est une substance, alors x est en y et y est en soi.

$$\forall x \forall y (M_2(x,y) \land S_1(y) \to I_2(x,y) \land I_2(y,y))$$

1	$M_2(x,y) \land S_1(y)$	
2	$M_2(x,y)$	$\land$E, 1
3	$S_1(y)$	$\land$E, 1
4	$S_1(y) \leftrightarrow (I_2(y,y) \land C_2(y,y))$	D3
5	$I_2(y,y) \land C_2(y,y)$	$\Rightarrow$E, 3, 4
6	$I_2(y,y)$	$\land$E, 5
7	$M_2(x,y) \leftrightarrow (x \neq y \land I_2(x,y) \land C_2(x,y))$	D5a
8	$x \neq y \land I_2(x,y) \land C_2(x,y)$	$\Rightarrow$E, 2, 7
9	$I_2(x,y)$	$\land$E, 8
10	$I_2(x,y) \land I_2(y,y)$	$\land$I, 9, 6
11	$M_2(x,y) \land S_1(y) \to I_2(x,y) \land I_2(y,y)$	$\Rightarrow$I, 1–10
12	$\forall y (M_2(x,y) \land S_1(y) \to I_2(x,y) \land I_2(y,y))$	$\forall$I, 11
13	$\forall x \forall y (M_2(x,y) \land S_1(y) \to I_2(x,y) \land I_2(y,y))$	$\forall$I, 12

3.2 Proposition 2 (P2)

Deux substances ayant des attributs différents n'ont rien en commun entre elles.

$$\forall x \forall y (S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \rightarrow \neg \exists z (C_3(z, x, y)))$$

1	$\quad S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y$	
2	$\quad S_1(x)$	$\land$E, 1
3	$\quad S_1(y)$	$\land$E, 1
4	$\quad x \neq y$	$\land$E, 1
5	$\quad S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x,x) \land C_2(x,x))$	D3
6	$\quad I_2(x,x) \land C_2(x,x)$	$\Rightarrow$E, 2, 5
7	$\quad C_2(x,x)$	$\land$E, 6
8	$\quad S_1(y) \leftrightarrow (I_2(y,y) \land C_2(y,y))$	D3
9	$\quad I_2(y,y) \land C_2(y,y)$	$\Rightarrow$E, 3, 8
10	$\quad C_2(y,y)$	$\land$E, 9
11	$\quad (\neg \exists z (z \neq x \land C_2(x,z))) \leftrightarrow C_2(x,x)$	A2
12	$\quad C_2(x,x) \rightarrow \neg \exists z (z \neq x \land C_2(x,z))$	$\land$E, 11
13	$\quad \neg \exists z (z \neq x \land C_2(x,z))$	$\Rightarrow$E, 7, 12
14	$\quad \neg (y \neq x \land C_2(x,y))$	$\forall$E, 13
15	$\quad y \neq x \rightarrow \neg C_2(x,y)$	$\Rightarrow$E, 14
16	$\quad x \neq y \rightarrow y \neq x$	Logique
17	$\quad x \neq y$	$\land$E, 1
18	$\quad y \neq x$	$\Rightarrow$E, 17, 16
19	$\quad \neg C_2(x,y)$	$\Rightarrow$E, 18, 15
20	$\quad (\neg \exists z (z \neq y \land C_2(y,z))) \leftrightarrow C_2(y,y)$	A2
21	$\quad C_2(y,y) \rightarrow \neg \exists z (z \neq y \land C_2(y,z))$	$\land$E, 20
22	$\quad \neg \exists z (z \neq y \land C_2(y,z))$	$\Rightarrow$E, 10, 21
23	$\quad \neg (x \neq y \land C_2(y,x))$	$\forall$E, 22
24	$\quad x \neq y \rightarrow \neg C_2(y,x)$	$\Rightarrow$E, 23
25	$\quad \neg C_2(y,x)$	$\Rightarrow$E, 4, 24
26	$\quad (\neg \exists z (C_3(z,x,y))) \leftrightarrow (\neg C_2(x,y) \land \neg C_2(y,x))$	A5
27	$\quad (\neg C_2(x,y) \land \neg C_2(y,x)) \rightarrow \neg \exists z (C_3(z,x,y))$	$\land$E, 26
28	$\quad \neg C_2(x,y) \land \neg C_2(y,x)$	$\land$I, 19, 25
29	$\quad \neg \exists z (C_3(z,x,y))$	$\Rightarrow$E, 28, 27
30	$S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \rightarrow \neg \exists z (C_3(z,x,y))$	$\Rightarrow$I, 1–29
31	$\forall y (S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \rightarrow \neg \exists z (C_3(z,x,y)))$	$\forall$I, 30
32	$\forall x \forall y (S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \rightarrow \neg \exists z (C_3(z,x,y)))$	$\forall$I, 31

3.3 Proposition 3 (P3)

Des choses qui n'ont rien en commun entre elles ne peuvent être cause l'une de l'autre.

$$\forall x \forall y(\neg \exists z(C_3(z,x,y)) \rightarrow \neg K_2(x,y) \wedge \neg K_2(y,x))$$

1	$\neg \exists z(C_3(z,x,y))$	
2	$(\neg \exists z(C_3(z,x,y))) \leftrightarrow (\neg C_2(x,y) \wedge \neg C_2(y,x))$	A5
3	$\neg C_2(x,y) \wedge \neg C_2(y,x)$	$\Rightarrow$E, 1, 2
4	$\neg C_2(x,y)$	$\wedge$E, 3
5	$\neg C_2(y,x)$	$\wedge$E, 3
6	$\forall a \forall b(K_2(a,b) \leftrightarrow C_2(b,a))$	A4
7	$K_2(x,y) \leftrightarrow C_2(y,x)$	$\forall$E, 6
8	$K_2(y,x) \leftrightarrow C_2(x,y)$	$\forall$E, 6
9	$K_2(x,y)$	
10	$C_2(y,x)$	$\Rightarrow$E, 9, 7
11	$\neg C_2(y,x)$	R, 5
12	$C_2(y,x) \wedge \neg C_2(y,x)$	$\wedge$I, 10, 11
13	$\perp$	$\perp$E, 12
14	$\neg K_2(x,y)$	$\neg$I, 9–13
15	$K_2(y,x)$	
16	$C_2(x,y)$	$\Rightarrow$E, 15, 8
17	$\neg C_2(x,y)$	R, 4
18	$C_2(x,y) \wedge \neg C_2(x,y)$	$\wedge$I, 16, 17
19	$\perp$	$\perp$E, 18
20	$\neg K_2(y,x)$	$\neg$I, 15–19
21	$\neg K_2(x,y) \wedge \neg K_2(y,x)$	$\wedge$I, 14, 20
22	$\neg \exists z(C_3(z,x,y)) \rightarrow \neg K_2(x,y) \wedge \neg K_2(y,x)$	$\Rightarrow$I, 1–21
23	$\forall y(\neg \exists z(C_3(z,x,y)) \rightarrow \neg K_2(x,y) \wedge \neg K_2(y,x))$	$\forall$I, 22
24	$\forall x \forall y(\neg \exists z(C_3(z,x,y)) \rightarrow \neg K_2(x,y) \wedge \neg K_2(y,x))$	$\forall$I, 23

3.4 Lemmes intermédiaires

3.4.1 Lemme DP1

x est une substance si et seulement si x est en soi.

$$\forall x(S_1(x) \leftrightarrow I_2(x,x))$$

1	$\quad S_1(x)$	
2	$\quad S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x,x) \wedge C_2(x,x))$	D3
3	$\quad I_2(x,x) \wedge C_2(x,x)$	⇒E, 1, 2
4	$\quad I_2(x,x)$	∧E, 3
5	$S_1(x) \rightarrow I_2(x,x)$	⇒I, 1–4
6	$\quad I_2(x,x)$	
7	$\quad I_2(x,x) \rightarrow C_2(x,x)$	A8
8	$\quad C_2(x,x)$	⇒E, 6, 7
9	$\quad I_2(x,x) \wedge C_2(x,x)$	∧I, 6, 8
10	$\quad S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x,x) \wedge C_2(x,x))$	D3
11	$\quad S_1(x)$	⇒E, 9, 10
12	$I_2(x,x) \rightarrow S_1(x)$	⇒I, 6–11
13	$S_1(x) \leftrightarrow I_2(x,x)$	⇒I, 5, 12
14	$\forall x(S_1(x) \leftrightarrow I_2(x,x))$	∀I, 13

3.4.2 Lemme DP4

Une substance est sa propre cause.

$$\forall x(S_1(x) \rightarrow K_2(x,x))$$

1	$\quad S_1(x)$	
2	$\quad S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x,x) \wedge C_2(x,x))$	D3
3	$\quad I_2(x,x) \wedge C_2(x,x)$	⇒E, 1, 2
4	$\quad C_2(x,x)$	∧E, 3
5	$\quad \forall a \forall b(K_2(a,b) \leftrightarrow C_2(b,a))$	A4
6	$\quad K_2(x,x) \leftrightarrow C_2(x,x)$	∀E, 5
7	$\quad K_2(x,x)$	⇒E, 4, 6
8	$S_1(x) \rightarrow K_2(x,x)$	⇒I, 1–7
9	$\forall x(S_1(x) \rightarrow K_2(x,x))$	∀I, 8

3.4.3 Lemme DP5

Toute chose est soit une substance soit un mode.

$$\forall x(S_1(x) \vee M_1(x))$$

1	$\forall x(I_2(x,x) \vee \exists y(y \neq x \wedge I_2(x,y)))$	A1
2	$I_2(x,x) \vee \exists y(y \neq x \wedge I_2(x,y))$	∀E, 1
3	$\quad I_2(x,x)$	
4	$\quad S_1(x) \leftrightarrow I_2(x,x)$	DP1
5	$\quad S_1(x)$	⇒E, 3, 4
6	$\quad S_1(x) \vee M_1(x)$	∨I, 5
7	$\quad \exists y(y \neq x \wedge I_2(x,y))$	
8	$\qquad y \neq x \wedge I_2(x,y)$	
9	$\qquad y \neq x$	∧E, 8
10	$\qquad I_2(x,y)$	∧E, 8
11	$\qquad I_2(x,y) \rightarrow C_2(x,y)$	A8
12	$\qquad C_2(x,y)$	⇒E, 10, 11
13	$\qquad y \neq x \wedge I_2(x,y) \wedge C_2(x,y)$	∧I, 9, 10, 12
14	$\qquad M_2(x,y) \leftrightarrow (x \neq y \wedge I_2(x,y) \wedge C_2(x,y))$	D5a
15	$\qquad x \neq y \leftrightarrow y \neq x$	Logique
16	$\qquad x \neq y$	⇒E, 9, 15
17	$\qquad x \neq y \wedge I_2(x,y) \wedge C_2(x,y)$	∧I, 16, 10, 12
18	$\qquad M_2(x,y)$	⇒E, 17, 14
19	$\qquad (\exists y(M_2(x,y))) \rightarrow M_1(x)$	A12
20	$\qquad \exists y(M_2(x,y))$	∃I, 18
21	$\qquad M_1(x)$	⇒E, 20, 19
22	$\qquad S_1(x) \vee M_1(x)$	∨I, 21
23	$\quad S_1(x) \vee M_1(x)$	∃E, 7, 8–22
24	$S_1(x) \vee M_1(x)$	∨E, 2, 3–6, 7–23
25	$\forall x(S_1(x) \vee M_1(x))$	∀I, 24

3.4.4 Lemme DP6

Une substance et un mode ne peuvent jamais être la même chose.

$$\forall x(\neg(S_1(x) \wedge M_1(x)))$$

1	$\quad\quad S_1(x) \wedge M_1(x)$	
2	$\quad\quad S_1(x)$	$\wedge$E, 1
3	$\quad\quad M_1(x)$	$\wedge$E, 1
4	$\quad\quad M_1(x) \leftrightarrow \exists y(S_1(y) \wedge M_2(x,y))$	D5b
5	$\quad\quad \exists y(S_1(y) \wedge M_2(x,y))$	$\Rightarrow$E, 3, 4
6	$\quad\quad\quad S_1(y) \wedge M_2(x,y)$	
7	$\quad\quad\quad M_2(x,y)$	$\wedge$E, 6
8	$\quad\quad\quad M_2(x,y) \leftrightarrow (x \neq y \wedge I_2(x,y) \wedge C_2(x,y))$	D5a
9	$\quad\quad\quad x \neq y \wedge I_2(x,y) \wedge C_2(x,y)$	$\Rightarrow$E, 7, 8
10	$\quad\quad\quad x \neq y$	$\wedge$E, 9
11	$\quad\quad\quad C_2(x,y)$	$\wedge$E, 9
12	$\quad\quad\quad S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x,x) \wedge C_2(x,x))$	D3
13	$\quad\quad\quad I_2(x,x) \wedge C_2(x,x)$	$\Rightarrow$E, 2, 12
14	$\quad\quad\quad C_2(x,x)$	$\wedge$E, 13
15	$\quad\quad\quad (\neg\exists z(z \neq x \wedge C_2(x,z))) \leftrightarrow C_2(x,x)$	A2
16	$\quad\quad\quad C_2(x,x) \rightarrow \neg\exists z(z \neq x \wedge C_2(x,z))$	$\wedge$E, 15
17	$\quad\quad\quad \neg\exists z(z \neq x \wedge C_2(x,z))$	$\Rightarrow$E, 14, 16
18	$\quad\quad\quad \neg(y \neq x \wedge C_2(x,y))$	$\forall$E, 17
19	$\quad\quad\quad y \neq x \leftrightarrow x \neq y$	Logique
20	$\quad\quad\quad y \neq x$	$\Rightarrow$E, 10, 19
21	$\quad\quad\quad y \neq x \wedge C_2(x,y)$	$\wedge$I, 20, 11
22	$\quad\quad\quad \neg(y \neq x \wedge C_2(x,y)) \wedge (y \neq x \wedge C_2(x,y))$	$\wedge$I, 18, 21
23	$\quad\quad\quad \bot$	$\bot$E, 22
24	$\quad\quad \bot$	$\exists$E, 5, 6–23
25	$\quad \neg(S_1(x) \wedge M_1(x))$	$\neg$I, 1–24
26	$\quad \forall x(\neg(S_1(x) \wedge M_1(x)))$	$\forall$I, 25

3.4.5 Lemme DP7

Si x est un attribut de y et y est une substance, alors $x = y$.

$$\forall x \forall y (A_2(x, y) \land S_1(y) \to x = y)$$

1	$A_2(x, y) \land S_1(y)$	
2	$A_2(x, y)$	$\land$E, 1
3	$S_1(y)$	$\land$E, 1
4	$A_2(x, y) \leftrightarrow (A_1(x) \land C_2(y, x))$	D4b
5	$A_1(x) \land C_2(y, x)$	$\Rightarrow$E, 2, 4
6	$C_2(y, x)$	$\land$E, 5
7	$S_1(y) \leftrightarrow (I_2(y, y) \land C_2(y, y))$	D3
8	$I_2(y, y) \land C_2(y, y)$	$\Rightarrow$E, 3, 7
9	$C_2(y, y)$	$\land$E, 8
10	$(\neg \exists z (z \neq y \land C_2(y, z))) \leftrightarrow C_2(y, y)$	A2
11	$C_2(y, y) \to \neg \exists z (z \neq y \land C_2(y, z))$	$\land$E, 10
12	$\neg \exists z (z \neq y \land C_2(y, z))$	$\Rightarrow$E, 9, 11
13	$\neg (x \neq y \land C_2(y, x))$	$\forall$E, 12
14	$x \neq y \to \neg C_2(y, x)$	$\Rightarrow$E, 13
15	$C_2(y, x) \to \neg (x \neq y)$	Contraposée
16	$C_2(y, x)$	R, 6
17	$\neg (x \neq y)$	$\Rightarrow$E, 16, 15
18	$x = y$	$\neg$E, 17
19	$A_2(x, y) \land S_1(y) \to x = y$	$\Rightarrow$I, 1–18
20	$\forall y (A_2(x, y) \land S_1(y) \to x = y)$	$\forall$I, 19
21	$\forall x \forall y (A_2(x, y) \land S_1(y) \to x = y)$	$\forall$I, 20

3.5 Théorème DPI

Tout est soit une substance, soit un mode, mais pas les deux.

$$\forall x((S_1(x) \land \neg M_1(x)) \lor (\neg S_1(x) \land M_1(x)))$$

1	$\forall x(S_1(x) \lor M_1(x))$	DP5
2	$S_1(x) \lor M_1(x)$	$\forall$E, 1
3	$\forall x(\neg(S_1(x) \land M_1(x)))$	DP6
4	$\neg(S_1(x) \land M_1(x))$	$\forall$E, 3
5	$\quad S_1(x)$	
6	$\quad\quad M_1(x)$	
7	$\quad\quad S_1(x) \land M_1(x)$	$\land$I, 5, 6
8	$\quad\quad \neg(S_1(x) \land M_1(x))$	R, 4
9	$\quad\quad (S_1(x) \land M_1(x)) \land \neg(S_1(x) \land M_1(x))$	$\land$I, 7, 8
10	$\quad\quad \bot$	$\bot$E, 9
11	$\quad \neg M_1(x)$	$\neg$I, 6–10
12	$\quad S_1(x) \land \neg M_1(x)$	$\land$I, 5, 11
13	$\quad (S_1(x) \land \neg M_1(x)) \lor (\neg S_1(x) \land M_1(x))$	$\lor$I, 12
14	$\quad M_1(x)$	
15	$\quad\quad S_1(x)$	
16	$\quad\quad S_1(x) \land M_1(x)$	$\land$I, 15, 14
17	$\quad\quad \neg(S_1(x) \land M_1(x))$	R, 4
18	$\quad\quad (S_1(x) \land M_1(x)) \land \neg(S_1(x) \land M_1(x))$	$\land$I, 16, 17
19	$\quad\quad \bot$	$\bot$E, 18
20	$\quad \neg S_1(x)$	$\neg$I, 15–19
21	$\quad \neg S_1(x) \land M_1(x)$	$\land$I, 20, 14
22	$\quad (S_1(x) \land \neg M_1(x)) \lor (\neg S_1(x) \land M_1(x))$	$\lor$I, 21
23	$(S_1(x) \land \neg M_1(x)) \lor (\neg S_1(x) \land M_1(x))$	$\lor$E, 2, 5–13, 14–22
24	$\forall x((S_1(x) \land \neg M_1(x)) \lor (\neg S_1(x) \land M_1(x)))$	$\forall$I, 23

3.6 Théorème DPII

Une substance est ses propres attributs.

$$\forall x(S_1(x) \to A_2(x,x))$$

1	$S_1(x)$	
2	$A_2(x,y) \leftrightarrow (A_1(x) \wedge C_2(y,x))$	D4b
3	$S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x,x) \wedge C_2(x,x))$	D3
4	$I_2(x,x) \wedge C_2(x,x)$	$\Rightarrow$E, 1, 3
5	$C_2(x,x)$	$\wedge$E, 4
6	$A_1(x) \wedge C_2(x,x)$	
7	$A_2(x,x)$	$\Rightarrow$E, 6, 2
8	$A_1(x) \wedge C_2(x,x) \to A_2(x,x)$	$\Rightarrow$I, 6–7
9	$A_1(x) \leftrightarrow \exists y(S_1(y) \wedge I_2(x,y) \wedge C_2(x,y) \wedge I_2(y,x) \wedge C_2(y,x))$	D4a
10	$\exists y(S_1(y) \wedge I_2(x,y) \wedge C_2(x,y) \wedge I_2(y,x) \wedge C_2(y,x)) \to A_1(x)$	$\wedge$E, 9
11	$S_1(x) \wedge I_2(x,x) \wedge C_2(x,x) \wedge I_2(x,x) \wedge C_2(x,x)$	$\wedge$I, 1, 4, 4
12	$\exists y(S_1(y) \wedge I_2(x,y) \wedge C_2(x,y) \wedge I_2(y,x) \wedge C_2(y,x))$	$\exists$I, 11
13	$A_1(x)$	$\Rightarrow$E, 12, 10
14	$A_1(x) \wedge C_2(x,x)$	$\wedge$I, 13, 5
15	$A_2(x,x)$	$\Rightarrow$E, 14, 8
16	$S_1(x) \to A_2(x,x)$	$\Rightarrow$I, 1–15
17	$\forall x(S_1(x) \to A_2(x,x))$	$\forall$I, 16

3.7 Théorème DPIII

Quelque chose est une substance si et seulement si elle est causa sui.

$$\forall x(S_1(x) \leftrightarrow K_2(x,x))$$

1	$S_1(x)$	
2	$\forall y(S_1(y) \to K_2(y,y))$	DP4
3	$S_1(x) \to K_2(x,x)$	$\forall$E, 2
4	$K_2(x,x)$	$\Rightarrow$E, 1, 3
5	$S_1(x) \to K_2(x,x)$	$\Rightarrow$I, 1–4
6	$K_2(x,x)$	
7	$\forall a \forall b(K_2(a,b) \leftrightarrow C_2(b,a))$	A4
8	$K_2(x,x) \leftrightarrow C_2(x,x)$	$\forall$E, 7
9	$C_2(x,x)$	$\Rightarrow$E, 6, 8
10	$\forall y(I_2(y,y) \lor \exists z(z \neq y \land I_2(y,z)))$	A1
11	$I_2(x,x) \lor \exists z(z \neq x \land I_2(x,z))$	$\forall$E, 10
12	$I_2(x,x)$	
13	$I_2(x,x) \land C_2(x,x)$	$\land$I, 12, 9
14	$S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x,x) \land C_2(x,x))$	D3
15	$S_1(x)$	$\Rightarrow$E, 13, 14
16	$\exists z(z \neq x \land I_2(x,z))$	
17	$z \neq x \land I_2(x,z)$	
18	$I_2(x,z)$	$\land$E, 17
19	$\forall a \forall b(I_2(a,b) \to C_2(a,b))$	A8
20	$I_2(x,z) \to C_2(x,z)$	$\forall$E, 19
21	$C_2(x,z)$	$\Rightarrow$E, 18, 20
22	$z \neq x$	$\land$E, 17
23	$z \neq x \land C_2(x,z)$	$\land$I, 22, 21
24	$\exists y(y \neq x \land C_2(x,y))$	$\exists$I, 23
25	$(\neg \exists y(y \neq x \land C_2(x,y))) \leftrightarrow C_2(x,x)$	A2
26	$C_2(x,x) \to \neg \exists y(y \neq x \land C_2(x,y))$	$\land$E, 25
27	$\neg \exists y(y \neq x \land C_2(x,y))$	$\Rightarrow$E, 9, 26
28	$\exists y(y \neq x \land C_2(x,y)) \land \neg \exists y(y \neq x \land C_2(x,y))$	$\land$I, 24, 27
29	$\bot$	$\bot$E, 28
30	$\bot$	$\exists$E, 16, 17–29
31	$\neg \exists z(z \neq x \land I_2(x,z))$	$\neg$I, 16–30
32	$S_1(x)$	$\lor$E, 11, 12–15, 16–31
33	$K_2(x,x) \to S_1(x)$	$\Rightarrow$I, 6–32
34	$S_1(x) \leftrightarrow K_2(x,x)$	$\Rightarrow$I, 5, 33
35	$\forall x(S_1(x) \leftrightarrow K_2(x,x))$	$\forall$I, 34

3.8 Proposition 4 (P4)

Deux ou plusieurs choses distinctes ne peuvent se distinguer que par la diversité des attributs de leurs substances, ou par la diversité des affections de ces mêmes substances.

$$\forall x \forall y (x \neq y \rightarrow \exists z \exists z' ((A_2(z,x) \wedge A_2(z',y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z,x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z',y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y))))$$

1	$x \neq y$	
2	$\forall a((S_1(a) \wedge \neg M_1(a)) \vee (\neg S_1(a) \wedge M_1(a)))$	DPI
3	$(S_1(x) \wedge \neg M_1(x)) \vee (\neg S_1(x) \wedge M_1(x))$	∀E, 2
4	$S_1(x) \wedge \neg M_1(x)$	
5	$S_1(x)$	∧E, 4
6	$(S_1(y) \wedge \neg M_1(y)) \vee (\neg S_1(y) \wedge M_1(y))$	∀E, 2
7	$S_1(y) \wedge \neg M_1(y)$	
8	$S_1(y)$	∧E, 7
9	$\forall a(S_1(a) \rightarrow A_2(a,a))$	DPII
10	$S_1(x) \rightarrow A_2(x,x)$	∀E, 9
11	$A_2(x,x)$	⇒E, 5, 10
12	$S_1(y) \rightarrow A_2(y,y)$	∀E, 9
13	$A_2(y,y)$	⇒E, 8, 12
14	$A_2(x,x) \wedge A_2(y,y) \wedge x \neq y$	∧I, 11, 13, 1
15	$\exists z \exists z'(A_2(z,x) \wedge A_2(z',y) \wedge z \neq z')$	∃I, 14
16	$\exists z \exists z'((A_2(z,x) \wedge A_2(z',y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z,x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z',y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))$	∨I, 15
17	$\neg S_1(y) \wedge M_1(y)$	
18	$M_1(y)$	∧E, 17
19	$A_2(x,x)$	⇒E, 5, 10
20	$A_2(x,x) \wedge x = x \wedge M_1(y)$	∧I, 19, **??**, 18
21	$\exists z \exists z'(A_2(z,x) \wedge z = x \wedge M_1(y))$	∃I, 20
22	$\exists z \exists z'((A_2(z,x) \wedge A_2(z',y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z,x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z',y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))$	∨I, 21
23	$\exists z \exists z'((A_2(z,x) \wedge A_2(z',y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z,x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z',y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))$	∨E, 6, 7–16, 17–22
24	$\neg S_1(x) \wedge M_1(x)$	
25	$M_1(x)$	∧E, 24
26	$(S_1(y) \wedge \neg M_1(y)) \vee (\neg S_1(y) \wedge M_1(y))$	∀E, 2
27	$S_1(y) \wedge \neg M_1(y)$	
28	$S_1(y)$	∧E, 27
29	$S_1(y) \rightarrow A_2(y,y)$	∀E, 9
30	$A_2(y,y)$	⇒E, 28, 29
31	$A_2(y,y) \wedge y = y \wedge M_1(x)$	∧I, 30, **??**, 25
32	$\exists z \exists z'(A_2(z',y) \wedge z' = y \wedge M_1(x))$	∃I, 31
33	$\exists z \exists z'((A_2(z,x) \wedge A_2(z',y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z,x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z',y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))$	∨I, 32
34	$\neg S_1(y) \wedge M_1(y)$	
35	$M_1(y)$	∧E, 34
36	$M_1(x) \wedge M_1(y)$	∧I, 25, 35
37	$\exists z \exists z'(M_1(x) \wedge M_1(y))$	∃I, 36
38	$\exists z \exists z'((A_2(z,x) \wedge A_2(z',y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z,x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z',y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))$	∨I, 37
39	$\exists z \exists z'((A_2(z,x) \wedge A_2(z',y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z,x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z',y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))$	∨E, 26, 27–33, 34–38
40	$\exists z \exists z'((A_2(z,x) \wedge A_2(z',y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z,x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z',y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))$	∨E, 3, 4–23, 24–39
41	$x \neq y \rightarrow \exists z \exists z'((A_2(z,x) \wedge A_2(z',y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z,x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z',y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))$	⇒I, 1–40
42	$\forall y(x \neq y \rightarrow \exists z \exists z'((A_2(z,x) \wedge A_2(z',y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z,x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z',y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y))))$	∀I, 41
43	$\forall x \forall y(x \neq y \rightarrow \exists z \exists z'((A_2(z,x) \wedge A_2(z',y) \wedge z \neq z') \vee (A_2(z,x) \wedge z = x \wedge M_1(y)) \vee (A_2(z',y) \wedge z' = y \wedge M_1(x)) \vee (M_1(x) \wedge M_1(y)))))$	∀I, 42

3.9 Proposition 5 (P5)

Il ne peut y avoir, dans la nature des choses, deux ou plusieurs substances de même nature, ou, en d'autres termes, de même attribut.

$$\forall x \forall y (S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \to \neg \exists z (A_2(z,x) \land A_2(z,y)))$$

1	$S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y$	
2	$S_1(x)$	$\land$E, 1
3	$S_1(y)$	$\land$E, 1
4	$x \neq y$	$\land$E, 1
5	$\exists z (A_2(z,x) \land A_2(z,y))$	
6	$A_2(z,x) \land A_2(z,y)$	
7	$A_2(z,x)$	$\land$E, 6
8	$A_2(z,y)$	$\land$E, 6
9	$\forall a \forall b (A_2(a,b) \land S_1(b) \to a = b)$	DP7
10	$A_2(z,x) \land S_1(x) \to z = x$	$\forall$E, 9
11	$A_2(z,x) \land S_1(x)$	$\land$I, 7, 2
12	$z = x$	$\Rightarrow$E, 11, 10
13	$A_2(z,y) \land S_1(y) \to z = y$	$\forall$E, 9
14	$A_2(z,y) \land S_1(y)$	$\land$I, 8, 3
15	$z = y$	$\Rightarrow$E, 14, 13
16	$z = x \land z = y$	$\land$I, 12, 15
17	$x = z$	12
18	$x = y$	17,15
19	$x \neq y$	R, 4
20	$x = y \land x \neq y$	$\land$I, 18, 19
21	$\bot$	$\bot$E, 20
22	$\bot$	$\exists$E, 5, 6–21
23	$\neg \exists z (A_2(z,x) \land A_2(z,y))$	$\neg$I, 5–22
24	$S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \to \neg \exists z (A_2(z,x) \land A_2(z,y))$	$\Rightarrow$I, 1–23
25	$\forall y (S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \to \neg \exists z (A_2(z,x) \land A_2(z,y)))$	$\forall$I, 24
26	$\forall x \forall y (S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \to \neg \exists z (A_2(z,x) \land A_2(z,y)))$	$\forall$I, 25

3.10 Proposition 6 (P6)

Une substance ne peut être produite par une autre substance.

$$\forall x \forall y (S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \rightarrow \neg(K_2(x,y) \land \neg K_2(y,x)))$$

1	$\quad S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y$	
2	$\quad S_1(x)$	$\land$E, 1
3	$\quad S_1(y)$	$\land$E, 1
4	$\quad x \neq y$	$\land$E, 1
5	$\quad \forall a \forall b (S_1(a) \land S_1(b) \land a \neq b \rightarrow \neg \exists z (C_3(z,a,b)))$	P2
6	$\quad S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \rightarrow \neg \exists z (C_3(z,x,y))$	$\forall$E, 5
7	$\quad \neg \exists z (C_3(z,x,y))$	$\Rightarrow$E, 1, 6
8	$\quad \forall a \forall b (\neg \exists z (C_3(z,a,b)) \rightarrow \neg K_2(a,b) \land \neg K_2(b,a))$	P3
9	$\quad \neg \exists z (C_3(z,x,y)) \rightarrow \neg K_2(x,y) \land \neg K_2(y,x)$	$\forall$E, 8
10	$\quad \neg K_2(x,y) \land \neg K_2(y,x)$	$\Rightarrow$E, 7, 9
11	$\quad \neg K_2(x,y)$	$\land$E, 10
12	$\quad\quad K_2(x,y) \land \neg K_2(y,x)$	
13	$\quad\quad K_2(x,y)$	$\land$E, 12
14	$\quad\quad \neg K_2(x,y)$	R, 11
15	$\quad\quad K_2(x,y) \land \neg K_2(x,y)$	$\land$I, 13, 14
16	$\quad\quad \bot$	$\bot$E, 15
17	$\quad \neg(K_2(x,y) \land \neg K_2(y,x))$	$\neg$I, 12–16
18	$S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \rightarrow \neg(K_2(x,y) \land \neg K_2(y,x))$	$\Rightarrow$I, 1–17
19	$\forall y (S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \rightarrow \neg(K_2(x,y) \land \neg K_2(y,x)))$	$\forall$I, 18
20	$\forall x \forall y (S_1(x) \land S_1(y) \land x \neq y \rightarrow \neg(K_2(x,y) \land \neg K_2(y,x)))$	$\forall$I, 19

3.11 Corollaire de la Proposition 6 (P6c)

Une substance ne peut être produite par autre chose.

$$\forall x(S_1(x) \rightarrow \neg(\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x))))$$

1	$\mid\; \mid\; \underline{S_1(x)}$	
2	$\mid\; \mid\; S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x,x) \wedge C_2(x,x))$	D3
3	$\mid\; \mid\; I_2(x,x) \wedge C_2(x,x)$	⇒E, 1, 2
4	$\mid\; \mid\; C_2(x,x)$	∧E, 3
5	$\mid\; \mid\; (\neg\exists z(z \neq x \wedge C_2(x,z))) \leftrightarrow C_2(x,x)$	A2
6	$\mid\; \mid\; C_2(x,x) \rightarrow \neg\exists z(z \neq x \wedge C_2(x,z))$	∧E, 5
7	$\mid\; \mid\; \neg\exists z(z \neq x \wedge C_2(x,z))$	⇒E, 4, 6
8	$\mid\; \mid\; \mid\; \underline{\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x))}$	
9	$\mid\; \mid\; \mid\; \mid\; \underline{y \neq x \wedge K_2(y,x)}$	
10	$\mid\; \mid\; \mid\; \mid\; y \neq x$	∧E, 9
11	$\mid\; \mid\; \mid\; \mid\; K_2(y,x)$	∧E, 9
12	$\mid\; \mid\; \mid\; \mid\; \forall a \forall b(K_2(a,b) \leftrightarrow C_2(b,a))$	A4
13	$\mid\; \mid\; \mid\; \mid\; K_2(y,x) \leftrightarrow C_2(x,y)$	∀E, 12
14	$\mid\; \mid\; \mid\; \mid\; C_2(x,y)$	⇒E, 11, 13
15	$\mid\; \mid\; \mid\; \mid\; y \neq x \wedge C_2(x,y)$	∧I, 10, 14
16	$\mid\; \mid\; \mid\; \mid\; \exists z(z \neq x \wedge C_2(x,z))$	∃I, 15
17	$\mid\; \mid\; \mid\; \mid\; \neg\exists z(z \neq x \wedge C_2(x,z))$	R, 7
18	$\mid\; \mid\; \mid\; \mid\; \exists z(z \neq x \wedge C_2(x,z)) \wedge \neg\exists z(z \neq x \wedge C_2(x,z))$	∧I, 16, 17
19	$\mid\; \mid\; \mid\; \mid\; \bot$	⊥E, 18
20	$\mid\; \mid\; \mid\; \bot$	∃E, 8, 9–19
21	$\mid\; \mid\; \neg\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x))$	¬I, 8–20
22	$\mid\; S_1(x) \rightarrow \neg(\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x)))$	⇒I, 1–21
23	$\mid\; \forall x(S_1(x) \rightarrow \neg(\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x))))$	∀I, 22

3.12 Proposition 7 (P7)

Il appartient à la nature de la substance d'exister.

$$\forall x(S_1(x) \rightarrow L(\exists y(y = x)))$$

1	$\quad \mid S_1(x)$	
2	$\quad \mid S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x,x) \wedge C_2(x,x))$	D3
3	$\quad \mid I_2(x,x) \wedge C_2(x,x)$	⇒E, 1, 2
4	$\quad \mid C_2(x,x)$	∧E, 3
5	$\quad \mid \forall a \forall b(K_2(a,b) \leftrightarrow C_2(b,a))$	A4
6	$\quad \mid K_2(x,x) \leftrightarrow C_2(x,x)$	∀E, 5
7	$\quad \mid K_2(x,x)$	⇒E, 4, 6
8	$\quad \mid \forall a(S_1(a) \rightarrow \neg(\exists b(b \neq a \wedge K_2(b,a))))$	P6c
9	$\quad \mid S_1(x) \rightarrow \neg(\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x)))$	∀E, 8
10	$\quad \mid \neg(\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x)))$	⇒E, 1, 9
11	$\quad \mid K_2(x,x) \wedge \neg\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x))$	∧I, 7, 10
12	$\quad \mid K_2(x,x) \wedge \neg\exists y(y \neq x \wedge K_2(y,x)) \leftrightarrow L(\exists y(y = x))$	D1
13	$\quad \mid L(\exists y(y = x))$	⇒E, 11, 12
14	$S_1(x) \rightarrow L(\exists y(y = x))$	⇒I, 1–13
15	$\forall x(S_1(x) \rightarrow L(\exists y(y = x)))$	∀I, 14

3.13 Proposition 8 (P8)

Toute substance est nécessairement infinie.

$$\forall x(S_1(x) \rightarrow \neg F_1(x))$$

1	$S_1(x)$	
2	$F_1(x)$	
3	$F_1(x) \leftrightarrow \exists y(y \neq x \wedge L_2(y,x) \wedge \forall z(A_2(z,x) \leftrightarrow A_2(z,y)))$	D2
4	$\exists y(y \neq x \wedge L_2(y,x) \wedge \forall z(A_2(z,x) \leftrightarrow A_2(z,y)))$	$\Rightarrow$E, 2, 3
5	$y \neq x \wedge L_2(y,x) \wedge \forall z(A_2(z,x) \leftrightarrow A_2(z,y))$	
6	$y \neq x$	$\wedge$E, 5
7	$L_2(y,x)$	$\wedge$E, 5
8	$\forall z(A_2(z,x) \leftrightarrow A_2(z,y))$	$\wedge$E, 5
9	$\forall a \forall b(S_1(a) \wedge L_2(b,a) \rightarrow S_1(b))$	A11
10	$S_1(x) \wedge L_2(y,x) \rightarrow S_1(y)$	$\forall$E, 9
11	$S_1(x) \wedge L_2(y,x)$	$\wedge$I, 1, 7
12	$S_1(y)$	$\Rightarrow$E, 11, 10
13	$\forall a(\exists b(A_2(b,a)))$	A9
14	$\exists b(A_2(b,x))$	$\forall$E, 13
15	$A_2(z,x)$	
16	$A_2(z,x) \leftrightarrow A_2(z,y)$	$\forall$E, 8
17	$A_2(z,y)$	$\Rightarrow$E, 15, 16
18	$A_2(z,x) \wedge A_2(z,y)$	$\wedge$I, 15, 17
19	$\exists z(A_2(z,x) \wedge A_2(z,y))$	$\exists$I, 18
20	$\forall a \forall b(S_1(a) \wedge S_1(b) \wedge a \neq b \rightarrow \neg\exists z(A_2(z,a) \wedge A_2(z,b)))$	P5
21	$S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y \rightarrow \neg\exists z(A_2(z,x) \wedge A_2(z,y))$	$\forall$E, 20
22	$S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y$	$\wedge$I, 1, 12, 6
23	$\neg\exists z(A_2(z,x) \wedge A_2(z,y))$	$\Rightarrow$E, 22, 21
24	$\exists z(A_2(z,x) \wedge A_2(z,y)) \wedge \neg\exists z(A_2(z,x) \wedge A_2(z,y))$	$\wedge$I, 19, 23
25	$\bot$	$\bot$E, 24
26	$\bot$	$\exists$E, 14, 15–25
27	$\bot$	$\exists$E, 4, 5–26
28	$\neg F_1(x)$	$\neg$I, 2–27
29	$S_1(x) \rightarrow \neg F_1(x)$	$\Rightarrow$I, 1–28
30	$\forall x(S_1(x) \rightarrow \neg F_1(x))$	$\forall$I, 29

3.14 Proposition 9 (P9)

Suivant qu'une chose a plus de réalité ou d'être, un plus grand nombre d'attributs lui appartient.

$$\forall x \forall y((S_1(x) \land S_1(y)) \to (R_2(x,y) \leftrightarrow V_2(x,y)))$$

1	$\quad S_1(x) \land S_1(y)$	
2	$\quad \forall a \forall b((S_1(a) \land S_1(b)) \to (R_2(a,b) \leftrightarrow V_2(a,b)))$	A18
3	$\quad (S_1(x) \land S_1(y)) \to (R_2(x,y) \leftrightarrow V_2(x,y))$	∀E, 2
4	$\quad R_2(x,y) \leftrightarrow V_2(x,y)$	⇒E, 1, 3
5	$(S_1(x) \land S_1(y)) \to (R_2(x,y) \leftrightarrow V_2(x,y))$	⇒I, 1–4
6	$\forall y((S_1(x) \land S_1(y)) \to (R_2(x,y) \leftrightarrow V_2(x,y)))$	∀I, 5
7	$\forall x \forall y((S_1(x) \land S_1(y)) \to (R_2(x,y) \leftrightarrow V_2(x,y)))$	∀I, 6

3.15 Proposition 10 (P10)

Tout attribut d'une substance doit être conçu par soi.

$$\forall x(A_1(x) \to C_2(x,x))$$

1	$\quad A_1(x)$	
2	$\quad A_1(x) \leftrightarrow \exists y(S_1(y) \land I_2(x,y) \land C_2(x,y) \land I_2(y,x) \land C_2(y,x))$	D4a
3	$\quad \exists y(S_1(y) \land I_2(x,y) \land C_2(x,y) \land I_2(y,x) \land C_2(y,x))$	⇒E, 1, 2
4	$\quad\quad S_1(y) \land I_2(x,y) \land C_2(x,y) \land I_2(y,x) \land C_2(y,x)$	
5	$\quad\quad S_1(y)$	∧E, 4
6	$\quad\quad C_2(y,x)$	∧E, 4
7	$\quad\quad S_1(y) \leftrightarrow (I_2(y,y) \land C_2(y,y))$	D3
8	$\quad\quad I_2(y,y) \land C_2(y,y)$	⇒E, 5, 7
9	$\quad\quad C_2(y,y)$	∧E, 8
10	$\quad\quad (\neg\exists z(z \neq y \land C_2(y,z))) \leftrightarrow C_2(y,y)$	A2
11	$\quad\quad C_2(y,y) \to \neg\exists z(z \neq y \land C_2(y,z))$	∧E, 10
12	$\quad\quad \neg\exists z(z \neq y \land C_2(y,z))$	⇒E, 9, 11
13	$\quad\quad\quad x \neq y$	
14	$\quad\quad\quad x \neq y \land C_2(y,x)$	∧I, 13, 6
15	$\quad\quad\quad \exists z(z \neq y \land C_2(y,z))$	∃I, 14
16	$\quad\quad\quad \neg\exists z(z \neq y \land C_2(y,z))$	R, 12
17	$\quad\quad\quad \exists z(z \neq y \land C_2(y,z)) \land \neg\exists z(z \neq y \land C_2(y,z))$	∧I, 15, 16
18	$\quad\quad\quad \bot$	⊥E, 17
19	$\quad\quad \neg(x \neq y)$	¬I, 13–18
20	$\quad\quad x = y$	¬E, 19
21	$\quad\quad C_2(y,y)$	R, 9
22	$\quad\quad C_2(x,x)$	20,21
23	$\quad C_2(x,x)$	∃E, 3, 4–22
24	$A_1(x) \to C_2(x,x)$	⇒I, 1–23
25	$\forall x(A_1(x) \to C_2(x,x))$	∀I, 24

3.16 Proposition 11 (P11)

Dieu, c'est-à-dire une substance constituée par une infinité d'attributs dont chacun exprime une essence éternelle et infinie, existe nécessairement.

$$L(\exists x(G_1(x)))$$

1	$M(\exists x(G_1(x)))$	A13
2	$\quad \exists x(G_1(x))$	
3	$\quad\quad G_1(g)$	
4	$\quad\quad G_1(x) \leftrightarrow (S_1(x) \wedge \forall y(A_1(y) \to A_2(y,x)))$	D6
5	$\quad\quad S_1(g) \wedge \forall y(A_1(y) \to A_2(y,g))$	⇒E, 3, 4
6	$\quad\quad S_1(g)$	∧E, 5
7	$\quad\quad \forall x(S_1(x) \to L(\exists y(y=x)))$	P7
8	$\quad\quad S_1(g) \to L(\exists y(y=g))$	∀E, 7
9	$\quad\quad L(\exists y(y=g))$	⇒E, 6, 8
10	$\quad\quad\quad \exists y(y=g)$	
11	$\quad\quad\quad\quad y=g$	
12	$\quad\quad\quad\quad G_1(g)$	R, 3
13	$\quad\quad\quad\quad G_1(y)$	11,12
14	$\quad\quad\quad\quad \exists x(G_1(x))$	∃I, 13
15	$\quad\quad\quad \exists x(G_1(x))$	∃E, 10, 11–14
16	$\quad\quad (\exists y(y=g)) \to (\exists x(G_1(x)))$	⇒I, 10–15
17	$\quad\quad L((\exists y(y=g)) \to (\exists x(G_1(x))))$	R5, 16
18	$\quad\quad L(\exists y(y=g)) \to L(\exists x(G_1(x)))$	R3, 17
19	$\quad\quad L(\exists x(G_1(x)))$	⇒E, 9, 18
20	$\quad L(\exists x(G_1(x)))$	∃E, 2, 3–19
21	$(\exists x(G_1(x))) \to L(\exists x(G_1(x)))$	⇒I, 2–20
22	$L((\exists x(G_1(x))) \to L(\exists x(G_1(x))))$	R5, 21
23	$M(\exists x(G_1(x))) \wedge L((\exists x(G_1(x))) \to L(\exists x(G_1(x))))$	∧I, 1, 22
24	$L(\exists x(G_1(x)))$	S5, 23

3.17 Proposition 12 (P12)

On ne peut concevoir selon sa véritable nature aucun attribut de la substance duquel il résulte que la substance soit divisible.

$$\forall x(S_1(x) \to \neg\exists y\exists z(D_3(x,y,z)))$$

1	$\quad\quad S_1(x)$	
2	$\quad\quad\quad \exists y\exists z(D_3(x,y,z))$	
3	$\quad\quad\quad\quad D_3(x,y,z)$	
4	$\quad\quad\quad\quad \forall a\forall b\forall c(D_3(a,b,c) \to M(\neg\exists w(w=a)))$	A10
5	$\quad\quad\quad\quad D_3(x,y,z) \to M(\neg\exists w(w=x))$	$\forall$E, 4
6	$\quad\quad\quad\quad M(\neg\exists w(w=x))$	$\Rightarrow$E, 3, 5
7	$\quad\quad\quad\quad \forall a(S_1(a) \to L(\exists w(w=a)))$	P7
8	$\quad\quad\quad\quad S_1(x) \to L(\exists w(w=x))$	$\forall$E, 7
9	$\quad\quad\quad\quad L(\exists w(w=x))$	$\Rightarrow$E, 1, 8
10	$\quad\quad\quad\quad \forall a(M(\neg\exists w(w=a)) \leftrightarrow \neg L(\exists w(w=a)))$	A7
11	$\quad\quad\quad\quad M(\neg\exists w(w=x)) \leftrightarrow \neg L(\exists w(w=x))$	$\forall$E, 10
12	$\quad\quad\quad\quad M(\neg\exists w(w=x)) \to \neg L(\exists w(w=x))$	$\wedge$E, 11
13	$\quad\quad\quad\quad \neg L(\exists w(w=x))$	$\Rightarrow$E, 6, 12
14	$\quad\quad\quad\quad L(\exists w(w=x)) \wedge \neg L(\exists w(w=x))$	$\wedge$I, 9, 13
15	$\quad\quad\quad\quad \bot$	$\bot$E, 14
16	$\quad\quad\quad \bot$	$\exists$E, 2, 3–15
17	$\quad\quad \neg\exists y\exists z(D_3(x,y,z))$	$\neg$I, 2–16
18	$\quad S_1(x) \to \neg\exists y\exists z(D_3(x,y,z))$	$\Rightarrow$I, 1–17
19	$\quad \forall x(S_1(x) \to \neg\exists y\exists z(D_3(x,y,z)))$	$\forall$I, 18

3.18 Proposition 13 (P13)

La substance absolument infinie est indivisible.

$$\forall x(S_1(x) \wedge (\forall w(A_1(w) \to A_2(w,x))) \to \neg\exists y\exists z(D_3(x,y,z)))$$

1	$\quad\quad S_1(x) \wedge (\forall w(A_1(w) \to A_2(w,x)))$	
2	$\quad\quad S_1(x)$	$\wedge$E, 1
3	$\quad\quad \forall a(S_1(a) \to \neg\exists y\exists z(D_3(a,y,z)))$	P12
4	$\quad\quad S_1(x) \to \neg\exists y\exists z(D_3(x,y,z))$	$\forall$E, 3
5	$\quad\quad \neg\exists y\exists z(D_3(x,y,z))$	$\Rightarrow$E, 2, 4
6	$\quad S_1(x) \wedge (\forall w(A_1(w) \to A_2(w,x))) \to \neg\exists y\exists z(D_3(x,y,z))$	$\Rightarrow$I, 1–5
7	$\quad \forall x(S_1(x) \wedge (\forall w(A_1(w) \to A_2(w,x))) \to \neg\exists y\exists z(D_3(x,y,z)))$	$\forall$I, 6

3.19 Proposition 14 (P14)

Il ne peut exister et on ne peut concevoir aucune autre substance que Dieu.

$$\exists x(G_1(x) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = x))$$

1	$L(\exists x(G_1(x)))$	P11
2	$L(p) \rightarrow p$	R2
3	$\exists x(G_1(x))$	⇒E, 1, 2
4	$G_1(g)$	
5	$G_1(x) \leftrightarrow (S_1(x) \wedge \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y,x)))$	D6
6	$S_1(g) \wedge \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y,g))$	⇒E, 4, 5
7	$S_1(g)$	∧E, 6
8	$\forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y,g))$	∧E, 6
9	$S_1(s)$	
10	$\forall x(\exists y(A_2(y,x)))$	A9
11	$\exists y(A_2(y,s))$	∀E, 10
12	$A_2(a,s)$	
13	$A_2(a,s) \leftrightarrow (A_1(a) \wedge C_2(s,a))$	D4b
14	$A_1(a) \wedge C_2(s,a)$	⇒E, 12, 13
15	$A_1(a)$	∧E, 14
16	$A_1(a) \rightarrow A_2(a,g)$	∀E, 8
17	$A_2(a,g)$	⇒E, 15, 16
18	$A_2(a,g) \wedge A_2(a,s)$	∧I, 17, 12
19	$\exists z(A_2(z,g) \wedge A_2(z,s))$	∃I, 18
20	$g \neq s$	
21	$S_1(g) \wedge S_1(s) \wedge g \neq s$	∧I, 7, 9, 20
22	$\forall x \forall y(S_1(x) \wedge S_1(y) \wedge x \neq y \rightarrow \neg\exists z(A_2(z,x) \wedge A_2(z,y)))$	P5
23	$S_1(g) \wedge S_1(s) \wedge g \neq s \rightarrow \neg\exists z(A_2(z,g) \wedge A_2(z,s))$	∀E, 22
24	$\neg\exists z(A_2(z,g) \wedge A_2(z,s))$	⇒E, 21, 23
25	$\exists z(A_2(z,g) \wedge A_2(z,s))$	R, 19
26	$\neg\exists z(A_2(z,g) \wedge A_2(z,s)) \wedge \exists z(A_2(z,g) \wedge A_2(z,s))$	∧I, 24, 25
27	$\bot$	⊥E, 26
28	$\neg(g \neq s)$	¬I, 20–27
29	$g = s$	¬E, 28
30	$g = s$	∃E, 11, 12–29
31	$S_1(s) \rightarrow g = s$	⇒I, 9–30
32	$\forall y(S_1(y) \rightarrow y = g)$	∀I, 31
33	$G_1(g) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = g)$	∧I, 4, 32
34	$\exists x(G_1(x) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = x))$	∃I, 33
35	$\exists x(G_1(x) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = x))$	∃E, 3, 4–34

3.20 Proposition 14-A (P14-A)

Version alternative de P14 : Il existe exactement un Dieu.

$$\exists x \forall y (G_1(y) \leftrightarrow y = x)$$

1	$\exists x(G_1(x) \land \forall y(S_1(y) \to y = x))$	P14
2	$G_1(g) \land \forall y(S_1(y) \to y = g)$	
3	$G_1(g)$	∧E, 2
4	$\forall y(S_1(y) \to y = g)$	∧E, 2
5	$G_1(x) \leftrightarrow (S_1(x) \land \forall z(A_1(z) \to A_2(z, x)))$	D6
6	$G_1(y)$	
7	$S_1(y) \land \forall z(A_1(z) \to A_2(z, y))$	⇒E, 6, 5
8	$S_1(y)$	∧E, 7
9	$S_1(y) \to y = g$	∀E, 4
10	$y = g$	⇒E, 8, 9
11	$G_1(y) \to y = g$	⇒I, 6–10
12	$y = g$	
13	$G_1(g)$	R, 3
14	$G_1(y)$	12,13
15	$y = g \to G_1(y)$	⇒I, 12–14
16	$G_1(y) \leftrightarrow y = g$	⇒I, 11, 15
17	$\forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = g)$	∀I, 16
18	$\exists x \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = x)$	∃I, 17
19	$\exists x \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = x)$	∃E, 1, 2–18

3.21 Proposition 15 (P15)

Tout ce qui existe est en Dieu et rien ne peut être ni être conçu sans Dieu.

$$\forall x \exists g (G_1(g) \wedge I_2(x,g) \wedge C_2(x,g))$$

1	$\exists g(G_1(g) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = g))$	P14
2	$G_1(g) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = g)$	
3	$G_1(g)$	$\wedge$E, 2
4	$\forall y(S_1(y) \rightarrow y = g)$	$\wedge$E, 2
5	$\forall x(S_1(x) \vee M_1(x))$	DP5
6	$S_1(x) \vee M_1(x)$	$\forall$E, 5
7	$S_1(x)$	
8	$S_1(x) \rightarrow x = g$	$\forall$E, 4
9	$x = g$	$\Rightarrow$E, 7, 8
10	$S_1(x) \leftrightarrow (I_2(x,x) \wedge C_2(x,x))$	D3
11	$I_2(x,x) \wedge C_2(x,x)$	$\Rightarrow$E, 7, 10
12	$I_2(x,x)$	$\wedge$E, 11
13	$C_2(x,x)$	$\wedge$E, 11
14	$I_2(x,g)$	9,12
15	$C_2(x,g)$	9,13
16	$I_2(x,g) \wedge C_2(x,g)$	$\wedge$I, 14, 15
17	$G_1(g) \wedge I_2(x,g) \wedge C_2(x,g)$	$\wedge$I, 3, 16
18	$\exists g(G_1(g) \wedge I_2(x,g) \wedge C_2(x,g))$	$\exists$I, 17
19	$M_1(x)$	
20	$M_1(x) \leftrightarrow \exists y(S_1(y) \wedge M_2(x,y))$	D5b
21	$\exists y(S_1(y) \wedge M_2(x,y))$	$\Rightarrow$E, 19, 20
22	$S_1(y) \wedge M_2(x,y)$	
23	$S_1(y)$	$\wedge$E, 22
24	$M_2(x,y)$	$\wedge$E, 22
25	$S_1(y) \rightarrow y = g$	$\forall$E, 4
26	$y = g$	$\Rightarrow$E, 23, 25
27	$M_2(x,g)$	24,26
28	$M_2(x,y) \leftrightarrow (x \neq y \wedge I_2(x,y) \wedge C_2(x,y))$	D5a
29	$x \neq g \wedge I_2(x,g) \wedge C_2(x,g)$	$\Rightarrow$E, 27, 28
30	$I_2(x,g) \wedge C_2(x,g)$	$\wedge$E, 29
31	$G_1(g) \wedge I_2(x,g) \wedge C_2(x,g)$	$\wedge$I, 3, 30
32	$\exists g(G_1(g) \wedge I_2(x,g) \wedge C_2(x,g))$	$\exists$I, 31
33	$\exists g(G_1(g) \wedge I_2(x,g) \wedge C_2(x,g))$	$\exists$E, 21, 22–32
34	$\exists g(G_1(g) \wedge I_2(x,g) \wedge C_2(x,g))$	$\vee$E, 6, 7–18, 19–33
35	$\exists g(G_1(g) \wedge I_2(x,g) \wedge C_2(x,g))$	$\exists$E, 1, 2–34
36	$\forall x \exists g(G_1(g) \wedge I_2(x,g) \wedge C_2(x,g))$	$\forall$I, 35

3.22 Proposition 16 (P16)

Dieu est cause de toutes choses.

$$\forall x \exists g (G_1(g) \land K_2(g,x))$$

1	$\forall x \exists g (G_1(g) \land I_2(x,g) \land C_2(x,g))$	P15
2	$\exists g (G_1(g) \land I_2(x,g) \land C_2(x,g))$	$\forall$E, 1
3	$\quad G_1(g) \land I_2(x,g) \land C_2(x,g)$	
4	$\quad G_1(g)$	$\land$E, 3
5	$\quad C_2(x,g)$	$\land$E, 3
6	$\quad \forall a \forall b (K_2(a,b) \leftrightarrow C_2(b,a))$	A4
7	$\quad K_2(g,x) \leftrightarrow C_2(x,g)$	$\forall$E, 6
8	$\quad K_2(g,x)$	$\Rightarrow$E, 5, 7
9	$\quad G_1(g) \land K_2(g,x)$	$\land$I, 4, 8
10	$\quad \exists g (G_1(g) \land K_2(g,x))$	$\exists$I, 9
11	$\exists g (G_1(g) \land K_2(g,x))$	$\exists$E, 2, 3–10
12	$\forall x \exists g (G_1(g) \land K_2(g,x))$	$\forall$I, 11

3.23 Proposition 17 (P17)

Dieu agit par les seules lois de sa nature et sans y être contraint par personne.

$$\exists g(G_1(g) \land \neg(\exists x(\neg I_2(x,g) \land K_2(x,g))) \land \forall x(K_2(g,x)))$$

1	$\exists x(G_1(x) \land \forall y(S_1(y) \to y = x))$	P14
2	$G_1(g) \land \forall y(S_1(y) \to y = g)$	
3	$G_1(g)$	$\land$E, 2
4	$\forall y(S_1(y) \to y = g)$	$\land$E, 2
5	$G_1(g) \leftrightarrow (S_1(g) \land \forall y(A_1(y) \to A_2(y,g)))$	D6
6	$S_1(g) \land \forall y(A_1(y) \to A_2(y,g))$	$\Rightarrow$E, 3, 5
7	$S_1(g)$	$\land$E, 6
8	$\exists x(\neg I_2(x,g) \land K_2(x,g))$	
9	$\neg I_2(e,g) \land K_2(e,g)$	
10	$\neg I_2(e,g)$	$\land$E, 9
11	$K_2(e,g)$	$\land$E, 9
12	$\forall x(S_1(x) \to \neg(\exists y(y \neq x \land K_2(y,x))))$	P6c
13	$S_1(g) \to \neg(\exists y(y \neq g \land K_2(y,g)))$	$\forall$E, 12
14	$\neg(\exists y(y \neq g \land K_2(y,g)))$	$\Rightarrow$E, 7, 13
15	$\neg(e \neq g \land K_2(e,g))$	$\forall$E, 14
16	$e = g \lor \neg K_2(e,g)$	De Morgan, 15
17	$e = g$	
18	$S_1(g) \leftrightarrow (I_2(g,g) \land C_2(g,g))$	D3
19	$I_2(g,g) \land C_2(g,g)$	$\Rightarrow$E, 7, 18
20	$I_2(g,g)$	$\land$E, 19
21	$I_2(e,g)$	17,20
22	$\neg I_2(e,g)$	R, 10
23	$I_2(e,g) \land \neg I_2(e,g)$	$\land$I, 21, 22
24	$\perp$	$\perp$E, 23
25	$\neg K_2(e,g)$	
26	$K_2(e,g)$	R, 11
27	$K_2(e,g) \land \neg K_2(e,g)$	$\land$I, 26, 25
28	$\perp$	$\perp$E, 27
29	$\perp$	$\lor$E, 16, 17–24, 25–28
30	$\perp$	$\exists$E, 8, 9–29
31	$\neg\exists x(\neg I_2(x,g) \land K_2(x,g))$	$\neg$I, 8–30
32	$\forall x \exists h(G_1(h) \land K_2(h,x))$	P16
33	$\exists h(G_1(h) \land K_2(h,x))$	$\forall$E, 32
34	$G_1(h) \land K_2(h,x)$	
35	$G_1(h)$	$\land$E, 34
36	$\exists z \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	P14-A
37	$\forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	
38	$G_1(g) \leftrightarrow g = z$	$\forall$E, 37
39	$G_1(h) \leftrightarrow h = z$	$\forall$E, 37
40	$g = z$	$\Rightarrow$E, 3, 38
41	$h = z$	$\Rightarrow$E, 35, 39
42	$h = g$	40,41
43	$K_2(h,x)$	$\land$E, 34
44	$K_2(g,x)$	42,43
45	$K_2(g,x)$	$\exists$E, 36, 37–44
46	$K_2(g,x)$	$\exists$E, 33, 34–45
47	$\forall x(K_2(g,x))$	$\forall$I, 46
48	$G_1(g) \land \neg(\exists x(\neg I_2(x,g) \land K_2(x,g))) \land \forall x(K_2(g,x))$	$\land$I, 3, 31, 47
49	$\exists g(G_1(g) \land \neg(\exists x(\neg I_2(x,g) \land K_2(x,g))) \land \forall x(K_2(g,x)))$	$\exists$I, 48
50	$\exists g(G_1(g) \land \neg(\exists x(\neg I_2(x,g) \land K_2(x,g))) \land \forall x(K_2(g,x)))$	$\exists$E, 1, 2–49

3.24 Corollaire 2 de la Proposition 17 (P17c2)

Dieu seul est cause libre.

$$\exists g(G_1(g) \land B_1(g) \land \forall x(B_1(x) \to x = g))$$

1	$\exists g(G_1(g) \land \neg(\exists x(\neg I_2(x,g) \land K_2(x,g))) \land \forall x(K_2(g,x)))$	P17
2	$G_1(g) \land \neg(\exists x(\neg I_2(x,g) \land K_2(x,g))) \land \forall x(K_2(g,x))$	
3	$G_1(g)$	∧E, 2
4	$\neg(\exists x(\neg I_2(x,g) \land K_2(x,g)))$	∧E, 2
5	$G_1(g) \leftrightarrow (S_1(g) \land \forall y(A_1(y) \to A_2(y,g)))$	D6
6	$S_1(g) \land \forall y(A_1(y) \to A_2(y,g))$	⇒E, 3, 5
7	$S_1(g)$	∧E, 6
8	$\forall x(S_1(x) \leftrightarrow K_2(x,x))$	DPIII
9	$S_1(g) \leftrightarrow K_2(g,g)$	∀E, 8
10	$K_2(g,g)$	⇒E, 7, 9
11	$\forall x(S_1(x) \to \neg(\exists y(y \neq x \land K_2(y,x))))$	P6c
12	$S_1(g) \to \neg(\exists y(y \neq g \land K_2(y,g)))$	∀E, 11
13	$\neg(\exists y(y \neq g \land K_2(y,g)))$	⇒E, 7, 12
14	$K_2(g,g) \land \neg\exists y(y \neq g \land K_2(y,g))$	∧I, 10, 13
15	$B_1(x) \leftrightarrow (K_2(x,x) \land \neg\exists y(y \neq x \land K_2(y,x)))$	D7a
16	$K_2(g,g) \land \neg\exists y(y \neq g \land K_2(y,g)) \leftrightarrow B_1(g)$	∀E, 15
17	$B_1(g)$	⇒E, 14, 16
18	$B_1(x)$	
19	$B_1(x) \leftrightarrow (K_2(x,x) \land \neg\exists y(y \neq x \land K_2(y,x)))$	D7a
20	$K_2(x,x) \land \neg\exists y(y \neq x \land K_2(y,x))$	⇒E, 18, 19
21	$K_2(x,x)$	∧E, 20
22	$\forall z(S_1(z) \leftrightarrow K_2(z,z))$	DPIII
23	$K_2(x,x) \leftrightarrow S_1(x)$	∀E, 22
24	$S_1(x)$	⇒E, 21, 23
25	$\exists z(G_1(z) \land \forall y(S_1(y) \to y = z))$	P14
26	$G_1(h) \land \forall y(S_1(y) \to y = h)$	
27	$\forall y(S_1(y) \to y = h)$	∧E, 26
28	$S_1(x) \to x = h$	∀E, 27
29	$x = h$	⇒E, 24, 28
30	$G_1(h)$	∧E, 26
31	$\exists z \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	P14-A
32	$\forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	
33	$G_1(g) \leftrightarrow g = z$	∀E, 32
34	$G_1(h) \leftrightarrow h = z$	∀E, 32
35	$g = z$	⇒E, 3, 33
36	$h = z$	⇒E, 30, 34
37	$h = g$	35,36
38	$x = h$	R, 29
39	$x = g$	38,37
40	$x = g$	∃E, 31, 32–39
41	$x = g$	∃E, 25, 26–40
42	$B_1(x) \to x = g$	⇒I, 18–41
43	$\forall x(B_1(x) \to x = g)$	∀I, 42
44	$G_1(g) \land B_1(g) \land \forall x(B_1(x) \to x = g)$	∧I, 3, 17, 43
45	$\exists g(G_1(g) \land B_1(g) \land \forall x(B_1(x) \to x = g))$	∃I, 44
46	$\exists g(G_1(g) \land B_1(g) \land \forall x(B_1(x) \to x = g))$	∃E, 1, 2–45

3.25 Proposition 18 (P18)

Dieu est cause immanente, et non transitive, de toutes choses.

$$\exists g(G_1(g) \wedge \forall x(I_2(x,g) \leftrightarrow K_2(g,x)))$$

1	$\exists x(G_1(x) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = x))$	P14
2	$\quad G_1(g) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = g)$	
3	$\quad G_1(g)$	∧E, 2
4	$\quad \forall x \exists h(G_1(h) \wedge I_2(x,h) \wedge C_2(x,h))$	P15
5	$\quad \forall x \exists h(G_1(h) \wedge K_2(h,x))$	P16
6	$\quad\quad I_2(x,g)$	
7	$\quad\quad \forall a \forall b(I_2(a,b) \rightarrow C_2(a,b))$	A8
8	$\quad\quad I_2(x,g) \rightarrow C_2(x,g)$	∀E, 7
9	$\quad\quad C_2(x,g)$	⇒E, 6, 8
10	$\quad\quad \forall a \forall b(K_2(a,b) \leftrightarrow C_2(b,a))$	A4
11	$\quad\quad K_2(g,x) \leftrightarrow C_2(x,g)$	∀E, 10
12	$\quad\quad K_2(g,x)$	⇒E, 9, 11
13	$\quad I_2(x,g) \rightarrow K_2(g,x)$	⇒I, 6–12
14	$\quad\quad K_2(g,x)$	
15	$\quad\quad \exists h(G_1(h) \wedge I_2(x,h) \wedge C_2(x,h))$	∀E, 4
16	$\quad\quad\quad G_1(h) \wedge I_2(x,h) \wedge C_2(x,h)$	
17	$\quad\quad\quad G_1(h)$	∧E, 16
18	$\quad\quad\quad I_2(x,h)$	∧E, 16
19	$\quad\quad\quad \exists z \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	P14-A
20	$\quad\quad\quad\quad \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	
21	$\quad\quad\quad\quad G_1(g) \leftrightarrow g = z$	∀E, 20
22	$\quad\quad\quad\quad G_1(h) \leftrightarrow h = z$	∀E, 20
23	$\quad\quad\quad\quad g = z$	⇒E, 3, 21
24	$\quad\quad\quad\quad h = z$	⇒E, 17, 22
25	$\quad\quad\quad\quad h = g$	23,24
26	$\quad\quad\quad\quad I_2(x,h)$	R, 18
27	$\quad\quad\quad\quad I_2(x,g)$	25,26
28	$\quad\quad\quad I_2(x,g)$	∃E, 19, 20–27
29	$\quad\quad I_2(x,g)$	∃E, 15, 16–28
30	$\quad K_2(g,x) \rightarrow I_2(x,g)$	⇒I, 14–29
31	$\quad I_2(x,g) \leftrightarrow K_2(g,x)$	⇒I, 13, 30
32	$\quad \forall x(I_2(x,g) \leftrightarrow K_2(g,x))$	∀I, 31
33	$\quad G_1(g) \wedge \forall x(I_2(x,g) \leftrightarrow K_2(g,x))$	∧I, 3, 32
34	$\quad \exists g(G_1(g) \wedge \forall x(I_2(x,g) \leftrightarrow K_2(g,x)))$	∃I, 33
35	$\exists g(G_1(g) \wedge \forall x(I_2(x,g) \leftrightarrow K_2(g,x)))$	∃E, 1, 2–34

3.26 Proposition 19 (P19)

Dieu et tous ses attributs sont éternels.

$$\exists g(G_1(g) \wedge E_1(g) \wedge \forall x(A_2(x,g) \rightarrow E_1(x)))$$

1	$\exists x(G_1(x) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = x))$	P14
2	$G_1(g) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = g)$	
3	$G_1(g)$	$\wedge$E, 2
4	$G_1(g) \leftrightarrow (S_1(g) \wedge \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y,g)))$	D6
5	$S_1(g) \wedge \forall y(A_1(y) \rightarrow A_2(y,g))$	$\Rightarrow$E, 3, 4
6	$S_1(g)$	$\wedge$E, 5
7	$\forall x(S_1(x) \rightarrow L(\exists y(y = x)))$	P7
8	$S_1(g) \rightarrow L(\exists y(y = g))$	$\forall$E, 7
9	$L(\exists y(y = g))$	$\Rightarrow$E, 6, 8
10	$E_1(x) \leftrightarrow L(\exists v(v = x))$	D8
11	$L(\exists y(y = g)) \leftrightarrow E_1(g)$	$\forall$E, 10
12	$E_1(g)$	$\Rightarrow$E, 9, 11
13	$A_2(x,g)$	
14	$A_2(x,y) \leftrightarrow (A_1(x) \wedge C_2(y,x))$	D4b
15	$A_1(x) \wedge C_2(g,x)$	$\Rightarrow$E, 13, 14
16	$A_1(x)$	$\wedge$E, 15
17	$\forall z(A_1(z) \rightarrow C_2(z,z))$	P10
18	$A_1(x) \rightarrow C_2(x,x)$	$\forall$E, 17
19	$C_2(x,x)$	$\Rightarrow$E, 16, 18
20	$\forall a \forall b(A_2(a,b) \wedge S_1(b) \rightarrow a = b)$	DP7
21	$A_2(x,g) \wedge S_1(g) \rightarrow x = g$	$\forall$E, 20
22	$A_2(x,g) \wedge S_1(g)$	$\wedge$I, 13, 6
23	$x = g$	$\Rightarrow$E, 22, 21
24	$E_1(g)$	R, 12
25	$E_1(x)$	23,24
26	$A_2(x,g) \rightarrow E_1(x)$	$\Rightarrow$I, 13–25
27	$\forall x(A_2(x,g) \rightarrow E_1(x))$	$\forall$I, 26
28	$G_1(g) \wedge E_1(g) \wedge \forall x(A_2(x,g) \rightarrow E_1(x))$	$\wedge$I, 3, 12, 27
29	$\exists g(G_1(g) \wedge E_1(g) \wedge \forall x(A_2(x,g) \rightarrow E_1(x)))$	$\exists$I, 28
30	$\exists g(G_1(g) \wedge E_1(g) \wedge \forall x(A_2(x,g) \rightarrow E_1(x)))$	$\exists$E, 1, 2–29

3.27 Proposition 20 (P20)

L'existence et l'essence de Dieu sont une seule et même chose.

$$\exists g(G_1(g) \wedge \forall x(A_2(x,g) \to x = g))$$

1	$\exists x(G_1(x) \wedge \forall y(S_1(y) \to y = x))$	P14
2	$\quad G_1(g) \wedge \forall y(S_1(y) \to y = g)$	
3	$\quad G_1(g)$	$\wedge$E, 2
4	$\quad G_1(g) \leftrightarrow (S_1(g) \wedge \forall y(A_1(y) \to A_2(y,g)))$	D6
5	$\quad S_1(g) \wedge \forall y(A_1(y) \to A_2(y,g))$	$\Rightarrow$E, 3, 4
6	$\quad S_1(g)$	$\wedge$E, 5
7	$\quad\quad A_2(x,g)$	
8	$\quad\quad \forall a \forall b(A_2(a,b) \wedge S_1(b) \to a = b)$	DP7
9	$\quad\quad A_2(x,g) \wedge S_1(g) \to x = g$	$\forall$E, 8
10	$\quad\quad A_2(x,g) \wedge S_1(g)$	$\wedge$I, 7, 6
11	$\quad\quad x = g$	$\Rightarrow$E, 10, 9
12	$\quad A_2(x,g) \to x = g$	$\Rightarrow$I, 7–11
13	$\quad \forall x(A_2(x,g) \to x = g)$	$\forall$I, 12
14	$\quad G_1(g) \wedge \forall x(A_2(x,g) \to x = g)$	$\wedge$I, 3, 13
15	$\quad \exists g(G_1(g) \wedge \forall x(A_2(x,g) \to x = g))$	$\exists$I, 14
16	$\exists g(G_1(g) \wedge \forall x(A_2(x,g) \to x = g))$	$\exists$E, 1, 2–15

3.28 Proposition 21 (P21)

Tout ce qui suit de l'essence absolue d'un attribut de Dieu existe nécessairement et infiniment.

$$\forall x((\exists g \exists y(G_1(g) \wedge A_2(y,g) \wedge x \neq g \wedge K_2(y,x) \wedge \neg(\exists z(z \neq y \wedge K_2(z,x))))) \to (N(\exists v(v = x)) \wedge \neg F_1(x)))$$

1	$\exists g \exists y(G_1(g) \wedge A_2(y,g) \wedge x \neq g \wedge K_2(y,x) \wedge \neg(\exists z(z \neq y \wedge K_2(z,x))))$	
2	$G_1(g) \wedge A_2(y,g) \wedge x \neq g \wedge K_2(y,x) \wedge \neg(\exists z(z \neq y \wedge K_2(z,x)))$	
3	$G_1(g)$	∧E, 2
4	$A_2(y,g)$	∧E, 2
5	$K_2(y,x)$	∧E, 2
6	$G_1(g) \leftrightarrow (S_1(g) \wedge \forall w(A_1(w) \to A_2(w,g)))$	D6
7	$S_1(g) \wedge \forall w(A_1(w) \to A_2(w,g))$	⇒E, 3, 6
8	$S_1(g)$	∧E, 7
9	$\forall a \forall b(A_2(a,b) \wedge S_1(b) \to a = b)$	DP7
10	$A_2(y,g) \wedge S_1(g) \to y = g$	∀E, 9
11	$A_2(y,g) \wedge S_1(g)$	∧I, 4, 8
12	$y = g$	⇒E, 11, 10
13	$K_2(g,x)$	12,5
14	$\exists g(G_1(g) \wedge E_1(g) \wedge \forall z(A_2(z,g) \to E_1(z)))$	P19
15	$G_1(h) \wedge E_1(h) \wedge \forall z(A_2(z,h) \to E_1(z))$	
16	$G_1(h)$	∧E, 15
17	$E_1(h)$	∧E, 15
18	$\exists z \forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	P14-A
19	$\forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	
20	$G_1(g) \leftrightarrow g = z$	∀E, 19
21	$G_1(h) \leftrightarrow h = z$	∀E, 19
22	$g = z$	⇒E, 3, 20
23	$h = z$	⇒E, 16, 21
24	$g = h$	22,23
25	$E_1(h)$	R, 17
26	$E_1(g)$	24,25
27	$E_1(g)$	∃E, 18, 19–26
28	$E_1(g)$	∃E, 14, 15–27
29	$E_1(x) \leftrightarrow L(\exists v(v = x))$	D8
30	$E_1(g) \leftrightarrow L(\exists v(v = g))$	∀E, 29
31	$L(\exists v(v = g))$	⇒E, 28, 30
32	$\forall p(L(p) \to N(p))$	R1
33	$L(\exists v(v = g)) \to N(\exists v(v = g))$	∀E, 32
34	$N(\exists v(v = g))$	⇒E, 31, 33
35	$\forall a \forall b(K_2(a,b) \to N((\exists v(v = a)) \leftrightarrow \exists v(v = b)))$	A3
36	$K_2(g,x) \to N((\exists v(v = g)) \leftrightarrow \exists v(v = x))$	∀E, 35
37	$N((\exists v(v = g)) \leftrightarrow \exists v(v = x))$	⇒E, 13, 36
38	$N((\exists v(v = g)) \to (\exists v(v = x)))$	R7, 37
39	$\forall p \forall q(N(p \to q) \to (N(p) \to N(q)))$	R6
40	$N((\exists v(v = g)) \to (\exists v(v = x))) \to (N(\exists v(v = g)) \to N(\exists v(v = x)))$	∀E, 39
41	$N(\exists v(v = g)) \to N(\exists v(v = x))$	⇒E, 38, 40
42	$N(\exists v(v = x))$	⇒E, 34, 41
43	$\forall a(N(\exists y(y = a)) \leftrightarrow \neg F_1(a))$	A14
44	$N(\exists y(y = x)) \leftrightarrow \neg F_1(x)$	∀E, 43
45	$N(\exists y(y = x)) \to \neg F_1(x)$	∧E, 44
46	$\neg F_1(x)$	⇒E, 42, 45
47	$N(\exists v(v = x)) \wedge \neg F_1(x)$	∧I, 42, 46
48	$N(\exists v(v = x)) \wedge \neg F_1(x)$	∃E, 1, 2–47
49	$(\exists g \exists y(G_1(g) \wedge A_2(y,g) \wedge x \neq g \wedge K_2(y,x) \wedge \neg(\exists z(z \neq y \wedge K_2(z,x))))) \to (N(\exists v(v = x)) \wedge \neg F_1(x))$	⇒I, 1–48
50	$\forall x((\exists g \exists y(G_1(g) \wedge A_2(y,g) \wedge x \neq g \wedge K_2(y,x) \wedge \neg(\exists z(z \neq y \wedge K_2(z,x))))) \to (N(\exists v(v = x)) \wedge \neg F_1(x)))$	∀I, 49

3.29 Proposition 22 (P22)

Tout ce qui suit d'un attribut de Dieu en tant que modifié est éternel et infini.

$$\forall x((\exists g \exists y \exists y'(G_1(g) \land A_2(y,g) \land M_1(y') \land \neg F_1(y') \land N(\exists v(v = y')) \land K_2(y,x) \land K_2(y',x) \land \neg(\exists z(z \neq y \land z \neq y' \land K_2(z,x))))) \to (N(\exists v(v = x)) \land \neg F_1(x)))$$

1	$\exists g \exists y \exists y'(G_1(g) \land A_2(y,g) \land M_1(y') \land \neg F_1(y') \land N(\exists v(v = y')) \land K_2(y,x) \land K_2(y',x) \land \neg(\exists z(z \neq y \land z \neq y' \land K_2(z,x))))$	
2	$G_1(g) \land A_2(y,g) \land M_1(y') \land \neg F_1(y') \land N(\exists v(v = y')) \land K_2(y,x) \land K_2(y',x) \land \neg(\exists z(z \neq y \land z \neq y' \land K_2(z,x)))$	
3	$G_1(g)$	∧E, 2
4	$A_2(y,g)$	∧E, 2
5	$M_1(y')$	∧E, 2
6	$\neg F_1(y')$	∧E, 2
7	$N(\exists v(v = y'))$	∧E, 2
8	$K_2(y,x)$	∧E, 2
9	$K_2(y',x)$	∧E, 2
10	$G_1(g) \leftrightarrow (S_1(g) \land \forall w(A_1(w) \to A_2(w,g)))$	D6
11	$S_1(g) \land \forall w(A_1(w) \to A_2(w,g))$	⇒E, 3, 10
12	$S_1(g)$	∧E, 11
13	$\forall a \forall b(A_2(a,b) \land S_1(b) \to a = b)$	DP7
14	$A_2(y,g) \land S_1(g) \to y = g$	∀E, 13
15	$A_2(y,g) \land S_1(g)$	∧I, 4, 12
16	$y = g$	⇒E, 15, 14
17	$K_2(g,x)$	16,8
18	$\forall a \forall b(K_2(a,b) \to N((\exists v(v = a)) \leftrightarrow \exists v(v = b)))$	A3
19	$K_2(y',x) \to N((\exists v(v = y')) \leftrightarrow \exists v(v = x))$	∀E, 18
20	$N((\exists v(v = y')) \leftrightarrow \exists v(v = x))$	⇒E, 9, 19
21	$N((\exists v(v = y')) \to (\exists v(v = x)))$	R7, 20
22	$\forall p \forall q(N(p \to q) \to (N(p) \to N(q)))$	R6
23	$N((\exists v(v = y')) \to (\exists v(v = x))) \to (N(\exists v(v = y')) \to N(\exists v(v = x)))$	∀E, 22
24	$N(\exists v(v = y')) \to N(\exists v(v = x))$	⇒E, 21, 23
25	$N(\exists v(v = x))$	⇒E, 7, 24
26	$\forall a(N(\exists y(y = a)) \leftrightarrow \neg F_1(a))$	A14
27	$N(\exists y(y = x)) \leftrightarrow \neg F_1(x)$	∀E, 26
28	$N(\exists y(y = x)) \to \neg F_1(x)$	∧E, 27
29	$\neg F_1(x)$	⇒E, 25, 28
30	$N(\exists v(v = x)) \land \neg F_1(x)$	∧I, 25, 29
31	$N(\exists v(v = x)) \land \neg F_1(x)$	∃E, 1, 2–30
32	$(\exists g \exists y \exists y'(G_1(g) \land A_2(y,g) \land M_1(y') \land \neg F_1(y') \land N(\exists v(v = y')) \land K_2(y,x) \land K_2(y',x) \land \neg(\exists z(z \neq y \land z \neq y' \land K_2(z,x))))) \to (N(\exists v(v = x)) \land \neg F_1(x))$	⇒I, 1–31
33	$\forall x((\exists g \exists y \exists y'(G_1(g) \land A_2(y,g) \land M_1(y') \land \neg F_1(y') \land N(\exists v(v = y')) \land K_2(y,x) \land K_2(y',x) \land \neg(\exists z(z \neq y \land z \neq y' \land K_2(z,x))))) \to (N(\exists v(v = x)) \land \neg F_1(x)))$	∀I, 32

3.30 Proposition 23 (P23)

Tout mode qui existe nécessairement et infiniment découle d'un attribut de Dieu.

$$\forall x(N(\exists v(v = x)) \rightarrow \exists g\exists y(G_1(g) \wedge A_2(y, g) \wedge N((\exists v(v = y)) \rightarrow (\exists v(v = x)))))$$

1	$N(\exists v(v = x))$	
2	$\exists g(G_1(g) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = g))$	P14
3	$G_1(g) \wedge \forall y(S_1(y) \rightarrow y = g)$	
4	$G_1(g)$	$\wedge$E, 3
5	$\forall x(\exists y(A_2(y, x)))$	A9
6	$\exists y(A_2(y, g))$	$\forall$E, 5
7	$A_2(y, g)$	
8	$G_1(g) \leftrightarrow (S_1(g) \wedge \forall w(A_1(w) \rightarrow A_2(w, g)))$	D6
9	$S_1(g) \wedge \forall w(A_1(w) \rightarrow A_2(w, g))$	$\Rightarrow$E, 4, 8
10	$S_1(g)$	$\wedge$E, 9
11	$\forall a\forall b(A_2(a, b) \wedge S_1(b) \rightarrow a = b)$	DP7
12	$A_2(y, g) \wedge S_1(g) \rightarrow y = g$	$\forall$E, 11
13	$A_2(y, g) \wedge S_1(g)$	$\wedge$I, 7, 10
14	$y = g$	$\Rightarrow$E, 13, 12
15	$\forall z\exists h(G_1(h) \wedge I_2(z, h) \wedge C_2(z, h))$	P15
16	$\exists h(G_1(h) \wedge I_2(x, h) \wedge C_2(x, h))$	$\forall$E, 15
17	$G_1(h) \wedge I_2(x, h) \wedge C_2(x, h)$	
18	$G_1(h)$	$\wedge$E, 17
19	$I_2(x, h)$	$\wedge$E, 17
20	$C_2(x, h)$	$\wedge$E, 17
21	$\exists z\forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	P14-A
22	$\forall y(G_1(y) \leftrightarrow y = z)$	
23	$G_1(g) \leftrightarrow g = z$	$\forall$E, 22
24	$G_1(h) \leftrightarrow h = z$	$\forall$E, 22
25	$g = z$	$\Rightarrow$E, 4, 23
26	$h = z$	$\Rightarrow$E, 18, 24
27	$h = g$	25,26
28	$C_2(x, h)$	R, 20
29	$C_2(x, g)$	27,28
30	$C_2(x, g)$	$\exists$E, 21, 22–29
31	$\forall a\forall b(K_2(a, b) \leftrightarrow C_2(b, a))$	A4
32	$K_2(g, x) \leftrightarrow C_2(x, g)$	$\forall$E, 31
33	$K_2(g, x)$	$\Rightarrow$E, 30, 32
34	$K_2(y, x)$	14,33
35	$\forall a\forall b(K_2(a, b) \rightarrow N((\exists v(v = a)) \leftrightarrow \exists v(v = b)))$	A3
36	$K_2(y, x) \rightarrow N((\exists v(v = y)) \leftrightarrow \exists v(v = x))$	$\forall$E, 35
37	$N((\exists v(v = y)) \leftrightarrow \exists v(v = x))$	$\Rightarrow$E, 34, 36
38	$N((\exists v(v = y)) \rightarrow (\exists v(v = x)))$	R7, 37
39	$G_1(g) \wedge A_2(y, g) \wedge N((\exists v(v = y)) \rightarrow (\exists v(v = x)))$	$\wedge$I, 4, 7, 38
40	$\exists g\exists y(G_1(g) \wedge A_2(y, g) \wedge N((\exists v(v = y)) \rightarrow (\exists v(v = x))))$	$\exists$I, 39
41	$\exists g\exists y(G_1(g) \wedge A_2(y, g) \wedge N((\exists v(v = y)) \rightarrow (\exists v(v = x))))$	$\exists$E, 6, 7–40
42	$\exists g\exists y(G_1(g) \wedge A_2(y, g) \wedge N((\exists v(v = y)) \rightarrow (\exists v(v = x))))$	$\exists$E, 2, 3–41
43	$N(\exists v(v = x)) \rightarrow \exists g\exists y(G_1(g) \wedge A_2(y, g) \wedge N((\exists v(v = y)) \rightarrow (\exists v(v = x))))$	$\Rightarrow$I, 1–42
44	$\forall x(N(\exists v(v = x)) \rightarrow \exists g\exists y(G_1(g) \wedge A_2(y, g) \wedge N((\exists v(v = y)) \rightarrow (\exists v(v = x)))))$	$\forall$I, 43