Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

4η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων

ΤΣΩΛΑΣ ΛΕΩΝΙΔΑΣ
03112422

Άσκηση 1 – Προτάσεις φίλων

Για την επίλυση του προβλήματος θα χρησιμοποιηθεί μια παραλλαγή του γνωστού αλγορίθμου Dijkstra για εύρεση του μήκους των συντομότερων μονοπατιών μεταξύ των κορυφών κάποιου γραφήματος G. Αν και ο ορισμός του αλγορίθμου Dijkstra αποσκοπεί στον προσδιορισμό του μήκους μεταξύ δεδομένου ζεύγους κορυφών του γραφήματος, στην πραγματικότητα υπολογίζονται οι αποστάσεις μεταξύ του αρχικού κόμβου – στόχου και οποιουδήποτε άλλου κόμβου. Στο παρόν πρόβλημα θα γίνει χρήση αυτής ακριβώς της ιδιότητας του αλγορίθμου Dijkstra.

Η λογική είναι η ακόλουθη: Πραγματοποιείται εκκίνηση από τον αρχικό κόμβο στόχο, δημιουργείται ένας πίνακας n γραμμών και k στηλών και εφαρμόζεται ουσιαστικά η διαδικασία που εφαρμόζεται στον αλγοριθμο Dijkstra. Η σημαντικότερη διαφορά έγκειται στο ότι οι κόμβοι που δεν έχουν προσεγγισθεί ακόμα σε κάθε επανάληψη της εκτέλεσης του αλγορίθμου δεν έχουν αρχικά άπειρη τιμή, αλλά μηδενική και σε κάθε βήμα αντί της τιμής της ελάχιστης απόστασης κρατάμε ένα ζεύγος $(d_{min}, trust)$ όπου d_{min} η ελάχιστη απόσταση και $trust$ ο συνολικός βαθμός εμπιστοσύνης μεταξύ του δεδομένου κόμβου και του αρχικού στη γραμμή i που αντιστοιχεί στην i επανάληψη. Σε κάθε βήμα λοιπόν κρατάμε το ελάχιστο μονοπάτι εφόσον το $trust$ είναι μεγαλύτερο από την τιμή που έχουμε ως κάτω όριο από τα δεδομένα. Αλλιώς επιλέγουμε οποιοδήποτε μονοπάτι μεγιστοποιεί το $trust$.Η διαδικασία αυτή σταματάει σε k επαναλήψεις αφού υπάρχει ο περιορισμός ύπαρξης άνω ορίου ίσου με k στο μήκος των ζητούμενων μονοπατιών. Το αντίστοιχο βάρος που προστίθεται και ελέγχει τα συντομότερα μονοπάτια σε κάθε βήμα είναι η παράμετρος β_t . Στο τέλος του αλγορίθμου θα ελεγχθεί μεταξύ ποιων κόμβων υπάρχει σύνδεση με τον αρχικό κόμβο με το ελάχιστο κόστος που ορίζεται από τα δεδομένα του προβλήματος. Ο έλεγχος αυτός έχει k επαναλήψεις ενώ σε κάθε επανάληψη έχουμε n προς εξέταση γραμμές και το πολύ m ακμές των οποίων πρέπει να ελέγξουμε τις συνδέσεις. Άρα η συνολική πολυπλκότητα του αλγορίθμου είναι O(k(n+m)). Αν τώρα ληφθεί υπόψιν ότι $k=O(logn)$ από την εκφώνηση, προκύπτει ότι η πολυπλοκότητα είναι ίση με $O((n+m)logn)$.

Άσκηση 2 – Αποφεύγοντας τη συμφόρηση

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, το πρόβλημα επιλύεται σε πολυωνυμικό χρόνο με μια – μικρότερη αυτή τη φορά – τροποποίηση του αλγορίθμου Dijkstra. Συγκεκριμένα εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο Dijkstra στη γνήσια μορφή του, αφού πρώτα αλλάξουμε το βάρος κάθε ακμής που ανήκει στην κατηγορία με τις υπό συμφόρηση ακμές σε άπειρο. Με τον τρόπο αυτό κάθε φορά που ο τροποποιημένος αλγόριθμος Dijkstra ελέγχει για συντομότερο μονοπάτι δεν θα είναι δυνατό να επιλέξει κάποια από τις ακμές αυτές ως μέρος μονοπατιού, αφού θα έχει άπειρο βάρος. Στο τέλος του αλγορίθμου ελέγχεται το βάρος του συντομότερου μονοπατιού. Αν είναι κάποιος πεπερασμένος αριθμός συνεπάγεται ύπαρξη του ζητούμενου μονοπατιού το οποίο επιστρέφει ο αλγόριθμος κατά τα γνωστά. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει ζητούμενο μονοπάτι, ο αλγόριθμος επιστρέφει άπειρη τιμή ως βάρους του συντομότερου μονοπατιού. Επειδή ο αλγόριθμος Dijkstra έχει πολυπλοκότητα $O(nm+n^2 logn)$, ο τροποποιημένος αλγόριθμος έχει πολυπλοκότητα $O(m+nm+n^2 logn)$, = $O(nm+n^2 logn)$ αφού προηγείται μόνο η τροποποίηση του βάρους κάποιων ακμών με κόστος $O(m)$.

Άσκηση 3 - Τροποποίηση του αλγορίθμου Dijkstra

α)
Για την επίλυση του προβλήματος θεωρείται ως δεδομένος ο αλγόριθμος Dijkstra.

Στη συνέχεια δημιουργούμε ένα νέο πίνακα, έστω B, n θέσεων, όπου n το μήκος των κορυφών του γραφήματος G. Σε κάθε θέση του πίνακα B περιέχονται οι εκτιμήσεις ελάχιστων αποστάσεων του κόμβου – στόχου από τον αρχικό κόμβο (ανά πάσα στιγμή). Έπειτα τροποποιούμε τον αλγόριθμο Dijkstra ούτως ώστε να λάβουμε ένα νέο πίνακα H, μεγέθους $nC-1$ αυτή τη φορά. Ουσιαστικά κάθε στοιχείο του πίνακα H είναι μία λίστα κόμβων που ανήκουν στο αρχικό γράφημα G.

Πιο συγκεκριμένα σε κάθε θέση i του πίνακα H, αν υπάρχει μία λίστα κόμβων, έστω $x_1 \, και \, x_2$, τότε οι κόμβοι $x_1 \, και \, x_2$ αντιστοιχούν σε μία εκτίμηση απόστασης ίση με i από τον αρχικό κόμβο. Το πεδίο τιμών για το i είναι $0 \leq i \leq nC-1$.

Αντίστοιχα αν η λίστα είναι κενή, συνεπάγεται πως δεν υπάρχει κάποιος κόμβος με εκτίμηση απόστασης i από τον αρχικό κόμβο.

Τέλος είναι προφανές πως η μεγαλύτερη απόσταση που μπορεί να υπάρξει μεταξύ ενός ζεύγους αρχικού κόμβου και κόμβου – στόχου είναι nC, λαμβάνοντας υπόψιν την εκφώνηση της άσκησης. Η μέγιστη αυτή δυνατή τιμή αντιστοιχεί στο ενδεχόμενο το συντομότερο μονοπάτι προς τον κόμβο - στόχο στην περίπτωση που πρέπει να διασχίσει όλους τους κόμβους ώστε να φθάσει σε αυτόν, ενώ όλες οι ακμές έχουν κόστος C. Συνεπώς απαιτούνται $n-1$ ακμές για να προσεγγισθεί ο κόμβος αυτός. Αντίθετα η ελάχιστη τιμή του i είναι ίση με 0 και αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή που μπορεί να λάβει το βάρος κάποιας ακμής του γραφήματος G. Με τις παραδοχές αυτές, προκύπτει η ορθότητα της επιλογής του μεγέθους του πίνακα H.

Το πρώτο βήμα είναι η αρχικοποίηση του πίνακα H: Συγκεκριμένα, ορίζουμε ένα δείκτη του πίνακα H, έστω p, ο οποίος αρχικά δείχνει στην θέση 0 του πίνακα H. Στη θέση αυτή δημιουργούμε μία λίστα, στην οποία βάσει της περιγραφής του πίνακα H που προηγήθηκε, θα πρέπει να υπάρχει μόνο ο αρχικός κόμβος s. Λαμβάνουμε επίσης μία λίστα με όλους τους κόμβος - εκτός του s - την οποία αρχικά αποθηκεύουμε στην τελευταία θέση του πίνακα H ($H[nC-1]$).

Έπειτα, με αφετηρία τον κόμβο s, μετακινείται διαδοχικά ο δείκτης p, μέχρι να βρεθεί μη κενή λίστα κόμβων του H. Στην πρώτη επανάληψη η θέση αυτή είναι η τελευταία θέση του πίνακα. Επιλέγεται (αυθαίρετα) ένας κόμβος από τη λίστα που εντοπίζεται σε κάθε επανάληψη και αφαιρείται από τη λίστα της αντίστοιχης θέσης του πίνακα H. Σε κάθε επανάληψη ο δείκτης p, δεν ξεκινάει από την αρχή , όπως άλλωστε συμβαίνει και στην αντίστοιχη υλοποίηση του αλγορίθμου Dijkstra, αλλά συνεχίζει από τη θέση του πίνακα H που “σταμάτησε” στην τελευταία επανάληψη. Το κριτήριο τερματισμού του αλγορίθμου είναι η προσέγγιση της τελευταίας θέσης του πίνακα H από το δείκτη p.

Ο υπολογισμός του ελαχίστου μονοπατιού σε κάθε επανάληψη συμβαίνει ως εξής: Ο κόμβος που αφαιρείται και κάθε φορά από την πρώτη μη κενή λίστα, μεταφέρεται στη λίστα με τη νέα εκτίμησης απόστασης, στον πίνακα H. Για τη διαδικασία αυτή έχουμε πολυπλοκότητας ίση με το πλήθος των ακμών του γραφήματος G, δηλαδή $O(m)$. Η ελάχιστη απόσταση υπολογίζεται από το δείκτη p ο οποίος διατρέχει τον πίνακα H μία φορά και δεν επιστρέφει πίσω, αφού δεν υπάρχουν ακμές αρνητικού βάρους στο G, άρα υπάρχουν nC διαδοχικά βήματα.

Συνεπώς, η συνολική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $O(nC+m)$.

β)

Ακολουθείται η ίδια στρατηγική με το πρώτο ερώτημα. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε δυαδικό σωρό αντί του πίνακα H, με σκοπό να οργανωθεί η κάθε λίστα κόμβων βάσει της εκτιμώμενης απόστασης σε κάθε βήμα. Η υπόθεση στην οποία στηρίζεται η λύση είναι πως η διαφορά εκτιμώμενης απόστασης του σωρού είναι $d_{max}-d_{min}=2^C$. Το επακόλουθο της παραδοχής αυτής είναι πως η εύρεση του μεγίστου στο σωρό και η τροποποίησή του γίνεται στη χειρότερη περίπτωση σε λογαριθμικό χρόνο αφού $\log(d_{max}-d_{min})-\log 2^C=C$.

Η συνολική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου στην περίπτωση αυτή είναι $O((n+m)C)$ αφού προσαρμόζεται στον αλγόριθμο Dijkstra με αρχικό κόστος O(n+m).

Η απόδειξη του ανωτέρω ισχυρισμού πραγματοποιείται με επαγωγή. Συγκεκριμένα:

- Βάση επαγωγής: Στην πρώτη επανάληψη θα εισαχθούν στη λίστα οι γείτονες του αρχικού κόμβου s με μέγιστη απόσταση 2^C από τον s.
- Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι η μέγιστη διαφορά εκτιμώμενης απόστασης στην i επανάληψη είναι $d_{max}i-d_{min}i\leq 2^C$
- Επαγωγικό βήμα: $d_{max}i+1=max[d_{min}i+2^C, d_{max}i]$, $d_{min}i+1\leq d_{min}i$.

Βάσει της υπόθεσης αυτής προκύπτει θα ισχύει η σχέση $d_{max}i+1-d_{min}i+1\leq d_{min}i+2^C-d_{min}i=2^C$ ή η σχέση $d_{max}i+1-d_{min}i+1\leq d_{max}i-d_{min}i\leq 2^C$

Άσκηση 4 – Συντομότερα μονοπάτια με δύο κριτήρια

α)

Αρχικά, δημιουργείται ένα αντίγραφο G' του γραφήματος G το οποίο περιλαμβάνει μόνο τις πράσινες ακμές του G. Το βήμα αυτό έχει πολυπλοκότητα $O(m)$ αφού η χειρότερη περίπτωση είναι να είναι πράσινες όλες οι ακμές, ενώ υπονοείται η παραδοχή ότι η αντιγραφή κάθε στοιχείου γίνεται σε σταθερό χρόνο.

Ομοίως, δημιουργείται ένα αντίγραφο G'' με κάθε κόκκινη ακμή του γραφήματος G. Εδώ, κάθε κόκκινη ακμή του G (u,v) που ενώνει τις αντίστοιχες κορυφές u,v του G, αντικαθίσταται από μία άλλη κόκκινη ακμή u'',v' , όπου v' η αντίστοιχη κορυφή της v στο αντίγραφο της G'. Διατηρώντας τη λογική του προηγούμενου βήματος, το κόστος είναι O(m) και σε αυτή την περίπτωση.

Θεωρούμε επίσης το συνολικό γράφημα G''' με μοναδικό αντίγραφο της αρχικής κορυφής s. Για κάθε κορυφή u του G, υπολογίζονται οι αποστάσεις s-u' και s-u'' μέσω του γνωστού αλγορίθμου Dijkstra , στο νέο γράφημα G'''. Η μικρότερη των δύο αποστάσεων είναι η ζητούμενη για την κορυφή u. Θεωρώντας ότι το νέο γράφημα G''' είναι (ασυμπτωτικά) ίδιου μεγέθους με το αρχικό G, χρειάζεται χρόνος $O(m+nlogn)$.

Πρέπει να αποδειχθεί η ορθότητα του αλγορίθμου. Αρκεί να δειχθεί ότι η συντομότερη διαδρομή με το πολύ μία κόκκινη κορυφή s-u είναι είτε s-u' ή s-u'' στο G. Διακρίνονται δύο ενδεχόμενα: 0 ή 1 κόκκινη ακμή.

Έστω ότι δεν υπάρχουν κόκκινες ακμές στο συντομότερο μονοπάτι. Στην περίπτωση αυτή η συντομότερη διαδρομή περιλαμβάνει μόνο τις ακμές του G'' αφού το γράφημα δεν έχει κόκκινες ακμές. Συνεπώς, η ελάχιστη διαδρομή είναι η s-u''.

Έστω ότι υπάρχει μία (ακριβώς) κόκκινη ακμή στο συντομότερο μονοπάτι η u_1, u_2 . Η διαδρομή αυτή υπάρχει στο G'''. Επίσης, η διαδρομή $s-u_1''$ ανήκει στο G''. Ακολουθείται έπειτα η ακμή u_1'', u_2' και γίνεται μετάβαση στο γράφημα G'. Στο G' υπάρχει η διαδρομή $u_2'-u'$ η οποία αποτελείται μόνο από πράσινες ακμές και προφανώς δεν μπορεί να μεταβεί ξανά στο γράφημα G'.

β)

Η πιο γενικευμένη εκδοχή του αλγορίθμου περιλαμβάνει την κατασκευή του γραφήματος G' όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, καθώς και την κατασκευή k ακόμα "αντιγράφων" του αρχικού γραφήματος G:

$$G^i, 1 \le i \le k$$

Συμβολίζεται με u^i στο γράφημα G^i κάθε κορυφή σε αντιστοιχία με την κορυφή u του γραφήματος G. Για $1 \le i \le k-1$ στη θέση κάθε κόκκινης ακμής (u,v) του G, αντιστοιχίζεται μία κόκκινη ακμή (u^i, v^{i+1}) . Όταν $i=k$ η κόκκινη (u,v) αντικαθίσταται από την (u^k, v') .

Για να δημιουργηθεί το γράφημα απαιτούνται O(km) πράξεις. Για τον υπολογισμό των συντομότερων διαδρομών απαιτούνται $O(km+knlog(kn))$. Αφού $k<n$ η πολυπλοκότητα που λαμβάνουμε με το πέρας της εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι $O(mn+2n^2\log(n))=O(n^3)$ (πολυωνυμικός χρόνος).

Άσκηση 5 – Διαφημίσεις στο Διαδίκτυο

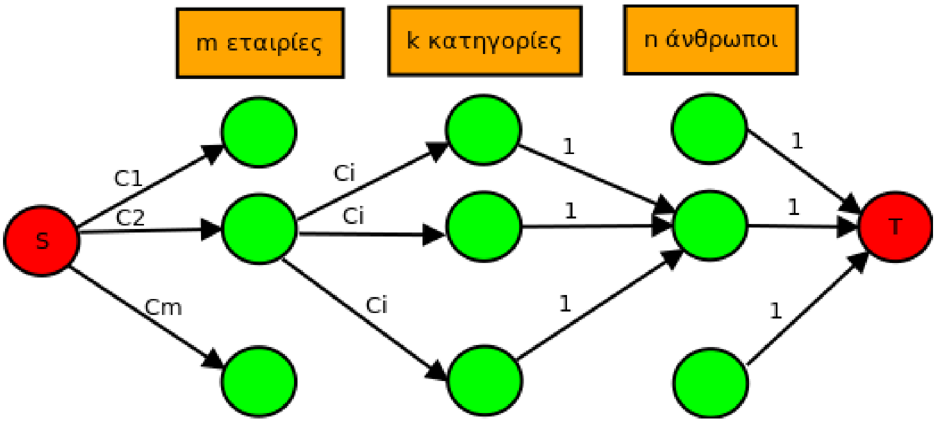
Τα δεδομένα του προβλήματος είναι: n άνθρωποι , k κατηγορίες, m εταιρίες και κάθε άνθρωπος ανήκει σε μία ή περισσότερες κατηγορίες. Οι περιορισμοί είναι:

- Το πολύ c_i διαφημίσεις την ημέρα για κάθε εταιρία i.
- Οι διαφημίσεις μίας εταιρίας i πρέπει να προβάλλονται σε ανθρώπους συγκεκριμένου υποσυνόλου κατηγοριών $S_i \subseteq [1,2,\ldots,k]$.

- Κάθε άνθρωπος βλέπει το πολύ μία διαφήμιση.

Θεωρείται μία κορυφή για κάθε άνθρωπο, κατηγορία και εταιρία. Συνεπώς, υπάρχουν συνολικά n+k+m κορυφές. Προστίθεται μία ακόμα κορυφή s ως source και μία κορυφή t για sink. Συνδέεται η κορυφή s με κάθε κορυφή εταιρίας i με ακμή χωρητικότητας c_i . Συνδέεται επίσης με ακμή κάθε κορυφή εταιρίας i με κάθε κορυφή κατηγορίας που ανήκει στο S_i , με χωρητικότητα c_i και στην περίπτωση αυτή. Συνδέεται με ακμή κάθε κορυφή ανθρώπου με κάθε κατηγορία στην οποία ανήκει ο άνθρωπος με ακμές χωρητικότητας 1. Τέλος, συνδέεται κάθε κορυφή ανθρώπου με την κορυφή t, με ακμές χωρητικότητας 1.

Ακολουθεί η οπτικοποίηση του γραφήματος που ορίσθηκε:



Απαιτείται υπολογισμός s-t Max Flow στο γράφημα. Εάν η μέγιστη ροή είναι ίση με τον αριθμό των ανθρώπων (n) τότε ο αλγόριθμος επιστρέφει αληθές αποτέλεσμα. Σε διαφορετική περίπτωση επιστρέφει ψευδές. Σε περίπτωση επιστροφής αληθούς αποτελέσματος, ο αλγόριθμος επιστρέφει για κάθε εταιρία τους ανθρώπους που παρακολουθούν τις διαφημίσεις της.
Μένει να δειχθεί η ορθότητα του αλγορίθμου:

- Αντιστοιχία ακέραιων χωρητικοτήτων με ακέραιες ροές
- Μέγιστη ροή ίση με n (προκύπτει από την κατασκευή του γραφήματος)
- Αν η ροή προκύψει ίση με n, προκύπτει πως κάθε άνθρωπος είδε μία διαφήμιση ακριβώς.
- Εάν ισχύει η προηγούμενη πρόταση, ο υπολογισμός των ανθρώπων που βλέπουν τις διαφημίσεις κάθε εταιρίας είναι εφικτός ως εξής: Αρχίζοντας από μία εταιρία, ελέγχουμε προς ποιες κατηγορίες παρατηρείται μη μηδενική ροή. Σε κάθε μία εξ' αυτών, ελέγχουμε προς ποιους ανθρώπους υπάρχει ροή με την προϋπόθεση οι άνθρωποι αυτοί να μην έχουν ήδη αντιστοιχηθεί σε κάποια εταιρία σε προηγούμενες επαναλήψεις του αλγορίθμου. Στη συνεχεια, επιλέγουμε από τους ανθρώπους αυτούς έναν αριθμό ίσο με τη ροή της εταιρίας προς την αντίστοιχη κατηγορία και τους δεσμεύουμε με την τρέχουσα εταιρία. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για όλες τις εταιρίες.

Σχετικά με την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου:

- Η πολυπλοκότητα εξαρτάται από την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου μέγιστης ροής που θα χρησιμοποιηθεί, αφού είναι το τμήμα του αλγορίθμου που επηρεάζει περισσότερο το κόστος σε κάθε επανάληψη.
- Η πολυπλοκότητα κατασκευής του γράφου και των ανθρώπων που είδαν κάποια διαφήμιση είναι σε κάθε περίπτωση μικρότερη από τον υπολογισμό ροής, άρα δεν επηρεάζουν ουσιαστικά την συνολική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου.
- Συνεπώς η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου ταυτίζεται με την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου μέγιστης ροής που θα χρησιμοποιηθεί.

Άσκηση 6 – Αναγωγές και NP – Πληρότητα

3 – Διαμέριση

Είσοδος: $A=[w_1,w_2,\ldots,w_n]$ με n θετικούς. Θεωρείται ότι το συνολικό βάρος όλου του A ίσο με $w(A)$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 3. Υπάρχει διαμέριση του A σε σύνολα A_1,A_2,A_3 τέτοια ώστε $w(A_1)=w(A_2)=w(A_3)$.

Αναγωγή από Διαμέριση: Γενικό στιγμιότυπο της διαμέρισης: A = [w_1 , w_2 , …, w_n] . Να βρεθεί διαμέριση A_1,A_2 του A ώστε $w(A_1)=w(A_2)$. Μετασχηματίζεται σε ειδικό στιγμιότυπο της 3 – διαμέρισης: $A'=[w_1,\ldots,w_n,W=\frac{(w_1+\ldots+w_n)}{2}]$. Το W θα εισαχθεί σε ένα σύνολο και επομένως τα άλλα δύο σύνολα αποτελούν τη διαμέριση του αρχικού προβλήματος της διαμέρισης. Συνεπώς, ανήκει στην κλάση NP. Άρα είναι NP – πλήρες.

Άθροισμα Υποσυνόλου κατά Προσέγγιση

Είσοδος: Σύνολο $A=[w_{1,}w_2,\ldots,w_n]$ με n φυσικούς και φυσικοί B και χμε $B>x\geq 1$. Το ερώτημα που τιθεται είναι εάν υπάρχει $S\subseteq A$ τέτοιο ώστε $B-x\leq w(S)\leq B$.

Για να επιλυθεί το πρόβλημα αυτό θα επιλυθεί πρώτα το πρόβλημα Subset – Sum στο οποίο θα γίνει αναγωγή.

Το πρόβλημα Subset – Sum ορίζεται ως εξής:

Είσοδος: Σύνολο φυσικών $A=[w_{1,}\ldots,w_n]$ και W , $0<W<w(A)$.
Πρόβλημα: Υπάρχει $A'\subseteq A$ με $w(A')=W$;

Απόδειξη: Τίθεται $C=A$, D = {1} και $B=W-1$.Εάν υπάρχει A' τέτοιο ώστε w(A') = W , τότε $S_1=A'$ και $S_2=D$. Συνεπώς $c(S_1)-d(S_2)=W-1$. Αν $|c(S_1)-d(S_2)|=W-1$, τότε $c(S_1)=W=w(A')$.

Το πρόβλημα ανήκει στην κλάση NP, καθώς αν δοθεί το σύνολο, μπορούμε να επαληθεύσουμε την ορθότητα της λύσης σε γραμμικό χρόνο. Επίσης είναι NP-hard, καθώς υπάρχει πολυωνυμική αναγωγή από το Subset-Sum.

- Έστω $A_1=[w_1, w_2, \ldots, w_n]$ το σύνολο του γενικού στιγμιοτύπου του Subset Sum και W η παράμετρός του.
- Τίθεται A = { $2w_1$, … , $2w_n$ }, $B=2W$, $x=1$.
- Η εύρεση συνόλου $w(A_1)=W$ είναι ισοδύναμη με την εύρεση συνόλου $w(A')=2W$ στο ειδικό στιγμιότυπο του Subset Sum. Δεν υπάρχει βέβαια το ενδεχόμενο να βρεθεί $w(A')=2W-1$ καθώς το άθροισμα στην περίπτωση που εξετάζεται είναι άρτιο.

Κύκλος Hamliton κατά προσέγγιση

Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V,E)$.
Ερώτηση: Υπάρχει κυκλική διαδρομή στο G που διέρχεται από κάθε κορυφή τουλάχιστον μία και το πολύ δύο φορές;

Είναι NP – hard. Υπάρχει πολυωνυμική αναγωγή από το Hamilton Path το οποίο θεωρείται ως δεδομένο ότι είναι NP – complete. Αν διακριθούν τα δύο τμήματα του αλγορίθμου δηλαδή η εύρεση του Hamilton Path που είναι NP – complete και ο έλεγχος πόσες φορές προσεγγίζεται κάθε κορυφή σε κάθε μονοπάτι, προκύπτει ότι: Ο έλεγχος του δεύτερου τμήματος είναι στη χειρότερη περίπτωση γραμμικός ως προς το πλήθος των ακμών του G, άρα το συνολικό πρόβλημα ανήκει στην ίδια κλάση με το πρώτο υποτμήμα, είναι δηλαδή NP – complete.

Ικανοποιησιμότητα με περιορισμούς

Δεδομένης λογικής πρότασης φ σε 4-CNF μορφή, ζητείται η ύπαρξη ή μη ανάθεσης τιμών αληθείας στις λογικές μεταβλητές ώστε κάθε όρος να περιλαμβάνει ένα τουλάχιστον αληθές και ένα ψευδές literal.

Το πρόβλημα αυτό αποτελεί γενίκευση του προβλήματος 3 – ικανοποιησιμότητας (3 – satisfiability) που διατυπώθηκε από τον Karp και ουσιαστικά δηλώνει την n – ικανοποιησιμότητα , δηλαδή την αναγωγή κάθε όρου σε 3 literrals ώστε να αποφανθούμε για το ζητούμενο. Συγκεκριμένα για κάθε φυσικό k μεγαλύτερο ή ίσο του 3, το πρόβλημα της k ικανοποιησιμότητας, ανάγεται στην εύρεση κλίκας που είναι επίσης NP – complete.

Επιλογή ανεξάρτητων υποσυνόλων

Είσοδος: Συλλογή $S=[S_1, \ldots, S_m]$ υποσυνόλων ενός συνόλου U με n στοιχεία και φυσικός αριθμός k.
Ερώτηση: Υπάρχουν k υποσύνολα στη συλλογή S που είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους;

Αρχικά ελέγχονται τα υποσύνολα που πρέπει να ικανοποιούν το ζητούμενο σε πολυωνυμικό χρόνο.
Το πρόβλημα είναι NP – complete αφού υπάρχει (πολυωνυμική) αναγωγή από το Max Independent Set πρόβλημα, το οποίο θεωρείται δεδομένο ότι ανήκει στην κλάση NP.
Συγκεκριμένα, για κάθε κόμβο του γραφήματος G, δημιουργείται ένα σύνολο στο S με όλες τις προσπίπτουσες ακμές του κόμβου στο γράφημα. Η σταθερά k του Set Packing είναι ίση με την αντίστοιχη του Max Independent Set προβλήματος. Το U είναι το σύνολο των ακμών E του G.

Έστω ανεξάρτητο σύνολο κορυφών πλήθους k (τουλάχιστον). Εξ' ορισμού δεν υπάρχει ζεύγος κορυφών του συνόλου αυτού που να έχει κοινή ακμή. Άρα, κανένα ζεύγος των αντίστοιχων υποσυνόλων του Set Packing δεν θα έχει κοινά στοιχεία και θα είναι ξένα μεταξύ τους με πλήθους τουλάχιστον k.

Όμοια, αν διατίθενται k ξένα υποσύνολα του U και κάθε ένα εξ' αυτών αντιστοιχησθεί σε κορυφή του αρχικού γραφήματος, στο g θα υπάρχουν ίδιου πλήθους σύνολα κορυφών χωρίς κοινές ακμές.

Συντομότερο μονοπάτι με περιορισμούς

Είσοδος: κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E, w, c)$, όπου κάθε ακμή e έχει ακέραιο μήκος $w(e) \geq 0$ και ακέραιο κόστος $c(e) \geq 0$, δύο κορυφές s, t και δύο ακέραιοι $W, C \geq 0$
Ερώτηση: Υπάρχει $s-t$ μονοπάτι στο G με συνολικό μήκος μικρότερο ή ίσο του W και συνολικό κόστος μικρότερο ή ίσο του C;

Είναι δυνατή η διάσχυση του δοθέντος s-t μονοπατιού σε γραμμικό χρόνο και η επιβεβαίωση του ζητούμενου. Άρα το πρόβλημα ανήκει στην κλάση NP. Επίσης είναι NP – hard αφού υπάρχει πολυωνυμική αναγωγή από το πρόβλημα Knapsack, το οποίο θεωρώ ως δεδομένο.

Το γενικό στιγμιότυπο περιέχει n στοιχεία, όπου το i στοιχείο έχει βάρος w_i και κέρδος p_i . Πρέπει να ελεγχθεί η ύπαρξη υποσυνόλου συνολικού βάρους μικρότερου ή ίσου του B και συνολικού κέρδους μεγαλύτερου ή ίσου του P. Πρέπει να γίνει αντιστοίχιση σε ένα ειδικό υποσύνολο του στιγμιοτύπου μας.

Δημιουργείται κατευθυνόμενο γράφημα κορυφών $t_{0,} t_1, \ldots, t_n$ όπου θεωρείται t_0 η αρχική κορυφή και οι υπόλοιπες αντιστοιχούν στα στοιχεία του Knapsack. Συνεπώς, θα υπάρχουν δύο κατευθυνόμενες ακμές από κάθε t_{i-1} στο t_i . Η μία ακμή αντιστοιχεί στην επιλογή του στοιχείου i για το σακίδιο με $w(e) = w_i$ και $c(e) = P_{sum} - p_i$. Η δεύτερη ακμή αντιστοιχεί στη μη επιλογή του στοιχείου i για το Knapsack και έχει $w(e) = 0$ και $C = n P_{sum} - P$. Άρα υπάρχει πλήρης αντιστοιχία μεταξύ της εύρεσης Knapsack με την αντίστοιχη εύρεση μονοπατιού από το t_0 στο t_n , δεδομένων των συνθηκών που πρέπει να ικανοποιούνται και στα δύο προβλήματα.